Ministerio de Educación

PRECISIONES CURRICULARES
PARA EL BACHILLERATO GENERAL UNIFICADO

ÁREA DE MATEMATICA

SEGUNDO CURSO

Precisiones para la enseñanza y el aprendizaje

1 Precisiones generales

El eje curricular integrador del área propone la elaboración de modelos como el mecanismo para resolver problemas. En un desarrollo gradual, que durará los tres años del bachillerato, los estudiantes deberán comprender que la solución de aquellos que se estudian con la matemática pasan por un proceso que se inicia con una representación de los elementos del *problema original* mediante conceptos y lenguaje matemático, que continúa con la formulación de un *problema matemático*, de cuyos análisis y resolución, tras la interpretación respectiva, esperamos encontrar una solución al *problema original*.

Una manera de lograr esta comprensión gradual consiste en que, desde el inicio del bachillerato, los estudiante se enfrenten con la tarea de elaborar modelos y, a través de ellos, resuelvan problemas, por más simples que estos sean. Esta labor puede ser desarrollada por el docente en algunas fases.

1. **El problema.** En cada bloque, para introducir los temas principales, el docente propondrá a la clase uno o varios problemas o situaciones cuya representación matemática utilizará los conceptos matemáticos principales que se quieran estudiar en dicho tema.
2. **Experimentación.** El docente propondrá diversas actividades a los estudiantes para que se familiaricen con el problema o la situación. Estas actividades podrán consistir, entre otras, en experimentar con los elementos del problema, lo que les permitirá tomar datos, que serán presentados mediante tablas o gráficos. A partir de estas representaciones, los estudiantes podrán conjeturar soluciones o descubrir algunas "no soluciones". El docente, en cambio, contará con el material y el vocabulario suficientes para introducir los conceptos objetos de estudio, y que serán indispensables para resolver el problema o explicar la situación.
3. **Modelar.** De los datos pasamos a una representación de los elementos del problema y de las relaciones existentes entre ellos mediante conceptos matemáticos; en otras palabras, *elaboramos un modelo* del problema, con lo cual obtenemos, a su vez, un *problema matemático*. En la medida en que se utilizarán funciones para este proceso, se hará necesaria la identificación de *variables* y las *relaciones de dependencia* entre ellas; esto dará lugar a etiquetar a algunas variables como *independientes* y otras como *dependientes*, y a identificar algunas relaciones como *funciones*. Acompañando a este proceso, estará siempre el uso explícito por parte del estudiante de los símbolos (letras) que utilice para representar las variables y las funciones. El docente deberá insistir en el uso consistente de esos símbolos, y del uso correcto del lenguaje para la descripción de dichas representaciones.
4. **Interpretación y Generalización.** Una vez obtenido el modelo, se resuelve el *problema matemático*, se interpreta la solución matemática para dar solución al *problema original*. A continuación, debemos enfatizar en que la solución matemática encontrada permite obtener métodos generales que pueden resolver una variedad de problemas "del mismo tipo", o pueden guiarnos a dar solución a problemas nuevos más complejos, pero, para ello, es necesario estudiar, con mayor profundidad, los conceptos que surgieron como abstracciones de los elementos que intervinieron en la elaboración del modelo.

   En esta fase, también se pueden estudiar varios de los conceptos únicamente con motivaciones matemáticas como las de demostrar un teorema mediante dos métodos diferentes; Por ejemplo, la fórmula para calcular la suma de los primeros n números de una progresión aritmética suele ser demostrada mediante inducción matemática; sin embargo, mediante argumentos geométricos —que incluyen la fórmula del área de un rectángulo, condiciones suficientes para la congruencia de triángulos, entre otros— también se obtiene una demostración de la mencionada fórmula.

En cada una de estas fases, el docente debe insistir en el uso correcto del lenguaje por parte de los estudiantes, tanto escrito como oral, en la formulación e identificación de los diversos elementos que aparecen en el proceso de la elaboración del modelo.

A continuación, vemos los ejes de aprendizaje que aparecen en cada una de las fases.

1. En la del problema, el estudiante debe **leer** un texto que, en la mayoría de las ocasiones, se refieren a temas no matemáticos. También debe **expresarse oralmente** para hablar sobre el problema, para averiguar sobre él, etcétera. Sin las destrezas necesarias de la **lengua en forma escrita y oral**, no comprenderá lo que el problema le plantea.

   Dado que los problemas que se utilicen deben ser, preferentemente, no matemáticos, en esta fase se **integran diferentes conocimientos adquiridos**; por ejemplo, con la economía y las finanzas, la biología, la física y la química, etcétera.
2. En la fase de experimentación, se tiene una oportunidad valiosa para hacer uso de las **tecnologías de la información**, mediante la toma de datos, la elaboración de tablas, de gráficos, etcétera. También se **integran conocimientos adquiridos**, pues en esta fase casi siempre se recurre a conocimientos matemáticos que los estudiantes ya conocen; por ejemplo, elaborar gráficas, realizar ciertos cálculos, tanto "a mano" como a través de "tecnologías".

   Otro elemento presente en esta fase es la **conjetura**, cuando se procesan e interpretan los datos obtenidos, y se proponen soluciones, o caminos a seguir para resolver el problema.

   Finalmente, el uso correcto de la **lengua** se evidencia a través de la presentación de los datos recogidos, de las síntesis que de ellos se hagan.
3. En la fase de modelar, la **abstracción** es una de las principales herramientas con la que los estudiantes deben contar, pues es la que les permite identificar las variables y las relaciones entre las variables. El **uso correcto de la lengua** les permite elegir, adecuadamente, los símbolos, que representan los elementos del problema, para su manipulación posterior.
4. En la fase de los conceptos, una vez más la **abstracción**, la **generalización**, el **uso correcto de la lengua**, las **tecnologías** estarán presentes.

   La manera de saber que algo es una solución es "probar", **justificar**, que lo hallado es una solución; parte del desarrollo de los conceptos está encaminado, precisamente, a ese fin.

En el perfil de salida del BGU, se propone que el egresado resuelva problemas que la vida cotidiana le plantea. Es de esperar que los problemas que se proponen en el bachillerato, tanto para introducir los conceptos, objetos de estudio, como los que tienen que resolver como parte de su formación, sean de la vida cotidiana. Sin embargo, muchos de los problemas de la vida real no pueden ser resueltos con los conocimientos matemáticos adquiridos en el bachillerato y, en varias ocasiones, ni siquiera con los que se adquirirán en la universidad, a nivel de la licenciatura (ingeniería); serán necesarios estudios especializados de maestría y/o doctorado.

A pesar de esta situación, siempre es posible adaptar los problemas reales y conformar al menos dos tipos de problemas que podrán ser utilizados en el aula:

1. **Problemas reales**, en los que se requiere de matemática para resolverlos; pueden simplificarse para que los conocimientos necesarios sean los que los estudiantes poseen o pueden poseer en el nivel en el que se encuentran. En estos problemas, los conceptos matemáticos adquieren sentido.
2. **Problemas ilustrativos**, cuyo único objetivo es ejemplificar conceptos, términos y teoremas.

Hay una gran variedad de problemas reales que pueden ser simplificados, sin que por ello se pierda la posibilidad de utilizarlos como buenos prototipos de lo que con la matemática puede hacerse en la vida cotidiana. En las últimas décadas, un buen número de esos problemas han sido modelados con herramientas matemáticas relativamente sencillas de comprender; algunos ejemplos se encuentran propuestos en el bloque de "Matemáticas discretas".

2 Segundo de bachillerato

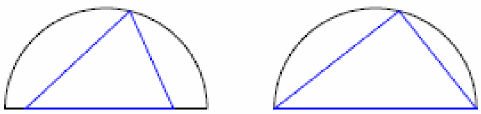
En este año, continúa el estudio de varios tipos de funciones. En particular, se introducen las funciones trigonométricas. Las funciones trigonométricas son fundamentales tanto para modelar fenómenos periódicos como para asistirnos en la llamada resolución de triángulos rectángulos. Históricamente, las funciones trigonométricas fueron inventadas con este propósito. Por ello, la trigonometría es un contenido que nos permite cumplir con el propósito central del aprendizaje del área: la resolución de problemas.

El problema siguiente es un ejemplo de lo que se conoce como "situación problema"; es decir, un problema más o menos complejo que permite descubrir o reforzar al estudiante una o varias nociones (en este caso, la de *función* y sus elementos), vizualizar que existen varias formas de enfrentar un problema y descubrir sus limitaciones y la necesidad de adquirir nuevos conocimientos.

Problema 1 (Optimización). *Hallar el área del triángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de radio* 5 cm.

Paso 1. El profesor pedirá a los estudiantes que dibujen un semicírculo de radio 5 cm y varios triángulos inscritos en él.

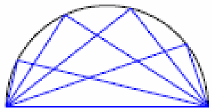
Después de varios intentos, deberá quedar claro para todos los alumnos el significado de un triángulo *inscrito* en un semicírculo:



INCORRECTO CORRECTO

Paso 2. El profesor pedirá a los estudiantes que identifiquen el tipo de triángulo (rectángulo), y que justifiquen su afirmación. A continuación, pedirá que encuentren una fórmula para calcular el área de un triángulo rectángulo a partir de las dimensiones de sus lados (semiproducto de las dimensiones de los catetos).

Paso 3. El profesor pedirá a los estudiantes que dibujen varios triángulos inscritos en el semicírculo y que con la ayuda de una regla graduada calculen el área de esos triángulos.



Ese trabajo, con la ayuda de una calculadora, conducirá a una tabla como la siguiente, donde las longitudes están dadas en cm y las áreas en cm^2.

cateto 1	cateto 2	área
5,7	8,3	23,655
6,5	7,7	25,085
7,9	6,2	24,49
7,1	7,1	25,205
…	…	…
…	…	…

El profesor hará notar que medidas como 7,1 y 7,1deben estar mal tomadas, pues no satisfacen la relación de Pitágoras para un triángulo rectángulo:

$$7{,}1^2 + 7{,}1^2 = 100{,}81.$$

Puede sugerir nuevas medidas como las siguientes:

cateto 1	cateto 2	área
5.7	8.3	23.655
6.5	7.7	25.085
7.9	6.2	24.49
7.1	7.1	25.205
…	…	…
6,8	7,3	24,82
6,9	7,19	24,80
7,07	7,07	24,99

Estos resultados, y otros adicionales, llevarán a los estudiantes a sospechar que el área máxima es 25 cm^2; sin embargo, por muchas mediciones que realicen y por muchos decimales que pongan al azar, no podrán encontrar dimensiones tales que el área sea igual a 25.

Paso 4. Es necesario entonces buscar otro método. El profesor sugiere que se busque una fórmula que permita calcular el área del triángulo de área máxima. Al respecto, puede sugerir que se nombren con letras —por ejemplo, con x e y— las longitudes de los catetos. Esto, junto con la relación de Pitágoras, conducirá a los estudiantes a la fórmula del área:

$$A = \frac{xy}{2} = \frac{x\sqrt{100-x^2}}{2}.$$

Interesante: hemos encontrado una fórmula para calcular el área de cualquier triángulo inscrito en un semicírculo; en otras palabras, hemos diseñado un modelo matemático.

Puesto que A depende de x, podemos escribir

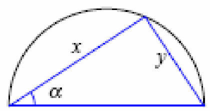
$$A(x) = \frac{x\sqrt{100-x^2}}{2}.$$

Hemos definido una función que nos permite calcular el área del triángulo para cada valor de x. ¿Cuál es el dominio de está función? ¿Cuál es su recorrido?

Para calcular el recorrido, requerimos conocer los valores entre los cuales varía $A(x)$, y volvemos a nuestro problema inicial: ¿cuál es valor máximo de $A(x)$?

Los estudiantes manifiestan que no están en condiciones de determinar el máximo de esta función, ante lo cual el profesor explicará que existen métodos que requieren del cálculo diferencial para determinar el máximo de funciones como ésta, y que se tratará en cursos superiores, pero que, sin embargo, el problema no puede quedar sin solución.

Paso 5. El profesor sugiere recurrir a la trigonometría para resolver el problema, para lo cual propone calcular el área del triángulo inscrito en función de uno de los ángulos agudos del triángulo al que llamaremos, por ejemplo, α.



Los alumnos encuentran rápidamente

$$A = \frac{xy}{2} = 50 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha.$$

El profesor sugiere que utilicen la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha,$$

lo que conduce a:

$$A = 25 \operatorname{sen} 2\alpha.$$

La pregunta es ahora evidente: ¿Para qué valor de α, $\operatorname{sen} 2\alpha$ alcanza su máximo valor?

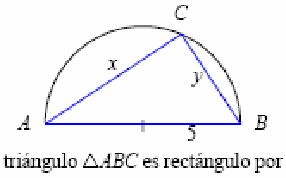
Los estudiantes deberían contestar sin dificultad que, puesto que el mayor valor del seno es 1, el valor máximo de $\operatorname{sen} 2\alpha$ se obtiene cuando $\alpha = 45°$. El área máxima es entonces 25 cm^2 y el triángulo de área máxima tiene como dimensiones de sus catetos

$$x = 10 \operatorname{sen} 45° = 5\sqrt{2} \quad \text{y} \quad y = 10 \cos 45° = 5\sqrt{2}.$$

Es necesario hacer notar que, puesto que las dimensiones obtenidas son números irracionales, es imposible encontrarlas mediante mediciones con una regla.

Paso 6. Se puede también sugerir que resuelvan el problema considerando el cuadrado del área: $A^2(x) = \dfrac{x^2\left(100 - x^2\right)}{4}$ y observando que el área alcanza su valor máximo en un punto si y solo si su cuadrado alcanza el máximo en el mismo punto.

Paso 7. El profesor pedirá a los alumnos que generalicen el problema para un semicírculo de radio cualquiera R, y que redacten las soluciones utilizando un lenguaje matemático correcto, como se muestra a continuación.



En el gráfico, el triángulo $\triangle ABC$ es rectángulo por ser un triángulo inscrito en un semicírculo. Sean $x = AC$ y $y = BC$. En este triángulo, podemos tomar el segmento $\overline{AC}$ como la base, y el segmento $\overline{BC}$ como la altura. Su área A es, entonces, igual a:

$$A = \frac{xy}{2}.$$

Por el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo $\triangle ABC$, se tiene que

$$x^2 + y^2 = 10^2,$$

de donde $y = \sqrt{100 - x^2}$. Reemplazando en $A = \dfrac{xy}{2}$, se concluye que

$$A = \frac{1}{2}x\sqrt{100 - x^2},$$

que nos proporciona una fórmula para calcular el área del triángulo $\triangle ABC$ en función de la longitud x de uno de los catetos. Podemos, entonces, escribir

$$A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{100 - x^2},$$

y considerar a A como una función. Los valores que puede tomar x de acuerdo con la naturaleza del problema, son los números reales comprendidos entre 0 y 10. El dominio de la función es, entonces, el intervalo $[0, 10]$.

El recorrido de la función son todos los valores entre el área mínima (0) y el área máxima. Desgraciadamente, los conocimientos que disponemos no nos permiten hallar fácilmente el valor máximo de la expresión $\dfrac{1}{2}x\sqrt{100 - x^2}$.

2.1 Bloque de números y funciones

En el tratamiento de polinomios, se recomienda partir de ejemplos sencillos basados en la definición de operaciones entre funciones lineales y cuadráticas, lo que, en definitiva, significa aplicar las propiedades algebraicas de los números reales. Hay que evitar productos de polinomios de grado alto y los conocidos métodos para multiplicar polinomios mediante una serie de reglas que no aportan nada a su conocimiento y utilización. Por ejemplo, $f(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$ es una función cubica; podemos obtener un polinomio cúbico tras multiplicar los factores, pero expresada como el producto de estos, la función cúbica tiene varias ventajas; entre otras, se puede determinar inmediatamente los cortes con el eje x: 1, -2 y 3. También podemos saber los signos de la función en cada intervalo definido por los cortes, simplemente analizando cada término lineal.

Es importante tratar el algoritmo de Euclides (o de la división): dados dos polinomios $p(x)$ y $h(x)$, existen polinomios $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$p(x) = q(x)h(x) + r(x),$$

donde $r(x)$ o es el polinomio nulo o su grado es menor que el grado del polinomio $h(x)$.

Es importante no confundir —aunque está basado en él— con el procedimiento para dividir dos polinomios, actualmente en desuso.

Con base en el algoritmo de Euclides, se debe tratar el teorema del residuo, la divisibilidad por $x - a$ y la descomposición de un polinomio en factores utilizando sus raíces.

En el tratamiento de funciones racionales, es importante hacer énfasis en el conjunto en el cual están definidas. Y al igual que en el caso de los polinomios, hay que hacer notar que sus operaciones no son más que operaciones entre funciones reales y que, en consecuencia, siguen las reglas de las operaciones entre números reales. Se debe recalcar que la factorización no es más que un mecanismo para su simplificación.

Para presentar funciones trigonométricas se recomienda seguir los siguientes pasos:

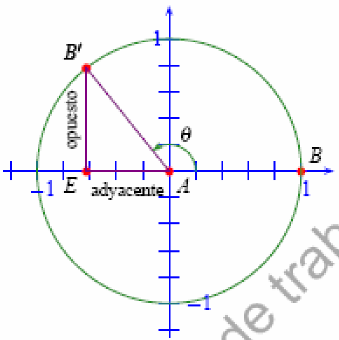
1. Trabajar con un problema que requiera resolver un triángulo rectángulo. Hacer evidente el que dos triángulos rectángulos semejantes tienen lados proporcionales (teorema de Tales). Por ejemplo, el triángulo rectángulo con catetos de longitud 1 y $\sqrt{3}/2$, respectivamente, e hipotenusa de longitud 2, con el triángulo con catetos 2 y $\sqrt{3}$,respectivamente, e hipotenusa de

longitud 4. La proporción entre el cateto opuesto y la hipotenusa es $1/2 = 2/4$ en ambos triángulos. Entonces introducimos $\operatorname{sen}\theta = 1/2$. Generalizando:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}.$$

A continuación hay que hacer notar que, conocido el valor del seno de un ángulo en un triángulo y, el cateto o la hipotenusa, se puede conocer el término faltante. De allí su utilidad. De manera similar se procede con el coseno.

2. Extender la definición propuesta para ángulos entre 0 y 180 grados.
3. Se define el radián en el círculo unidad: recordando que π radianes son iguales a 180 grados. Es necesario que los estudiantes sean eficientes en expresar los ángulos notables: 30°, 45°, 60° como $\pi/6$ rad, $\pi/4$ rad, $\pi/3$ rad, respectivamente.
4. Se definen las funciones trigonométricas en el círculo unitario en un sistema de ejes cartesianos, haciendo notar que, para cada punto sobre el círculo, las coordenadas son $x = \sin\theta$ y $y = \cos\theta$, por lo que las funciones sen y cos tienen signos o positivos o negativos según el cuadrante donde se localiza el lado terminal del ángulo. El docente puede conseguir todas las identidades trigonométricas importantes utilizando el círculo unitario. Particularmente, la periodicidad es importante para el siguiente paso. En esta etapa es recomendable que los estudiantes adquieran un grado de mecanización en cuanto a los valores de las tres funciones trigonométricas para los ángulos notables entre 0 y 2π:



5. El último paso consiste en pensar las funciones trigonométricas como funciones de variable real. Para ello, se puede imaginar que el círculo es desenrollado sobre la recta como una cuerda. Esta ilustración es importante para reconocer que, en el círculo unitario, el ángulo y la longitud del arco coinciden en valor. En esta etapa, extendemos las funciones seno y coseno con dominio real utilizando el aspecto de periodicidad del seno y del coseno. El profesor debe proporcionar sentido a los valores positivos y negativos de la variable como ángulos que se obtienen al recorrer el círculo en sentido anti horario y horario, respectivamente. Es importante "transferir" el conocimiento adquirido en triángulos rectángulos y el círculo unitario a esta nueva definición. Por ejemplo, la ubicación de los ángulos notables, el crecimiento del ángulo con el crecimiento del seno en el intervalo 0 hasta $\pi/2$, los cortes de la función y la situación respectiva en el círculo unitario, etcétera.
6. Se debe analizar con detenimiento las características de las funciones resultantes de homotecias, traslaciones y reflexiones, tanto del seno como del coseno, para conseguir una generalización apropiada de la función definida por $f(x) = A\sin(Bx+C)$.

Finalmente, hay un sin número de situaciones donde las funciones trigonométricas aparecen de manera inmediata: las coordenadas de las agujas del reloj, la altura de un asiento en una rueda moscovita, el movimiento de una masa sujeta a un resorte, el movimiento de los pedales de una bicicleta, etcétera; el profesor debe hacer uso de estos ejemplos y otros para ilustrar identidades y propiedades de funciones trigonométricas.

2.2 Bloque de álgebra y geometría

Se introduce por primera vez en la educación media las ecuaciones paramétricas. Es importante que el estudiante se dé cuenta de las ventajas de utilizar parámetros tanto en las aplicaciones a la física como en los desarrollos matemáticos. Esto coadyuvará a la comprensión del parámetro t, que por ser una herramienta totalmente nueva, resulta de difícil asimilación y comprensión al inicio. Así, en las ecuaciones paramétricas de una recta:

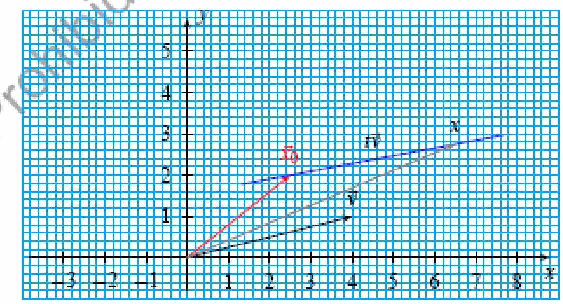
$$\begin{cases} x = at + b \\ y = ct + d, \end{cases}$$

el vector (a,c) determina la dirección de la recta. Por otro lado, en Física, el punto (x,y) representa la posición de una partícula en el instante t. Si el tiempo lo permite, el profesor puede realizar experimentos con objetos que se desplacen en el plano, tomando datos para distintos valores de t y luego graficándolos.

Es importante hacer notar que las ecuaciones paramétricas de una recta y la ecuación vectorial son, en realidad, lo mismo. En efecto, si $\vec{v}$ es el vector director de la recta, $\vec{x_0}$ un punto (o vector) de la recta, cualquier punto $\vec{x}$ de la recta se expresa por

$$\vec{x} = \vec{x_0} + t\vec{v},$$

donde t es un número real.



Si ahora hacemos $\vec{x} = (x,y)$, $\vec{x_0} = (x_0,y_0)$ y $\vec{v} = (a,b)$, reemplazando en la ecuación vectorial se obtiene

$$(x,y) = (x_0,y_0) + t\,(a,b) \iff (x,y) = (x_0 + ta, y_0 + tb),$$

o lo que es lo mismo en terminos de sus componentes:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb, \end{cases}$$

que no son más que las ecuaciones paramétricas de la recta.

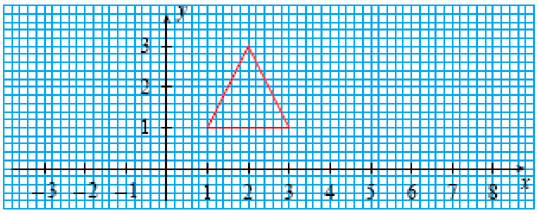
Las matrices, sus determinantes y sus operaciones pueden ser actividades matemáticas sin sentido para el estudiante, y por tanto es necesario proveerles de uno. Buscar tablas con varias columnas y filas en periódicos u otros medios puede ser estimulante para comprender el uso de las matrices en el almacenamiento de la información. En la matemática, brinda un aporte importante al facilitar la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Las transformaciones en el plano son una oportunidad para mostrar la Matemática en conexión con el arte. Se puede hacer que el grupo cree hermosas composiciones utilizando reflexiones, traslaciones y rotaciones. Hay una variedad de páginas web que ejecutan esto de manera automática, por ejemplo, las teselaciones[1].

Finalmente, presentamos un problema que combina varias transformaciones en el plano.

[1] http://www.shodor.org/interactivate/activities/Tessellate/

Problema 2 (Transformaciones). *Dibujar el triángulo que se obtiene al realizar las siguientes transformaciones, en forma sucesiva, sobre el triángulo de la figura:*



1. *Traslación de vector* $\overrightarrow{v} = (1, 2)$.
2. *Homotecia de razón* 2.
3. *Rotación de* 45°.

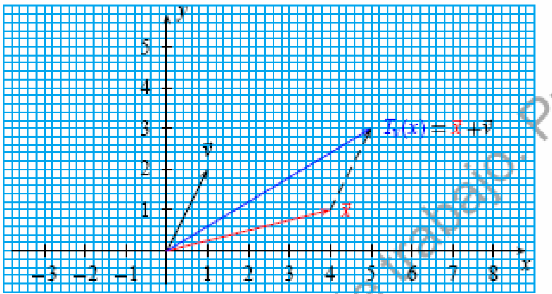
En primer lugar, recordemos las definiciones de las transformaciones que vamos a utilizar.

Definición 1 (Traslación). *La traslación T_v de vector $\vec{v}$ suma a cualquier vector $\vec{x}$ el vector $\vec{v}$:*

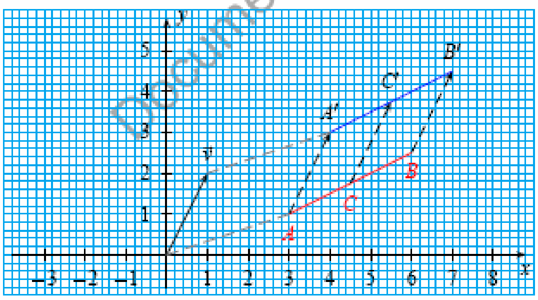
$$T_v(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{v}.$$

En otros términos, si $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y $\vec{x} = (x_1, x_2)$, entonces

$$T_v(x) = T_v(x_1, x_2) = (x_1, x_2) + (v_1, v_2) = (x_1 + v_1, x_2 + v_2).$$



Una traslación transforma un segmento en un segmento paralelo, como se ilustra a continuación: el segmento $\overline{A'B'}$ es el trasladado del segmento $\overline{AB}$ por la traslación de vector $\vec{v}$:

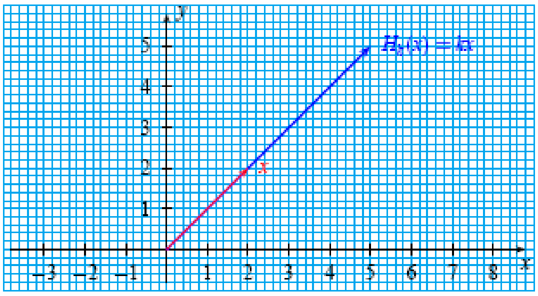


Definición 2 (Homotecia). *Una homotecia P de razón $k \geq 0$ transforma un vector $\vec{x}$ en un vector del mismo sentido y dirección que $\vec{x}$, pero de longitud k veces la longitud de $\vec{x}$:*

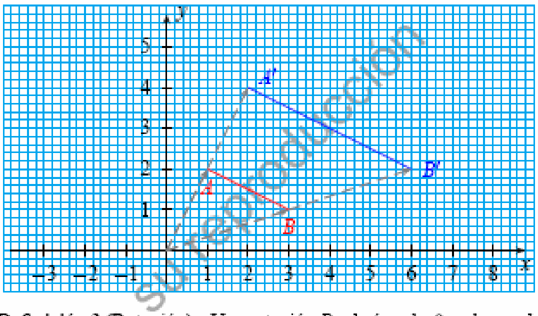
$$H_k(\vec{x}) = k\vec{x}.$$

Si $x = (x_1, x_2)$, entonces

$$H_k(x) = H_k(x_1, x_2) = k(x_1, x_2) = (kx_1, kx_2).$$



Una homotecia transforma un segmento $\overline{AB}$ en un segmento $\overline{A'B'}$, paralelo al segmento $\overline{AB}$, pero de longitud k veces la longitud de $\overline{AB}$:



Definición 3 (Rotación). *Una rotación R_θ de ángulo θ se la puede expresar mediante la matriz:*

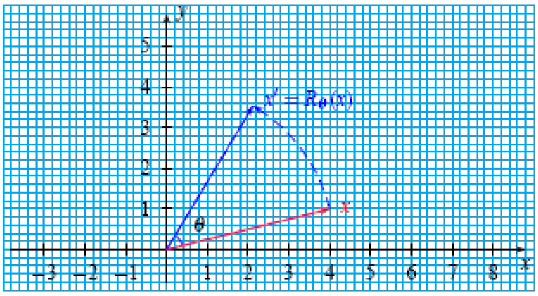
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

De manera más precisa, a rotación del vector $x = (x_1, x_2)$) es el vector —expresado como vector columna:

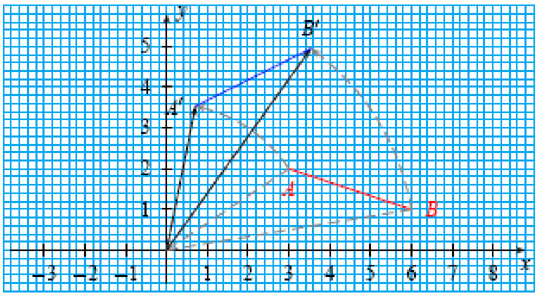
$$R_\theta(x) = R_\theta(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos\theta - x_2\operatorname{sen}\theta \\ x_1\operatorname{sen}\theta + x_2\cos\theta \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$R_\theta(x_1, x_2) = (x_1\cos\theta - x_2\operatorname{sen}\theta, x_1\operatorname{sen}\theta + x_2\cos\theta).$$



Una rotación transforma un segmento en un segmento (no necesariamente paralelo) de igual longitud:

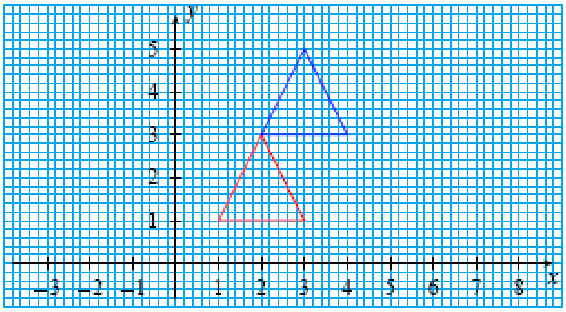


El segmento $\overline{A'B'}$ es la rotación de ángulo θ del segmento $\overline{AB}$.

Volvamos al problema. Como las trasformaciones transforman segmentos en segmentos, es suficiente calcular las imágenes de los vértices del triángulo:

$$T_v(1,1) = (1,1) + (1,2) = (2,3),$$
$$T_v(2,3) = (2,3) + (1,2) = (3,5),$$
$$T_v(3,1) = (3,1) + (1,2) = (4,3).$$

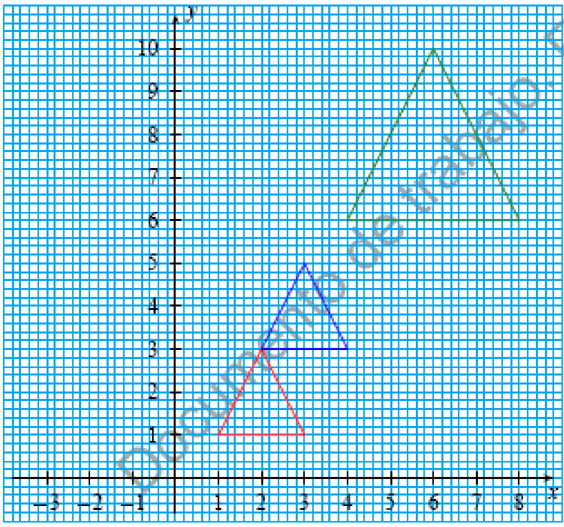
Por lo tanto, el triángulo trasladado tiene por vértices los puntos de coordenadas $(2,3)$, $(3,5)$ y $(4,3)$:



A continuación, aplicamos la homotecia de razón 2 al nuevo triángulo:

$$H_2(2,3) = 2(2,3) = (4,6),$$
$$H_2(3,5) = 2(3,5) = (6,10),$$
$$H_2(4,3) = 2(4,3) = (8,6).$$

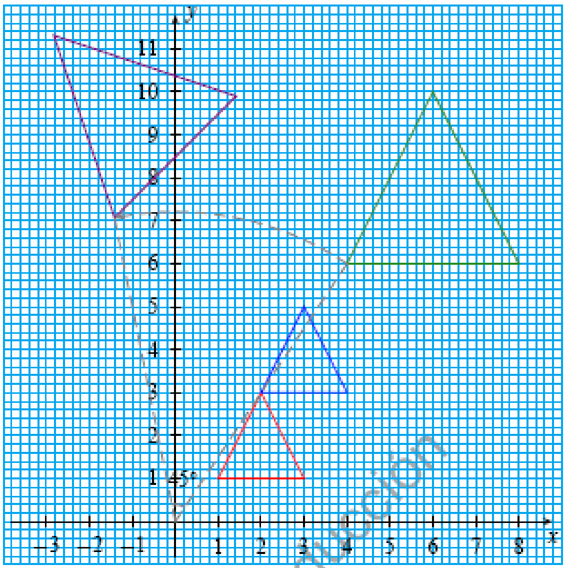
Se obtiene el triángulo de vértices $(4,6)$, $(6,10)$ y $(8,6)$:



Finalmente, aplicamos la rotación al último triángulo $R_{45°}$:

$$\begin{aligned} R(4,6) &= (4\cos 45° - 6\operatorname{sen} 45°, 4\operatorname{sen} 45° + 6\cos 45°) \\ &= (-\sqrt{2}, 5\sqrt{2}); \\ R(6,10) &= (6\cos 45° - 10\operatorname{sen} 45°, 6\operatorname{sen} 45° + 10\cos 45°) \\ &= (-2\sqrt{2}, 8\sqrt{2}); \\ R(8,6) &= (8\cos 45° - 6\operatorname{sen} 45°, 8\operatorname{sen} 45° + 6\cos 45°) \\ &= (\sqrt{2}, 7\sqrt{2}). \end{aligned}$$

El triángulo rotado tiene como vértices $\left(-\sqrt{2}, 5\sqrt{2}\right)$, $\left(-2\sqrt{2}, 8\sqrt{2}\right)$ y $\left(2\sqrt{2}, 7\sqrt{2}\right)$:

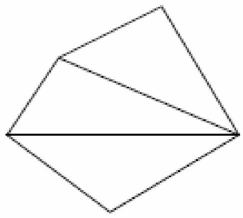


Un trabajo interesante es realizar las transformaciones anteriores gráficamente.

2.3 Bloque de matemáticas discretas

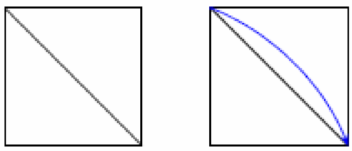
Entre las aplicaciones desarrolladas en las últimas décadas, aquellas que tienen que ver con matemáticas discretas, presentan una oportunidad de aprendizaje que, al menos en los casos sencillos, muestran la potencialidad de la matemática para modelar y resolver problemas. Un ejemplo de esto son los problemas de transporte y manejo del tiempo. El siguiente problema puede utilizarse con este fin.

Problema 3. *El comité de seguridad de la institución busca encontrar el recorrido que optimice el tiempo necesario para evacuar del edificio en el caso de que se presente una emergencia. Si el edificio tiene la forma como se muestra en la figura, ¿cuál deberá ser el recorrido que deba realizarse para dar la información de manera que no se pase dos veces por el mismo pasillo, y así no se pierda tiempo?*



En este diagrama, las aristas representan los pasillos del colegio. Solicite a los estudiantes que discutan entre sí la mejor manera de hacer el recorrido. Alguno de sus estudiantes puede, incluso, reconocer el juego muy popular de poder trazar una gráfica sin levantar la mano ni pasar por una arista dos veces.

Este tipo de diagramas se llama *diagrama de Euler*. Por ejemplo, el siguiente diagrama no es de Euler pero puede ser "eulerizado" aumentando una arista (imaginaria):



No es de Euler "eulerizado"

Se procede a generalizar la idea de grafo. Un instrumento matemático que sirve para representar rutas. La teoría de grafos es de gran utilidad para resolver problemas de manejo de recursos, un área que se dedica a investigar cómo manejar recursos de manera óptima. El objetivo más importante de las aplicaciones que el docente elija para presentar en este bloque consiste en desarrollar la destreza de modelar un problema de manera esquemática con el uso de grafos y el mostrar la existencia de algoritmos heurísticos sencillos que pueden conllevar a soluciones aproximadas relativamente buenas. Entre las aplicaciones interesantes que el docente puede escoger está el problema del viajero (diagramas de Hamilton), el problema de ordenación de tareas, y el problema de transporte de bienes. En la bibliografía de este documento se sugieren fuentes de consulta que brindan ayuda adicional.

2.4 Bloque de probabilidades y estadística

Antes de tratar la probabilidad condicionada, es necesario recordar la noción de probabilidad, el concepto de espacio muestral y de la probabilidad de un evento simple para luego familiarizar al estudiante con el cálculo de la:

- probabilidad de que el evento A o el evento B sucedan;
- probabilidad de que el evento A y el evento B sucedan.

Los diagramas de árbol pueden ser útiles en estas situaciones. Por otra parte, toda actividad relacionada con las probabilidades, y sobre todo con la probabilidad condicionada, debe estar asociada a un experimento real y concreto con el cual esté familiarizado el estudiante.

Clásicamente, se utilizan experimentos con cartas, dados y monedas. Pero hay un sinfín de posibilidades que pueden interesar más a la clase. Por ejemplo, el docente puede presentar a la clase la siguiente inquietud:

> *Algunos piensan que las personas que son zurdas de mano también lo son con los pies.*

Luego pide que levanten la mano los estudiantes que usan "la mano derecha y el pie derecho", "la mano izquierda y el pie derecho", etcétera. Luego pide a la clase organizar esta información en una tabla de doble entrada. Con la tabla, se puede calcular probabilidad conjunta y, además, introducir la idea de probabilidad condicionada; por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de que alguien que, usando la mano derecha, sea también bueno con el pie derecho?

Mediante esta misma pregunta, se puede comprender que la pregunta planteada solo fue respondida para las personas que están en el aula, pero si queremos una respuesta con mayor validez, debemos considerar a toda la población de un país o del planeta. ¿Qué sucede con preguntas tales como "¿cuál es la probabilidad de que un estudiante ecuatoriano ingrese a la universidad?"? Para ello, es necesario considerar a toda la población estudiantil ecuatoriana. En vista de que tomar datos a tantas personas es imposible, se vuelve necesario hacerlo en un grupo más pequeño. El profesor introduce, entonces, la noción de *población* y de *muestra*, e indica situaciones reales en donde una muestra puede ser *sesgada*. Es interesante para el aula conversar de situaciones actuales donde las estadísticas pueden estar sesgadas; por ejemplo, en encuestas de votación a boca de urna en las elecciones de los mandatarios del país, en encuestas de consumo de productos comerciales, etcétera. Desarrollar métodos para escoger una muestra es importante si se quiere información veraz. Entonces, el profesor presenta la noción de *muestra aleatoria* y métodos para generar *números pseudo aleatorios*. Por ejemplo, un método muy sencillo es tomar el segundo dígito de números de teléfonos que aparecen en la guía telefónica. Es recomendable pedir a sus estudiantes que planteen preguntas en las cuales definan cuál es la población, describan cómo tomarían una muestra evitando el sesgo y cómo usarían números pseudo aleatorios para este fin.

A continuación presentamos un ejemplo de un problema; no se ofrecen la soluciones, sino que se sugieren varias preguntas que se pueden plantear al estudiante.

Problema 4. *A fin de medir el rendimiento en matemática de los estudiantes de bachillerato en el Ecuador, se ha seleccionado una muestra de estudiantes de tercer año de bachillerato de los diferentes establecimientos de educación media con más de 500 estudiantes. Para el efecto, se ha seleccionado primero una muestra de establecimientos, y de la muestra seleccionada, se ha escogido la muestra de estudiantes.*

Se conocen los siguientes datos:

1. *Los colegios con más de 500 estudiantes son representativos de la educación media en el Ecuador.*
2. *En el país existen 150 establecimientos en la sierra con más de 500 estudiantes, de los cuales el 8% está en el último año de bachillerato.*
3. *En el país existen 170 establecimientos en la costa con más de 500 estudiantes, de los cuales el 7% está en el último año de bachillerato.*
4. *En el país existen 14 establecimientos en el oriente con más de 500 estudiantes, de los cuales el 5% está en el último año de bachillerato.*

1. Explique como determinar el tamaño de la muestra con un e indique la metodología utilizada para seleccionar la muestra de tal manera que esta no sea sesgada.

   Una vez seleccionada la muestra, que a fin de continuar con el desarrollo de nuestro problema la vamos a suponer de tamaño 80, se procede a realizar la prueba de matemáticas. Se obtienen las calificaciones siguientes sobre 20 puntos:

   - 2 estudiantes obtienen la calificación 0.
   - 5 estudiantes obtienen la calificación 2.
   - 3 estudiantes obtienen la calificación 3.
   - 6 estudiantes obtienen la calificación 5.
   - 2 estudiantes obtienen la calificación 6.
   - 10 estudiantes obtienen la calificación 9.
   - 15 estudiantes obtienen la calificación 10.
   - 12 estudiantes obtienen la calificación 11.
   - 12 estudiantes obtienen la calificación 12.
   - 5 estudiantes obtienen la calificación 14.
   - 2 estudiantes obtienen la calificación 15.
   - 3 estudiantes obtienen la calificación 17.
   - 2 estudiantes obtienen la calificación 18.
   - 1 estudiantes obtienen la calificación 20.
2. Haga un cuadro de frecuencias y de frecuencias acumuladas; dibuje los diagramas correspondientes.
3. Calcule la media, la mediana y la desviación estándar de las notas obtenidas por el grupo de la muestra. ¿Qué porcentaje de estudiantes de la muestra se encuentra entre la media $\pm$ una desviación estándar, $\pm$ dos desviaciones estándar? ¿Entre la media y cuántas desviaciones estándar se encuentra el 70% de los estudiantes de la muestra?
4. Calcule las siguientes probabilidades:
   - Que un estudiante ecuatoriano obtenga una nota superior a 10 en una prueba de matemáticas —similar a la receptada a los estudiantes de la muestra.
   - Que un estudiante obtenga una nota inferior a 15.
   - Que un estudiante obtenga una nota entre 8 y 14.
5. Calcule las siguientes probabilidades condicionadas:

(a) Que un estudiante obtenga una nota superior a 12, sabiendo que está en el grupo de los estudiantes que siempre obtienen notas superiores a 8.

(b) Que un estudiante obtenga una nota inferior a 5, sabiendo que está en el grupo de los estudiantes que siempre obtienen notas entre 2 y 13.