

Avanzamos
Patria!



Ministerio
de Educación



Libro del docente

Didáctica de las **Matemáticas**

PROGRAMA DE FORMACIÓN CONTINUA DEL MAGISTERIO FISCAL

SEGUNDA
EDICIÓN

DISTRIBUCIÓN GRATUITA

PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA

Rafael Correa Delgado

MINISTRA DE EDUCACIÓN

Gloria Vidal Illingworth

Viceministro de Educación

Pablo Cevallos Estarellas

Viceministra de Gestión Educativa

Mónica Franco Pombo

Subsecretaria de Desarrollo Profesional Educativo

Cinthia Chiriboga Montalvo

Director de Formación Continua

José Luis Ayala Mora

Autora del curso

Miriam Chacón Calderón

Miguel Valarezo Loaiza

Corrección de estilo

Alexandra Higgins Bejarano

Pablo Larreategui

Alicia Jaya Duque

Diseño y diagramación

Ana Cristina Ochoa Saeteros

Impresión

Coordinación General de Administración Escolar - MinEduc

©Ministerio de Educación del Ecuador

Primera edición febrero 2010

Segunda edición abril de 2011

Quito – Ecuador

La reproducción parcial o total de esta publicación está prohibida, en cualquier forma, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo fotocopia, microfilmación, mimeógrafo o cualquier otro medio mecánico, electrónico, informático o magnético. Cualquier reproducción que no haya sido autorizada por escrito por el Ministerio de Educación viola los derechos reservados, es ilegal y constituye un delito.

**DISTRIBUCIÓN GRATUITA - PROHIBIDA SU VENTA O REPRODUCCIÓN.
LIBRO PARA USO EXCLUSIVO DE DOCENTES E INSTRUCTORES DE LOS
CURSOS DE FORMACIÓN CONTINUA ORGANIZADOS POR EL
MINISTERIO DE EDUCACIÓN DEL ECUADOR.**



Libro del docente

Didáctica de las
Matemáticas

PROGRAMA DE FORMACIÓN CONTINUA DEL MAGISTERIO FISCAL

	pág.
Advertencia	7
Presentación	9
Objetivos generales del curso	11
Plan de sesiones	13
Criterios de evaluación	19

UNIDAD 1: NÚMEROS RACIONALES

Sesión 1: Concepto y representación de los números racionales	21
Lectura: Utilización de Material Concreto para una Comprensión Matemática Efectiva	22
Elementos de la fracción	25
Ubicación de fraccionarios en la recta numérica	26
Sesión 2: Ejercicios y problemas sobre conceptos y representación de los números racionales	29
Descubriendo las fracciones	30
Lectura: Densidad de los números racionales	33
Significado de las Fracciones	36
La fracción como razón	37
Lectura: Comentario Samuel Villareal Suárez	39
Lectura: La noción de orden en Matemática	40
Sesión 3: Reducciones: amplificación y simplificación	45
Amplificación y simplificación de fracciones	46
Fracción irreducible	47
Sesión 4: Reducciones: Forma decimal de los números racionales y decimales que se pueden expresar como racionales	51
Lectura: Método participativo de enseñanza por resolución de problemas. "La Heurística Problem Solving"	57
Lectura: Cuándo y cómo un decimal puede expresarse como fracción	62
Sesión 5: Reducciones: conversión a decimal, conversión a mixto y viceversa	67
Lectura: Fracciones propias e impropias	68

UNIDAD 2: CONGRUENCIA NUMÉRICA Y DIVISIBILIDAD

Sesión 6: Congruencia numérica	71
Lectura: “La aritmética del reloj y sistemas modulares”	72
Sesión 7: Aplicaciones de la congruencia numérica	77
Sesión 8: Criterios de divisibilidad	81
Lectura: Algunas reflexiones sobre las funciones de las demostraciones matemáticas (parte 1)	82
Criterios de divisibilidad	84
Divisibilidad para dos	85
Divisibilidad para tres	85
Divisibilidad para cuatro	86
Divisibilidad para cinco	86
Divisibilidad para seis	87
Divisibilidad para siete	87
Divisibilidad para ocho	87
Divisibilidad para nueve	88
Divisibilidad para diez	88
Divisibilidad para once	89
Divisibilidad para trece	89
Matriz para autoevaluación	91
Demostraciones de las divisibilidades propuestas	92
Sesión 9: Problemas de aplicación de divisibilidad	99
Lectura: Algunas reflexiones sobre las funciones de las demostraciones matemáticas (parte 2)	101

UNIDAD 3: PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES Y SUS APLICACIONES

Sesión 10: Propiedades de la suma y resta: operaciones y problemas	107
Denominador común semas y restas con sustitución de piezas	107
Lectura: Fracciones homogéneas y heterogéneas	108
Suma o resta de fracciones	109
Cálculo del máximo común divisor por diferencia sucesivas	112
Mínimo común múltiplo	112
Lectura: El ojo de Horus	115
Sesión 11: Propiedades de la multiplicación y división: operaciones y problemas	125

Sesión 12: Propiedades de la potenciación y radicación: operaciones y problemas	129
Propiedades de la potenciación y radicación	132

UNIDAD 4: PROPORCIONALIDAD

Sesión 13: Proporcionalidad: datos estadísticos y representaciones en el plano cartesiano	133
Sesión 14: Equivalencias geométricas	139
Sesión 15: Regla de tres	145
Sesión 16: Porcentaje e interés	151
Lectura: La crisis internacional y su gestión global	151
Lectura: Relación entre porcentajes, fracciones y decimales	154
Sesión 17: Reparto proporcional	159

UNIDAD 5: PROBLEMAS INTEGRADORES

Sesión 18: Problemas Integradores	163
Desarrollo conceptual del número base 10	164
Problema 1: Proporción áurea	166
Problema 2: Fondos de reserva	168
Problema 3: Desechos sólidos	168
Problema 4: Fracciones y porcentajes	169
Problema 5: Las posiciones de los números del 0 a 10	171
Sesión 19: Problemas integradores	175

ANEXOS

Anexos 1: Características de las mejores prácticas para enseñar matemáticas	179
Anexos 2: La educación matemática. El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje	184
Anexos 3: Constructivismo y matemáticas	189
Anexos 4: Las ideas de Pólya en la resolución de problemas	195

Anexos 5:	Consejos prácticos para la enseñanza de las Matemáticas	202
Anexos 6:	Recomendaciones metodológicas en dos contenidos específicos: El cuadrado del 100 y Domino para las tablas de multiplicación	208
Anexos 7:	Plan de clase	215
Anexos 8:	Ficha de observación en el aula	216

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía Consultada	219
Bibliografía Sugerida	221

ADVERTENCIA

Un objetivo manifiesto del Ministerio de Educación es combatir el sexismo y la discriminación de género en la sociedad ecuatoriana y promover, a través del sistema educativo, la equidad entre mujeres y hombres. Para alcanzar este objetivo, promovemos el uso de un lenguaje que no reproduzca esquemas sexistas, y de conformidad con esta práctica preferimos emplear en nuestros documentos oficiales palabras neutras tales como “las personas” (en lugar de “los hombres”) o “el profesorado” (en lugar de “los profesores”), etc. Solo en casos en que tales expresiones no existan, se usará la forma masculina como genérica para hacer referencia tanto a personas del sexo femenino como del masculino. Esta práctica comunicativa, que es recomendada por la Real Academia Española en su Diccionario Panhispánico de Dudas, obedece a dos razones: (a) en español es posible “referirse a colectivos mixtos a través del género gramatical masculino”, y (b) es preferible aplicar “la ley lingüística de la economía expresiva”, para así evitar el abultamiento gráfico y la consiguiente ilegibilidad que ocurriría en el caso de utilizar expresiones tales como “las y los”, “os/as”, y otras fórmulas que buscan visibilizar la presencia de ambos sexos.

PRESENTACIÓN

Este curso de Didáctica de las Matemáticas tiene la valiosa misión de desarrollar el pensamiento matemático de los niños con alegría y confianza en el futuro y para ello presenta una recopilación de actividades que son resultado de la búsqueda permanente de clarificar conceptos en los que los docentes presentan mayor dificultad en la transferencia a los estudiantes de primero a séptimo de Educación General Básica.

Para asumir este reto pensamos que es importante primero hacer un recorrido por el conjunto numérico que más aparece en nuestra vida cotidiana, en los fenómenos naturales, sociales, etc. y que sin embargo es el menos conocido, imbuirlo de cotidianidad y vincularlo a lo concreto: el de los números racionales no negativos, utilizando siempre como metodología la resolución de problemas y como herramienta fundamental el desarrollo conceptual asociado.

Como saben, el conjunto numérico que encierra a todos los números se denomina “de los números reales”, dentro de éste existen dos grandes conjuntos numéricos: los racionales y los irracionales.

En el interior de los números racionales se encuentran los números enteros, los cardinales y los naturales. Hay otros números llamados irracionales que no pueden representarse de manera exacta como el cociente de enteros.

Este libro aborda los números racionales, considerando sólo los racionales positivos, y los números enteros positivos, ya que debido a los grados de escolaridad por los que pasan sus estudiantes, todavía no conocen los números negativos, principalmente desde el punto de vista conceptual.

Las fracciones presentan la particularidad: de que la Unidad puede presentarse en diferentes formas y tamaños y el referente cambia continuamente. Esto incrementa un ejerci-

cio adicional, del normal conteo en los enteros para las habilidades del pensamiento, por esta razón cuidaremos del desarrollo conceptual para llegar a los niños y trabajaremos con éstas operaciones y propiedades: suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Los decimales y los porcentajes tendrán una especial atención con el fin de comprender el origen de esta particular representación numérica.

Conoceremos la congruencia numérica y la divisibilidad desde el marco de las demostraciones matemáticas como un aporte a la formación del pensamiento matemático.

La proporcionalidad será abordada como concepto matemático que cruza los diferentes sistemas del currículo para promover un aprendizaje globalizado y que a la vez permita profundizar conceptos desde diferentes enfoques: trataremos la regla de tres, regla de interés, tanto por ciento, repartimientos proporcionales; todos los temas serán estudiados mediante la resolución de problemas con aplicaciones de la Geometría.

En todos los temas seleccionados en este libro cuidaremos siempre de la etapa del desarrollo conceptual porque en ocasiones atropelladamente queremos devorar contenidos sin afianzar las bases que van a dar soporte a la espiral de aprendizaje. Por ello, no dudaremos en reforzar con actividades diferentes y desde distintos ángulos la construcción y la instalación de los conceptos en el pensamiento de los estudiantes.

Tomemos como ejemplo, el origen del 0. Es conocido que no apareció junto con los otros conceptos numéricos, sino hasta que se percibió la necesidad de un símbolo para representar la “falta de algo”, “vacío o vacante”. Si la humanidad tardó mucho en reconocer este concepto como existente, ¿por qué nosotros pretenderíamos comenzar por

él para estudiar el conjunto numérico de los cardinales? El docente de educación inicial conoce que para construir el concepto de cero hay un proceso de adaptación del pensamiento donde se enseña a los niños y niñas a reconocer la nada, el conjunto vacío, antes de dar a conocer el código que lo representa.

De la misma forma, todo trabajo de contenidos, requiere un proceso previo de desarrollo conceptual que no puede ser obviado. Sólo así se convertirá luego en un eslabón fuerte en la cadena del aprendizaje.

Siempre escuchamos decir “los estudiantes no tienen bases”... pensamos que lo que en realidad sucede es que “los estudiantes no conocen los conceptos”... mecanizan procesos pero no entienden la verdadera razón de su aplicación.

No piense de ninguna manera que para su preparación como docente de matemáti-

cas sus saberes están completos con este libro y los conceptos trabajados aquí. La intención de este curso es dejarle la puerta abierta para que usted siga investigando, siga trabajando en otros desarrollos conceptuales que considere necesarios y fomente una actitud responsable, de usted como educador, frente al “otro”.

Si este trabajo, ayuda a cambiar la forma de concebir y tratar los temas aquí abordados y desarrollar otros conceptos desde una visión actual, a tan sólo un docente, nos daremos por satisfechos.

Los Autores

OBJETIVOS GENERALES DEL CURSO

Este curso de 40 horas de duración está orientado a los docentes de primero a séptimo año de Educación General Básica, que quieren profundizar en la asignatura de Matemáticas.

Al término del curso se espera que los participantes estén en capacidad de:

En contenidos:

- Conceptualizar y representar los números racionales en forma ordenada para comparar distintas cantidades.
- Representar cantidades y situaciones que no se pueden expresar utilizando únicamente números enteros.
- Reconocer la utilización de las fracciones en lo cotidiano y su aplicación en la resolución de problemas que contienen operaciones, propiedades, ampliación y reducción, conversiones no sólo desde el punto de vista algorítmico, sino también con su respectiva representación geométrica.
- Relacionar los enteros positivos y los números racionales positivos.
- Conocer el concepto y las propiedades de la congruencia numérica para aplicarlas en la resolución de problemas.
- Revisar los criterios de divisibilidad, algunos de éstos originales del autor, y sus demostraciones para utilizarlos en la resolución de problemas.
- Analizar el concepto de proporcionalidad desde el punto de vista estadístico, gráfico, numérico, con sus aplicaciones de porcentaje e interés, reparto proporcional, y geométrico con la proporcionalidad de segmentos y el Teorema de Thales.

En didáctica:

- Utilizar el material concreto como un complemento para la comprensión de los conceptos básicos.
- Lograr un desarrollo conceptual adecuado en los niños con el fin de afianzar el aprendizaje, reflexionando sobre un contenido matemático y además permitiendo a los niños dar explicaciones, exponer razones, argumentar, etc.
- Verificar la transversalidad de los conceptos a través de los diferentes sistemas. Esto ayudará a los docentes a entender las matemáticas como un todo coherente, en lugar de una colección de técnicas aisladas y de reglas arbitrarias.

- Utilizar las demostraciones como medio no sólo de comprobación y convencimiento, sino también para entender un algoritmo, concluir con un proceso de búsqueda, exponer un método, mostrar el significado de una definición, mantener actitud crítica frente a una idea y desarrollar autonomía intelectual.
- Desarrollar, desde las matemáticas, habilidades comunicativas y la destreza de establecer relaciones con otras ciencias. Esto les permitirá, con una idea obtenida en un contexto, aplicarla a otro, haciendo las conexiones no sólo con otras asignaturas, sino también con sus intereses particulares y cotidianos.
- Practicar el método de resolución de problemas como medio para que el estudiante active su capacidad mental, ejercite su creatividad, reflexione acerca de su propio proceso de pensamiento y aprendizaje (mejorándolo en forma consciente/metacognición), haga transferencias a otras áreas de su trabajo mental, prepare su pensamiento para otros problemas de la ciencia, y para los nuevos retos de la tecnología.
- Aplicar todo lo antes mencionado en la práctica para mejorar el ejercicio docente, reflexionando a partir de nuestras experiencias actuales.

PLAN DE SESIONES

Sesión	Objetivo	Contenidos	Tema	Capítulos del libro
1	• Evaluar los conocimientos previos en forma objetiva, de opción múltiple, donde solamente una de las opciones será correcta. • Considerar esta evaluación como el primer escalón en tu autoevaluación de conocimientos en la asignatura. • Representar cantidades y situaciones que no se pueden expresar utilizando únicamente números enteros. • Evaluar cuándo un número racional positivo es mayor que otro, relacionándolos con la representación de los números en la recta numérica permitiendo comparar distintas cantidades.	• Lectura y reflexión sobre la utilización del material concreto para una comprensión matemática efectiva. • Taller sobre formación del concepto de fracción. • Elementos de la fracción. • Ubicación de fracciones en la recta numérica para comparar cantidades.	Evaluación Diagnóstica (1 hora). Concepto y Representación de los Números Racionales (1 hora)	Capítulo 1: Los Números Racionales
2	• Determinar que las fracciones permiten encontrar el resultado de dividir un número entero entre cualquier otro. • Resolver y elaborar problemas conceptuales y de representación en la recta numérica.	• Descubriendo las fracciones. • Lectura: Densidad de los números racionales. • Dónde aparecen las fracciones. • Significado de las fracciones. • Orden en las fracciones. • Lectura: La noción de orden en las fracciones.	Ejercicios y problemas sobre concepto y representación de los números racionales (2 horas).	Capítulo 1

Sesión	Objetivo	Contenidos	Tema	Capítulos del libro
3	- Hallar la relación que existe entre los enteros positivos que existe entre los enteros positivos y los números racionales positivos. - Encontrar fracciones equivalentes a un número fraccionario dado. - Descubrir el concepto de fracciones irreducibles.	- Fracciones equivalentes. - Amplificación y simplificación de fracciones. - Fracción irreducible.	Reducciones: amplificación, simplificación, conversión a decimal (2 horas).	Capítulo 1
4	Representar un racional por medio de expresiones decimales.	- Forma decimal de los números racionales. - Los decimales en situaciones de medición. - Fracciones decimales. - Los números racionales y el enfoque de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. - Lectura: Método participativo de enseñanza por resolución de problemas. La heurística Problem Solving. ¿Cuándo y cómo un decimal puede expresarse como fracción?	Reducciones: Decimales que se pueden expresar como racionales. (2 horas).	Capítulo 1
5	Utilizar la amplificación, simplificación, conversión a decimal, conversión a mixto en la solución y elaboración de problemas.	- Clasificación de las fracciones. - Fracciones propias e impropias. - Fracciones decimales. - Conexión con la ciencia.	Reducciones: Conversión a decimal, conversión a mixto y viceversa. (2 horas).	Capítulo 1
6	Conocer el concepto y las propiedades de la congruencia.	- La aritmética del reloj y de los sistemas modulares. - Criterio de congruencia numérica. - Propiedades de la congruencia.	Congruencia numérica (2 horas).	Capítulo 2: Congruencia Numérica y Divisibilidad

Sesión	Objetivo	Contenidos	Tema	Capítulos del libro
7	• Aplicar las propiedades de la congruencia.	• Problemas de aplicación que se resuelven con congruencia numérica. • Actividad multidisciplinaria.	Aplicaciones de la congruencia numérica (2 horas).	Capítulo 2
8	• Reconocer fácilmente cuándo un número es múltiplo de otro.	• Criterios de divisibilidad. • Lectura: Algunas reflexiones sobre las funciones de las demostraciones matemáticas (parte 1). • Divisibilidad para 2. • Divisibilidad para 3. • Divisibilidad para 4. • Divisibilidad para 5. • Divisibilidad para 6. • Divisibilidad para 7. • Divisibilidad para 8. • Divisibilidad para 9. • Divisibilidad para 10. • Divisibilidad para 11. • Divisibilidad para 13. • Números primos. • Matriz de autoevaluación.	Criterios de divisibilidad (2 horas).	Capítulo 2
9	• Utilizar la divisibilidad y la congruencia numérica en la solución. • Demostrar la necesidad de la utilización de los criterios de divisibilidad en la resolución de problemas. • Aplicar estos criterios en la solución de problemas.	• Resolver problemas donde se aplica la divisibilidad. • Resolver problemas donde se aplica la congruencia numérica. • Lectura sobre algunas reflexiones sobre las funciones de las demostraciones matemáticas (parte 2). • Viñetas con Mafalda para reflexión.	Problemas de aplicación de divisibilidad y congruencia numérica (2 horas).	Capítulo 2

Sesión	Objetivo	Contenidos	Tema	Capítulos del libro
10	• Reconocer que estas operaciones sólo se realizan con fracciones homogéneas. • Aplicar las propiedades de la suma. • Utilizar la suma y resta en la solución y elaboración de problemas.	• Denominador común, sumas y restas con sustitución de piezas. • Fracciones homogéneas y heterogéneas. • Suma o resta de fracciones. • Máximo común divisor. • Mínimo común múltiplo. • Las matemáticas en el antiguo Egipto.	Propiedades de la suma y resta: operaciones y problemas (2 horas).	Capítulo 3: Propiedades de la operaciones y sus aplicaciones
11	• Verificar el sentido que tiene considerar, no solamente partes de una unidad, sino una o más partes de una fracción. • Descubrir el significado del inverso multiplicativo de un número fraccionario. • Aplicar las propiedades de la multiplicación y división. • Conocer la relación de estas operaciones con la multiplicación y división de números enteros. • Utilizar la multiplicación y la división en la solución y elaboración de problemas.	• Las fracciones en situaciones de reparto y medición. • Multiplicación o división de fracciones. • Propiedades de la multiplicación. • La fracción como operador multiplicativo.	Propiedades de la multiplicación y división: operaciones y problemas (2 horas).	Capítulo 3
12	• Aplicar las propiedades de la potenciación y radicación. • Utilizar la potenciación y radicación en la solución y elaboración de problemas.	• Conceptualización de la potenciación a través de resolución de problemas. • Propiedades de la potenciación y radicación.	Propiedades de la potenciación y radicación: operaciones y problemas (2 horas).	Capítulo 3

Sesión	Objetivo	Contenidos	Tema	Capítulos del libro
13	• Aprender a reconocer el tipo de relaciones llamadas proporcionalidad directa o inversa, a partir de acontecimientos cotidianos. • Aplicar algunas propiedades de las proporciones. • Utilizar la proporcionalidad en la solución y elaboración de problemas.	• La fracción como razón. • Concepto de proporcionalidad. • Proporcionalidad directa. • Proporcionalidad inversa.	Proporcionalidad: datos estadísticos y representaciones en plano cartesiano (2 horas)	Capítulo 4: Proporcionalidad.
14	• Aprender que la demostración del Teorema de Pitágoras se puede hacer utilizando diferentes figuras.	• Teorema de Pitágoras. • Teorema de Pitágoras generalizado. • Rompecabezas pitagóricos.	Equivalencias geométricas (2 horas).	Capítulo 4
15	• Aplicar la proporcionalidad en los problemas de la llamada regla de tres.	• Regla de tres simple: directa e inversa. • Regla de tres compuesta: directa, inversa y mixta.	Regla de tres. (2 horas).	Capítulo 4
16	• Aplicar la proporcionalidad en los problemas de porcentaje e interés.	• Los porcentajes en la vida cotidiana. • Fracciones decimales. • Relación entre porcentajes, fracciones y decimales. • El Tangram y los porcentajes. • Interés.	Porcentaje e interés. (2 horas).	Capítulo 4
17	• Aplicar la proporcionalidad en los problemas de reparto proporcional.	• Las fracciones en situaciones de reparto. • Problemas de aplicación sobre reparto proporcional.	Reparto proporcional. (2 horas).	Capítulo 4

Sesión	Objetivo	Contenidos	Tema	Capítulos del libro
18	Utilizar las operaciones estudiadas en la solución y elaboración de problemas que involucren todos los contenidos.	- Problema sobre proporción áurea. - Problema sobre fondos de reserva. - Problema sobre desechos sólidos. - Problemas sobre porcentajes y fracciones: ensalada de frutas, representaciones gráficas.	Problemas integradores (2 horas).	Capítulo 5: Problemas integradores
19	- Utilizar las operaciones estudiadas en la solución y elaboración de problemas que involucren todos los contenidos. - Planificar y evaluar una clase práctica utilizando una planificación constructivista y evaluarla con indicadores pre-establecidos.	- Problemas sobre potenciación. - Problemas sobre Regla de Tres. - Problemas sobre razones y proporciones. - Problemas sobre porcentajes, fracciones y decimales. - Planificar una clase desde el punto de vista constructivista y evaluarla con una ficha de observación áulica.	Problemas integradores (2 horas).	Capítulo 5
20	Evaluar el proceso y los resultados de este curso de 40 horas.	- Trabajos realizados en clase. - Clase grabada. - Evaluación final.	Conclusiones y evaluación final (2 horas).	Evaluación Final.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Para la evaluación del presente curso se tomará en cuenta:

1. Evaluación escrita:

- 60% Prueba de salida.

2. Evaluación del proceso:

2.1 La asistencia no forma parte de la calificación del curso sin embargo para aprobarlo debe asistir al 90% de las horas totales del curso.

2.2 10% Participación 1 (basada en los trabajos recogidos durante las clases).- Tiene que ver con el dominio de los saberes matemáticos impartidos en el curso:

- Clasificación de los conjuntos numéricos.
- Sistema de los números racionales.
- Congruencia numérica.
- Criterios de divisibilidad.
- Proporcionalidad.
- Noción de orden como concepto indispensable no sólo para contar sino para entender casi cualquier concepto de matemáticas.

2.3 10% Participación 2 (basada en el perfil).

2.3.1 Dominio de habilidades, estrategias y metodologías:

- Resolución de problemas.
- Utilización del lenguaje matemático.
- Utilización de material concreto.
- Aprendizaje basado en problemas.
- Aplicación de demostraciones.
- Implementación de nuevas metodologías.

2.3.2 Profundización teórica.

- Dominio de conceptos.
- Investigación.
- Metacognición.
- Cultura matemática.
- Pedagogía de las matemáticas.

2.3.3 Actitudes y habilidades y comunicación fluida.

- Calidad expositiva y comunicación fluida.
- Trabajo en equipo.
- Actitud crítica.

2.4 20% Evaluación de la planificación.

2.4.1 5% Planificación de la clase.

2.4.2 5% Presentación de la clase.

2.4.3 10% Video de la clase dictada.

1 Concepto y representación de los números racionales

SESIÓN 1 Duración: 1 hora

Objetivos

- Reflexionar acerca de cómo plantear trabajos de investigación.
- Reconocer la importancia de utilizar material concreto en el aula.
- Representar cantidades y situaciones que no se pueden expresar utilizando únicamente números enteros.
- Evaluar cuándo un número racional positivo es mayor que otro, relacionándolos con la representación de los números en la recta numérica y permitiendo comparar distintas cantidades.
- Conocer a los principales autores de la disciplina.

Contenidos

- Lectura y reflexión sobre la utilización del material concreto para una comprensión matemática efectiva.
- Taller sobre formación del concepto de fracción.
- Elementos de la fracción.
- Ubicación de fracciones en la recta numérica para comparar cantidades.

Actividad en parejas: material concreto

1. Realicen en parejas la lectura "Utilización del material concreto para una comprensión matemática efectiva".
2. Identifiquen en el texto, según su juicio, tres ideas con las que estén de acuerdo y tres ideas con las que estén en desacuerdo con la lectura. Indiquen las razones.
3. ¿Cuál creen ustedes que es la idea central de la lectura?
4. ¿Conocen algunos de los autores mencionados en la lectura? ¿Qué ha escuchado sobre ellos?
5. Compartan las respuestas anteriores con una de las parejas que está junto a ustedes para intercambiar opiniones.

Actividad plenaria

Compartan su trabajo con los demás participantes del curso.

Lectura:**Utilización del Material Concreto para una Comprensión Matemática Efectiva**

Hoy en día, es común estar de acuerdo en que para una comprensión matemática efectiva en los primeros grados o cuando se introduce un nuevo concepto, es adecuado el uso de materiales manipulables. El uso de materiales concretos, como un primer acercamiento, se asume en forma incuestionable. La aparición de los materiales concretos surgieron en la década de los 60's, con la publicación de las bases teóricas propuestas por Zoltan Dienes (1960) y por Jerome Bruner (1961).

Los estudiantes, con la manipulación de las piezas geométricas, hicieron de la matemática una disciplina experimental donde el estudiante observa y estudia patrones geométricos.

Ventajas	Desventajas
Siempre tendremos a la mano la intuición como mecanismo de comprensión.	Las piezas concretas no tienen la "solución mágica" a los problemas en el terreno matemático que algunos profesores le suelen asignar.
Tiene un fuerte carácter exploratorio, lo que permite el uso del razonamiento y las discusiones como sólida referencia para juzgar la validez de las afirmaciones.	El poder de las piezas manipulativas no puede ser usado efectivamente sin una adecuada preparación del docente. Las piezas manipulables no hacen "fácil" a las matemáticas, y los profesores necesitan aprender cómo usarlas.
Sirve como marco para la resolución de problemas, discusión, comunicación, corrección de errores.	Cuando los estudiantes alcanzan un nivel sofisticado de manipulación de las piezas, pueden dar la imagen de que entienden bien los conceptos matemáticos pero, no se debe olvidar que las piezas sólo son un pretexto para llegar a la etapa simbólica.
Las limitaciones del modelo manipulativo generan discusiones interesantes en el aula.	La atención debe ponerse en ayudar a transferir lo que los estudiantes descubren con las piezas manipulables, a otras representaciones, incluida la simbólica, numérica, etc. Recuerde que la transferencia no se da espontáneamente.
Se desarrolla mucho más el entendimiento conceptual, que a medida que avanza permite ir dejando de lado las herramientas concretas y se vuelven un puente hacia el entendimiento de ideas abstractas.	Existe el peligro de que el uso de piezas geométricas "fije" al estudiante solamente al momento concreto. Es decir, si no se emplean adecuadamente las piezas geométricas o se abusa de ellas, el uso de modelos concretos puede ocultar lo que se pretende enseñar. Los modelos con piezas geométricas pueden anclar a los estudiantes a un contexto concreto progresando dentro de éste, demorando la construcción de la sintaxis matemática.
Aporta en los estudiantes mucho sentido de independencia y por tanto seguridad en sí mismos.	

El material didáctico manipulable es un complemento, no un sustituto de otras representaciones. En particular, las representaciones gráficas, la lista sistemática, la estimación y sobre todo la algebraica son otras representaciones extremadamente importantes.

La función de las piezas manipulables en el plan de estudios es enseñar matemática para que sirva de puente para otras representaciones.

Aunque el nombre de las distintas etapas varía, los defensores del uso de las piezas concretas, con los cuales estamos de acuerdo, sugieren que los estudiantes deben progresar a través de diferentes etapas. Nosotros las llamaremos a estas etapas: concreta, geométrica y simbólica.



Un componente crítico del uso de material didáctico concreto es estar seguro que los estudiantes hagan la conexión entre el trabajo conceptual hecho y el conocimiento que supuestamente soporta. Para hacer esta vinculación, la transferencia desde un tópico A hasta un tópico B sucederá solamente bajo ciertas condiciones.

Dentro de las condiciones más importantes tenemos:

- a. Deben existir elementos comunes entre dos tópicos.
- b. El estudiante debe estar consciente de la existencia de dichos elementos comunes¹.

Actividad individual: reflexiones adicionales

Responda en forma individual:

1. ¿Con qué frecuencia usted utiliza material concreto en el aula?
2. ¿Qué puede hacer usted para incrementar el uso de material concreto en el aula?
3. ¿En qué temas de su clase podría utilizar material concreto?

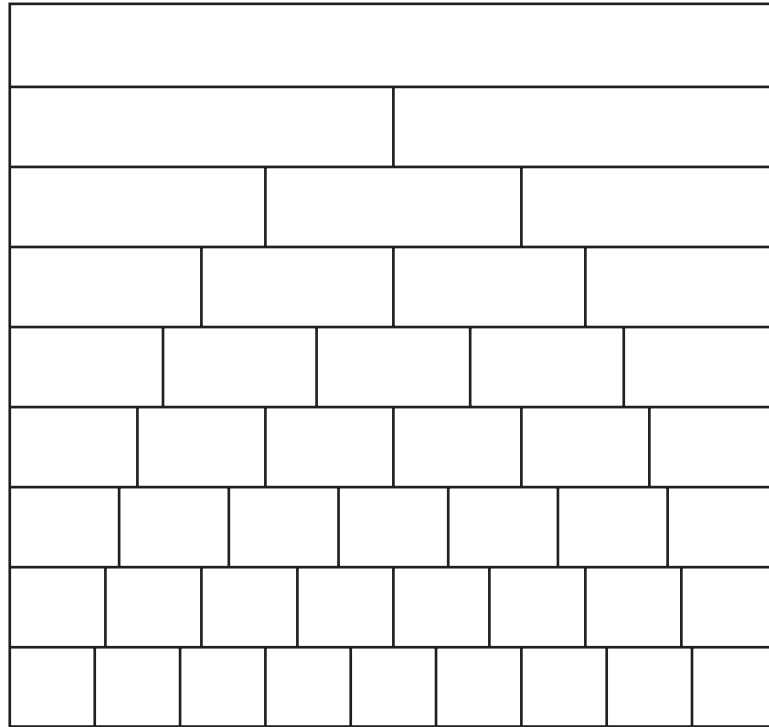
Actividad Plenaria

Compartan sus ideas con los demás participantes.

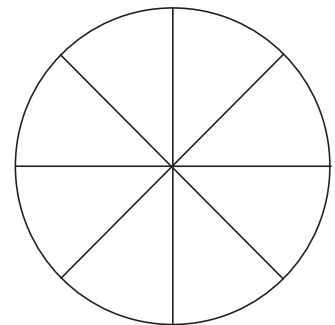
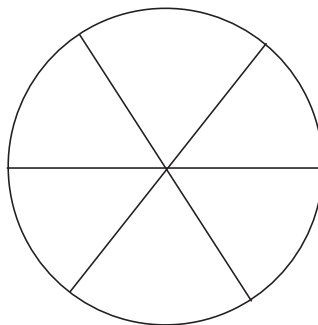
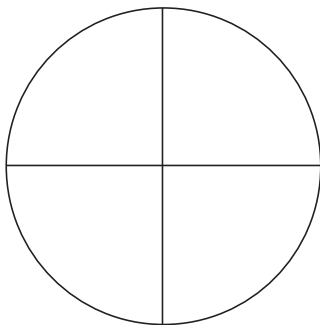
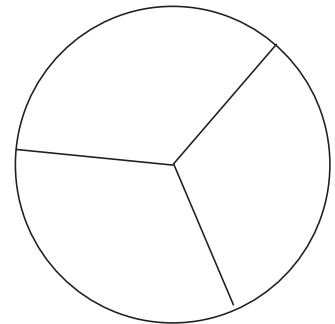
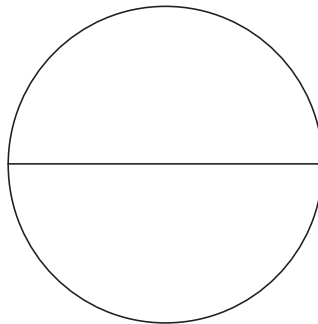
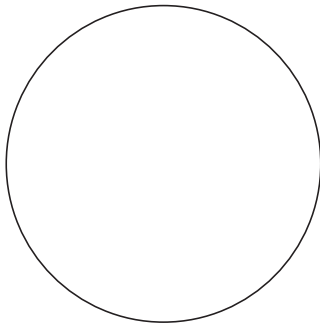
Actividad en grupo: motivación. Plantillas de fracciones

1. Formen grupos de cuatro participantes.
2. Trabajen con el tablero cuadrado de fracciones: dibujen en una cartulina un cuadrado de 23 x 23 cm. y recórtelo. Dividan el cuadrado de la siguiente forma:

¹ Tomado y adaptado de: El Uso de Material Concreto para la Enseñanza de la Matemática. Báez, María de Jesús, Hernández, Salvador (2002). <http://www.google.com.ec/search?q=utilizaci%C3%B3n+material+concreto+en+pedagog%ADa&ie=utf&oe=utf-8&aq=t&rls=org.mozilla:es-ES:official&client=firefox-a>



3. Ahora trabajen con las fracciones circulares: Dibujen en una cartulina 6 círculos de 10 cm. de radio y recórtelos. Dividan los círculos de la siguiente forma:



Las Fracciones Circulares y el Tablero Cuadrado de Fracciones, le permitirán mostrar cómo se dividen los círculos y las barras en secciones iguales; muestre primero las figuras completas, lo que representa un entero y posteriormente los demás fraccionados en dos, tres, cuatro, seis y ocho respectivamente.

4. Observen el círculo que forma un entero (el primero) y compárelo con la Tabla de fracciones, que también forma un entero.
5. Mencionen algunos elementos de la vida cotidiana que pueden ser considerados como enteros para fraccionarlos, por ejemplo: un pastel circular, un pastel en forma de barra, una barra de plastilina, etc.
6. Verifiquen el concepto de fracción utilizando los círculos y las barras fraccionadas sobre las plantillas, que forman $2/2$, $3/3$... hasta $9/9$.

Comprendan que la palabra quebrado proviene de “quebrar” un entero en fracciones iguales, independientemente de la forma que tenga el entero, de tal manera que si hablamos de $2/2$ quiere decir que es un entero, ya sea una barra de la tabla de fracciones o el círculo de fracciones, o cualquier otra cosa que sea considerada como un entero, se divide en dos partes iguales.

Tomen en cuenta que los números enteros no permiten describir todas las situaciones que somos capaces de imaginar. Por ejemplo, no podemos expresar con un número entero las horas contenidas en 30 minutos. Esto sucede porque 30 minutos son sólo parte de una hora. Además en el conjunto de los números naturales hay operaciones que no se pueden realizar, como la división de 5 entre 2, por ejemplo; repartir 5 unidades entre 2, implica partir una unidad. También hay ecuaciones que no se pueden resolver en los naturales; no hay un número entero que multiplicado como por 7 de cómo resultado 20. Es decir, la ecuación $7a = 20$ no tiene solución en el conjunto de los números enteros.

Los números fraccionarios nos permiten solucionar estas dificultades. Utilizamos fracciones para representar partes de una unidad.

PROCEDIMIENTO

Elementos de la fracción

1. Tomando una fracción como ejemplo $\frac{1}{2}$, hacer notar que $\frac{1}{2}$ nos indica que un entero se ha fraccionado en 2, y que esto lo indica el número 2 que aparece debajo de la línea del quebrado, por eso se la llama denominador, porque indica en cuántas partes fraccionaremos el entero. El número 1 nos indica cuántas fracciones tomaremos en cuenta y por eso se la llama numerador.

$$\frac{1}{2} \quad \begin{array}{l} \text{Numerador} \\ \text{Denominador} \end{array}$$

Note, con ayuda del tablero cuadrado de fracciones y las fracciones circulares, que los enteros son cada círculo completo y cada barra completa, mientras que las fracciones están representadas por los círculos y las barras divididas.

2. Tomen la barra y el círculo fraccionados en 2 partes y señalen una de esas partes. Escriban su fracción correspondiente $1/2$, “así se muestra un medio”. Analicen la forma en que se escribe la fracción; noten que el numerador es el 1 y el denominador es el 2 (pues el entero se ha dividido en 2 partes y sólo tomaremos en cuenta 1 de éstas).
3. De la misma manera, hagan participar a los estudiantes para que coloquen en las Plantillas de Fracciones:
 - a. $1/3$; es decir que del círculo o barra fraccionada en 3 se colocará una pieza, y se dirá “un tercio”, identificando al 1 como numerador y al 3 como denominador.
 - b. $4/6$; es decir del círculo o barra fraccionada en 6 se colocarán 4 piezas, se dirá “cuatro sextos”, identificando al 4 como numerador y al 6 como denominador.

- c. $7/8$; es decir del círculo o barra fraccionada en 8 se colocarán 7 piezas, se dirá “siete octavos”, identificando al 7 como numerador y al 8 como denominador.
4. Trabajen los siguientes ejemplos. Expresen las siguientes cantidades utilizando números fraccionarios y representenlas luego con las fracciones circulares y el tablero cuadrado de fracciones:
- El número de horas que hay en 30 minutos.
 - El número de metros que hay en 75 centímetros.
 - El número de minutos que hay en 15 segundos.

Deber: Investigación individual

Las gráficas circulares permiten representar diversas situaciones.

- Busque la siguiente información:
 - ¿Qué fracción representan en nuestro país las personas de raza blanca?
 - ¿Qué fracción representan en nuestro país las personas indígenas?
 - ¿Qué fracción de la población de nuestro país es mestiza?
 - ¿Qué fracción de la población de nuestro país son los afroecuatorianos?
- Represente los ítems anteriores en un diagrama circular.
- Sugiera otras áreas de aplicación donde se utilizan fracciones y cree un problema, como el anterior, para alguna de las áreas sugeridas.

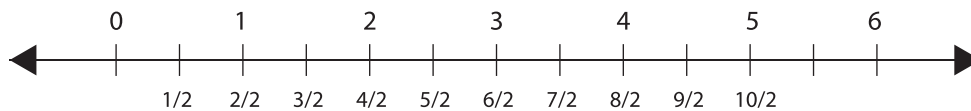


Ubicación de fraccionarios en la recta numérica

En muchas situaciones de la vida diaria resulta útil representar los números fraccionarios en la recta numérica. Por ejemplo, para leer nuestra temperatura corporal en un termómetro, necesitamos saber ubicar en la recta un número fraccionario mayor que 37, pero menor que 38.

Para ubicar los números fraccionarios en la recta, consideramos que el segmento de recta comprendido entre dos números naturales consecutivos es una unidad. Así, la primera unidad que consideramos es el segmento comprendido entre 0 y 1, la segunda unidad es el segmento comprendido entre 1 y 2, etc.

Dividiendo el segmento comprendido entre 0 y 1 en dos segmentos congruentes encontramos el punto que corresponde al fraccionario $1/2$; y tomando como referencia el segmento comprendido entre 0 y $1/2$, podemos ubicar sobre la recta todos los fraccionarios de denominador igual a 2, dividiendo cada unidad en dos segmentos congruentes y contando, a partir del primer segmento, hasta llegar al numerador de la fracción que se busca.



Ubicar todos los fraccionarios de cualquier denominador

Para ubicar el fraccionario c/d en la recta, aplicamos el operador (c/dx) al número 1. Geométricamente esto significa dividir el segmento 0 a 1 en d segmentos congruentes y tomar a partir de 0, c de estos segmentos (numerador).

Por ejemplo, si la fracción es $1/4$, se divide el segmento de 0 a 1 en 4 partes y se toma, a partir de 0, 1 de estos segmentos.

Si la fracción es $11/4$, no alcanza con dividir sólo el segmento de 0 a 1, por lo que se continúan dividiendo los segmentos siguientes (de 1 a 2, de 2 a 3) en 4 partes iguales hasta que, contando a partir de 0, se llegue al número 11, que es el numerador de la fracción.

Actividad individual: practicando en la recta numérica

1. Realice el siguiente ejercicio:

- Dibuje en una hoja un segmento de 10 cm. de longitud y divídalo en 5 segmentos congruentes.
- Luego dibuje otro segmento de 10 cm. y divídalo en 3 segmentos congruentes.
- Ahora dibuje otro segmento de 10 cm. de longitud y divídalo en 7 segmentos congruentes.
- Ubique sobre alguna de las rectas numéricas los fraccionarios $3/5$ y $7/4$.

2. Reflexione y escriba sus ideas sobre las estrategias que pueden usarse para ubicar las fracciones en la recta numérica.

Deber: Investigación

En la actualidad todos los mares del mundo están afectados por los derrames de petróleo. Casi cada año se derraman en el mar $7/2$ de millones de barriles, deliberadamente o por accidente. La siguiente tabla resume los mayores derrames de petróleo en el mundo hasta 1991.

- Investigue a partir de esa fecha hasta la actualidad cuáles han sido los mayores derrames y complete la tabla con los datos.
- Utilice una recta numérica para ubicar las cantidades que se derramaron cada vez.

Cantidad (millones de barriles)	Años	Lugar
$6/5$	1878	Bretaña
3	1979	Golfo de Campeche
$8/5$	1979	Mar Caribe
$8/5$	1983	Cabo Buena Esperanza
$9/10$	1989	Islas Canarias
5	1991	Golfo Pérsico

Tomado de Neira, Ochoa, Bautista y Herrera. Matemática en construcción 7. Editorial Oxford University Press. Segunda edición. 2002.

2

Ejercicios y problemas sobre conceptos y representación de los números racionales



■ SESIÓN 2 Duración: 2 horas

Objetivos

- Relacionar temas de matemáticas con la vida cotidiana.
- Repensar la manera de enseñar fracciones.
- Comprender que concentrar en un cuadro la información de un problema ayuda a aclarar cómo resolverlo.
- Determinar que las fracciones permiten encontrar el resultado de dividir un número entero entre cualquier otro.
- Resolver y elaborar problemas conceptuales y de representación en la recta numérica.
- Reflexionar acerca del uso de juegos para afianzar conceptos matemáticos.

Contenidos

- Descubriendo las fracciones.
- Lectura: *Densidad de los números racionales*.
- Dónde aparecen las fracciones.
- Significado de las fracciones.
- Orden en las fracciones.
- Lectura: *La noción de orden en las fracciones*.

Actividad en parejas: Juego

1. Juego: "Jugando con la recta numérica"

- a. El juego se realiza por parejas.
- b. Tomando como base una recta numérica, el jugador "A" escoge un número entre 100 y 200.
- c. El jugador "B" escoge un número entre 800 y 900.
- d. El jugador "A" suma un número cualquiera al que escogió originalmente.
- e. El jugador "B" resta un número cualquiera al que seleccionó.
- f. Se repiten las mismas acciones cuidando no alcanzar o rebasar el número del contrario.
- g. Pierde el jugador que alcance o rebase a su compañero.

2. Con la misma pareja que trabajaron en el juego anterior, comenten en relación a los temas siguientes:
 - a. Contenidos matemáticos que se trabajaron durante el desarrollo del juego.
 - b. Propiedad de densidad de los números racionales.
3. Entreguen al instructor sus reflexiones individuales por escrito.

Actividad de grupo: Descubriendo fracciones

1. Formen grupos de 4 personas y lean el texto “Descubriendo las fracciones”.
2. Propongan, con sus compañeros de grupo, cómo explicarían este tema a sus estudiantes.

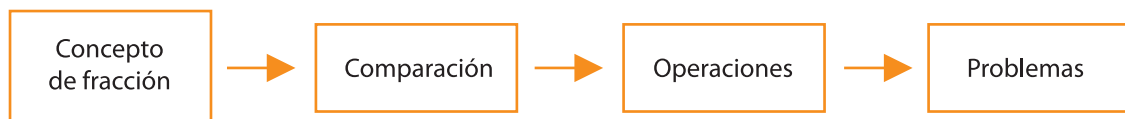
Actividad plenaria

Compartan su trabajo con los demás participantes.

Descubriendo las fracciones

El solo hecho de leer la palabra fracción crea, a menudo, inquietud en los docentes ya sea porque recuerdan su propio aprendizaje (seguramente laborioso) o porque tienen presentes las dificultades didácticas para enseñar esa parte del programa de matemáticas.

En los libros y programas este tema generalmente aparece así:



Y le dedican mucho tiempo y papel al tema de las operaciones porque es “el más difícil”. Todos los docentes sabemos cuánto le cuesta al estudiante no mezclar las reglas para resolver las operaciones:

Por ejemplo, para resolver:

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$$

Que se calcula correctamente así:

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10 + 12}{15} = \frac{22}{15}$$

Los estudiantes realizan muchas veces operaciones incorrectas como: $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{2+4}{3+5} = \frac{6}{8}$

No pretendemos dar soluciones mágicas a los problemas de cálculo con fracciones y mucho menos plantear que con nuestras sugerencias esos problemas no se presentarán. La intención es señalar algunos aspectos que deberían ser contemplados en la Educación General Básica.

Las fracciones forman un conjunto de números con propiedades específicas, distintas de las propiedades de los números enteros. Muchos de los problemas se originan por no tener claras esas diferencias.



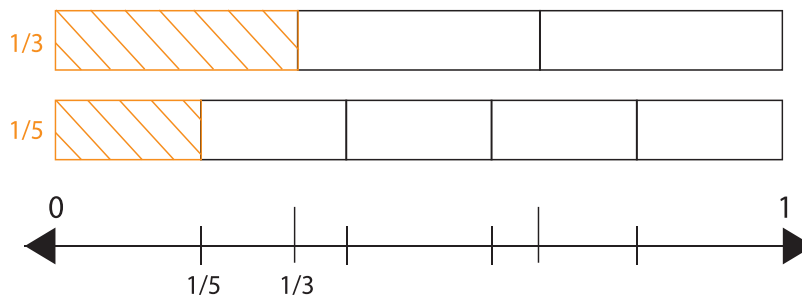
¿Por qué decimos que las fracciones son números distintos que los enteros?

Veamos dos ejemplos que muestran algunas de las diferencias:

1. En los números enteros sabemos que 3 es menor que 5 y lo escribimos así: $3 < 5$ pero ¿qué pasa con las fracciones $1/3$ y $1/5$? Podemos pensar que, como los numeradores de las dos fracciones son iguales y $3 < 5$, entonces:

$$1/3 < 1/5$$

Sabemos que esto no es cierto, como puede verse en un dibujo o en la recta numérica:



Mostramos así que: $1/3 > 1/5$

¿Qué son las fracciones?

“Son números pequeñitos que dividen a uno o más enteros”.
(Pepe)



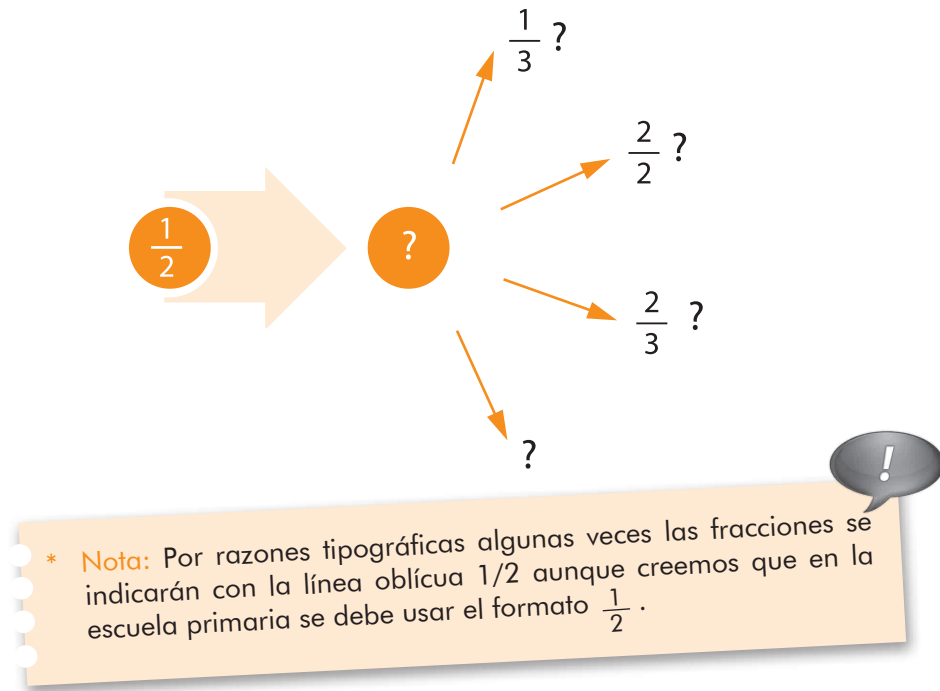
2. La mayoría de los niños que ingresan a la escuela pueden “recitar” los primeros números:

1, 2, 3, 4, 5, 6 . . .

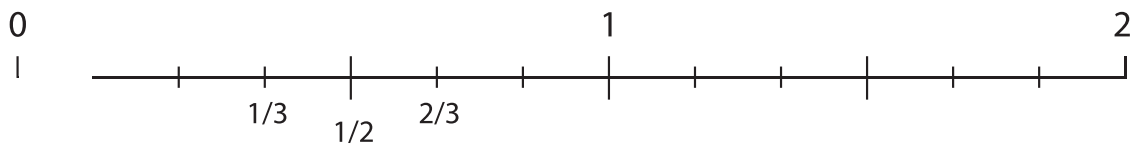
Habitualmente decimos: “ya sabe contar hasta el seis”. Saber “contar” se asocia con la noción de “siguiente” o “sucesor” es decir, nombrar el número que tiene una unidad más que el anterior.



Y en las fracciones ¿cuál es el siguiente de $\frac{1}{2}$?



Si $\frac{1}{3}$ es menor que $\frac{1}{2}$, entonces no puede ser el número que sigue a $\frac{1}{2}$, ¿y los demás números? Son mayores que $\frac{1}{2}$ pero ¿cuál es el número que sigue inmediatamente a $\frac{1}{2}$?, ¿será el $\frac{2}{3}$? Representemos en una recta numérica las fracciones anteriores para poder analizar mejor:



¿No habrá otras fracciones entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$?

Sí, si consideramos el segmento cuyos extremos son $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$, podemos encontrar el punto medio de él y ver qué número le corresponde.

Este número se calcula sumando los extremos del segmento ($\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$) y dividiéndolo entre 2, así:

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{2} = \frac{\frac{3}{6} + \frac{4}{6}}{2} = \frac{\frac{7}{6}}{2} = \frac{7}{12}$$

Para sumar $\frac{1}{2}$ más $\frac{2}{3}$ transformamos estas fracciones a fracciones de igual denominador, es decir a fracciones homogéneas.

Recordemos que para dividir una fracción por un entero se escribe el mismo numerador y como denominador el producto del entero por el denominador de la fracción inicial. Si hay como simplificar, se simplifica.

¿No habrá otros puntos entre $1/2$ y $7/12$?

Pues sí, siempre podemos encontrar el punto medio del segmento y así obtenemos otra fracción más cercana a $1/2$. Nunca podremos decir cuál es la fracción que sigue a $1/2$.

Eso le pasa a todos los números fraccionarios y sabemos que a los enteros no.

Todos los números enteros tienen un único número que les sigue, que se llama “siguiente” o “sucesor” de ese número, un solo número anterior, así como entre dos números enteros consecutivos no hay ningún número entero; mientras que entre dos números racionales existe un infinito número de fracciones.

Actividad en parejas: Densidad de los números racionales

1. Realicen la lectura: *Densidad de los números racionales*.
2. ¿Cuál creen ustedes que es la idea central de la lectura?
3. ¿Qué trascendencia creen que tiene el concepto de densidad de los números racionales en la asignatura?
4. Identifiquen cómo se llama este conjunto numérico que los matemáticos y filósofos griegos descubrieron que no son el cociente entre dos enteros. Representenlo en un diagrama de Venn con respecto a los otros conjuntos numéricos.
5. Compartan sus respuestas anteriores con la pareja que está junto a ustedes para intercambiar opiniones.

Actividad Plenaria

Compartan su trabajo con los demás participantes.

Lectura: Densidad de los números racionales

El conjunto de los números naturales con la suma y la multiplicación usual satisfacen las leyes asociativas, conmutativas, distributivas y de cancelación. Sin embargo, las operaciones inversas, sustracción y división, no son siempre posibles en este sistema numérico; por ejemplo, la respuesta de dividir 3 para 2 no está en el conjunto de los naturales. Para poder realizar estas operaciones sin ninguna restricción debemos extender el sistema con los naturales negativos y los quebrados, o sea, los números enteros, y las fracciones. La unión de estos dos nuevos conjuntos da origen al conjunto de números racionales, debido a que se obtienen por operaciones racionales de aritmética, como sustracción, adición, multiplicación y división. Este conjunto más amplio de números se extiende a los naturales, no sólo por el hecho de contenerlos sino que las leyes descritas en los naturales rigen en los racionales, excepto la división por cero.

Los números racionales se representan gráficamente por puntos en una línea recta (recta real). Tomando un punto 0 como el origen y una unidad de medida que llamaremos 1. Los puntos correspondientes a los números enteros subdividen este eje numérico en intervalos de longitud 1. Luego, cualquier punto de este eje o es un entero o está entre dos enteros. Si subdividimos cada intervalo en q partes iguales, entonces hemos construido una subdivisión de la recta en intervalos de longitud $1/q$ donde los extremos de estos intervalos son de la forma p/q . De modo que, cualquier punto de esta recta o es un racional de esta forma o está entre dos de ellos.

El hecho es que cualquier punto de la recta real está tan cerca como uno quiera de un racional; esto se expresa diciendo que los racionales son densos en la recta real, lo que implica que entre dos racionales siempre existen infinitos puntos de la recta real.

Como dato adicional podemos decir que aunque los racionales tienen esta particular característica antes descrita, ya desde épocas remotas en los siglos V o VI a.C. los matemáticos y filósofos griegos descubrieron que hay cantidades que no son el cociente entre dos enteros, por ejemplo, la diagonal de un cuadrado de lado 1, que actualmente sabemos que es raíz de 2.

Tomado de Stewart James y otros, Rodrigo Hernández y Constanza Sanmiguel. *Introducción al cálculo*. Editorial Thompson. 2007.

Actividad individual: Reflexión

Responda las siguientes preguntas en forma individual:

1. ¿Había escuchado antes sobre este concepto de “densidad de los números racionales”?
2. Mencione en qué otro contenido de las matemáticas posteriores será de utilidad este concepto.
3. Como docente de la asignatura de Matemáticas, ¿cuál considera usted que es la importancia de diferenciar los números racionales de los enteros y de los naturales?

Actividad plenaria

Compartan sus ideas con los demás participantes:

Actividad en grupo: Las Fracciones

1. Formen grupos de 4 participantes.
2. Lean el texto: “Enteros y fracciones” que se encuentra a continuación.
3. Propongan estrategias que podrían usar para explicar este tema a sus estudiantes.

Actividad plenaria

Compartan su trabajo con los demás participantes.

Lectura: Enteros y fracciones

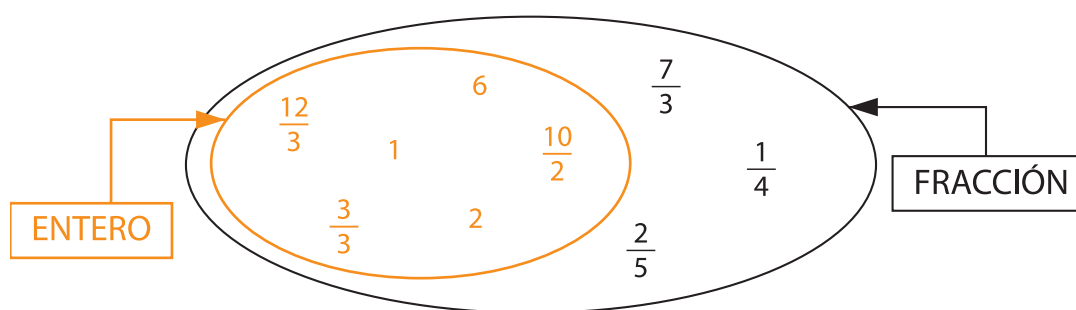


Todos sabemos que $3/3$, $16/8$, $15/5$ y $8/2$ son números enteros, porque son formas diferentes de escribir 1, 2, 3 y 4.

Y también sabemos que todo número entero puede escribirse en forma de fracción, así:

$$7 = 14/2 = 7/1 = 28/4 = 49/7 = \dots$$

Es verdad que todos los números enteros son fracciones, pero no la inversa. Existen infinitas fracciones que no son equivalentes a números enteros, por ejemplo, $7/3$ o $2/5$.



Es decir, el conjunto de los enteros está incluido en el conjunto de las fracciones.

¿Qué son las fracciones?

“Las fracciones son la mitad o distinta cantidad de un entero. Esto sirve cuando repartes una cosa, la partes y aparecen las fracciones”.

(Jacobo)



Actividad en grupo: Fracciones en la vida cotidiana

1. Reúnanse en grupos de 4 docentes.
2. Resuelvan las siguientes actividades sugeridas, para reforzar los conceptos arriba mencionados.
3. Escriban sus respuestas en una hoja, individualmente, y entréguela al instructor.

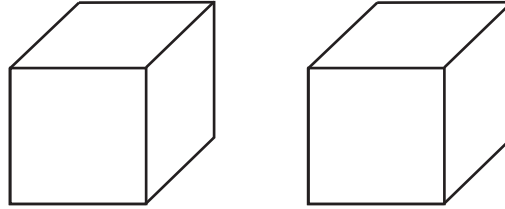
a. Rayen $2/3$ en la siguiente figura:



b. Indiquen qué parte de la siguiente figura está rayada:



- c. En la figura anterior ¿Cuál es la relación entre la parte pintada y la blanca?
- d. La cuarta parte del grupo de 2do. grado son niñas. Los niños son 24, ¿Qué cantidad de estudiantes hay en todo el grupo? ¿Qué porcentaje del grupo son niños?
- e. Al tirar un dado los posibles resultados son: 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6, ¿Cuál es la probabilidad de obtener como resultado un número par?



- f. Se quieren repartir ocho chocolates entre cuatro niños ¿Cuánto le toca a cada uno?, y si sólo tienen cinco chocolates, ¿cuánto le toca a cada uno?
- g. En la feria me dan cuatro dulces por \$9. ¿Cuántos dulces me dan por \$18? ¿cuánto dinero necesito para 28 dulces? Completa la tabla:

dulces	dólares
4	9
—	18
28	—
—	1836

¿Qué son las fracciones?

"Son cosas que se dividen en partes iguales".

(Clemencia)

"Son las partes que quedan iguales".

(Lucía)



Significado de las Fracciones



Al comparar dos cantidades enteras por medio de la división se originan las fracciones, las mismas que no son otra cosa que la división del numerador (dividendo), para el denominador (divisor).

Si el numerador es un múltiplo del denominador obtendremos como resultado un entero.

Ejemplos:

$$12/3=4;$$

$$42/7=6;$$

$$119/17=7;$$

$$45/9=5$$

Actividad en parejas: La fracción como razón

1. Lean en parejas, el siguiente problema:

La fracción como razón

En la Escuela "Francisco" hay cuatro grupos de primer año. En la sección "A" hay siete hombres y siete mujeres; en la sección "B", treinta hombres y veinticinco mujeres; en la sección "C", veinte hombres y diecinueve mujeres y en la sección "D", dieciocho hombres y quince mujeres. Al presentar el examen de matemáticas, en la sección "A" reprobaron tres hombres y cuatro mujeres; en la sección "B", seis hombres y seis mujeres; en la sección "C", ocho hombres y siete mujeres y en la sección "D", tres hombres y dos mujeres.

2. Concentren la información que se requiere en el siguiente cuadro:

Grupo	Número de estudiantes			Número de reprobados			Parte de estudiantes reprobados		
	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total
A									
B									
C									
D									

3. Contesten las siguientes preguntas:

a. ¿Qué grupo tiene más estudiantes?

b. ¿Qué grupo tiene menos estudiantes?

c. ¿En qué grupo reprobaron más estudiantes?

d. ¿En qué grupo reprobaron menos estudiantes?

e. ¿En qué grupo es más elevado el índice de reprobación?

f. De los grupos "A" y "C" ¿cuál tiene mayor índice de aprobación?

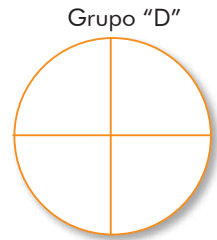
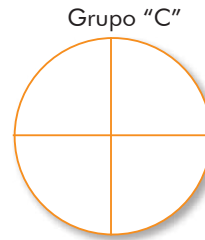
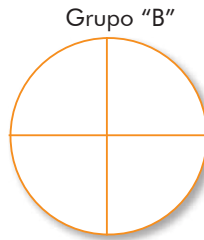
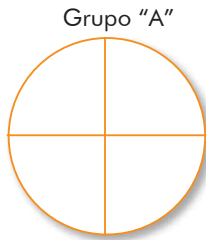
g. ¿Qué parte del total de estudiantes de los grupos "B" y "D" reprobaron?

h. Del total de estudiantes del grado, ¿cuál es el índice de aprobación de hombres y mujeres?

- i. En las fracciones anteriores, ¿qué representa el numerador?

- j. ¿Qué representa el denominador?

4. Representen en cada círculo el total de reprobados.



5. ¿Qué es una razón?

6. ¿Para qué sirve concentrar la información de un problema en un cuadro?

Actividad plenaria

Compartan su concepto construido con los otros grupos.

Actividad en parejas: Orden en la fracciones

1. Recorten las $\frac{3}{5}$ partes de una hoja de papel tamaño A4 y las $\frac{7}{8}$ partes de otra hoja de papel de igual tamaño.
2. Comparen los trozos obtenidos y contesten: ¿en cuál de los dos casos se utiliza más papel?
3. Representen en una misma recta numérica los números $\frac{3}{5}$ y $\frac{7}{8}$.
4. ¿Cuál de estos números se encuentra ubicado a la derecha del otro?
5. Contesten la siguiente pregunta:

¿Qué es más?

¿La inactividad del Chimborazo durante $\frac{3}{4}$ de siglo o las emanaciones de materia incandescente realizadas durante $\frac{3}{4}$ de un día?

Actividad plenaria

1. Expongan, sus puntos de vista en relación a los problemas anteriores.

Actividad individual: ¿Qué es más?

1. Lea el siguiente Comentario de Samuel Villarreal Suárez.
2. Escriba una opinión individual de lo leído y entréguela al instructor en una hoja.

Lectura: Comentario Samuel Villarreal Suárez

A decir verdad, son pocos los estudiantes que en la clase de matemáticas levantan la mano y afirman con marcada preocupación -profesor, no entiendo-. Esto no debe halagarnos, sino más bien inquietarnos, especialmente si estamos conscientes que el resto de los estudiantes no han externado esta preocupación por el temor al ridículo o la vergüenza, al poner en evidencia su aparente ignorancia obligándolo a permanecer inmóvil esperando que algún compañero cuestione por él, o en su defecto, que el profesor, por mera casualidad, haga una exposición aclarando sus dudas sobre el tema trabajado.

Ojalá cada vez sean menos los estudiantes que presenten esas interrogantes dentro de nuestras aulas. Esto garantiza que las clases consideran al menos dos elementos sustantivos: la oportunidad que le estamos dando al niño para que construya por sí mismo el conocimiento matemático, lo cual aseguraría que nuestros niños cada vez tendrían menos dudas respecto a lo que están creando y, el abandono de las “exposiciones magistrales” que por mucho tiempo han caracterizado las prácticas del docente.

Pocas veces reflexionamos sobre esta situación pues pensamos que un planteamiento de este tipo es producto de la misma curiosidad natural de los estudiantes cuando en la mayoría de las ocasiones, esto es consecuencia de nuestras propias imprecisiones al estar trabajando con una asignatura cuyo elemento sustantivo es precisamente lo contrario: la precisión. En el planteamiento inicial, en relación a *¿Qué es más?* es claro que, si hacemos alusión al *tiempo*, evidentemente que $3/4$ de un siglo es mucho más que un día, sin embargo, si nos referimos al *numeral* que es motivo de la comparación, entonces tendríamos una equivalencia ($3/4 = 3/4$) y finalmente, si al establecer la comparación enfocamos nuestra atención al *volumen* de materia arrojado por el volcán, tendríamos que $3/4$ de un día es más que el silencio de $3/4$ de un siglo.

Nuestros estudiantes no escuchan lo que estamos pensando y los errores no siempre son producto de su incapacidad para resolver los planteamientos que les presentamos, sino más bien, de las imprecisiones que hacemos al presentar las matemáticas.

Actividad en parejas: Noción de orden en Matemáticas

1. Realicen la lectura *La Noción de orden en matemáticas*.
2. Contesten las preguntas que están a continuación:
 - a. ¿Cuál creen que es la idea central en torno a la cual gira la lectura?
 - b. ¿Qué trascendencia tiene la noción de orden en la asignatura?
 - c. ¿Cuáles son los principios que fundamentan la noción de orden en Matemáticas?
 - d. ¿Cuál consideran que es el principio más importante?
 - e. Compartan sus respuestas con la pareja que está junto a ustedes para intercambiar opiniones.

Actividad plenaria

Expongan su trabajo a los demás participantes.

Lectura: La noción de orden en Matemáticas

Los niños y las niñas aprenden muy pronto a decir los números en voz alta y de hecho a decirlos en el orden correcto. Al principio únicamente podrán decirlos del 1 al 5, por ejemplo, pero conforme van creciendo son capaces de repetir secuencias cada vez más largas.

¿Quiere esto decir que saben contar?

Piaget nos dice que esta habilidad que desarrollan los niños de “repetir números” puede fácilmente engañar a los adultos quienes piensan que sus hijos o estudiantes, desde muy temprana edad ya saben contar. Pero la realidad no es esa, los niños pequeños que saben decir los números muy difícilmente entienden lo que significa contar y menos aún lo que significa el concepto de número.

Recitar los nombres de los números en ausencia de objetos reales es una actividad sin sentido. Recitar los nombres de números en orden es a la matemática lo que una repetición exacta del alfabeto es a la lectura... (Evelyn Sharp, Thinking is child's play. Ed. Dutton, Nueva York, 1986).

Así pues es fácil comprobar que un niño pequeño aún cuando pueda pronunciar los nombres de los números en orden correcto tiene muchas dificultades para asignarlos adecuadamente a un conjunto de objetos que se desee contar. Por ejemplo, cuando a un niño o niña de 4 ó 5 años se le pide que cuente una colección de objetos, es muy posible que cuente más de una vez varios de los objetos y que deje sin contar otros.

Los niños pequeños, de entre 4 y 7 años, no reconocen, y no tienen por qué hacerlo, la necesidad lógica de ordenar los objetos para contarlos y por ello el resultado es incorrecto; sin un orden adecuado, el conteo ocurre al azar y no se puede evitar saltar o duplicar los números al contar.

Finalmente es fácil concluir que un requisito indispensable para saber contar es saber ordenar, pero no es el único.

“...Cuando los niños y las niñas empiezan a contar cosas no sólo tienen que vérselas con la actividad misma de contar, deben, además, recordar las palabras numéricas, contar cada objeto en un conjunto -si están contando un conjunto- una sola vez, y entender que el número de objetos está representado por el último número que pronuncian cuando cuentan el conjunto. En otras palabras, tienen que aprender a contar adecuadamente.

Existen tres principios para aprender a contar, pero debe añadirse aquí que sería más preciso denominar los principios para contar un solo conjunto de objetos...

El primer principio es el de *correspondencia biunívoca*. Al contar, deben contarse todos los objetos, y cada uno debe contarse una vez y solo una vez. Si contáramos un objeto dos veces, si nos saltáramos un objeto o si contáramos los espacios entre objetos en el grupo, obtendríamos un resultado totalmente equivocado.

El segundo principio es el de *orden constante*. Cada vez que contamos debemos pronunciar palabras numéricas en el mismo orden. Si cambiáramos el orden de los números (1, 2, 3, 4, 5, 6, en una ocasión, 1, 3, 6, 5, 4, 2 en otra), obtendríamos un número total distinto cada vez que contáramos el mismo conjunto de objetos.

El tercer principio para contar se relaciona con la manera de decidir la cantidad real de objetos en el conjunto que se está contando, es decir, cómo saber si el total de objetos corresponde a la última palabra numérica pronunciada al contar...”

(Tomado de Terezinha Nunes y Peter Bryant, *Las matemáticas y su aplicación: la perspectiva del niño*. Ed. siglo XXI. México, 1997. pp. 36-37).

Hoy en día son varios los pedagogos y los matemáticos que apuntan la necesidad de realizar actividades que permitan a los niños aprender a *ordenar* y a entender el concepto de *orden* y todos coinciden en que es indispensable que estas actividades se propongan no sólo en los primeros años sino a lo largo de toda la Educación General Básica y de ser posible también en la secundaria. Conforme se avance en el grado de dificultad de estas actividades, la noción de *orden* se irá consolidando y los estudiantes irán entendiendo que *este concepto es indispensable no sólo para contar sino para entender casi cualquier concepto de matemáticas*.

Tomado y adaptado de Redescolar. La noción de orden en las matemáticas.

http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/orden/matecl1.htm Fecha de acceso 16-11-2009.



Actividad individual: Reflexión noción del orden

Responda a la siguientes preguntas:

1. ¿Había escuchado antes sobre este concepto de “noción de orden en las matemáticas”?
2. Mencione en qué otros contenidos posteriores de las matemáticas será de utilidad este concepto.
3. ¿Cómo asociaría usted la “noción de orden” con los valores humanos?
4. Escriba sus respuestas en una hoja y entréguesela al instructor.

Actividad plenaria

Exponga sus reflexiones a los demás participantes.

Actividad en grupo: Racionales positivos

1. Formen grupos de 3 docentes.
2. Resuelvan los siguientes problemas sobre el orden de los racionales positivos:

Así como resulta útil ordenar los números enteros, es conveniente determinar un orden en el conjunto de los números racionales positivos. Imagina, por ejemplo, que tú has leído las $\frac{4}{5}$ partes de un libro y uno de tus compañeros leyó las $\frac{2}{3}$ partes del mismo libro. Para saber quién ha leído más, necesitas saber cuál de los números es mayor ($\frac{4}{5}$ ó $\frac{2}{3}$).

Recordemos que el número a/b es menor que el número c/d si, en la recta numérica, el punto que representa a/b está a la izquierda del punto que representa al número c/d . En este caso escribiremos $a/b < c/d$.

- a. Ayudados con la recta numérica determinen cuál de los números es el menor: $4/5$ ó $2/3$.
 - b. Imaginen ahora que dos fraccionarios tienen el mismo denominador. Cuando los representamos sobre la recta numérica, el que tenga el menor numerador estará ubicado a la izquierda (y, por tanto, será menor). Por ejemplo, $5/4$ es menor que $7/4$. Si dos fraccionarios tienen el mismo denominador, el menor de ellos es el de menor numerador.
3. Preparen, en grupo, cómo harían para explicar a sus estudiantes el tema anterior, *Orden en los Racionales Positivos*. Escriban los pasos que seguirán para desarrollar la clase.

Actividad plenaria

Expongan su trabajo a los demás participantes.

Deber: Practicando con fracciones

- a. Petita y Eduardo practican ciclismo en el Parque La Carolina y después de 20 minutos de recorrido Petita ha recorrido las $7/12$ partes del camino y Roberto las $6/11$ partes. ¿Quién va ganando la carrera?
- b. Las empresas Refrescos S.A. y Jugos Cía. Ltda. producen bebidas que venden al mismo precio. Si cada botella producida por Refrescos S.A. contienen $4/5$ de litro de producto y cada botella producida por Jugos Cía. Ltda. contiene $8/10$ de litro. ¿Cuál es el refresco más económico?
- c. Invente y resuelva un problema cuya solución requiera determinar cuál de los fraccionarios $3/7$ y $5/9$ es el mayor.
- d. Ordene de menor a mayor las siguientes fracciones: $3/25$; $7/11$; $9/16$ y $14/101$.
- e. De la siguiente lista, encuentre todos los racionales positivos mayores que $1/3$ y además menores que $6/5$: $3/4$, $2/5$, $9/3$, $5/8$, $4/6$, $3/7$, $2/4$, $26/100$, $78/92$, $14/31$, $12/7$, $15/9$, $11/63$, $1/4$, $15/152$, $4/23$.

Comparación entre dos fracciones

Actividad en grupo: Comparación entre 2 fracciones

1. En grupos de tres, y utilizando las piezas de las plantillas de fracciones, compare las fracciones $1/2$ y $1/3$ y verifique cuál de ellas es mayor. Observe que mientras más grande es el valor del denominador menor es una fracción.

$$1/2 > 1/3$$

2. De la misma forma, acomodando las piezas sobre las plantillas de fracciones, compare diciendo cuál fracción es mayor:

$1/3$	y	$1/4$
$5/6$	y	$7/9$
$3/8$	y	$1/2$
$6/7$	y	$4/5$

Actividad en parejas: Embarcaciones veloces

1. Resuelvan los siguientes problemas:

El buque de guerra Bovercraft, de la Marina de Estados Unidos, avanza una velocidad de $919/10$ nudos. El destructor más rápido es el francés Le Terrible que en el año de 1935 alcanzó una velocidad de $181/40$ nudos. ¿Cuál de las dos embarcaciones alcanzó la mayor velocidad?

(Información tomada de Neira, Ochoa, Bautista y Herrera. *Matemática en construcción 7*. Editorial Oxford University Press. Segunda edición. 2002)

2. Lean el siguiente texto:

En dos fracciones equivalentes, si multiplicamos el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción, el producto debe ser igual, al producto del denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción.

Este recurso también nos sirve para reconocer si una fracción es menor, igual o mayor que otra; lo que depende de que el primer producto sea menor, igual o mayor que el segundo.

Ejemplos:

$3/8$ es igual a $15/40$ porque 3×40 es igual a 8×15

$7/11$ es mayor que $8/13$ porque 7×13 es mayor que 11×8

$5/8$ es menor que $9/14$ porque 5×14 es menor que 8×9

Recordemos también las propiedades de los quebrados:

- De varios quebrados que tienen igual denominador es mayor el que tiene mayor numerador.
- De varios quebrados que tienen igual numerador es menor el que tiene mayor denominador.

Si a una cantidad le falta menos que a otra, para llegar a una misma cantidad, la primera es mayor que la segunda.

Si a una persona le faltan \$ 20 para llegar a \$ 100, es porque tiene \$ 80; si a una segunda persona le falta \$ 40 para llegar a \$ 100, es porque tiene \$ 60. Entonces la primera persona tiene más que la segunda, puesto que aquella tiene \$ 80 y la segunda solamente \$ 60. Notemos que a la primera le faltaba menos que a la segunda, para llegar a \$ 100.

Igual cosa ocurre si comparamos $19/21$ con $23/25$, al primero le faltan $2/21$, y al segundo $2/25$; entonces al primero *le falta más* que al segundo, por lo tanto *es menor* que el segundo. Observemos que $2/21$ es mayor que $2/25$, porque “de varios quebrados que tienen igual numerador mayor es el que tiene menor denominador”.

3. Propongan estrategias que podrían usar para explicarles lo anterior a sus estudiantes.

Actividad plenaria

Expongan su trabajo tal como haría para explicarles lo anterior a sus estudiantes.

3 Reducciones: amplificación, simplificación



■ SESIÓN 3 Duración: 2 horas

Objetivos

- Hallar la relación que existe entre los enteros positivos y los números racionales positivos.
- Encontrar fracciones equivalentes a un número fraccionario dado.
- Descubrir el concepto de fracciones irreducibles.
- Reconocer la importancia de utilizar demostraciones con los estudiantes en las clases de matemáticas.

Contenidos

- Fracciones equivalentes.
- Amplificación y simplificación de fracciones.
- Fracción irreducible.

Fracciones Equivalentes

Actividad en grupo: Fracciones equivalentes

1. Formen grupos de tres docentes.
2. Contesten las siguientes preguntas y anoten, individualmente, las respuestas a los ítems 2 y 4 en una hoja:
 - a. ¿Cuántos octavos necesito para formar una unidad?, ¿Cuántos sextos?, ¿Cuántos tercios?
 - b. ¿Cuántos octavos necesito para formar 2 unidades?, ¿Cuántos sextos?, ¿Cuántos tercios?
 - c. ¿Cuántos octavos necesito para formar 3 unidades?, ¿Cuántos sextos?, ¿Cuántos tercios?

Haciendo las demostraciones con las plantillas de Fracciones y mostrando la escritura de $\frac{8}{8}$, $\frac{6}{6}$ y $\frac{3}{3}$ note que siempre que el numerador es igual que el denominador estamos hablando de la unidad.

- d. ¿Cuántos cuartos necesito para formar $\frac{1}{2}$?
 - e. ¿Con cuántos octavos se formarán $\frac{3}{6}$?
 - f. ¿Con cuántos octavos se formarán $\frac{3}{4}$?
3. Lean el siguiente texto:

Dos fracciones son equivalentes si la división entre ambas equivale a una fracción aparente (una unidad), es decir, *si la multiplicación del denominador de la primera por el numerador de la segunda es igual a la multiplicación del numerador de la primera por el denominador de la segunda.*

Por ejemplo:

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{8} = \frac{4}{16} \quad \frac{4}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{16}$$

4. En relación a sus respuestas anteriores, contesten:
 - a. ¿Qué estrategias usaron para contestar las preguntas?
 - b. ¿En qué respuestas acertaron?
 - c. ¿En cuáles no acertaron?
5. Comprueben con el uso de las plantillas de fracciones lo siguiente:
 - a. $2/3$ y $4/6$ son equivalentes porque $3 \times 4 = 12$ y $2 \times 6 = 12$.
 - b. $2/4$ y $4/8$ son equivalentes porque $4 \times 4 = 16$ y $2 \times 8 = 16$.
 - c. $4/8$ y $2/3$ no son equivalentes porque $8 \times 2 = 16$ y $4 \times 3 = 12$; 16 no es igual a 12.
6. Demuestren mediante la Plantilla de Fracciones y mediante la escritura matemática si las siguientes fracciones son equivalentes:
 - a. $1/2$ y $4/8$
 - b. $3/6$ y $2/4$
 - c. $2/2$ y $4/4$
7. Entreguen, individualmente, sus hojas con las respuestas al instructor.

Actividad en parejas: Amplificación y simplificación de fracciones

1. Lean el texto : “Amplificación y simplificación de fracciones”.
2. Escriban en una hoja los métodos que ustedes conocen para amplificar y simplificar fracciones.

Amplificación y simplificación de fracciones

Los fraccionarios equivalentes representan la misma cantidad, es decir que para expresar un número fraccionario a/b podemos utilizar cualquiera de sus fracciones equivalentes.

Así por ejemplo, para expresar en metros la altura de un edificio de 3 pisos podemos utilizar $45/10$, $90/20$, $135/30$, ó cualquier otra fracción equivalente a éstas.

Observa que es posible obtener el fraccionario $90/20$ a partir de $45/10$, multiplicando el numerador y el denominador de $45/10$ por $2/2$.

En este caso decimos que hemos amplificado el número racional positivo $45/10 \times 2/2$, lo que equivale a multiplicar por 1 a la fracción.

Si multiplicamos o dividimos ambos términos de la fracción por un mismo número el valor de la fracción no se altera.



Ejemplo:

$$9/15 = 3/5; \text{ hemos dividido ambos términos de la fracción por } 3.$$

Al dividir ambos términos de una fracción por un mismo número se dice que hemos *simplificado* la fracción.

Si multiplicamos ambos términos por un mismo número se dice que hemos *amplificado* la fracción;

En el ejemplo anterior, ¿simplificamos o amplificamos la fracción?

Si amplificamos o simplificamos una fracción, encontramos otra fracción que tiene el *mismo valor* que la primera, por esta razón se llaman *fracciones equivalentes*.

$$2/9 = 14/63 = 18/81$$

Las matemáticas nos enseñan que debemos ser observadores, que las operaciones se realizan por una razón, y que deben justificarse. Observe con atención las siguientes fracciones equivalentes:

$$1/2 = 4/8 = 7/14 = 11/22;$$

$$1/3 = 2/6 = 4/12 = 7/21$$

En el primer grupo todas las fracciones son iguales a un medio, es decir, a la mitad, observe que el numerador es siempre la mitad del denominador, o lo que es lo mismo, el denominador es el doble del numerador.

En el segundo grupo todas las fracciones son iguales a un tercio, por lo que el numerador es siempre la tercera parte del denominador, o lo que es lo mismo, el denominador es el triple del numerador.

Actividad plenaria

Comparta con los demás participantes:

- Su método para la amplificación y simplificación de fracciones, utilizando las plantillas de fracciones.
- Las estrategias que usaría para explicar este tema a sus estudiantes.

Actividad individual: Fracción irreducible

- Utilizando las plantillas de fracciones, responda ¿cómo reconoce cuándo una fracción es irreducible?
- Lea el texto: “fracción irreducible” y compárelo con su respuesta anterior.
- Responda, ¿qué similitudes encontró entre las ideas del texto y las suyas?
- Escriba esas similitudes en una hoja y entréguelas al instructor.

Fracción irreducible

Si a/b es un número fraccionario positivo y el máximo común divisor entre a y b es 1, no es posible encontrar una expresión más sencilla para a/b . Decimos que a/b es irreducible.

Cuando ya no podemos simplificar la fracción es porque el numerador y denominador de la fracción *son primos entre sí*, puesto que entre ellos el máximo común divisor, es la unidad, entonces tenemos una *fracción irreducible*, en el ejemplo anterior $3/5$ es una fracción irreducible, porque no se la puede simplificar, el máximo común divisor entre ellos es 1.

5. Exprese como un fraccionario irreducible los siguientes racionales positivos y escríbalos también en la hoja que entregará al instructor

a. $24/32$

b. $150/30$

Observe que existen números racionales positivos que son equivalentes a números enteros positivos. En realidad cada entero positivo es un número racional positivo. En otras palabras, el conjunto de los números enteros positivos es un subconjunto de los números racionales positivos.



Actividad en parejas: Propiedades de las fracciones equivalentes

1. Lean las siguientes aseveraciones que se pueden realizar con fracciones equivalentes:

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces podemos afirmar que $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$; y también que $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$
 También podemos comprobar que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = k$, entonces $\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h} = k$

2. Encuentren ustedes el porqué de estas aseveraciones.

Actividad plenaria

Compartan con los demás participantes lo desarrollado en la actividad anterior.

Actividad en grupo: Ejercicios

- Reúnanse en grupos de tres participantes.
- Aplicando los principios antes demostrados resuelvan los siguientes problemas:
 - Encuentre los dos quintos de 30.
 - Después de gastarse los siete onceavos de su dinero, Gabriel se ha quedado con \$12. ¿Cuánto dinero tenía Gabriel al principio?
 - Dos números están en relación de 3 a 5; si el mayor es 75, ¿cuál es el menor?
 - La suma de dos números es 105, si la relación de los números es de 7 a 8, encuentre los números.
 - Un número es los ocho onceavos de otro, si la diferencia de los números es 27, ¿cuáles son los números?
 - Exprese como un fraccionario irreducible el siguiente racional positivo: $150/30$.
- Cada integrante del grupo debe entregar al instructor su trabajo individualmente.



Deber individual

1. Investigue cuál es el aporte más importante a la enseñanza de las matemáticas de los siguientes autores: George Pólya, Miguel De Guzmán, Juan García Cruz.
2. Traiga calculadora para la próxima sesión.

4 Reducciones: forma decimal de los números racionales y decimales que se pueden expresar como racionales



■ SESIÓN 4 Duración: 2 horas

Objetivos

- Descubrir la importancia de enseñar a los estudiantes a crear estrategias antes de solucionar un problema.
- Valorar el uso del aprendizaje basado en problemas para desarrollar habilidades cognitivas.
- Reflexionar sobre el uso de “casos” como otra forma de presentar un problema a los estudiantes.
- Comprender cuándo puede utilizarse una calculadora como recurso en clases.
- Representar un racional por medio de expresiones decimales.

Contenidos

- Forma decimal de los números racionales.
- Los decimales en situaciones de medición.
- Fracciones decimales.
- Los números racionales y el enfoque de la enseñanza de las matemáticas en Educación General Básica.
- Lectura: Método participativo de enseñanza por resolución de problemas. La heurística Problem Solving.
- ¿Cuándo y cómo un decimal puede expresarse como fracción?

Actividad en grupo: Forma decimal de los números racionales

1. Formen grupos de tres integrantes, y realicen las siguientes actividades utilizando calculadora:
 - a. ¿Qué número multiplicado por 0.5 se encuentra entre el 0.5 y 0.51?
 - b. ¿Cuántos números pueden contestar correctamente a esta pregunta?
 - c. Sin utilizar la función raíz cuadrada, encuentren la medida más aproximada que queda del lado de un cuadrado cuya superficie es de 11 cm^2 .

- d. Utilizando una calculadora representen $3/8$ en forma decimal, dividiendo 3 para 8. La respuesta será 0.375.
- e. Representen $1/4$ en forma decimal, dividiendo 1 para 4. La respuesta será 0.25.
- f. Dividan ahora 7 para 10.
- g. Respondan: ¿qué tienen en común estos decimales?
- h. Hasta ahora hemos estudiado los números racionales en forma de cocientes de enteros. Los números racionales también se pueden expresar como decimales.
- i. Utilizando una calculadora representen $4/11$ en forma decimal, dividiendo 4 para 11.

Podemos decir entonces que no todos los números racionales pueden representarse por medio de decimales terminales.

Aunque aquí hemos distinguido entre decimales que terminan y decimales que se repiten, algunos matemáticos prefieren considerar todos los números racionales como decimales que se repiten.

- j. ¿Cómo justifica usted esta afirmación?
- k. ¿Cuándo les parece que es beneficioso y cuándo perjudicial permitir el uso de la calculadora en el aula?

Actividad plenaria

Discuta con los demás participantes acerca del uso de la calculadora en el aula.

Actividad en parejas: Usando el graduador

1. Reúnanse parejas y realicen lo siguiente:
 - a. En el graduador circular marque una graduación del 0 al 100, en que los 90° equivalen a 25 unidades, 180° a 50, 270° a 75 y 360° a 100 unidades.
 - b. Noten que tomando la circunferencia como unidad se puede fraccionar en 100/100 (cien centésimas), que equivalen a 1.00.
 - c. Tomando como ejemplo $1/2$ de circunferencia observen que $1/2$ equivale a 50/100 y esto a su vez equivale a 0.50.
2. Observen ahora que:

$1/2$ es igual a 0.5 y se lee cinco décimas.

Que $1/2$ es igual que 0.50 y se lee cincuenta centésimas.
3. Concluyan que por la posición del 5 se podrían leer 5 décimas y por la posición del 50 que está ocupando 2 lugares se lee 50 centésimas y así sucesivamente se podría aumentar otro cero y leer 500 milésimas; siendo todas estas fracciones equivalentes.

Lo único que nos indican con el número de cifras escritas es el denominador que estamos usando, recordando que el denominador nos indica en cuántas partes estamos fraccionando el entero, entonces: 0.50 nos indica que estamos fraccionando al entero en centésimas y que estamos tomando 50 partes de dichas centésimas.

4. Manejando las fracciones circulares sobre el graduador dividido del 1 al 100 digan cuál es la fracción equivalente con punto decimal tomando lectura de las propias plantillas:
 - a. $5/6 =$
 - b. $5/8 =$
 - c. $3/4 =$
 - d. $2/3 =$
 - e. $1/8 =$
 - f. $1/4 =$
5. Escriba individualmente estos resultados en una hoja y entréguela al instructor.

Actividad plenaria

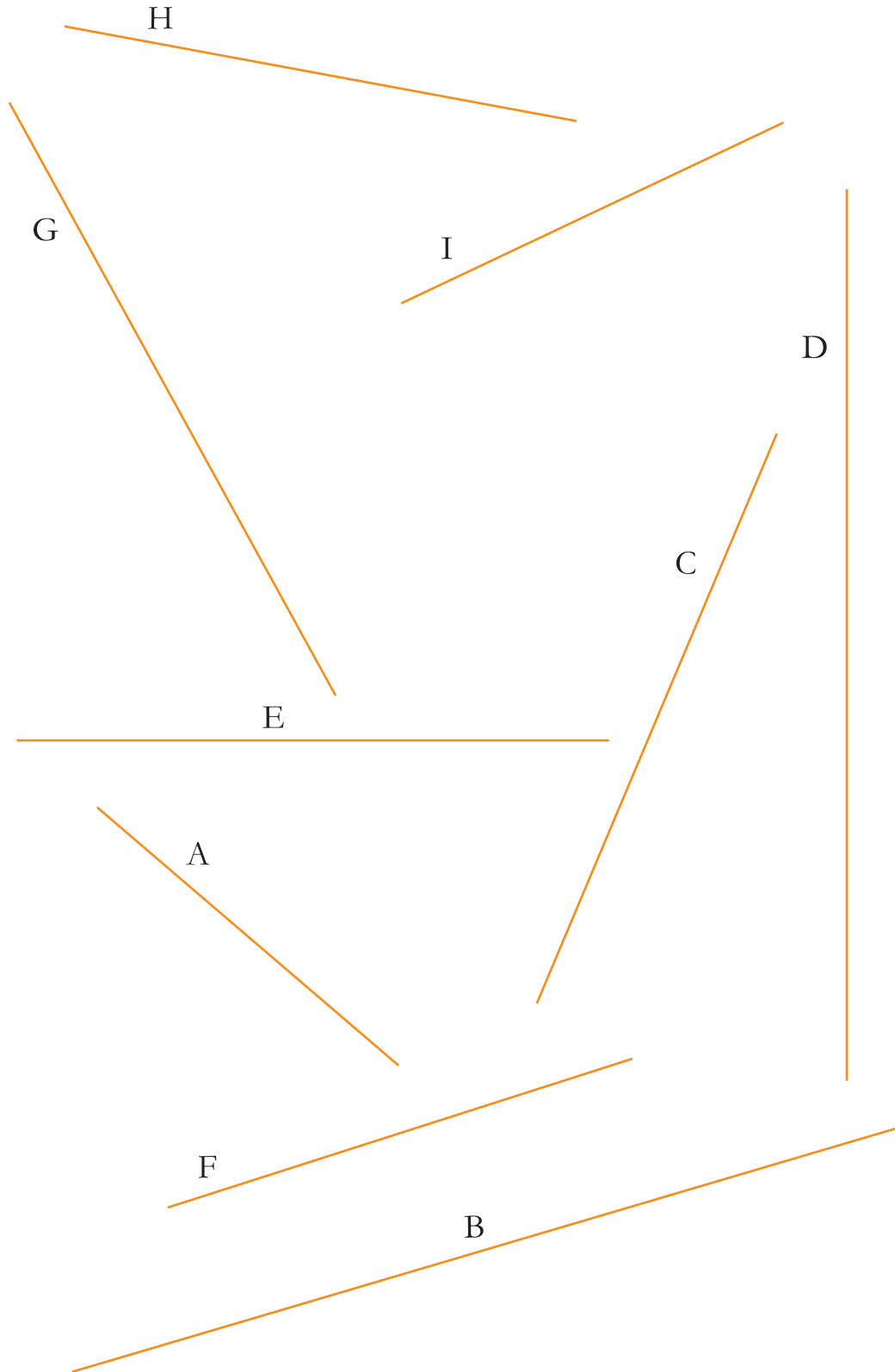
Compartan con los demás participantes lo desarrollado en la actividad anterior.

Actividad en grupo: Los decimales en situaciones de medición

1. Formen grupos de 4 personas.
2. Midan las rectas que aparecen en la siguiente página, utilizando procedimientos no convencionales (sin utilizar una regla o escuadra graduada y sin doblar el papel).
3. En equipo, ordenen las rectas de menor a mayor considerando su longitud.
4. Registren y comparen sus resultados con los de los otros grupos.
5. Analicen y comenten en relación al procedimiento utilizado por los diferentes grupos.
6. Verifiquen los resultados utilizando la “tira unidad” que aparecerá a continuación.
7. Utilizando como base la “tira unidad” midan cada una de las rectas.
8. Representen con números decimales la medida de cada recta y concentren la información en el cuadro que aparece a continuación.
9. El contenido del cuadro y las conclusiones del grupo, entréguelas al instructor escritas en una hoja.

Concentración de la información

Grupo	Grupo 1		Grupo 2		Grupo 3		Grupo 4		Grupo 5	
Tira	Orden	Medida	Orden	Medida	Orden	Medida	Orden	Medida	Orden	Medida
A										
B										
C										
D										
E										
F										
G										
H										
I										



TIRA UNIDAD

Actividad individual: Fracciones decimales

1. Lea el texto del recuadro escrito a continuación que refuerza lo realizado en la actividad anterior.
2. Muestre a sus compañeros ¿Cómo trabajaría este tema con sus estudiantes?

Un número racional positivo es una fracción decimal si su denominador es una potencia de 10.



3. Escriba como un número decimal las siguientes fracciones decimales.

a. $3215/1000 = 3000/1000 + 200/1000 + 10/1000 + 5/1000$
 $= 3 + 2/10 + 1/100 + 5/1000$
 $= 3,215$

b. $25/4$

$25/4$ es equivalente a $625/100$

$$\begin{aligned} 625/100 &= 600/100 + 20/100 + 5/100 \\ &= 6 + 2/10 + 5/100 \\ &= 6,25 \end{aligned}$$

Actividad plenaria

Compartan con los demás participantes cómo trabajaría este tema con sus estudiantes.

Actividad en parejas: Los números racionales y el enfoque de la enseñanza de las matemáticas en la Educación General Básica

¿Cuánto hilo había en un carrete si primero se quita la mitad del hilo, después la mitad de lo que queda, luego se toma nuevamente la mitad del resto y, finalmente, los $2/5$ de lo que queda, equivalen a 0,30 m. de hilo?

1. Diseñen individualmente una estrategia de solución al problema anterior.
2. Reúnanse por parejas y comenten al interior la estrategia que diseñaron para resolver el problema.
3. Describan su estrategia en una hoja.
4. ¿Cuál estrategia contiene más claridad y precisión de tal manera que permite llegar al resultado correcto con mayor rapidez?
5. ¿Qué relación existe entre las actividades realizadas anteriormente y el enfoque de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria?
6. Expongan en la plenaria la estrategia con respecto a la función de los problemas en el aula.

Actividad plenaria

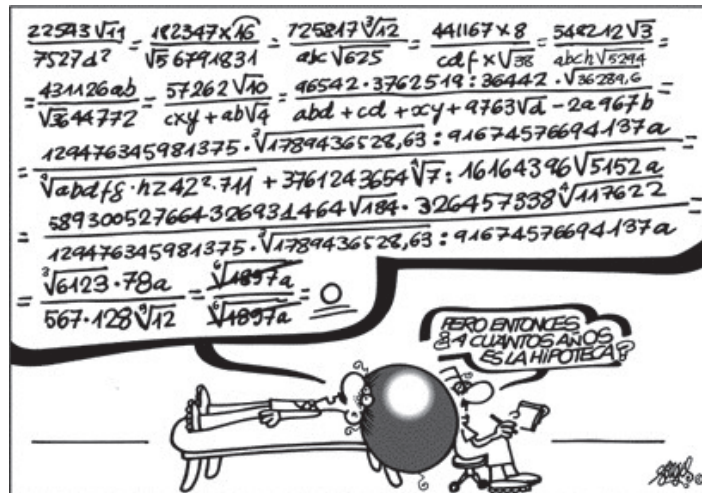
Compartan con los demás participantes la estrategia que utilizaron para resolver el problema.

Actividad individual: Reflexión

Tomando en cuenta lo que escuchó en la actividad plenaria conteste:

1. ¿Cuál de las estrategias contiene más claridad y precisión y permite llegar al resultado correcto con mayor rapidez?
2. ¿Qué relación existe entre las actividades realizadas anteriormente y el enfoque de la enseñanza de las matemáticas en la educación general básica?
3. Exponga su punto de vista con respecto a la función de los problemas en el aula.
4. ¿Para qué sirve plantearse una estrategia antes de resolver un problema y cómo podría esto ayudar a sus estudiantes?
5. Escríbalo en una hoja y entréguela al instructor.

Continuamente nos enfrentamos con una serie de grandes oportunidades brillantemente disfrazadas de problemas insolubles. (John W. Gardner)



Actividad en parejas: “La heurística problem solving”

Realicen la lectura “Método Participativo de enseñanza por resolución de problemas” (La Heurística Problem Solving). (Abarca, Sadith P.) y luego contesten:

- a. ¿Cuál es la idea central de la lectura?
- b. ¿Qué trascendencia creen ustedes que tiene el aprendizaje basado en problemas en la asignatura?
- c. ¿Cuáles son los principios pedagógicos en los que se fundamenta el ABP (Aprendizaje Basado en Problemas)?
- d. ¿Cuál consideran ustedes que es el más importante?
- e. ¿Cuáles son las ventajas para el estudiante y el docente del trabajo en ABP?

- f. ¿Qué actitudes y valores humanos considera que están asociados al *Aprendizaje Basado en Problemas*?
- g. Compartan las respuestas anteriores con otra pareja del curso, para intercambiar opiniones.

Actividad individual: Enseñanza por resolución de problemas

Escriba su opinión sobre la lectura: Método Participativo de Enseñanza por Resolución de Problemas “La Heurística Problem Solving” en una hoja y entréguela al instructor.

Actividad plenaria

Exponga sus respuestas a cada una de las preguntas, de la actividad en parejas, como una exposición de sus conclusiones en forma oral.

Lectura: Método participativo de enseñanza por resolución de problemas

“La Heurística Problem Solvin”

(Abarca, Sadith P.)

El consejo nacional de docentes de matemáticas (National Council of Teachers of Mathematic NCTM), propuso para la década de los 80 la resolución de problemas como eslogan educativo de la matemática escolar; *en la enseñanza de las matemáticas escolares se debe poner el enfoque en la resolución de problemas.*

La enseñanza por resolución de problemas tenía por objeto el estudio de las reglas y de los métodos de descubrimiento y de la invención. La heurística moderna, inaugurada por George Polya con la publicación de su obra “Cómo resolverlo” (How to solve it), trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones típicamente útiles en este proceso.

Miguel de Guzmán partiendo de la ideas de George Pólya, Mason, Burton y Stacey en 1988 y de los trabajos de Schoenfeld, ha elaborado un modelo para el trabajo en clase con problemas, donde se incluyen tanto las decisiones ejecutivas y de control como las heurísticas. La finalidad de tal modelo es que la persona examine y remodele sus propios métodos de pensamiento de forma sistemática a fin de eliminar obstáculos y de llegar a establecer hábitos mentales eficaces, en otras palabras lo que Pólya denominó como pensamiento productivo.

En la resolución de problemas hay operaciones mentales típicamente útiles como la heurística que es como reglas o modos de comportamiento que favorecen el éxito en el proceso de resolución, sugerencias generales que ayudan al individuo o grupo a comprender mejor el problema y a hacer progresos hacia su solución.

La enseñanza por resolución de problemas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con forma de pensamientos eficaces.

La enseñanza para resolver problemas tiene al menos tres interpretaciones según García Cruz, Juan A., (2001):

1. Proponer a los estudiantes más problemas.
2. Emplear aplicaciones de los problemas a la vida diaria y a las ciencias.
3. Proponer no sólo ejercicios sino también problemas genuinos que promuevan la búsqueda, la investigación por parte de los estudiantes.

Lo que se persigue en el fondo con este método es transmitir en lo posible de una manera sistemática los procesos de pensamiento eficaces en la resolución de verdaderos problemas.

Ha existido una cierta polémica sobre la diferencia que hay entre un ejercicio y un auténtico problema. Lo que para algunos es un problema por falta de conocimientos específicos sobre el dominio de métodos o algoritmos de solución, para los que sí los tienen es un ejercicio.

Según el planteamiento de R. Borasi (1986) en uno de sus primeros intentos en clarificar la noción de problema originada por su interés en mejorar la enseñanza de la resolución de problemas, utiliza los siguientes elementos estructurales para una tipología de problemas:

- El contexto del problema, la situación en la cual se enmarca el problema mismo.
- La formulación del problema, definición explícita de la tarea a realizar.
- El conjunto de soluciones que pueden considerarse como aceptables para el problema.
- El método de aproximación que podría usarse para alcanzar la solución.

¿Qué es un problema?

Tener un problema significa buscar de forma conciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata. (Pólya, en García Cruz, Juan A. 2001).

Otra definición parecida a la de Pólya es la de Krulik y Rudnik, (1980) para ellos un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma.

Según Juan García Cruz, un problema debe satisfacer los tres requisitos siguientes:

1. Aceptación: El individuo o grupo debe aceptar el problema, debe existir un compromiso formal, que puede ser debido a motivaciones tanto externas como internas.
2. Bloqueo: Los intentos iniciales no dan fruto, las técnicas habituales de abordar el problema **no funcionan**.
3. Exploración: El compromiso personal o del grupo fuerza la exploración de nuevos métodos para atacar el problema.

Según el Ministerio de Educación de México: resolver problemas implica encontrar un camino que no se conoce de antemano, es decir una estrategia para encontrar una solución. Para ello se requiere conocimientos previos y capacidades. A través de ello muchas veces se construyen nuevos conocimientos matemáticos.

A partir de la resolución de problemas, se crean ambientes de aprendizaje que permiten la formación de sujetos autónomos, críticos, además adquieren formas de pensar, hábitos de perseverancia, curiosidad y confianza en situaciones no familiares que les sirvan fuera de la clase.

El concepto que plantea Miguel Guzmán (1991) sobre los **verdaderos problemas** en matemáticas:

Un problema matemático es cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida, otras un tanto confusamente perfiladas, y no conozco el camino que me puede llevar de una a otra situación.





La enseñanza por resolución de problemas pone énfasis en considerar como lo más importante lo siguiente:

- Que el estudiante manipule los objetos matemáticos.
- Que active su propia capacidad mental.
- Que ejercite su creatividad.
- Que reflexione sobre su propio proceso de pensamiento a fin de mejorarlo conscientemente.
- Que, de ser posible, haga transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental.
- Que adquiera confianza en sí mismo.
- Que se divierta con su propia actividad mental.
- Que se prepare a sí mismo para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana.
- Que se prepare para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia.

Las ventajas de este tipo de enseñanza

- Es lo mejor que podemos proporcionar a nuestros jóvenes: capacidad autónoma para resolver sus propios problemas.
- El mundo evoluciona muy rápidamente: los procesos efectivos de adaptación a los cambios de nuestra ciencia y de nuestra cultura no se hacen obsoletos.
- El trabajo se puede hacer atractivo, divertido, satisfactorio, autorrealizador y creativo.
- Muchos de los hábitos que así se consolidan tienen un valor universal, no limitado al mundo de las matemáticas.
- Es aplicable a todas las edades.

Su novedad

Está en la forma de presentación de un tema matemático basada en el espíritu de la resolución de problemas. Procedimiento que debe seguirse en este método:

- Propuesta de la situación problema de la que surge el tema (basada en la historia, aplicaciones, modelos, juegos...).
- Manipulación autónoma del problema de matemática por los estudiantes.
- Familiarización con la situación y sus dificultades.
- Elaboración de estrategias posibles para la resolución del problema matemático.
- Ensayos diversos para la resolución de problemas matemáticos por los estudiantes.
- Herramientas elaborados a lo largo de la historia (contenidos del tema matemático, motivados).
- Elección de estrategias.
- Ataque y resolución de los problemas.
- Recorrido crítico de lo resuelto del problema matemático (reflexión sobre el proceso).
- Afianzamiento formalizado (si conviene).
- Generalización.
- Nuevos problemas.
- Posibles transferencias de resultados, de métodos, de ideas.

En todo el proceso el eje principal ha de ser la propia actividad dirigida con el tino por el profesor, colocando al estudiante en situación de participar, sin aniquilar el placer de ir descubriendo por sí mismo lo que los grandes matemáticos han logrado con tanto esfuerzo.

Se trata de armonizar adecuadamente los dos componentes que lo integran:

- El componente heurístico es decir, la atención a los procesos de pensamiento.
- Los contenidos específicos del pensamiento matemático.

Miguel De Guzmán enuncia algunas líneas de trabajo sobre la preparación necesaria para la enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas:

- Primero requiere de una inmersión personal, seria y profunda para adquirir nuevas actitudes que calen y se vivan profundamente.
- El método de enseñanza por resolución de problemas, se realiza más efectivamente mediante la formación de pequeños grupos de trabajo.

El trabajo en grupo en este tema tiene una serie de ventajas importantes

- Proporciona la posibilidad de un gran enriquecimiento al permitirnos percibir las distintas formas de afrontar una misma situación – problema.
- Se puede aplicar el método desde diferentes perspectivas, unas veces en el papel de moderador del grupo y otras en el de observador de su dinámica.
- El grupo proporciona apoyo y estímulo en una labor, que de otra manera puede resultar dura, por su complejidad y por la constancia que requiere.
- El trabajo con otros nos da la posibilidad de contrastar los progresos que el método es capaz de producir en uno mismo y en otros.

- El trabajo en grupo proporciona la posibilidad de prepararse mejor para ayudar a nuestros estudiantes en una labor semejante con mayor conocimiento de los resortes que funcionan en diferentes circunstancias y personas.

Algunos de los aspectos que es preciso atender en la práctica inicial adecuada de este método son los siguientes:

- Exploración de los diferentes bloqueos que actúan en cada uno de nosotros, los docentes, a fin de conseguir una actitud sana y agradable frente a la tarea de resolución de problemas.
- Práctica de los diferentes métodos y técnicas concretas de desbloqueo.
- Explorar las aptitudes y defectos propios más característicos, con la elaboración de una especie de autorretrato heurístico.
- Ejercicios de diferentes métodos y alternativas.
- Práctica sometida de resolución de problemas con la elaboración de sus protocolos y su análisis en profundidad.

Tomado de Abarca, Sadith P. Método participativo de enseñanza por resolución de problemas “La Heurística. Problem solving”. http://www.utchvirtual.net/recursos_didacticos/documentos/matematicas/metodo-matematicas.pdf
Fecha de acceso 5-11-2009.

Actividad individual: reflexión

1. ¿Había escuchado antes acerca de la aplicación de este concepto de aprendizaje basado en problemas en las matemáticas?
2. Mencione en qué otro contenido de las matemáticas, que usted conozca, puede serle de utilidad este concepto.

Actividad plenaria

Compartan sus ideas con los demás participantes.

Actividad individual: en el salón de clase (Autor: Samuel Villareal)

1. Realice la siguiente lectura.

¿Es $1/3 = 3/10$?

Araceli se dirigió a su docente de 6° grado para pedirle una explicación sobre por qué era incorrecta la equivalencia que había presentado en su tarea y señaló: “Si al convertir $1/3$ a decimal obtuve como resultado 0.3 y, 0.3 es igual a $3/10$ entonces $1/3$ es igual a $3/10$ ¿En dónde está mi error?”.

Mario, quien escuchaba muy atento la conversación sobre el tema de fracciones aprovechó la oportunidad y preguntó: “maestra, usted nos dijo que los números que tienen enteros y decimales como el 3.5 los podemos representar como fracción mixta, y escribió en el pizarrón $3.5 = 3 \frac{5}{10} = 3 \frac{1}{2}$, entonces ¿cómo podemos representar el número “ π ” como fracción mixta si usted nos dijo que ese número tiene muchísimos decimales?”.

Gloria, que no quiso quedarse atrás, intervino con acento orgulloso: “Mi hermano que está en la secundaria dice que los números como los que escribieron Araceli y Mario en realidad se llaman números racionales, ¿es esto cierto?”.

La docente, una de tantas personas que desde su infancia habían sentido cierta aversión por las matemáticas y, en consecuencia, ésta no era una de sus asignaturas favoritas, mostró ciertas dudas ante las preguntas y decidió analizar sus respuestas antes de contestar a los estudiantes.

2. ¿Qué contestaría usted a cada uno de estos estudiantes?

A Aracely _____

A Mario _____

A Gloria _____

3. Reúnanse en parejas y discuta sus respuestas.

Actividad plenaria

Conteste en forma oral, cuando el instructor se lo pida, cuál sería su respuesta a Aracely, a Mario y a Gloria y discuta sobre esto con los otros docentes.

Actividad en grupo: ¿Cuándo y cómo un decimal puede expresarse como fracción?

- Formen grupos de 4 participantes.
- A partir de la lectura del texto ¿cuándo y cómo un decimal puede expresarse como fracción? muestre con sus compañeros de grupo ¿cómo trabajaría este tema con sus estudiantes? Para realizar este trabajo considere los recursos didácticos que hemos revisado hasta ahora.

Lectura: Cuándo y cómo un decimal puede expresarse como fracción

Si un número racional podrá ser representado por un decimal terminal o por un decimal que se repite ¿qué hay del proceso inverso? Esto es, ¿Acaso un decimal terminal o un decimal que se repite debe representar un número racional?

La respuesta es sí. Por ejemplo, el decimal terminal 0.6 representa un número racional $6/10$, $3/5$.

Sin embargo, los decimales que se repiten no pueden convertirse en cocientes de enteros de forma tan rápida. Los pasos para realizar esta conversión utilizan elementos de álgebra básica y debemos tomar ciertas precauciones, ya que:

Los números decimales que podemos expresar como fracción son los números decimales exactos, como 7, 3 ó 0.527, y los números decimales en cuya expresión decimal se repite a partir de un cierto momento una misma cantidad de cifras, denominada período, como $23,\hat{4}$ o $5,43\hat{7}8$.

Los números decimales que no podemos expresar como fracción son los números irracionales, que suelen denotarse como $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Algunos ejemplos de estos números son: el número π , el número ∞ o el número $\sqrt{2}$.

La expresión decimal de estos números (como la de todos los irracionales) es infinita y no periódica. Por ello no pueden expresarse como una fracción.

Como último comentario la fracción que vamos a obtener de cada número decimal no va a ser en general una fracción irreducible, es decir, cuando ya tengamos la fracción asociada al número decimal podremos encontrar una fracción equivalente a la obtenida que será irreducible dividiendo numerador y denominador por el máximo común divisor de ambos. Veremos ejemplos en el desarrollo de la siguiente actividad.

Para hacer las conversiones vamos a distinguir tres casos:

1. Número decimal exacto:

Éste es el caso más sencillo de todos. La fracción buscada es:

Numerador: *Número completo sin coma.*

Denominador: *Un uno seguido de tantos ceros como cifras decimales tenía el número inicial.*

Si la fracción obtenida no es irreducible podemos simplificarla como comentamos antes dividiendo por el máximo común divisor de numerador y denominador. Expliquemos el porqué con un ejemplo:

Sea $x=4,1347$, Multiplicamos x por 10000 y queda:

$$10000 x = 41347$$

Despejando x obtenemos lo buscado

$$x = 4,1347 = 41347/10000$$

Al ser una fracción irreducible nos quedamos con ella.

Por el mismo procedimiento, para este otro número llegamos a la siguiente fracción:

$$0,18 = 18/100 = 9/50$$

Como en este caso la fracción obtenida no es irreducible la simplificamos dividiendo entre 2 numerador y denominador.

2. Número decimal periódico puro:

En este caso la fracción buscada es la siguiente:

Numerador: *Parte entera del número inicial junto con el período.*

Denominador: *Tantos nueves como cifras tenga el período.*

Si la fracción obtenida no es irreducible también podemos simplificarla. Explicamos el tema con un ejemplo:

Sea $x = 1,8$. Multiplicamos x por 10 (un uno seguido de tantos ceros como cifras tiene el período) y después restamos x al resultado. Queda:

$$10x - x = 18,8 - 1,8 = 17$$

Tenemos entonces $9x = 17$. Despejamos x y llegamos al resultado esperado:

$$x = 1,8 = 17/9$$

Como lo que obtenemos es una fracción irreducible nos la quedamos.

De la misma forma, para este otro número llegamos a lo siguiente:

$$13,273 = (13273 - 13)/999 = 13260/999 = 4420/333$$

Como en este caso obtenemos una fracción no irreducible la simplificamos dividiendo por 3 numerador y denominador.

3. Número decimal periódico mixto:

En este caso la fracción quedaría de la siguiente manera:

Numerador: *Parte entera junto con parte no periódica junto con período-parte entera junto con parte no periódica.*

Denominador: *Tantos nueves como cifras tiene el período seguidos de tantos ceros como decimales no periódicos teníamos.*

Vamos a explicar este caso también mediante un ejemplo:

Sea $x = 0,34$. Multiplicamos x por 10 (un uno seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte decimal no periódica) y restamos x :

$$10x - x = 3,4 - 0,34 = 3,1$$

Tenemos entonces que $9x = 3,1$. Volvemos a multiplicar por 10 (un uno seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte decimal que ha quedado):

$$90x = 31$$

Despejando x obtenemos lo buscado: $x = 0,34 = 31/90$

Como la fracción obtenida es irreducible nos la quedamos.

Veamos otro ejemplo:

Sea $x = 12,237$. Multiplicamos x por 100 (un uno seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte decimal no periódica) obteniendo $100x = 1223,7$. Multiplicamos ahora por 10 (un uno seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte periódica que nos queda) llegando a $1000x = 12237,7$. Ahora tomamos el número por el que multiplicamos a x en el primer paso, que en este caso es 100, lo multiplicamos por x y se lo restamos a lo que habíamos obtenido:

$$1000x - 100x = 12237,7 - 1223,7 = 11014$$

Nos queda entonces:

$$900x = 11014$$

De donde obtenemos el resultado despejando x:

$$x = 12,23\overline{7} = 11014/900 = 5507/450$$

Como la fracción obtenida no era irreducible la simplificamos dividiendo por 2 numerador y denominador.

Y uno más:

Sea $x = 31,7755\overline{692}$. Multiplicamos x por 1000 (un uno seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte decimal no periódica) y nos queda $1000x = 31775,5\overline{692}$. Ahora multiplicamos por 10000 (un uno seguido de tantos ceros como cifras tiene el período que nos ha quedado) y obtenemos $10000000x = 317755692,5\overline{692}$. Tomamos ahora el número por el que multiplicamos en el primer paso, 1000 en este caso, lo multiplicamos por x y se lo restamos a lo que habíamos obtenido:

$$10000000x - 1000x = 317755692,5\overline{692} - 31775,5\overline{692} = 317723917$$

Obtenemos:

$$9999000x = 317723917$$

Despejando x:

$$x = 31,7755\overline{692} = 317723917/9999000$$

Como la fracción obtenida es irreducible nos quedamos con ella.

Por norma general, es mucho más complicado operar con varios números decimales de distintos tipos, con distinto períodos, etc., que hacerlo con fracciones. Con estos procedimientos conseguimos precisamente expresar cualquier número decimal (racional) en forma de fracción, es decir, pasar cualquier tipo de número decimal (racional) a un único tipo de número, una fracción, para así simplificar el manejo y las operaciones entre los mismos.

5

Reducciones: conversión a decimal, conversión a mixto y viceversa



■ SESIÓN 5 Duración: 2 horas

Objetivos

- Utilizar la amplificación, simplificación, conversión a decimal, conversión a mixto en la solución y elaboración de problemas.

Contenidos

- Clasificación de las fracciones.
- Fracciones propias e impropias.
- Conexión de las matemáticas con otras ciencias.

Actividad en parejas: Clasificación de las fracciones

1. Formen con las Plantillas de Fracciones lo siguiente: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$.

Reconozca que estas fracciones que no llenan el círculo o una barra entera se les denomina "Fracciones Propias", y en la escritura de las fracciones propias el numerador será siempre menor que el denominador. Por lo tanto, a aquellas fracciones donde el numerador es mayor que el denominador se las llamará "Fracciones Impropias".

2. Formen ahora en las plantillas de fracciones las siguientes fracciones impropias: $\frac{9}{4}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{16}{7}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{3}$.

3. Observen que con las fracciones impropias siempre se llenó uno o más veces el círculo o la barra de las Plantillas de Fracciones; es decir que tenemos más de un entero, por ejemplo:

$\frac{7}{6}$ lo podemos escribir como $1 \frac{1}{6}$ y se lee un entero, un sexto.

$\frac{9}{4}$ lo podemos escribir como $2 \frac{1}{4}$ y se lee dos enteros, un cuarto.

A estas fracciones se las llama "fracciones mixtas" y están formadas por un número expresado como un entero y una Fracción Propia.

4. Formen con las Plantillas de Fracciones lo siguiente:

$\frac{1}{2}$, $\frac{15}{8}$, $3 \frac{2}{3}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{8}{6}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{7}{4}$.

5. Indiquen ¿de qué tipo de fracción se trata: propia, impropia o mixta?
6. De estas fracciones, conviertan las que son impropias en mixtas y las mixtas en impropias.
7. Conserve en su cuaderno de apuntes este trabajo y guarden el material para trabajar con éste más adelante.

Actividad individual: Ordene fracciones propias e impropias

1. Determine cuáles de los siguientes números son menores y cuáles mayores que 1: $\frac{2}{5}$, $1\frac{1}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{44}{95}$, $\frac{32}{25}$, $\frac{16}{16}$, $\frac{1}{34}$, $\frac{11}{931}$, $\frac{13}{31}$.
2. Escriba ahora 3 números racionales positivos mayores que 6 pero menores que 7 y represente estos números en una recta numérica.
3. Entregue su trabajo al instructor.

Actividad en grupo: Fracciones propias e impropias

1. Formen grupos de 4 docentes y lean el texto “fracciones propias e impropias”.
2. A partir de la lectura anterior, elaboren paso a paso la planificación de una clase en la que explicarían este tema a sus estudiantes.
3. Escribanlo en un papelógrafo. Recuerden hacerlo con buena ortografía y expresando claramente las ideas.

Actividad plenaria

Cada grupo expone su planificación.

Lectura: fracciones propias e impropias

Los números racionales positivos menores que 1, los que en la recta numérica están ubicados a la izquierda de 1.

Tienen una particularidad especial: su numerador es menor que su denominador. Esto sucede con $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$ y $\frac{150}{151}$.

Estos números fraccionarios menores que 1, es decir aquellos cuyo numerador es menor que el denominador se llaman fraccionarios propios.

Un fraccionario propio representa una parte de la unidad.

No ocurre lo mismo si representamos el número $\frac{4}{3}$ o $\frac{22}{5}$. En los dos casos el numerador es mayor que el denominador y por esta razón cada uno de los fraccionarios representa más de una unidad. Es decir que es mayor que 1.

La fracción se denomina *propia* o *impropia*, según sea menor o mayor que la unidad respectivamente. Se reconoce si la fracción es propia cuando el numerador es menor que el denominador, y, será impropia si el numerador es mayor que el denominador.

Si el numerador de la fracción es mayor que el denominador, pero no es múltiplo de éste, entonces al dividir obtendremos un número mixto, formado por el cociente entero y el residuo, al que le escribimos como numerador y como denominador el mismo de la fracción.

En general, cualquier fraccionario impropio es la suma de un número entero positivo y un fraccionario propio y se puede escribir como un número mixto.

Ejemplo:

$26/7 = 3 \frac{5}{7}$ puesto que al dividir 26 para 7, da como cociente 3 y como residuo 5.

Deber Individual

1. Lea el siguiente problema:

La distancia desde el Sol a la estrella más cercana, Centauro Próxima, ubicada en la constelación Centauro es de $21/5$ de año luz; mientras que la distancia entre el Sol y el centro de nuestra galaxia es $125000/21$ de su distancia a la estrella Centauro. Además la distancia entre el Sol y el centro de la Vía Láctea, es $1/80$ de la distancia entre el Sol y la galaxia Andrómeda.

2. Expresé los fraccionarios impropios que aparecen en esta información como expresiones mixtas y calcule, en años luz, las distancias del Sol al centro de nuestra galaxia y a la galaxia Andrómeda.

Tomado de *Matemática* Neira, Ochoa, Bautista y Herrera. *Matemática en construcción 7*. Editorial Oxford University Press. Segunda edición. 2002.

UNIDAD 2

congruencia numérica y divisibilidad

6

Congruencia numérica

■ SESIÓN 6 Duración: 2 horas

Objetivos

- Reconocer las ventajas de utilizar matrices de autoevaluación con los estudiantes.
- Conocer el concepto y las propiedades de la congruencia numérica como herramienta para la solución de problemas.

Contenidos

- La aritmética del reloj y sistemas modulares.
- Criterio de congruencia numérica.
- Propiedades de la congruencia numérica.
- Un truco con los naipes.

Actividad en parejas: Sistemas modulares

1. Realicen la lectura *La aritmética del reloj y sistemas modulares*.
2. Identifiquen en el texto las tres ideas en las que ustedes están de acuerdo con la lectura. Indiquen las razones.
3. ¿Cuál es la idea central de la lectura?
4. ¿Consideran importante el concepto de sistema matemático? Expliquen las razones.
5. ¿Nuestro sistema numérico puede ser considerado finito? ¿Por qué?
6. Compartan las respuestas anteriores con la pareja que está junto a ustedes.

Actividad plenaria

Comparta su trabajo con los demás participantes.

Lectura: “La aritmética del reloj y sistemas modulares”

Anteriormente, hemos estudiado el concepto de conjunto o reunión de elementos. Un conjunto en sí mismo puede no tener una estructura particular, pero cuando introducimos formas de combinar los elementos (llamados operaciones) y formas de comparar los elementos (denominados relaciones) obtenemos un sistema matemático.

Un sistema matemático consta de tres partes:

- a) Un conjunto de elementos;
- b) una o más operaciones para combinar los elementos;
- c) una o más relaciones para comparar los elementos.

Un ejemplo de sistema matemático, conocido por todos, es el conjunto de los enteros no negativos $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$, junto con la operación de suma y la relación de igualdad.

El sistema matemático más primitivo incluía el conjunto de los números naturales, o inicialmente un subconjunto constituido por los números “más pequeños” utilizados para contar. El desarrollo de este sistema fue el más básico, así como uno de los más útiles de todas las ideas matemáticas.

Ahora bien, existen sistemas no tan conocidos, constituidos principalmente por conjuntos finitos, como el sistema llamado del reloj de 12 horas, basado en la carátula de un reloj ordinario, con la diferencia de que el 12 es reemplazado por el 0 y se excluye el minuterero:



La carátula del reloj da lugar al conjunto finito $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Como operación para este sistema del reloj, defina la suma como sigue: sume desplazando la manecilla de las horas en el sentido de las manecillas del reloj. Por ejemplo, para sumar 5 y 2 en un reloj, primero mueva la manecilla de las horas al 5, luego para sumar 2, desplace la manecilla 2 horas más en el sentido de las manecillas del reloj.

La manecilla se detiene en el 7, por lo tanto, $5 + 2 = 7$

Sin embargo, si sumamos $8 + 9$, movemos la manecilla de las horas al 8, luego avanzamos la manecilla en sentido de las manecillas del reloj 9 horas más. Se detiene en el 5, por lo que $8 + 9 = 5$; $11 + 3 = 2$.

Puesto que el sistema del reloj está constituido por un conjunto finito, se llama sistema matemático finito.

Ahora extendamos las ideas de la aritmética del reloj a los sistemas modulares en general.

La suma tradicional, $11 + 3 = 14$, refleja el hecho que mover la manecilla del reloj 11 horas hacia adelante, desde el 0, y después 3 horas hacia adelante, equivale a moverla hacia adelante 14 horas en total. Pero, dado que la posición final de la manecilla del reloj es en el 2, vemos que 14 y 2 son, en cierto sentido, equivalentes. Formalmente decimos que 14 y 2 son congruentes módulo 12, lo cual se escribe así:

$$14 \equiv 2 \pmod{12}$$

Observando el movimiento de la manecilla del reloj, también puede verse que, por ejemplo:

$$26 \equiv 2 \pmod{12}, \quad 38 \equiv 2 \pmod{12}, \quad \text{y así sucesivamente.}$$

En cada caso, la congruencia es cierta, porque la diferencia de dos números congruentes es un múltiplo de 12:

$$14 - 2 = 12 = 1 \times 12$$

$$26 - 2 = 24 = 2 \times 12$$

$$38 - 2 = 36 = 3 \times 12$$

Esto sugiere la siguiente definición:

$a \equiv b \pmod{m}$ si, y solo si se obtiene el mismo residuo al dividir a y b entre m .

Los enteros a y b son **congruentes módulo m** (donde m es un número natural mayor que 1 llamado **módulo**) si, y sólo si la diferencia $a - b$ es divisible entre m . Simbólicamente, esta congruencia se escribe:

$$a \equiv b \pmod{m}$$

Por ejemplo, sabemos que $27 \equiv 9 \pmod{6}$, porque $27 - 9 = 18$, que es divisible entre 6. Ahora, si 27 se divide entre 6, el cociente es igual a 4 y el residuo es 3. También si 9 se divide entre 6, el cociente es igual a 1 y el residuo es 3. De acuerdo con el criterio anterior, $27 \equiv 9 \pmod{6}$ ya que el residuo es el mismo en cada caso.

Lectura y ejemplos tomados de: Miller, Heeren y Hornsby. Matemática: razonamiento y aplicaciones. Editorial Pearson. Octava edición. 1999.

Actividad individual: Reflexión

1. ¿Ha utilizado el concepto de congruencia numérica en el aula?
2. ¿En qué temas cree que puede aplicar el concepto de congruencia numérica?

Actividad plenaria

Compartan sus respuestas con los demás participantes.

Muchos de los problemas que involucran enteros muy grandes pueden simplificarse con **aritmética modular**, en la que se utiliza **congruencia en vez de ecuaciones**. La idea básica es elegir un determinado entero m , llamado **módulo** y sustituir cualquier entero por el resto de su división entre m . En general, los restos son pequeños y, por tanto, más fácil de trabajar con ellos.

Actividad individual: Problema sobre congruencia numérica

1. Revise el siguiente problema resuelto donde se aplica la congruencia numérica:

¿Si contamos 9378 días a partir de hoy (suponer que hoy es jueves),
¿en qué día de la semana caerá?

Podemos resolverlo tomando un calendario y comenzar a contar, pero esto resulta muy tedioso. Si nos damos cuenta los días de la semana se repiten cada 7 días.

Así nuestro m es 7.

Por tanto: $9378 = 1339 \cdot 7 + 5$, el resto resulta ser 5, es así que en 9378 días más, el día será Martes.



2. Revise el siguiente texto:

El problema resuelto se fundamenta en lo siguiente:

Dos números son congruentes si al dividirlos para el mismo divisor, que en este caso se lo conoce con el nombre de **módulo**, y que se representa con una **m** , dejan el mismo resto.

Por ejemplo si $a = qm + r$; donde q es un entero y es el cociente de la división, mientras que r es el residuo; siendo $0 \leq r < m$, por lo que r es un entero positivo.

Ejemplos:

$42 \equiv 2 \pmod{8}$ porque al dividir 42 para 8 nos queda como residuo 2.

$74 \equiv 2 \pmod{8}$ porque al dividir 74 para 8 deja como residuo 2.

Se dice entonces que $74 \equiv 42 \pmod{8}$

Si restamos miembro a miembro obtenemos:

$42 \equiv 2 \pmod{8}$

$74 \equiv 2 \pmod{8}$

$74 - 42 \equiv 0 \pmod{8}$,

$32 \equiv 0 \pmod{8}$

Esto significa que la diferencia de dos números congruentes es múltiplo del módulo. De esta manera también se puede comprobar si dos números son congruentes.

Tomado de matemática: Miller, Heeren y Hornsby. Matemática, razonamiento y aplicaciones. Editorial Pearson, octava edición. 1999. Ejemplos:

- $23 \equiv 2 \pmod{3}$; $43 \equiv 1 \pmod{3}$; la suma de los primeros miembros de la congruencia $23 + 43 \equiv 2 + 1 \pmod{3} \equiv 0 \pmod{3}$, es decir la suma 66 es múltiplo de 3.
- $31 \equiv 1 \pmod{5}$; $18 \equiv 3 \pmod{5}$; la diferencia de los primeros miembros de la congruencia es congruente con la diferencia de los segundos miembros, es decir,
- $31 - 18 \equiv 1 - 3 \pmod{5} \equiv -2 \pmod{5} \equiv 3 \pmod{5}$, por lo tanto $13 \equiv 3 \pmod{5}$

- En el ejercicio anterior se expresó que $-2 \pmod{5} \equiv 3 \pmod{5}$, se puede leer el -2 como lo que le falta, cuánto le debo añadir a un número para ser múltiplo del módulo, en este caso a 3 le faltan 2 para ser múltiplo de 5.
- Si el módulo es 3, un número cualquiera será de la forma $3k$, $3k + 1$, $3k + 2$; pero esta última forma puede escribirse como $3k - 1$. Por lo que si un número no es múltiplo de 3, será de forma $3k \pm 1$. Esto también significa que si un número no es múltiplo de 3, bastará una de las dos opciones, pero no ambas, sumarle o restarle 1, para que lo sea.
- Entre dos números, múltiplos consecutivos de 3, hay solamente dos enteros que no lo son, por lo que en tres enteros consecutivos existe por lo menos un número par, y un número múltiplo de 3.

$n - 1$; n ; $n + 1$, son tres números consecutivos por esta razón obligatoriamente, por lo menos, uno de los tres es par, y también uno de ellos es múltiplo de 3.

3. Escriba sus comentarios en una hoja y entréguesela al instructor.

Actividad plenaria

Exponga sus comentarios sobre lo revisado.

7 Aplicación de la congruencia numérica



■ SESIÓN 7 Duración: 2 horas

Objetivos

- Aplicar las propiedades de la congruencia numérica en la resolución de problemas que implican cambios cíclicos.

Contenidos

- Problemas de aplicación que se resuelven con congruencia numérica.
- Actividad multidisciplinaria.

La congruencia numérica nos permite resolver muchos tipos de problemas que antes no estaban al alcance de la educación general básica, puesto que requerían conocimientos de álgebra o utilizaban números demasiado grandes para calcular. Además es muy útil cuando tenemos problemas que implican cambios cíclicos.

Realizaremos algunos problemas que se pueden resolver utilizando la congruencia numérica.

Actividad en parejas: Problemas sobre congruencia numérica

1. Resuelvan los siguientes problemas:

- a. Javier quiere arreglar su colección de DVD en grupos del mismo tamaño. Intentó grupos de 4, de 5 y de 6, pero se da cuenta que siempre le queda un disco fuera. Suponiendo que Javier tiene más de un DVD, ¿Cuál es el menor número posible de discos en su colección?

En términos de congruencia numérica, podemos representarlo de la siguiente forma:

Grupos de 4: $x=1 \pmod{4} \Rightarrow 4 \equiv 0 \pmod{4}$

Grupos de 5: $x=1 \pmod{5} \Rightarrow 5 \equiv 1 \pmod{4}$

Grupos de 6: $x=1 \pmod{6} \Rightarrow 6 \equiv 2 \pmod{4}$

- b. Laura encuentra que si clasifica los talonarios de sus entradas para el concierto de Juan Fernando Velasco en grupos de 10, grupos de 15 o grupos de 20, siempre sobran 2. ¿Cuál es el número mínimo de talonarios que podría tener? (Supongan que tienen más de 2 talonarios).

En términos de congruencia numérica, podemos representarlo de la siguiente forma:

$x \equiv 2 \pmod{10}$ y en forma de conjuntos $x = \{2, 12, 22, 32, 42, 52, 62, \dots\}$

$x \equiv 2 \pmod{15}$ y en forma de conjuntos $x = \{2, 17, 32, 47, 62, \dots\}$

$x \equiv 2 \pmod{20}$ y en forma de conjuntos $x = \{2, 22, 42, 62, \dots\}$

- c. Si hoy es jueves 12 de diciembre y el año próximo es año bisiesto, ¿Qué día de la semana será dentro de un año? ¿Qué día será 12 de diciembre en el próximo año?

2. Una vez resueltos los problemas, reúnanse con la pareja que esté a su lado y comparen sus soluciones y los métodos utilizados para trabajar.

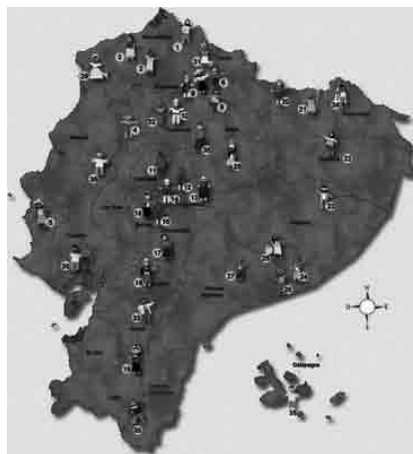
Tomado de *Matemática*: Miller, Heeren y Hornsby. *Matemática: razonamiento y aplicaciones*. Editorial Pearson. Octava edición. 1999.

Actividad plenaria

Expongan, a los demás participantes, sus respuestas y cómo llegaron a esas soluciones.

Actividad en parejas: Preguntas para discusión

1. Intercambien con su pareja de trabajo, el día de la semana en que ustedes nacieron.
2. Determinen el día de la semana en que ocurrieron los siguientes hechos históricos:
 - a. 24 de mayo de 1822
 - b. 9 de octubre de 1820
 - c. 10 de agosto de 1809



PASADO

3. ¿Recuerdan ustedes a qué hechos históricos de nuestro país corresponden las fechas antes mencionadas y qué relación existe entre ellas?
4. ¿Qué concepto matemático creen que está detrás del algoritmo revisado?

Actividad plenaria

Expongan sus respuestas a las preguntas de la actividad anterior.

8 | Criterios de divisibilidad

■ SESIÓN 8 Duración: 2 horas

Objetivos	Contenidos
• Reconocer fácilmente cuándo un número es múltiplo de otro. • Conocer el valor del uso de demostraciones en el aula como herramienta de trabajo.	• Criterios de divisibilidad. • Lectura: Algunas reflexiones sobre las funciones de las demostraciones matemáticas (parte I). • Divisibilidad para 2. • Divisibilidad para 3. • Divisibilidad para 4. • Divisibilidad para 5. • Divisibilidad para 6. • Divisibilidad para 7. • Divisibilidad para 8. • Divisibilidad para 9. • Divisibilidad para 10. • Divisibilidad para 11. • Divisibilidad para 13. • Números primos. • Matriz de autoevaluación.

Criterios de divisibilidad

Decimos que un número a es divisor de b , si al dividir b para a obtenemos un valor c , que multiplicado por a , nos da como resultado b , se representa $a|b$, donde b es el dividendo y a es el divisor; siendo $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Se dice también que a está contenido en b un número exacto de veces si el residuo es cero. Si leemos de derecha a izquierda diremos que b contiene a a , un número exacto de veces, o que b es múltiplo de a .

Los criterios que se derivan de la divisibilidad son ampliamente conocidos por todos los docentes de matemáticas, pero ¿alguna vez ha intentado demostrarlos?

Ante esta pregunta hay sólo dos respuestas, que vamos a compartir luego de realizar la lectura en parejas.

Actividad en parejas: Demostraciones en matemáticas

A partir de la lectura “Algunas reflexiones sobre las funciones de las demostraciones matemáticas (Parte 1)” trabajen lo siguiente:

1. Realicen un cuadro de doble entrada que cruce las diferentes funciones de las demostraciones matemáticas con los autores que las sostienen.
2. ¿Cuál es la idea central del artículo?
3. ¿Qué función seleccionaría usted como la más importante y por qué?
4. ¿Cuáles son las ventajas para el estudiante y el docente al trabajar con demostraciones matemáticas en el aula?
5. ¿Para qué puede servir el utilizar cuadros de doble entrada con los estudiantes?
6. Compartan las respuestas anteriores con la pareja que está junto a ustedes.

Actividad plenaria

Expongan a los demás participantes, la actividad que realizaron en parejas.

Lectura: Algunas reflexiones sobre las funciones de las demostraciones matemáticas (Parte I)

María de Lourdes Bravo Estévez, Universidad de Cienfuegos, Cuba.

José Joaquín Arrieta Gallastegui, Universidad de Oviedo, España.

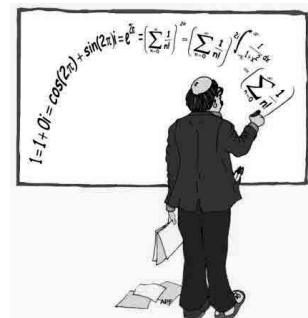
Si nos detenemos a pensar qué aporta una demostración a la formación intelectual de un individuo, a su forma de pensar y actuar, entonces estamos valorando su función como parte integrante del currículo de la Matemática.

Cuando se habla de las funciones de la demostración, siempre nos viene a la mente la de *verificación*, la que tradicionalmente se ha considerado en primer lugar. Los docentes no asumen su verdadero papel cuando piensan de esta forma estricta, sin cuestionarse cómo la enseñanza y el aprendizaje de las demostraciones, pueden aportar a la formación integral de los estudiantes. Sin embargo, varias investigaciones se han desarrollado en torno al tema, de tal forma que se ha ampliado la lista de sus funciones.

Se describen a continuación algunos de los trabajos de investigación que se han dedicado al estudio de las funciones que tienen las demostraciones y en una segunda parte nuestra propia reflexión

incorporando la función formativa que pueden tener intrínsecamente las demostraciones matemáticas.

A la función de *verificación* de una demostración, que es la que todos comúnmente le atribuimos, ya que con ella se busca la certeza o verdad de una proposición, Bell (citado por Ibañez, 2001), le otorga otras como la de *iluminación* (se espera que una buena demostración proporcione ideas del porqué es cierta) y la de *sistematización* (organización de un sistema deductivo de la teoría: axiomas, definiciones y teoremas ya demostrados con anterioridad).



Continúa con estas ideas De Villiers (1993), quien critica a los que sólo le adjudican a la demostración la función tradicional de *verificación*, incluso sospecha que la mayoría de los docentes de Matemáticas en secundaria mantienen exclusivamente esta visión formalista. Este autor destaca además la función de *explicación* de las demostraciones (de manera similar a como hacía Bell con la de *iluminación*), pues no es sólo cuestión de asegurarse, sino de explicar por qué la proposición es cierta, de hacer la actividad significativa, si no que a la vez constituye una motivación. En correspondencia con Bell toma también la función de *sistematización*, pues la demostración integra conceptos, afirmaciones y teoremas en sí, exponiendo su estructura axiomática y ayudando a las aplicaciones tanto dentro como fuera de las Matemáticas.

Incluye en su lista de funciones la de *descubrimiento*, pues a menudo es un método de exploración, análisis, inventiva que en ocasiones lleva a nuevos resultados; y la de *comunicación*, como una manera de expresar los resultados ante otros profesionales, al profesorado y ante los propios estudiantes, es un foro para el análisis crítico de aciertos y desaciertos. En fin, es un *reto intelectual* entre lo desconocido y conocido.

Siguiendo el modelo de De Villiers, (Ibañez, 2001) desdobra la función de verificación en dos diferentes: comprobación y convencimiento. Además, junto a las consideraciones realizadas por anteriores investigadores, propone un ejemplo de la función *descubrimiento* y obtiene un gran número de teoremas derivados de uno inicial aplicando las estrategias de descubrimiento de Pólya.

Hanna (2000), siguiendo a Bell y De Villiers incorpora además la función de *construcción* de una teoría empírica, la de *exploración* del significado de una definición o la consecuencia de una suposición y la *incorporación* de un nuevo conocimiento hecho a una nueva estructuración.

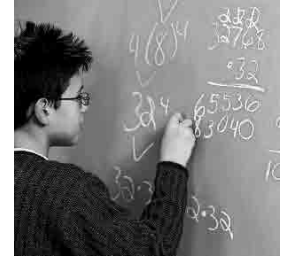
Otros investigadores analizan las funciones de la demostración desde su experiencia en el aula; como en el caso de Hersh (citado por Ibañez, 2001) que diferencia entre la función de *convencer* a expertos en una materia y la de *explicar* un resultado a través de la demostración en el aula.

Por su parte, Reid (citado por Ibañez, 2001) pretende conciliar los puntos de vista de los estudiantes y de los docentes acerca de las demostraciones. Más adelante el autor (2002) propuso cinco dimensiones de una demostración, entre las que destacaremos la *necesidad* y el *rol* que juegan en la comunidad matemática por su importancia reconocida como una característica definida y un elemento central de las Matemáticas. La necesidad la define como el propósito o la función de la demostración y la valora como explicación (coincide con De Villiers en que esto puede constituir un elemento de motivación), exploración y verificación fundamentalmente, aunque cita también la iluminación y la comprensión.

Van Asch (citado por Ibañez, 2001) hace una distinción entre los estudiantes que *hacen* demostraciones y los que sólo les dan la utilidad *instrumental*, y por tanto no la desarrollan, limitándose a conocer el significado de las mismas para utilizarlas en la resolución de posteriores problemas. Aporta además un conjunto de funciones según la respuesta a la primera parte de la siguiente pregunta: ¿qué argumentos puede haber para presentar u omitir demostraciones?, funciones que cita-

mos a continuación: *convencer, entender, memorizar, contener un algoritmo, finalizar un proceso de búsqueda, exponer un método, mostrar el significado de una definición*. Expone, también, las funciones de la enseñanza de la demostración con respecto a los estudiantes, que son las siguientes: *aprender, entender, comprender, desarrollar habilidades comunicativas, obtener los conceptos de generalización, particularización y analogía*.

Recio (2001) destaca una cita de Villiers donde éste se pronuncia en el sentido de que si queremos que los docentes de Matemáticas aprovechen las funciones de la demostración para convertirlas en una actividad significativa, entonces deberían haberse formado en situaciones similares durante su propio proceso de formación profesional docente.



En este sentido, Recio (2001) se plantea diferenciar entre el papel de la:

- Demostración en la enseñanza (lo que ocurre con la demostración en el quehacer docente).
- Enseñanza de la demostración (lo que habría que hacer para enseñar a demostrar).

Distingue además el autor, para la demostración en la enseñanza universitaria, dos funciones que podrían incorporarse a las ya citadas:

- 1) Como parte esencial del contrato didáctico en Matemáticas: por una parte el profesorado se ve obligado a demostrar en clases y los estudiantes deben estar atentos a descubrir cualquier error en la prueba que le presentan.
- 2) Una fuente insustituible de entretenimiento: considera el análisis y la comprensión de las mismas por los estudiantes como formas peculiares de razonar y usar los hechos básicos de la teoría que explica.

Tomado de Bravo Estevez, Ma. De Lourdes; Arrieta Gallástegui, José Joaquín. *Reflexiones sobre las funciones de las demostraciones matemáticas*. Revista Iberoamericana de Educación. <http://www.rieoei.org/deloslectores/838Bravo>. Fecha de acceso 25-10-2009.

Actividad individual: Las demostraciones

1. ¿Cuál cree usted que será el beneficio futuro para los estudiantes que han realizado demostraciones desde edades tempranas?
2. ¿Alguna vez ha utilizado las demostraciones matemáticas en su proceso de clase? ¿Qué respuesta obtuvo de los estudiantes?
3. ¿Qué puede hacer para incrementar la comprensión de las demostraciones por parte de sus estudiantes en el aula?
4. Escriba en un papel sus respuestas y compártalas con el grupo.
5. Entregue la hoja de respuestas al instructor.

Criterios de divisibilidad

Una forma de que estos criterios sean comprendidos en su totalidad, es demostrarlos a los estudiantes a fin de evitar que ellos repitan las reglas en forma memorística y puedan utilizar la conceptualización para resolver problemas.

Actividad individual: Divisibilidad para dos

1. Lea el siguiente enunciado:

Divisibilidad para dos

Un número es divisible para dos si es par, es decir, si termina en: 0, 2, 4, 6, 8.

2. Escriba en un papel cómo haría usted para demostrar este criterio.

Actividad en parejas: Demostraciones

1. Formen parejas y discutan las demostraciones que hicieron.
2. Respondan a la siguiente pregunta: ¿Podemos, con toda certeza, afirmar que toda decena es múltiplo de 2?

Actividad plenaria

1. Comparen sus respuestas con la explicación del instructor y explique ¿qué diferencias o qué similitudes encontraron?
2. Expongan a todo el grupo sus resultados.

Actividad individual: Divisibilidad para tres

1. Lea el siguiente enunciado:

Divisibilidad para tres

Un número es divisible para tres si la suma de sus cifras es múltiplo de tres.

2. ¿Cómo haría usted para demostrar este criterio? Socialícelo con sus compañeros.
3. Conteste ahora lo siguiente:
 - a. ¿Es verdad que 12 es igual a $10+2$; o que 12 es igual a $11+1$; etc?
 - b. ¿Entonces 1000 es igual a $990+10$; o también 1008 es igual a 99 veces 10 más 18?
4. Escriba sus respuestas en una hoja y entréguesela al instructor.

Actividad plenaria

Compare sus respuestas individuales con la propuesta del instructor. ¿Qué similitudes y qué diferencias encuentra?

Ejemplo:

$$741 = 100(7) + 10(4) + 1 = 99(7) + 9(4) + (7+4+1)$$

Si divido esta última expresión para 3 puedo darme cuenta que, 99 (7) es un múltiplo de tres porque el factor 99 contiene exactamente a 3, igual cosa ocurre con 9 (4) puesto que el factor 9 contiene exactamente a 3, entonces sólo me resta verificar si el tercer sumando, es decir,

la suma de las cifras del número es divisible para 3, que en este caso sí lo es. Como lo de los dos primeros sumandos siempre ocurre, basta con comprobar si las sumas de las cifras son divisibles para 3, para que el número sea divisible para 3.

Actividad en parejas: Divisibilidad para cuatro

1. Lean el siguiente enunciado:

Divisibilidad para cuatro

Un número es divisible para cuatro si sus dos últimas cifras forman un número múltiplo de cuatro.

2. Conteste las siguientes preguntas y luego discútanlas en una plenaria.
 - a. ¿ En qué forma “demuestra” usted a sus estudiantes?
 - b. ¿ Podemos asegurar que cualquier decena es múltiplo de 4? ¿Por qué?
 - c. ¿ Qué decenas sí podemos aseverar que son múltiplos de 4?
3. Entreguen al instructor el trabajo que realizaron en parejas.

Actividad individual: Análisis

Analice la demostración del instructor y explique qué diferencias encuentra con su demostración. Entregue al instructor su análisis.

Actividad plenaria

Exponga el trabajo que realizó.

Actividad en parejas: Divisibilidad para cinco

1. Lean el siguiente enunciado:

Divisibilidad para cinco

Un número es divisible para cinco si termina en 0 o en 5.

2. Revisen la siguiente demostración y justifíquela, luego discútanla en una actividad plenaria.

Demostración:

Si sumamos un número impar de veces el número 5, la suma siempre termina en 5, de lo que se concluye que todo número impar multiplicado por 5, termina en 5; y todo número par multiplicado por 5 termina en cero.

Actividad plenaria

Discutan con los demás participantes la demostración que leyeron.

Actividad en grupo: Divisibilidad para seis

1. Lean el siguiente enunciado:

Divisibilidad para seis

Un número es divisible para seis si al mismo tiempo lo es para dos y para tres.

2. En grupos de 4 personas expliquen ¿por qué se cumple?, escriban la respuesta en una hoja. Entreguen al instructor.

Actividad plenaria

Comparta su trabajo con los demás participantes.

Actividad individual: Divisibilidad para siete

1. En forma individual, lea el siguiente enunciado:

Divisibilidad para siete

Un número es divisible para siete si al separar la última cifra de la derecha, restamos el doble de esa cifra de la cantidad que nos haya quedado al quitar la última cifra, así sucesivamente hasta tener un número pequeño del cual podamos afirmar si es múltiplo de siete o no; si lo es, el número inicial también lo es, en caso contrario no será múltiplo de 7.

2. ¿Por qué cree usted que se cumple este criterio?
3. Multiplique ahora 40 por 12.
4. ¿Por cuánto tengo que multiplicar 80 para obtener el mismo producto?
5. ¿Por qué razón?
6. Basándose en este razonamiento, justifique el procedimiento y demostración que están al final de la unidad.
7. ¿Qué conclusiones puede sacar usted de lo anterior?
8. Escriba sus respuestas en una hoja y entréguesela al instructor.

Actividad plenaria

Revise la demostración con el instructor y los demás participantes.

Actividad en parejas: Divisibilidad para ocho

1. Reúnanse y lean el siguiente enunciado:

Divisibilidad para ocho

Un número es divisible para ocho si sus tres últimas cifras forman un número múltiplo de ocho.

2. Contesten las siguientes preguntas:
 - a. ¿Han pensado en que un número que termina en tres ceros es obligatoriamente múltiplo de 8? ¿Por qué?
 - b. ¿Sabrían fácilmente decir ustedes, si 682 es múltiplo de 8? ¿Cómo haría para saber la respuesta?
 - c. ¿Creen que esta operación es fácil para un estudiante de EGB? ¿Por qué?
3. Realicen una demostración de este criterio de divisibilidad y compárenla con la de la otra pareja.
4. Escriban sus respuestas en una hoja y entréguesela al instructor.
5. Observen la demostración que propone el instructor a continuación y compárenla con la suya.

Actividad individual: Divisibilidad para nueve

1. Lea en forma individual el siguiente enunciado:

Divisibilidad para nueve

Un número es divisible para nueve si la suma de sus cifras es un múltiplo de nueve.

2. Efectúe una demostración basándose en la que hicimos en la divisibilidad para 3, tomando en cuenta que la demostración de la divisibilidad para 9 es idéntica a la que realizamos para demostrar la divisibilidad para 3.
3. Anote su demostración en una hoja y entréguesela al instructor.
4. Compárela con la que presenta el instructor.

Actividad individual: Divisibilidad para diez

1. Lea en forma individual el siguiente enunciado:

Divisibilidad para diez

Un número es divisible para diez si termina en uno o más ceros.

2. ¿Con qué otro criterio se puede relacionar? Demuéstrelo.
3. Escríbalo en una hoja y entréguela al instructor.
4. Compare sus respuestas con las del instructor.

Ejemplo:

3750; toda decena es múltiplo de 10, puesto que también es múltiplo de 2 por ser par, y de 5 porque al sumar un par de veces el 5, siempre obtengo una o más decenas, y además como las unidades son cero, recordemos que el cero es múltiplo de todos los números con excepción de él mismo.

Observemos también en este caso que la única cifra de las unidades que es múltiplo de 10 es **cero**.

Actividad en parejas: Divisibilidad para once

1. Lean el siguiente enunciado:

Divisibilidad para once

Un número es divisible para once cuando la diferencia entre la suma de las cifras de orden par con la suma de las cifras de orden impar resulta un múltiplo de 11.

2. Contesten las siguientes preguntas:

- a. ¿Conocen ustedes la demostración de este criterio? ¿Por qué se cumple el enunciado de arriba?
- b. Si tienen una sola unidad y la dividen entre 11, ¿cuánto les sobra?
- c. Si tienen una decena ¿cuánto les falta?
- d. Si tienen una centena ¿les sobra o les falta? ¿Cuánto?
- e. Escriban a partir de esto la demostración del enunciado en una hoja y entréguesela al instructor.

Actividad en grupo: Divisibilidad para trece

1. Formen grupos de 4 personas y lean el siguiente criterio:

Divisibilidad para trece

Para reconocer si un número mayor de tres cifras es divisible para 13, separamos las cifras del número en grupos de 3 de derecha a izquierda; luego restamos el primer grupo menos el segundo, siempre tomando en cuenta que el resultado sea positivo, más el tercer grupo menos el cuarto; etc. Si la diferencia que nos queda es múltiplo de 13 el número inicial también es múltiplo de 13.

2. Sigán la demostración que hemos hecho con la divisibilidad para once y construya una demostración del criterio de divisibilidad para trece.
3. Comiencen por preguntarse: si tenemos una sola unidad, ¿cuánto nos sobra?
4. Si tenemos una decena, ¿cuánto nos falta?.
5. Entreguen la demostración en hoja individual al instructor.

Actividad en parejas: Múltiplos y divisores

Contesten las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos múltiplos tiene un número?
2. ¿Cuántos divisores como mínimo? ¿Y como máximo?
3. ¿Qué número es divisor de todos los números?
4. ¿Qué número *no* es divisor de ningún otro número?
5. Escriba sus respuestas en una hoja y entréguesela al instructor.

Actividad plenaria

Discutan con los demás participantes las respuestas a la actividad anterior.

Para reflexionar:

No olvidemos que el 1, es el único número que tiene un solo divisor; todos los demás tienen por lo menos dos divisores, el 1 y el mismo número.

Tomando en cuenta este criterio, (el número de divisores), los números enteros se clasifican en primos y compuestos; denominándose primos a los que tienen dos divisores y compuestos a los que tienen más de dos divisores.

Por lo antes expuesto introducimos el siguiente concepto.

Números Primos

Toman este nombre aquellos números que solamente tienen dos divisores, ellos mismos y la unidad. Recuerde que hay un único par primo que es el 2, todos los demás números primos son impares.

Actividad en parejas: Números primos menores que 100

1. Encuentren los números primos menores que 100.
2. Revisen las respuestas en el pizarrón con el docente.

Tarea Individual

1. Revise la matriz de autoevaluación y aplíquese la usted mismo.
2. Detalle tres ventajas y tres desventajas sobre esta forma de evaluarse.
3. ¿Cree usted que podría utilizar matrices de evaluación en la clase que imparte a sus estudiantes?
4. Dé un ejemplo de un tema en el que podría aplicar esta herramienta.
5. Coméntelo frente al grupo en la próxima sesión.

Actividad individual

Matriz para autoevaluación

	2,5 - 2,0	1,9 - 1,4	1,3 - 0,8	0,8 - 0,3
EXPERIENCIAS PREVIAS 25% (2, 5/10)	Escucho con atención el aporte de mis compañeros y lo valoro; mis experiencias propias enriquecen mis conceptos; mis respuestas son pertinentes y participo activamente en plenaria.	Escucho con atención el aporte de mis compañeros y lo valoro; mis experiencias propias enriquecen mis conceptos; mis respuestas no son siempre pertinentes y no participo activamente en plenarias.	Escucho con atención el aporte de mis compañeros y lo valoro; mis experiencias propias no enriquecen mis conceptos; mis respuestas no son pertinentes y no participo activamente en plenarias.	Escucho con atención el aporte de mis compañeros, pero no lo valoro; mis propias experiencias no enriquecen mis conceptos; mis respuestas no son pertinentes y no participo activamente en plenarias.
	3 - 2,4	2,3 - 1,7	1,6 - 1,0	0,9 - 0,3
PROCESO 30% (3/10)	Conozco y empleo adecuadamente el lenguaje matemático; utilizo la información proporcionada en el texto, por el instructor, y otras fuentes; justifico la aplicación de la simbología en las demostraciones, cumpliendo con todos los planteamientos propuestos.	Conozco y empleo adecuadamente el lenguaje matemático; utilizo la información proporcionada en el texto, por el instructor y otras fuentes; justifico la aplicación de la simbología en las demostraciones, pero no cumpla con todos los planteamientos propuestos.	Conozco y empleo adecuadamente el lenguaje matemático, utilizo la información proporcionada en el texto, por el instructor y otras fuentes, no justifico la aplicación de la simbología en las demostraciones, y no cumpla con todos los planteamientos propuestos.	Conozco el lenguaje matemático, pero no lo empleo adecuadamente, no utilizo la información proporcionada en el texto, por el instructor y otras fuentes, no justifico la aplicación de la simbología en las demostraciones y no cumpla con todos los planteamientos propuestos.
	4,5 - 3,4	3,3 - 2,2	2,1 - 1,0	0,9 - 0
APLICACIÓN 45% (4, 5/10)	Mis demostraciones presentan una secuencia lógica, logro discernir y transferir mis conocimientos a otros sistemas de la ciencia, a otras ciencias y demuestro creatividad.	Mis demostraciones presentan una secuencia lógica, logro discernir y transferir mis conocimientos a otros sistemas de la ciencia, a otras ciencias, pero no demuestro creatividad.	Mis demostraciones presentan una secuencia lógica, no logro discernir y transferir mis conocimientos a otros sistemas de la ciencia, a otras ciencias, y no demuestro creatividad.	Mis demostraciones no siempre presentan una secuencia lógica, no logro discernir y transferir mis conocimientos a otros sistemas de la ciencia, a otras ciencias, y no demuestro creatividad.

Demostraciones de las divisibilidades propuestas

Divisibilidad para 2

Sea el número $abcd$ una cantidad de 4 cifras, entonces d serán las unidades, c las decenas, b las centenas y a las unidades de mil, pudiendo expresarse este número como abc decenas, más d unidades. Como toda decena es múltiplo de 2 para que todo el número sea múltiplo de 2 es obligatorio que d también sea un múltiplo de 2.

Divisibilidad para 3

Sea bcd un número de tres cifras, entonces:

$$bcd = 100b + 10c + d \quad \text{expresando el número en notación canónica}$$

$$110b + 10c + d = 99b + 9c + (b + c + d) \quad \text{descomponiendo convenientemente,}$$

Si de tres sumandos, dos de ellos son múltiplos de 3, en este caso podemos asegurar que cada uno de los dos primeros sumandos es múltiplo de 3, porque cada sumando a su vez es un producto de un factor múltiplo de 3, y de un dígito cualquiera; en consecuencia, el tercer sumando, (que es la suma de las cifras del número), también debe serlo para que la suma sea múltiplo de 3. Queda entonces demostrada la regla arriba enunciada.

Ejemplos:

$$741 = 100(7) + 10(4) + 1 = 99(7) + 9(4) + (7 + 4 + 1)$$

Si divido esta última expresión para 3, puedo darme cuenta que $99(7)$ es un múltiplo de 3 porque el factor 99 contiene exactamente a 3, igual cosa ocurre con $9(4)$ puesto que el factor 9 contiene exactamente a 3, entonces sólo me resta verificar si el tercer sumando, es decir la suma de las cifras del número es divisible para 3, que en este caso sí lo es. Como lo de los dos primeros sumandos siempre ocurre, basta con comprobar si la suma de las cifras es divisible para 3 para que el número sea divisible para 3.

Divisibilidad para 4

Es correcto el enunciado propuesto, porque al separar las dos últimas cifras de un número, el resto de cifras que quedan, constituyen las centenas del número y por cierto, toda centena es múltiplo de 4; por lo que las dos últimas cifras deben formar un múltiplo de 4, para que todo el número sea múltiplo de 4.

Conozcamos una forma de demostrar cuándo un número es divisible para 4.

Buscando una forma que sea más fácil de comprender por parte del estudiante, me he permitido cambiar el enunciado anterior, por el siguiente:

Un número será múltiplo de 4 en los siguientes casos:

Primero: Si la cifra de las decenas es impar, la cifra de las unidades deberá ser: 2, 6;

Segundo: Si la cifra de las decenas es par, las unidades serán: 0, 4, 8.

Ejemplos:

2796, si observamos este número nos daremos cuenta que la cifra de las decenas es impar, como la regla dice que siendo impar debe terminar en 2 o en 6 para ser múltiplo de 4, en este caso la regla se cumple por lo que 2796 sí es múltiplo de 4.

37582, en este caso la regla no se cumple, porque la cifra de las decenas es par, y las unidades deben ser 0, 4, 8; y no 2 como en el presente caso. Podemos afirmar que 37582 no es divisible para 4.

Divisibilidad para 5

Si sumamos un número impar de veces el número 5, la suma siempre termina en 5, de lo que se concluye que todo número impar multiplicado por 5, termina en 5; y todo número par multiplicado por 5 termina en cero.

Divisibilidad para 6

Si dos números a y b , primos entre sí o coprimos, son divisores de otro número c , entonces el producto ab , también será divisor de c .

Ejemplos:

2 y 3 son primos entre sí, o coprimos, por no tener ningún factor común distinto de la unidad; 18 es múltiplo de 2 por ser par, y también es múltiplo de 3 porque la suma de sus cifras es 9, por lo tanto 18 es también múltiplo de 6, como en efecto lo es, por contenerlo exactamente tres veces.

4 y 6 no son coprimos, 12 es múltiplo de 4, también es múltiplo de 6; sin embargo, 12 no es múltiplo de 24, que es el producto de 4 por 6.

Un número que sea múltiplo de 2 y de 5 al mismo tiempo, obligatoriamente terminará en cero, y por lo tanto será múltiplo de 10, el producto de 2 y 5, que son coprimos. Se puede pensar erróneamente que es necesario que los números sean primos, esto no es verdad, puesto que por ejemplo 72 es múltiplo de 4, y también es múltiplo de 9, pero también 72 es múltiplo de 36, el producto de 4 y 9. Como vemos en este ejemplo ni el 4, ni el 9 son primos, pero los dos son coprimos.

Divisibilidad para 7

Regla para encontrar el producto de un número por siete:

- Tomo la tercera parte del número, obteniendo así las unidades del producto.
- Duplico la cantidad de unidades que obtuve, siendo esta cantidad las decenas del producto.
- Si la cantidad de unidades obtenidas, es mayor que 9, tengo que sumar la cifra de las decenas a las decenas obtenidas por el duplo de las unidades.

Ejemplos:

$$18 \times 7 =$$

- La tercera parte de 18 es 6 (unidades).
- Duplico $6 \times 2 = 12$ (decenas).
- En este caso la cantidad de unidades es menor que 9, por lo tanto el producto de 18×7 es 126.

$$45 \times 7 =$$

- La tercera parte de 45 es 15 unidades (15 es mayor que 9, por lo que tendré que sumar 1 a las decenas del duplo).
- El duplo de 15 es 30. $30 + 1 = 31$ (decenas), por lo que el producto de 45×7 es 315.

Multiplicar por siete equivale a multiplicar la tercera parte del número por 21.

Al restar el duplo de la última cifra estoy restando un número múltiplo de 21; si la diferencia es múltiplo de 7, entonces este número será también múltiplo de 7, puesto que 21 es el producto de 3 x 7, números que son coprimos.

Ejemplo:

Deseo saber si 3948 es múltiplo de 7, separando la última cifra y restando el duplo de esta cifra de 394, obtengo 378; separando la última cifra (8), y restando el duplo de esta cifra, de 37, obtengo 21, por lo que 3948 sí es múltiplo de 7.

Observemos el número 112, separamos la última cifra, restando el duplo de esta cifra obtenemos: $11 - 4 = 7$, por lo que 112 sí es múltiplo de 7.

Con este mismo criterio se puede averiguar si un número es múltiplo de 17, separando la última cifra, multiplicándola por 5, restando este producto de la cantidad que nos queda al quitar la última cifra, así sucesivamente, hasta tener un número pequeño del cual pueda afirmar que es o no múltiplo de 17.

¿Por qué se cumple esto? Pues simplemente porque multiplicar por 17 es lo mismo que multiplicar la tercera parte del número por 51.

Ejemplo:

Deseo saber si 1972 es múltiplo de 17:

197 2	separo la última cifra del número 1972, que es 2,
- 10	multiplicando el 2 por 5
18 7;	vuelvo a separar la última cifra que es 7
- 35	vuelvo a multiplicar 7 x 5
17	como el 35 es mayor que 18, al restar me da 17; entonces 1972 sí es múltiplo de 17.

Divisibilidad para 8

Si a un número se le separan sus tres últimas cifras, las que quedan serán los miles del número, como cualquier cantidad de miles es múltiplo de 8, las tres últimas cifras, que fueron separadas, deben formar un múltiplo de 8, para que todo el número sea múltiplo de 8.

Sería más fácil de reconocer si un número es múltiplo de ocho, cuando la mitad del número que formen las cifras separadas cumpla la regla de la divisibilidad para 4.

Ejemplos:

1472 es un múltiplo de 8 porque la mitad de 472, es decir, 236 es un múltiplo de 4, por cuanto la cifra de las decenas es impar y la de las unidades es 6.

3579244 no es divisible para 8 porque la mitad de 244, es decir, 122 no es múltiplo de 4, puesto que las decenas son par y las unidades es 2.

Divisibilidad para 9

La demostración de la divisibilidad para 9 es idéntica a la que realizamos para demostrar la divisibilidad para 3, recordemos que:

bcd es un número de tres cifras,

Expresándolo en notación canónica: $bcd = 100b + 10c + d$

Descomponiendo esta última expresión: $100b + 10c + d = 99b + 9c + (b + c + d)$

Observamos que los dos primeros sumandos son múltiplos de 9, por lo que el tercer sumando, es decir $b + c + d$, debe también ser múltiplo de 9 para que la suma sea múltiplo de 9.

Ejemplos:

Veamos si 2346813 es divisible para 9; sumando sus cifras se obtiene 27, que es múltiplo de 9, por lo que 2346813 sí es múltiplo de 9.

Divisibilidad por 10

Lo indicamos en un ejemplo anterior que si un número es múltiplo de 2 y de 5 al mismo tiempo, debe terminar en cero, y por lo tanto será múltiplo de 10.

Divisibilidad por 11

a. Observen con atención el siguiente cuadro con el que les proponemos una demostración.

CANTIDAD	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
RESTOS	-1	1	-1	1	-1	1

Se puede observar que las potencias pares de diez dejan resto 1 positivo, mientras que las impares dejan resto 1 negativo, cada uno de estos restos se multiplica por el dígito correspondiente a cada potencia, por lo que la regla arriba enunciada se cumple.

Ejemplos:

Si el número es de dos cifras obviamente éstas deben ser iguales, puesto que la diferencia será cero, que es múltiplo de 11, no existe otra posibilidad.

Si el número es de tres o más cifras ya se puede aplicar la regla de la divisibilidad para 11, veamos:

Deseo saber si el número 435678 es múltiplo de 11.

Sumo las cifras de orden par: $8 + 6 + 3 = 17$

Sumo las cifras de orden impar: $7 + 5 + 4 = 16$

Establezco la diferencia de las sumas: $17 - 16 = 1$

Como 1 no es múltiplo de 11 se concluye que el número 435678 no es múltiplo de 11; para que tengamos un número múltiplo de 11 basta restar 1 a cualesquiera de las cifras de orden par, o sumar 1 a cualesquiera de las cifras de orden impar, entonces podemos afirmar que el número 425678 sí es múltiplo de 11. Encuentre rápidamente cinco números que sean múltiplos de 11.

Divisibilidad por 13

Escriban un número de tres cifras, mejor si las cifras son distintas; a la derecha de este número repitan las cifras en el mismo orden; dividan este número de seis cifras para 13, ahora dividan el resultado para 11 y este nuevo cociente divídanlo para 7. ¿Verdad que el resultado es sorprendente?

Esto no es ningún truco, simplemente al repetir las tres cifras, multiplicaron el número inicial de tres cifras por 1001, que es un múltiplo de 13.

Al establecer la diferencia entre los grupos de tres cifras, lo que estamos haciendo es restando un múltiplo de 1001, que a su vez es múltiplo de 13, por lo que si el resto es divisible para 13, también el número inicial será múltiplo de 13.

Ejemplos:

Establezca si los siguientes números son divisibles para 13:

426829; restamos $829 - 426 = 403$ que es múltiplo de 13 puesto que observamos que $403 = 390 + 13$, ambos sumandos son múltiplos de 13. De esto se deduce que 426829 es divisible para 13.

57356; restamos $356 - 57 = 299$, que sí es múltiplo de 13, puesto que $299 = 260 + 39$, ambos sumandos múltiplo de 13. Deducimos que 57356 es divisible para 13.

Este mismo criterio se puede aplicar para reconocer si el número es divisible para 7, o para 11; para ello la diferencia entre los grupos de tres cifras debe ser múltiplo de 7, o de 11.

835247; restamos $835 - 247 = 588$, a este número podemos tomarle la séptima y constatar que es múltiplo de 7, por lo que deducimos que 835247 también es divisible para 7.

28622; restamos $622 - 28 = 594$, como la cifra del medio es la suma de las otras dos cifras del número, afirmamos que 594 es múltiplo de 11, por lo que deducimos que 28622 también es múltiplo de 11.

Algunas demostraciones de divisibilidades por congruencia numérica

A. Divisibilidad por 2

Tenemos que $10^k \equiv 0 \pmod{2}$ para $k = 1, 2, \dots, n$, por Corolario del Lema 1

Por lo tanto, $a_k \cdot 10^k \equiv 0 \pmod{2}$, por la propiedad 4) del Lema 3

Si $a_0 \equiv 0 \pmod{2}$ (es decir, si a_0 es número par), entonces

$$a_0 \equiv 0 \pmod{2}$$

$$a_1 \cdot 10 \equiv 0 \pmod{2}$$

$$a_2 \cdot 10^2 \equiv 0 \pmod{2}$$

.....

$$a_n \cdot 10^n \equiv 0 \pmod{2}$$

Sumando estas congruencias se tiene

$$z \equiv 0 \pmod{2}$$

lo cual significa que z es divisible por 2.

De aquí se obtiene la regla :

A) Si un entero termina en cifra par, entonces es divisible por 2

B. Divisibilidad para 3

Tenemos que $10^k \equiv 1 \pmod{3}$ para $k = 1, 2, 3, \dots, n$

Además $a_0 \equiv a_0 \pmod{3}$

$a_1 \cdot 10 \equiv a_1 \pmod{3}$ por la propiedad 4) del lema 3

.....

$a_n \cdot 10^n \equiv a_n \pmod{3}$

Sumando estas congruencias, resulta

$$z \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \pmod{3}$$

9 Problemas de aplicación de divisibilidad



■ SESIÓN 9 Duración: 2 horas

Objetivos

- Comprender la importancia de reflexionar acerca de cómo se hizo un determinado ejercicio.
- Reflexionar acerca del uso de materiales “alternativos” en la clase de matemáticas.
- Utilizar la divisibilidad y la congruencia numérica en la solución y elaboración de problemas.
- Demostrar la necesidad de la utilización de los criterios de divisibilidad en la resolución de problemas.
- Aplicar estos criterios en la solución de problemas.

Contenidos

- Resolver problema donde se aplica la divisibilidad.
- Resolver problema donde se aplica la congruencia numérica.
- Lectura *Algunas reflexiones sobre las funciones de las demostraciones matemáticas* (parte II).
- Viñetas con Mafalda para reflexión.

Actividad plenaria

Comparta sus respuestas del deber con los demás participantes y luego entréguelo.

Actividad en parejas: Problema de aplicación

1. Resuelvan el siguiente problema. Mientras lo hacen, anoten los pasos que van siguiendo para resolverlo. (No es necesario el uso de calculadoras).

Problema:

En la ciudad de Quito hay $716a5b$ votantes que deben regresar a sus hogares, a quienes se ha ofrecido transportarlos en buses con capacidad para 36 personas. ¿Cuáles son los valores de la suma de $a + b$ a fin de que todos los buses vayan llenos, y no quede ninguna persona sin este servicio?

Actividad plenaria

Compartan con los demás participantes cómo resolvieron el problema y cuáles son los pasos que siguieron.

Actividad individual: Reflexión acerca del proceso

1. Lea ahora el siguiente proceso de resolución de problemas planteado por Pólya.
2. ¿Encuentra alguna similitud o diferencia entre el procedimiento planteado por Pólya y el suyo?
3. Escriba sus respuestas en una hoja y entréguesela al instructor.

Pasos para resolver un problema (Pólya)

1. Lea el problema.
2. ¿Tiene un plan para resolverlo? Discútalos con su compañero.
3. ¿Ha resuelto algún problema parecido, o que tenga alguna relación con este problema?
4. ¿Cuándo un número es divisible para seis?
5. ¿Tiene el problema alguna conexión o relación con la pregunta anterior?
6. ¿Puede expresar esa relación?
7. Revise las reglas para llegar a la solución.

NOTA ACLARATORIA: Ésta es una versión ampliada. Pólya tiene 4 pasos básicos.

Actividad en parejas: Demostraciones en matemáticas (Parte II)

1. Lean el texto: *Algunas reflexiones sobre las funciones de las demostraciones matemáticas* (Parte II).
2. Tomando en cuenta las cuatro lecturas realizadas contesten y recordando cómo aprenden a resolver sus estudiantes problemas en el aula, contesten las siguientes preguntas:
 - a. Describan las diferencias con respecto a lo que se ha planteado en las cuatro lecturas anteriores.
 - b. Relacionen las cuatro lecturas anteriores con lo realizado para resolver el último problema.
¿Creen ustedes que tiene ventajas esta nueva forma de plantear la resolución de problemas? De ser así, ¿cuáles son?
 - c. ¿Qué indicadores les sirvieron para establecer las comparaciones?
 - d. Replanifiquen una clase de Matemáticas donde se aplique el método problémico propuesto por Pólya. (ver Anexo 4: "Las ideas de Pólya en la resolución de problemas").

Lectura: Algunas reflexiones sobre las funciones de las demostraciones matemáticas (Parte II)

María de Lourdes Bravo Estévez, Universidad de Cienfuegos, Cuba
José Joaquín Arrieta Gallastegui, Universidad de Oviedo, España

(...) Esta posición implica entregar la demostración de manera ya decodificada, lo cual entendemos que supone plantear una actividad con poco significado, que se olvida habitualmente al cruzar las fronteras del aula. Compartimos la idea de Recio (2001) cuando afirma que *lo que arroja comprensión es la acción de intentar demostrar personalmente o al menos intentar descifrar personalmente una demostración de otro.*

Tradicionalmente se ha intentado desarrollar la habilidad “demostrar” en Matemáticas, además de intentar concretar las funciones aportadas por dichos autores, pretendemos contribuir al desarrollo de una función *formativa*, de forma más integradora, como explicamos a continuación.

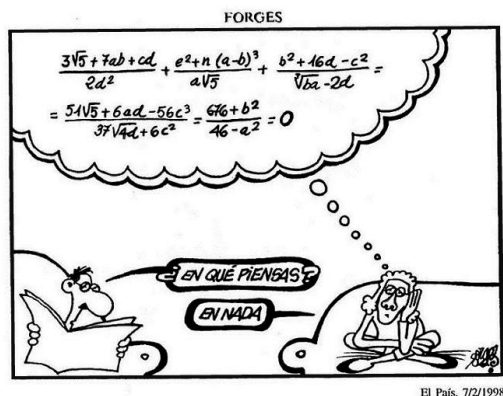
Es indispensable significar el valor de que los estudiantes apliquen en la práctica el saber y el poder adquiridos, para comprender de forma más exacta cómo por medio de sus conocimientos es posible describir procesos de la realidad objetiva, a la necesidad del porqué vincular la teoría con la vida para fundamentar y/o demostrar los fenómenos que ocurren. Todo esto contribuye a la *consolidación* más duradera de los conocimientos, así como a la *formación de una concepción científica* del mundo. Por eso la relación entre la teoría y la práctica debe tenerse en cuenta también como un principio didáctico en cada clase, buscando siempre que sea posible, los nexos entre las demostraciones de teoremas y conceptos con sus aplicaciones y hechos de la vida diaria.

Por otra parte, debe evitarse que con la adquisición de conocimientos que se transmiten en las aulas, los estudiantes tengan la idea de que la asignatura de matemáticas es sólo el sistema de conocimientos que ellos reciben, una noción de teorías acabadas, que tiene una validez absoluta, para que, en su lugar, acepten sin dificultades nuevas y variadas teorías que nieguen dialécticamente, completen y abarquen a las anteriores. Sin embargo, los conocimientos recibidos previamente son ciertos, reflejan de forma objetiva la parte de la realidad estudiada, pero los estudiantes, con los escasos recursos de que dispone deben *verificarlos* por sus propios medios, *comprobando* y *convenciéndose* a sí mismos y al resto de las personas que interactúan con ellos.

De esta forma los estudiantes van vinculando los entes matemáticos con los objetos del mundo real y las propiedades de ellos dadas por las definiciones, teoremas y sus demostraciones con sus relaciones y leyes.

Poniéndose de manifiesto la dialéctica de la verdad absoluta y la verdad relativa. Es decir, la dialéctica entre los conocimientos relativos, que encierran un contenido objetivamente verdadero que se conserva en el proceso de adquisición de los conocimientos, y los conocimientos incompletos, no definitivos en su reflejo de la naturaleza, la sociedad y el pensamiento. Se contribuye así, a través de la enseñanza de las demostraciones a ampliar su *formación filosófico-ideológica*.

En este proceso se llega a propiedades que son para el estudiante *descubrimientos*, pues hasta el momento le eran desconocidas, a la vez que va *explicando* el porqué de la necesidad de su demostración.



Punto de sumo cuidado también es el de no caer en el formalismo con la elaboración de los teoremas y sus demostraciones, evitar que se reproduzcan demostraciones fijando un patrón, y que sean capaces de *interpretar, valorar o comprender* las mismas cuando se varían algunas de las condiciones iniciales. Por ello, debe darse paso a la realización de una amplia ejercitación y aplicación de los teoremas y sus demostraciones de forma gradual y sistemática, a la *explicación* de todas las posibles variantes mediante la *reflexión* individual y/o colectiva de cada posible vía de solución, donde los estudiantes *buscan, discuten y analizan* diferentes formas de proceder, diversas vías de solución y múltiples posibilidades de modelar situaciones bajo la *sistematización y actualización* de los conocimientos. Así es posible que se ponga de manifiesto el *pensamiento creativo y la fantasía, el pensamiento lateral o divergente, el pensamiento especulativo, el pensamiento heurístico y el pensamiento lógico-deductivo*.

Al modelar la situación a través de una figura geométrica de análisis debe tenerse en cuenta la *estética*, reflejada en la limpieza, el cuidado, el esmero y la curiosidad en los trazos en función de que las representaciones de las figuras tridimensionales tienden a desfigurarse en el plano, por lo que deben ser lo más legible posible. Esta cualidad es además un rasgo de la *ética pedagógica* por la que se rige la formación de docentes en Matemáticas. También se da paso al *desarrollo del pensamiento geométrico espacial*, como un reflejo generalizado del espacio físico tridimensional basado en modelos, el cual se manifiesta cuando los estudiantes forman un sistema de conceptos y relaciones mediante abstracción del espacio real, en que pueden representar, mediante dibujos o modelos reflejos del espacio e imaginar nuevos cuerpos y relaciones geométrico-espaciales.

Precisamente en el debate de las vías de solución, de las figuras pertinentes, en los aportes de la demostración, debe exigirse una correcta expresión oral, no considerada sólo como un medio de comunicación, sino también como una manifestación del pensamiento. Esto se debe a que el hecho de exigir una expresión adecuada contribuye a la *formación lingüística*, al desarrollo del lenguaje propiamente matemático con la utilización correcta del vocabulario técnico de la disciplina y se ponen de manifiesto rasgos de la conducta como son *el rigor de sus razonamientos, la exigencia y el carácter reflexivo*.

A los efectos de la formación multilateral de los estudiantes, del desarrollo de su pensamiento y de su lenguaje, tiene también el trabajo con teoremas matemáticos y sus demostraciones una poderosa influencia sobre el desarrollo de capacidades generales para *argumentar, fundamentar, inferir, refutar y deducir*.

Las demostraciones también contribuyen al desarrollo de operaciones mentales generales, tales como *abstraer, concretar, analizar, sintetizar, comparar, clasificar, particularizar y generalizar*.

Se destaca la importancia del proceso seguido por encima del resultado, por lo que brinda *métodos y procedimientos* de trabajo, no sólo es la proposición de la demostración para el enriquecimiento del cuerpo teórico que ampliará el estudiante para sí mismo/a, sino el procedimiento y método empleado que constituye un modelo para otras demostraciones.

Al tratar las demostraciones, los docentes deben propiciar un dominio de acciones, de procedimientos heurísticos y métodos de demostración, de solidez de los conocimientos para su aplicación segura, de forma que contribuyan a trabajar de modo *racional, planificado y orientado*. Al plantear exigencias a los estudiantes para evaluar el rendimiento de sus compañeros en las demostraciones, para discutir soluciones verdaderas y falsas, para juzgar propuestas y asumir posiciones, se manifiestan cualidades como la *sinceridad, la crítica y la autocrítica*.

Por todos es conocido que las demostraciones de proposiciones matemáticas son un punto neurálgico para los estudiantes en el estudio de las Matemáticas, por lo que hay que incentivar la *tenacidad, perseverancia, esfuerzo, disciplina y constancia* a lo largo del proceso de resolución de un problema de demostración, para así llegar a lograr la *independencia* en la realización de éstas, se convierte en un *reto intelectual* ante el deseo de adquirir nuevos conocimientos, métodos de trabajo y desarrollo del pensamiento en sentido amplio.

No olvidar que los docentes pueden realizar valoraciones del comportamiento de sus estudiantes en el proceso de demostración ante el colectivo, estimulando las actitudes positivas y señalando las que aún deben ser mejoradas, la atención personalizada y el respeto a la diversidad. De esta manera, se propicia el *compañerismo*, la *complacencia* y la *conducta colectiva*.

Si integramos lo que reporta el proceso de *demostrar* desde lo instructivo y lo educativo, concluimos, a la vez que ampliamos, el conjunto de funciones descritas en el apartado anterior con la función *formativa*.

Si trabajamos con las demostraciones hasta convertirlas en una actividad significativa y necesaria; entonces, desde nuestro punto de vista, perdurarán en la formación profesional de los estudiantes, de tal manera que podrán transmitir sus significados a otros individuos, logrando así el verdadero papel de los problemas de demostración en el currículo de las Matemáticas, en las diferentes enseñanzas según corresponda a su posterior actividad profesional.

Por tanto, es indiscutible el destacado aporte del tratamiento de las demostraciones al proceso docente educativo desde las tres dimensiones citadas por Álvarez (1999), a saber, las dimensiones instructiva, educativa y desarrolladora, pues permiten fijar el sistema de conocimientos, el sistema de habilidades y de valores de una determinada asignatura y/o disciplina, entre otros aspectos. Es un recurso didáctico universal para desarrollar conocimientos, habilidades y valores; de aquí su importancia en la formación de docentes y, por ende, en la enseñanza en general. Luego de abordar y fundamentar las funciones de la demostración, reflexionamos ante el interesante interrogante de Recio (2001:1) cuando se pregunta: “¿Es posible, es conveniente, es necesario enseñar a demostrar en la Geometría que se imparte en un sistema educativo generalizado?”

En correspondencia con los estudios de investigaciones realizados, la propia experiencia profesional, las opiniones hasta el momento expresadas y respetando los criterios de voces autorizadas que puedan ser opuestos a los argumentos que exponemos, nuestra respuesta es la siguiente:

- Sí es posible enseñar a *demostrar* en un sistema educativo generalizado, teniendo en cuenta los diferentes niveles de demostración, en correspondencia con los objetivos de cada enseñanza y las características tanto individuales como colectivas de los estudiantes, del contexto y del momento.
- Sí es conveniente enseñar a *demostrar* en un sistema educativo generalizado, dada la riqueza de las distintas funciones de la demostración, como hemos visto, por su carácter formativo e integral; es decir, por integrar lo cognitivo en lo educativo en sentido general.
- Sí es necesario enseñar a *demostrar* en un sistema educativo generalizado, como lo puede ser saber contar, a partir de su utilidad práctica como elemento que contribuye, entre otros, al desarrollo del pensamiento, de operaciones mentales generales, de habilidades generales y específicas, así como a la formación lingüística, aspectos son todos ellos de gran utilidad para preparar a las personas a enfrentarse de una forma más racional a la solución de los problemas que se les pueden presentar en su quehacer diario.

Las tres respuestas se relacionan entre sí, una no responde las interrogantes que encierra la pregunta, porque cada una de ellas tiene sus atenuantes que la fundamentan desde el proceso docente educativo generalizado, y su consecuente importancia para que los docentes en formación aprendan a *demostrar* para luego poder enseñarlas.

En resumen, defendemos en este trabajo que las demostraciones van mucho más allá de lo que a enseñanza y aprendizaje se refiere, llegando a los marcos educativos. Así, concluimos que la enseñanza de las demostraciones geométricas tiene un significativo valor educativo, pues cumplen con una función formativa esencial.

En la enseñanza de las demostraciones geométricas se concatenan lo cognoscitivo con lo educativo. Potenciar lo último conlleva a una educación más integral, donde se buscan los modos de actuación, en el caso de las carreras pedagógicas con la formación del profesorado.

Bravo Estevez, Ma. De Lourdes; Arrieta Gallástegui, José Joaquín. "Reflexiones sobre las funciones de las demostraciones matemáticas". *Revista Iberoamericana de Educación*. En: <http://www.rieoei.org/deloslectores/838Bravo.PDF>. En línea: 25-10-2009.

Actividad individual: "Libertad y las matemáticas"

Observe la siguiente secuencia, relaciónela con las dos últimas lecturas y responda las preguntas de Mafalda.



1. ¿Cómo interpreta usted la expresión en el rostro de Mafalda?
2. ¿Cuál habrían sido sus respuestas a las preguntas de la docente?
3. De acuerdo con todas las lecturas anteriores, ¿por qué cree que Libertad proporciona esas respuestas?
4. ¿Es el lenguaje matemático un idioma universal?
5. ¿Qué características le atribuye usted al pensamiento matemático?
6. ¿Qué hace usted como docente para que sus estudiantes desarrollen ese pensamiento en el aula?
7. Realice una nueva secuencia de cómo le gustaría que suceda en su aula.
8. ¿Cómo se sintió usted trabajando con tiras cómicas en esta actividad?

Actividad plenaria

Compartan sus respuestas a la actividad anterior. Debatan al respecto y busquen un acuerdo entre todos.



10

Propiedades de la suma y resta: operaciones y problemas



■ SESIÓN 10 Duración: 2 horas

Objetivos

- Reforzar el concepto de mínimo común múltiplo, a través del aprendizaje basado en problemas.
- Reflexionar sobre el rol del docente frente al proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Incentivar el uso de las plantillas de fracciones, para realizar demostraciones simbólicas, previo a la abstracción algebraica.
- Reconocer que estas operaciones sólo se realizan con fracciones homogéneas.
- Aplicar las propiedades de la suma.
- Utilizar la suma y la resta en la solución y elaboración de problemas.

Contenidos

- Denominador común, sumas y restas con sustitución de piezas.
- Fracciones homogéneas y heterogéneas.
- Suma o resta de fracciones.
- Máximo común divisor (mcd).
- Mínimo común múltiplo (mcm).
- Las matemáticas en el antiguo Egipto.

Actividad individual: leyendo sumas y restas

1. Lea el texto *Denominador común, sumas y restas con sustitución de piezas*.
2. Siga las instrucciones del texto e interactúe con el material concreto, realizando sumas y restas con las plantillas de fracciones.

Denominador común, sumas y restas con sustitución de piezas

Una vez comprendido el concepto de fracciones equivalentes, revisado en la sesión 3 de la primera unidad, usted podrá explicar que para sumar es necesario hacerlo con el mismo tipo de elementos, para obtener un resultado adecuado; es decir, se deben sumar elementos de la misma naturaleza. Por ejemplo, si sumamos:

$$2 \text{ peras} + 3 \text{ peras} = 5 \text{ peras} \longrightarrow \text{análogamente: } 1/3 + 2/3 = 3/3$$

Podemos ver que si sumamos tercios con tercios, se suman sólo los numeradores y el resultado final serán tercios; pero si sumamos cuartos con medios, el resultado final deben ser cuartos o medios, para lo cual es necesario usar fracciones equivalentes.

Utilizando las plantillas de fracciones, podemos visualizar que: $2/4 + 1/4 = 3/4$

En la forma matemática notamos que sólo se suman los numeradores, porque las dos fracciones tienen de denominador común el 4.

Si sumamos en las plantillas de fracciones $1/4 + 1/2$, obtenemos un resultado que debemos expresar en cuartos, porque sería imposible determinarlo en medios. Entonces, hay que convertir $1/2$ en su fracción equivalente expresada en cuartos:

$$1/2 = 2/4, \text{ luego sumamos } 1/2 + 1/4 = 2/4 + 1/4 = 3/4$$

Se puede comprobar y entender clara y objetivamente esta sustitución si se utiliza las plantillas de fracciones.

De manera idéntica se procede en la resta. Por ejemplo, para realizar la operación $7/8 - 1/4$, ubique, en la plantilla de fracciones, los $7/8$ y luego la parte correspondiente a $1/4$. Para continuar con la operación, es necesario que se igualen los denominadores de ambas fracciones; es decir que los dos casos se expresen en octavos. Entonces, deberá encontrar la fracción equivalente de $1/4$, que sería $2/8$. Así, la operación quedaría: $7/8 - 2/8 = 5/8$.

Actividad individual: Sumando y restando con las plantillas

1. Sume $2/8 + 3/8$ en las plantillas de fracciones.
2. Sume con las plantillas de fracciones y con la forma expresión matemática.
 $1/6 + 1/3$; $1/2 + 3/8$; $2/3 + 1/2$
3. Reste con las plantillas de fracciones y con la escritura matemática.
 $7/8 - 1/2$; $1/2 - 1/3$; $5/6 - 2/3$; $7/8 - 1/4$
4. Lea el texto *Fracciones homogéneas y heterogéneas*.



Lectura: Fracciones homogéneas y heterogéneas

Para establecer si las fracciones son homogéneas o heterogéneas debemos tener, por lo menos, dos fracciones para poder comparar sus denominadores. Se llaman fracciones homogéneas a aquellas que tienen el mismo denominador entre sí y heterogéneas a las que poseen distinto denominador. Observe:

Homogéneas: $26/7$ y $5/7$; $3/5$ y $11/5$

Heterogéneas: $6/13$ y $9/2$; $3/8$ y $3/10$, y todas entre sí.

Para transformar las fracciones heterogéneas en fracciones homogéneas, busque las fracciones equivalentes para igualar los denominadores; por ejemplo:

$6/11$ y $2/5$ son fracciones heterogéneas por tener distinto denominador.

pero si multiplica por 5 tanto el numerador como el denominador de la primera fracción, y por 11 a los términos de la segunda fracción, ambas se transforman en fracciones homogéneas por tener el mismo denominador:

$$6/11 \times 5/5 = 30/55; 2/5 \times 11/11 = 22/55 \implies 30/55 \text{ y } 22/55 \text{ son fracciones homogéneas.}$$

Suma o resta de fracciones



Solamente podemos sumar o restar fracciones homogéneas. Para poder sumar o restar fracciones heterogéneas, obligatoriamente debemos transformarlas en homogéneas.

- Si compra $1/2$ cartulina de dibujo y luego compra otro $1/2$ de una cartulina de igual tamaño que la anterior, es lógico que ha comprado: $1/2 + 1/2 = 2/2 = 1$; es decir que ha adquirido la cartulina completa.
- Para sumar fracciones, se suma los numeradores y se escribe el mismo denominador.
- Para restar fracciones, al numerador del minuendo reste el numerador del sustraendo y escriba el mismo denominador de las fracciones.
- Por ejemplo, para calcular $5/8 + 13/6$ debe encontrar fracciones que sean equivalentes a cada una de las fracciones anteriores y que además tengan igual denominador.
- Para que dos fracciones con igual denominador sean equivalentes a $5/8$ y $13/6$, sus denominadores deben ser múltiplos tanto de 8 como de 6. Es decir que se debe obtener el mínimo común múltiplo entre 8 y 6 para sacar el denominador común. En este caso es 24.
- Entonces, obtenga una fracción equivalente a $5/8$ que tenga el 24 de denominador por lo que amplifique la fracción por 3, así:

$$5/8 \times 3/3 = 15/24$$

- De la misma forma, para obtener una fracción equivalente de $13/6$ que tenga 24 de denominador, amplifique esta fracción por 4, así:

$$13/6 \times 4/4 = 52/24$$

Entonces:

$$5/8 + 13/6 = 15/24 + 52/24 = 67/24$$

Actividad en parejas: Construyendo ejemplos propios

1. Elaboren tres ejemplos que demuestren matemáticamente lo explicado en la lectura anterior, sobre suma y resta de fracciones.

Actividad plenaria

Compartan su trabajo con los demás participantes. Muestren los ejemplos que realizaron tanto con su expresión matemática como con las plantillas de fracciones.

Actividad en parejas: Análisis de problemas y reflexión didáctica

1. Contesten las siguientes preguntas:

- ¿Funciona el método de amplificación para la suma si el resultado es mayor que 1?
- ¿Funciona con fracciones impropias?
- ¿En qué situación el denominador común es igual al de uno de los sumandos?
- ¿En qué situaciones hay que multiplicar los denominadores de los sumandos?
- ¿Por qué tenemos que sumar con el método de amplificación y no podemos simplemente sumar los numeradores y los denominadores entre sí?
- Registren las respuestas en una hoja y entréguesela al instructor.
- Comenten las respuestas con sus compañeros.

2. Lean el siguiente problema y realicen las actividades detalladas a continuación.

Los estudiantes de un instituto se pueden repartir en un número exacto de grupos de 36, de 30 y también de 16 personas. ¿Cuál es el número de estudiantes de este instituto si se conoce que el número total de matriculados no llega a 1000?

Contesten:

- ¿Tienen un plan para resolver el problema?
- ¿Han resuelto algún problema parecido o que tenga alguna relación con éste?
- Resuelvan el problema y anoten los pasos realizados hasta alcanzar su solución.
- ¿Cuándo se utiliza el mínimo común múltiplo?
- Analicen: ¿tiene este problema alguna relación con la pregunta anterior? Por qué?

3. Reflexionen acerca del problema y de su procedimiento para resolverlo. Registren sus conclusiones.

- ¿Cómo harían para que sus estudiantes resuelvan este problema?
- ¿De qué manera lo hicieron ustedes?
- ¿Cómo diseñarían su clase para generar espacios nuevos que permitan explorar diferentes formas de resolución para este tipo de problemas?
- Creen un nuevo problema a partir de éste.
- ¿Qué ventajas observan que tiene esta forma de trabajar con los estudiantes?
- ¿Cuál es el rol del docente frente al proceso de enseñanza-aprendizaje? (Leer anexo 1)

Actividad plenaria

Compartan su trabajo con los demás participantes, teniendo en cuenta:

- Los métodos y pasos que usaron para resolver el problema.
- Las estrategias que diseñaron para trabajar este tipo de problemas en sus clases.
- El nuevo problema que propusieron.
- Las reflexiones didácticas que surgieron de esta actividad.

Actividad en grupo: Usando el máximo común divisor

- Formen grupos de cuatro participantes.
- Lean el siguiente problema y realicen las actividades detalladas a continuación:

El camino que une el Palacio de Justicia, que se encuentra en las coordenadas (0,0) en la nueva nomenclatura del Municipio de Guayaquil, y el Gobierno del Litoral, que está en las coordenadas (120, 84), se recorrerá en tramos horizontales o verticales, todos de igual longitud, y en cuyos extremos existen coordenadas enteras. ¿Cuál es el mínimo número de tramos que puede tener el camino?

- Contesten: ¿tienen un plan para resolverlo? ¿En qué consiste?
 - Resuelvan el problema y anoten los pasos que aplicaron hasta alcanzar su solución.
 - Analicen: ¿tiene el problema alguna relación con la pregunta anterior? ¿Por qué?
- Lean el siguiente texto y comparen las ideas del mismo con las estrategias que ustedes usaron para resolver el problema.

La notación del máximo común divisor (mcd), es $(a:b)$ y se trata del mayor número entero positivo que es divisor de los números a y b .

El máximo común divisor no sólo es el mayor de todos los divisores comunes, sino que además es múltiplo de todos ellos.

Por consiguiente $a|b$ si y sólo si $(a:b) = a$. O, lo que es lo mismo, para que a sea el máximo común divisor de a y b , es necesario que a sea divisor de b .

Ejemplo:

$$(12:48) = 12 \text{ porque } 12|48$$

Diremos entonces que el mcd debe cumplir con las dos condiciones siguientes:

- $(a:b) = d$; por tanto d es divisor de a y de b .
- d es múltiplo de todos los divisores comunes de a y de b .

Esta definición podemos extenderla a cualquier cantidad de números.

$$(a:b:c:d:e) = ((a:b:c:d):e) = (((a:b:c):d):e) = ((((a:b):c):d):e)$$

Ejemplo:

$$(18:36:54:42) = ((18:36:54):42) = (((18:36):54):42) = ((18:54):42) = (18:42) = 6$$

Si $d = (a:b)$ entonces a/d y b/d son coprimos.

El máximo común divisor entre 84 y un número n es 14. ¿Cuál puede ser el resto de dividir n por 84?

$$\text{Sabemos que } n = 84k + r \quad 0 \leq r < 84$$

Entonces los divisores comunes entre n y 84 son los mismos que entre r y 84, por lo que $(n:84) = (r:84) = 14$; por esta razón r debe ser múltiplo de 14; digamos que $r = 14t$, con t menor que 6, porque si es mayor sería mayor que 84.

Si despejamos $t = r/14$ y $84/14 = 6$, se deduce que t y 6 deben ser coprimos, por lo que las únicas posibilidades para t son 1 y 5, que son coprimos con 6; mientras que el valor de $r = 14$ o $r = 70$.

Cálculo del máximo común divisor por diferencias sucesivas**Ejemplo:**

Para calcular el mcd de 360 y 220:

$$(360:220) = (140:220) = (140:80) = (60:80) = (60:20) = 20$$

Sin necesidad de conocer los divisores de a y b , y *simplemente restando*, aparece el máximo común divisor de a y b .

Aplicando el *algoritmo de Euclides*, sistematice convenientemente el método anterior de diferencias sucesivas.

Ejemplo:

Para calcular el mcd de 1580 y 255:

$$1380 = 5 \times 255 + 105$$

$$255 = 2 \times 105 + 45$$

$$105 = 2 \times 45 + 15$$

$$45 = 3 \times 15$$

$$(1380:255) = 15$$

Mínimo común múltiplo

Recuerde que se llama múltiplo a un número que al dividirlo por otro, la división es exacta.

Por ejemplo, 10 es múltiplo de 2, porque el primero contiene al segundo exactamente 5 veces.

De acuerdo con la definición anterior, el mínimo común múltiplo (mcm) es el menor número positivo que contiene, una cantidad exacta de veces, todos los números dados, un número exacto de veces.

Hay varios métodos para determinarlo:

- Por intersección de conjuntos.

$$\begin{aligned} A &= \{\text{múltiplos de } 8\} & B &= \{\text{múltiplos de } 18\} & D &= \{\text{múltiplos de } 24\} \\ A &= \{0, 8, 16, 24, \dots\} & B &= \{0, 18, 36, 54, 72, \dots\} & D &= \{0, 24, 48, 72, \dots\} \\ A \cap B \cap D &= \{0, 72, 144, \dots\} \end{aligned}$$

De aquí se deduce que el mcm es 72, por ser el menor número positivo que contiene a 8, 18 y 24, un número exacto de veces. Así, 8 está contenido 9 veces; 18, 4 veces; y 24, 3 veces.

8	2
4	2
2	2
1	

$$8 = 2^3$$

18	2
9	3
3	3
1	

$$18 = 2 (3)^2$$

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$$24 = 2^3 (3)$$

Para hallar el mcm, tome los factores comunes que más aparecen al descomponer cada número. Elévelos a la potencia según la cantidad de veces que se repiten. Así, al descomponer el 8 y el 18, tenemos que en el primer caso el 2 es la cifra que más se repite y se lo eleva a la tercera potencia (2^3); mientras que en el segundo, el tres se reitera dos veces, por lo que quedaría elevado al cuadrado (3^2). Luego, multiplique los factores con sus respectivas potencias. El producto será el mcm. Así:

$$\text{mcm} = 2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$$

Método abreviado:

8	18	24	2
4	9	12	2
2	9	6	2
1	9	3	3
1	3	1	3
1	1	1	

El mcm es el producto de todos los factores encontrados, en este caso:

$$\text{mcm} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$$

Cuando los números dados no son tan grandes, como en el presente caso, puede encontrarlo por razonamiento:

- Observe que el 8 está contenido por el 24; entonces, no toma en cuenta el menor; es decir, 8;
- Trabaje con el 24 y el 18; observe que el doble de 24 (48) no contiene exactamente el 18, pues 48 solamente se lo puede dividir exactamente una vez por 3 o, lo que es lo mismo, no es divisible para 9; 18 sí es múltiplo de 9, ya que el primero contiene dos veces al segundo.
- El triple de 24 (72) sí contiene exactamente el 18; por lo tanto es el mcm.

Actividad individual: Resolviendo problemas

1. Resuelva este problema:

Una señora salió con un canasto de huevos para vender en el mercado. Al bajar del bus tropezó y se quebraron algunos huevos. “Una chica se acercó a ayudarla y le preguntó cuántos huevos traía. La señora le respondió: ¡No sé! Solamente me acuerdo que eran entre 50 y 100; si los contaba de dos en dos, me sobraba uno; si los contaba de tres en tres, me sobraban dos; si lo hacía de cuatro en cuatro, me sobraban tres; si lo hacía de cinco en cinco, quedaban cuatro; y si los contaba de 6 en 6, tenía 5. ¿Cuál era la cantidad mínima de huevos que podía llevar la señora?

2. Escriba el procedimiento que utilizó para resolver el problema.

3. ¿Qué preguntas metacognitivas podría usted hacer a sus estudiantes en relación a la resolución de problemas como éste? Escríbalas.

Actividad plenaria

Cuando el instructor se lo pida, comparta las respuestas a las preguntas 3 y 4 con los demás participantes.

Actividad en grupo: Usando las plantillas de fracciones

1. Formen grupos de cuatro docentes.

2. Demuestren, con las plantillas de fracciones, las siguientes propiedades de la suma números de racionales.

Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$

Conmutativa: $a + b = b + a$

Elemento neutro: el cero es un número racional que hace de elemento neutro en la suma; por ejemplo: $a + 0 = a$.

Elemento opuesto: el opuesto de un número racional a es otro número racional $-a$:
 $a + (-a) = 0$

Actividad plenaria

Cuando el instructor les solicite, expongan cómo demostraron las propiedades a través de las plantillas de fracciones.

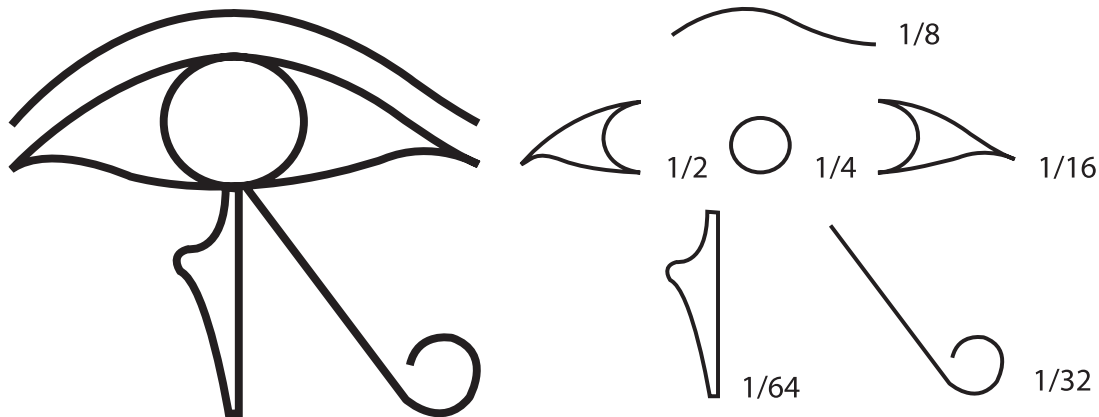
Actividad individual: Las matemáticas en el antiguo Egipto

1. Lea el texto *El ojo de Horus*.

2. Escriba su opinión personal sobre la lectura.

3. Responda:
 - a. ¿Qué sabe de las matemáticas en el antiguo Egipto?
 - b. ¿Le parece importante el tema? ¿Por qué?
5. Entregue al instructor sus respuestas.

Lectura: El ojo de Horus



Horus, hijo póstumo de Osiris y educado con sed de venganza por su madre Isis, desafió a su tío Seth, por el asesinato de su padre, y entabló con él un terrible combate. En la refriega, Seth le arrancó un ojo a Horus, lo cortó en seis pedazos y lo esparció por todo Egipto. La asamblea de los dioses decidió intervenir en favor de Horus y le encargó a Toth, maestro supremo de la aritmética, la palabra, la escritura y los escribas, reunir las partes del ojo mutilado y reconstruir con ellas, gracias a sus potentes sortilegios, un ojo sano y completo. (En el himno XX del Libro de los muertos se dice que “Esto hizo Toth con su mismo dedo”, lo que algunos interpretan como el uso de los dedos para calcular).

Por eso, el Ojo de Horus, a la vez ojo humano y de halcón, mutilado y restaurado, era uno de los amuletos más importantes para los egipcios, pues se convirtió en símbolo de la integridad física, el conocimiento, la visión total y la fertilidad. Y para que este símbolo mantuviese todos sus sentidos, los escribas utilizaban sus distintas partes para representar las fracciones del *héqat*, unidad de capacidad que correspondía aproximadamente a 4.784 litros.

Si sumamos las seis fracciones del *héqat*, obtenemos $63/64$. ¿Qué pasaría con el $1/64$ que falta?

La tradición nos da una respuesta: cuando un aprendiz de escriba le planteó la cuestión a su maestro, éste le respondió que el $1/64$ que faltaba sería siempre proporcionado por Toth al calculador que se coloque bajo su protección, lo cual podemos interpretar como una prueba de fe o como el pago estipulado para los calculadores por sus servicios.

(Puedes encontrar respuestas y actividades de este tipo muy interesantes en: Rodríguez Santos, Alberto. El Ojo de Horus.

<http://www.epsilon.es/paginas/t-historias1.html#historias-ojohorus>. Última actualización: 25-10-2008.

Las fracciones y el Ojo de Horus Javier Fraile Martín

Resumen

Uno de los grandes retos que tiene la enseñanza de las matemáticas es conseguir que los alumnos adquieran instrumentos y conceptos que les haga capaces de enfrentarse a la resolución de problemas. En este artículo se presenta una actividad pensada para alumnos de 7º a 9º año, 11 a 13 años, y para la formación inicial y permanente de profesorado.

Abstract

One of the greatest challenges the mathematics education has is to achieve that the students acquire tools and concepts which will enable them to deal with the resolution of mathematical problems. The aim of this article is to offer an activity thought for 7th and 9th grade pupils, who are in the age of 11 and 13, in addition to providing initial and permanent formation to the professorship.

Resumo

Um dos grandes reptos que tem o ensino das matemáticas é conseguir que os alunos adquiram instrumentos e conceitos que lhes faça capazes de se enfrentar à resolução de problemas. Neste artigo apresenta-se uma actividade pensada para alunos de 7º a 9º ano, 11 a 13 anos, e para a formação inicial e permanente de profesorado.

Introducción

Si nos remitimos a los resultados de las evaluaciones internacionales y nacionales de las competencias matemáticas (Proyectos PISA y TIMMS, por ejemplo) observamos la paradoja de que muchos alumnos demuestran buenos resultados conceptuales y algorítmicos pero son incapaces de aplicarlos a la resolución de problemas.

El gráfico de la Fig. 1 pertenece a la evaluación del sistema educativo español de 2007 elaborada por el Ministerio de Educación y publicada en 2009. En ella se observa que los ítems “teóricos” y “mecánicos” obtienen resultados por encima del nivel referencial de 250 puntos mientras que la resolución de problemas presenta un resultado de 18 puntos por debajo del nivel referencial.

Es preciso subrayar que la tipología de capacidades que utiliza ésta y otras evaluaciones es confusa porque pone en el mismo apartado los procedimientos y las estrategias y ello exige una primera reflexión.

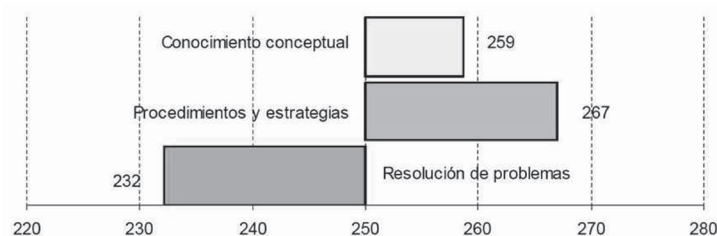


Fig.1 Resultados en Capacidades Matemáticas de los alumnos de 6º de Primaria (11-12 años) en España. (Instituto de Evaluación, 2009).

Existen rutinas matemáticas, técnicas, procedimientos, algoritmos que pueden aprenderse descontextualizados y por lo tanto utilizarse de forma mecánica. Sin embargo, las estrategias, tal como las entendemos en la resolución de problemas, son un conjunto de procedimientos que el sujeto pone en marcha para conseguir un objetivo. La estrategia va más allá de la utilización mecánica de instrumentos: involucra la selección de aquellos con un alto grado de racionalidad para conseguir el fin perseguido y exige una planificación o una “hoja de ruta” que dirija los recursos intelectuales disponibles. Además, está cargada de subjetividad porque depende de la implicación personal en el objetivo, del conocimiento del contexto, de los recursos procedimentales de que se dispone y del conocimiento que se tiene de la relación entre conceptos y procedimientos. La carencia de esta competencia es, precisamente, la que provoca el bajo rendimiento de nuestros alumnos en la resolución de problemas.

En resumen, cuando se habla conjuntamente de “procedimientos y estrategias” al margen de la resolución de problemas, se están refiriendo a las técnicas y rutinas que se activan de forma memorística o mecánica.

De una forma u otra, parece que se mantiene la creencia de que la educación matemática consiste en un proceso de instrucción y aplicación. Se enseñan rutinas, definiciones y fórmulas, los alumnos las memorizan, y de forma más o menos inmediata, con más o menos repeticiones, serán capaces de resolver problemas.

Podríamos pensar que la enseñanza actual no es así, pero bajo eufemismos como “problemas de la vida real” todavía encontramos en los libros de texto enunciados como éste: “Si 2 obreros emplean 4 horas en hacer un foso, ¿cuánto tiempo emplearían 60 obreros?”. El alumno sabe que para resolver el problema ha de emplear y repetir el algoritmo que se ha explicado unos renglones antes del enunciado. Los números son evidentes, sólo hay que decidir si es un caso de proporcionalidad directa o inversa... pero ¿y el sentido del problema? La sintaxis del enunciado es intachable, pero ¿y la semántica? ¿Alguien sospecha que recurrir a 60 obreros para cavar un foso, que 2 obreros han cavado en 4 horas, supone un acto racional? Si un alumno realmente imaginara la situación debería contestar que los 60 obreros no caben en el lugar de los hechos y además supone un peligro para su integridad física trabajar con picos y palas en tan poco espacio.

Se ha denunciado hasta la saciedad que los problemas de enunciado verbal, aunque traten de emular contextos reales, son estereotipos escolares en los que el alumno sólo ha de practicar el procedimiento que se acaba de enseñar (Nesher,

1980). En muy pocos casos se exige que el alumno matematice la realidad y elabore modelos matemáticos para poder aplicar los conocimientos e instrumentos propios de las matemáticas.

Actualmente, muchos sistemas educativos están adoptando el enfoque de orientar la educación a la adquisición de competencias básicas (OCDE, 2006). Como todos los procesos de cambio, está suscitando controversias en el mundo educativo, pero ciertamente supone un cambio sustancial en la forma de entender la enseñanza.

Según este enfoque, y a diferencia de anteriores concepciones educativas, el objetivo no es conseguir la adquisición de contenidos sino utilizar los contenidos para conseguir el desarrollo de las competencias básicas. Lo fundamental es que, ante una situación contextualizada o no, el alumno ha de saber enfrentarse a ella con las herramientas matemáticas que posee. No se trata de evaluar si sabe resolver ecuaciones, se trata de evaluar si sabe usar las ecuaciones para resolver problemas (Sol, Jiménez y Rosich, 2007)

Desde esta perspectiva, las competencias que deben desarrollarse están en una línea muy similar a los planteamientos del NCTM (2000): Pensamiento y razonamiento, argumentación, comunicación, conexiones, construcción de modelos, representación....

Propuesta de una tarea ligada a la historia de las matemáticas

La actividad que se describe a continuación está destinada a trabajar aspectos de competencia relacionados con las matemáticas:

- Descubrir regularidades en series numéricas y geométricas.
- Establecer conexiones entre diferentes contenidos matemáticos y entre contenidos de diversas áreas del conocimiento.
- Analizar resultados y proponer soluciones teóricas.
- Utilizar instrumentos tecnológicos de apoyo para evitar tareas rutinarias.
- Elaborar leyes generales para modelos obtenidos por inducción.

El objeto de estudio son las fracciones unitarias utilizadas en el antiguo Egipto y que en su forma más básica están contenidas en el Ojo de Horus o Udyat, uno de los amuletos más populares de Egipto porque ofrece protección y representa la consecución de la "totalidad" (Fig.2)

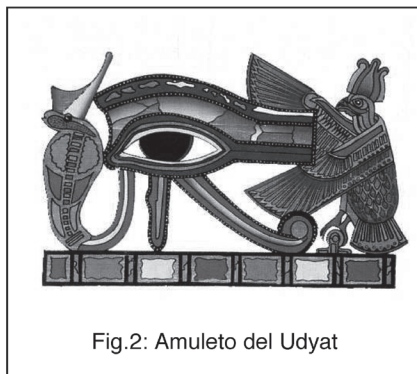


Fig.2: Amuleto del Udyat

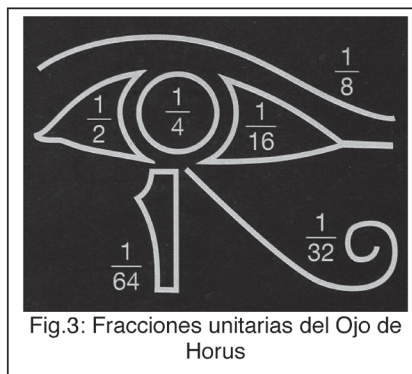


Fig.3: Fracciones unitarias del Ojo de Horus

Las fracciones que utilizaban los egipcios eran siempre unitarias, es decir, el numerador de todas ellas era 1. Las diversas partes que forman el Ojo de Horus (Fig.3) se utilizaban como sistema de numeración fraccionario en particiones agrarias y de capacidad de cereales. La unidad de capacidad para medir el trigo y la cebada era el Herat que equivalía a unos 4.8 litros.

La sucesión de fracciones del Ojo de Horus tiene una ventaja práctica a la hora de hacer particiones ya que cada fracción es la mitad de la anterior.

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32} \quad \frac{1}{64}$$

Actividad 1a:

Recorta un cuadrado a partir de una hoja de DIN A-4 (Fig. 4)

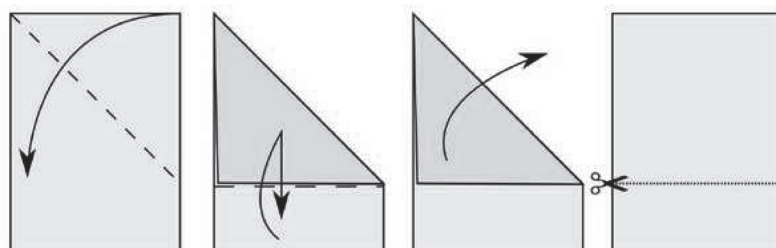


Fig. 4

Pliega el cuadrado por la mitad como indica la figura 5 y repite los pliegues en mitades hasta lograr la fracción $1/64$

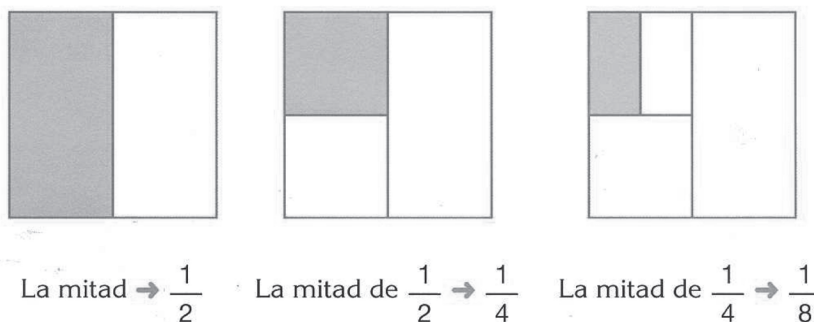


Fig. 5

Actividad 1b:

¿Qué relación encuentras entre las fracciones que has obtenido y la multiplicación de esas fracciones por $1/2$.

Actividad 1c:

¿Por qué crees que es práctico hacer mitades de la unidad? ¿Cómo harías para cortar con la mayor precisión posible $1/8$ de una barra de pan?

Actividad 1d:

Has conseguido dividir un cuadrado en 64/64, pero esta sucesión de fracciones podría continuar... ¿crees factible conseguir 3 divisiones más en el cuadrado que recortaste? Justifícalo.

Modelos y realidad

Habrás podido comprobar que si bien la serie numérica puede continuar indefinidamente, el número de pliegues que se pueden hacer en un cuadrado de papel es finito. Llega un momento en el que no es posible seguir manipulando el papel... y llega el momento de seguir trabajando con los modelos mentales: la mitad de 1/64 es 1/128, la mitad de 1/128 es 1/256. Y de ello estamos seguros porque el razonamiento matemático nos permite afirmarlos aunque los modelos físicos no permitan realizar estas particiones. Las manos no pueden, pero la cabeza, sí.

Actividad 2a:

¿Cuál sería el término décimo de la sucesión de fracciones en el Ojo de Horus?

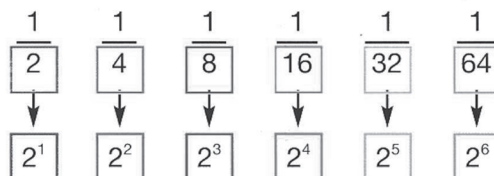
Ya has visto que el numerador siempre es 1. ¿Y el denominador? ¿Cuáles serían los cuatro siguientes denominadores de la serie?

$$2 - 4 - 8 - 16 - 32 - 64 - \dots - \dots - \dots - \dots$$

Justifica tu respuesta y explica qué tendrías que hacer para hallar el vigésimo término de la serie.

Actividad 2b:

Es probable que hayas resuelto la actividad anterior multiplicando por 2 el número precedente de la serie. Es muy correcto, pero para calcular el vigésimo o trigésimo término de la serie no parece un procedimiento muy práctico porque te obliga a calcular todos los términos de la misma... ¡un trabajo penoso para una simple curiosidad! Piensa de otra manera¹. Observa la interesante regularidad de los denominadores de las fracciones del Ojo de Horus:



Ahora, ¿podrías decir rápidamente cuál sería la fracción vigésima de la serie?

Actividad 2c:

Bien, una cosa es escribir una potencia con un exponente elevado (2^{20}) y otra cosa muy distinta es hacer el cálculo... ¿por qué no usas la calculadora? No hace falta una calculadora con teclas extrañas (x^y), es suficiente con una de cuatro operaciones:

¹ Bruner utiliza la acertada metáfora del “andamiaje” para referirse a estas ayudas que el experto proporciona al aprendiz para que pueda construir otras formas de pensar más elaboradas.

Pulsa las teclas:

2 x x = = = =

Mira el número que aparece en la pantalla cada vez que pulsas la tecla =. Ahora, si has descubierto lo que es capaz de hacer la calculadora, ya puedes hallar fácilmente el término vigésimo y trigésimo de la serie de fracciones... Pero ¡alerta, no te precipites! ¿Cuántas veces has pulsado el signo = para obtener 2^6 ? ¿Cuántas veces has de pulsar = para obtener 2^{20} ? Explícalo de forma que se pueda aplicar también para 2^{30} , 2^{57} y para 2^n , donde n sea un número cualquiera.

Actividad 2d:

Investiga:

El 6º denominador de la serie es igual al 3º multiplicado por sí mismo ($8 \times 8 = 64$).

El 10º denominador es igual al 5º multiplicado por sí mismo ($32 \times 32 = 1024$).

Comprueba que el 8º es igual al 4º multiplicado por sí mismo. ¿Volvemos a tener una regularidad que nos permitiría saber con rapidez cuál es el término 40º de la serie ahora que ya sabes cuál es el 20º?

Sugerencia²: Cuando estudies el producto de potencias con la misma base, vuelve a pensar en el Ojo de Horus y encontrarás muchas explicaciones a las regularidades que has descubierto... y de paso, entenderás por qué se estudia una cosa tan extraña como el producto de potencias. ¡Simplificar los cálculos siempre es un objetivo inteligente!

Un poco de mitología egipcia

Sin entrar en detalles escabrosos, el mito de Horus es la historia de una venganza. Osiris, dios mítico de la resurrección, fue el fundador de la nación egipcia. Su hermano Seth le tendió una trampa para asesinarlo y cortó su cuerpo en catorce pedazos que espació por todo Egipto. Isis, la esposa de Osiris, buscó por todo Egipto los trozos de su marido hasta tener trece de ellos y así poder embalsamar su cuerpo, momificarlo y devolverle la vida con su magia.

Horus, hijo de Osiris e Isis fue educado clandestinamente por Thot, el dios de la sabiduría y con el objetivo de vengar la muerte de su padre a manos de su tío Seth. Llegado el momento, Horus se enfrentó a Seth en una encarnizada lucha. En plena batalla, Horus fue herido en el ojo izquierdo que quedó destrozado. Con magia y sabiduría, Thot logró recomponer el ojo de Horus y dotarlo de poderes mágicos: el nuevo ojo de Horus era el Udyat, símbolo de la protección y el orden. Con su visión perfecta, Horus consiguió vencer a Seth y se convirtió en el dios de todo Egipto desterrando a Seth al desierto. El Ojo de Horus se utiliza todavía como amuleto con el nombre de Udyat que significa "el que está completo"

¿Pero realmente está completo?

Las partes del Udyat se utilizaron en la escritura jeroglífica como notación de las fracciones básicas:

² $2^a \times 2^a = 2^{a+a}$, es decir $2^3 \times 2^3 = 2^{3+3} = 6^6$. Si los alumnos con los que trabajamos esta actividad ya conocen las operaciones con potencias se puede trabajar con más profundidad esta regularidad.

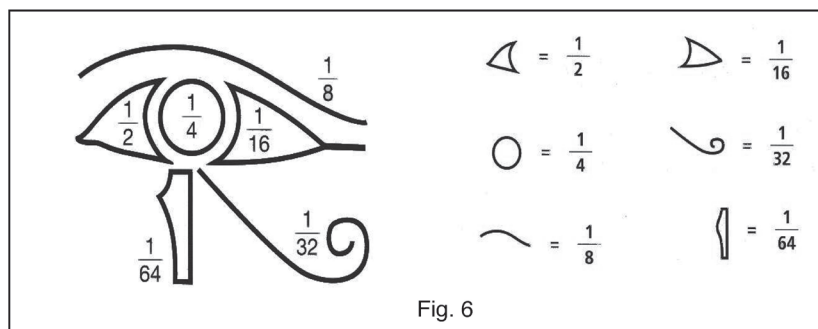


Fig. 6

Actividad 3a:

Si quieres saber si las fracciones del Ojo de Horus equivalen a la unidad, has de sumar las seis fracciones. Aprovecha la circunstancia de que los denominadores son potencias de 2. ¿Cuál es el denominador común?

Efectivamente, el m.c.m de los números 2, 4, 8, 16, 32 y 64, es justamente 64. Por lo tanto las fracciones equivalentes más sencillas son:

$$\frac{1}{2} = \frac{32}{64} \quad \frac{1}{4} = \frac{16}{64} \quad \frac{1}{8} = \frac{8}{64}$$

$$\frac{1}{16} = \frac{4}{64} \quad \frac{1}{32} = \frac{2}{64} \quad \frac{1}{64} = \frac{1}{64}$$

Y si sumamos las seis fracciones:

$$\frac{32}{64} + \frac{16}{64} + \frac{8}{64} + \frac{4}{64} + \frac{2}{64} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

¡¡No obtenemos la unidad!! Falta $1/64$.

No es mucho, pero no podríamos jugar al ajedrez porque es justamente el tamaño de una casilla del tablero. ¿Cómo es posible que el símbolo mitológico de la "totalidad" tenga un error matemático? El sabio Thot es el que añade esa pequeña parte con su magia, igual que la magia y el amor de Isis completó el cuerpo descuartizado de Osiris, padre de Horus, al que también le faltaba una parte.

Pero el error podría ser menor. Si recuperas el cuadrado de la actividad 1, está claro que falta $1/64$, pero sólo porque interrumpimos el proceso en la sexta división. ¿Por qué no continuar completando la unidad haciendo mitades del trozo que falta? Seguramente Thot conocía la respuesta: porque nunca terminaríamos. Siempre habrá una minúscula partícula que le falta a la unidad. En matemáticas podemos construir una expresión del tipo:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$$

Donde la suma tiende a 1 cuando n tiende a infinito. Y aquí hemos llegado a una “revelación” que sólo podían tener los dioses, el **vértigo del infinito** que se produce al asomarse a la magia del Ojo de Horus.

“**Completo**” en matemáticas tiene un significado muy estricto. En mitología, como en tantos ámbitos de la vida, puede ser “**completo**” algo que tiende a serlo.

Conclusiones

El uso de actividades como la que se ha descrito no es la panacea para resolver todos los obstáculos que se presentan en la educación matemática, pero permiten investirla como un saber cultural ligado a muchos acontecimientos históricos y actuales. No es una receta de uso sencillo, es un intento de provocar en el alumnado inquietudes y retos intelectuales que de forma simplificada expongo a continuación:

- Establece conexiones entre diversos contenidos matemáticos y entre las matemáticas y contenidos culturales.
- Es de aplicación flexible si ofrecemos las ayudas pertinentes en función de los conocimientos previos de los alumnos. Algunos de los apartados pueden aplicarse sin inducirlos a “pensar de otra forma” o ayudarlos en los momentos de bloqueo.
- Los objetivos que se plantean no son los contenidos matemáticos en sí mismos, sino la forma de abordarlos. Los alumnos han de utilizar la inducción, han de elaborar modelos que funcionen en casos generales, han de justificar y argumentar con lenguaje natural los razonamientos y hacerse entender por sus iguales, han de reconocer patrones de diversos tipos y han de utilizar sus conocimientos algorítmicos para comprobar la veracidad de afirmaciones aceptadas culturalmente.

Estas tareas de investigación dirigida son un entrenamiento para que, en un futuro, los alumnos sean capaces de realizar su propio análisis crítico de la realidad que les envuelve y tener una visión de la matemática no cerrada a los problemas escolares. La esperanza es que no nos pregunten ¿y esto, para qué sirve? El simple hecho de razonar ya es un objetivo.

Bibliografía

- Wood, D., Bruner, J., Ross, G. (1976). *The role of tutoring in problem solving*. Journal of child psychology and psychiatry, 17, 89-100.
- Instituto de Evaluación Español (2009). *Educación Primaria 2007. Evaluación del sistema educativo Español*. [en línea] Recuperado el 26 de febrero de 2010, de http://www.institutodeevaluacion.mec.es/contenidos/nacional/EDUCACION_PRIMARIA_2007.pdf
- NCTM. (2000) *Principios y estándares para la educación matemática*. Servicio de Publicaciones de la S.A.E.M. Sevilla. España.
- Nesher, P. (1980). *The stereotyped nature of school word problems*. For the learning of mathematics, 1, 41-48
- OCDE (2006). *PISA 2006. Marco de la evaluación*. [en línea] Recuperado el 24 de febrero de 2010, de <http://www.ince.mec.es/marcosteoricospisa2006.pdf>
- Sol, M.; Jiménez, J. y Rosich, N. (2007). *Competencias y proyectos matemáticos realistas en la ESO*. UNO, 46, 43-59

Las fracciones y el Ojo de Horus
Javier Fraile Martín

Javier Fraile Martín, Licenciado en Ciencias de la Educación y Diplomado en Profesorado de Educación General Básica. Profesor de Matemáticas y Ciencias con alumnado de 11 a 14 años. Desde 1994 hasta 2008, Coordinador del Programa de Formación Permanente del Profesorado en el Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Barcelona. Desde 1991 hasta la actualidad es autor de los libros de texto de Matemáticas de la Editorial Vicens Vives para alumnos desde 3 a 12 años jfraile@telefonica.net



REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA - MARZO DE 2010 - NÚMERO 21 - PÁGINA 195

Actividad plenaria

El instructor le solicitará a algunos docentes expongan sus respuestas a las preguntas planteadas

Tarea individual

Traiga para la próxima sesión, una barra de chocolate. Póngase de una vez de acuerdo con el grupo de cuatro personas que trabajarán la próxima sesión ya que todos los del grupo deben traer la misma marca y el mismo tamaño de chocolate para poder realizar el ejercicio.

11

Propiedades de la multiplicación y división: operaciones y problemas



■ SESIÓN 11 Duración: 2 horas

Objetivos

- Verificar el sentido que tiene considerar las partes de una unidad y las partes de una fracción.
- Descubrir el significado del inverso multiplicativo de un número fraccionario.
- Aplicar las propiedades de la multiplicación y división de números fraccionarios.
- Conocer la relación de estas operaciones con la multiplicación y división de números enteros.
- Utilizar la multiplicación y la división en la solución y elaboración de problemas.

Contenidos

- Las fracciones en situaciones de reparto y medición.
- Multiplicación o división de fracciones.
- Propiedades de la multiplicación.
- La fracción como operador multiplicativo.

Actividad en grupo: Las fracciones en situaciones de reparto y medición

1. Formen grupos de cuatro personas.
2. Lean el siguiente planteamiento:

Una docente debe repartir cuatro barras de chocolate en partes iguales entre cinco estudiantes. Como solución decide partir cada barra en cinco partes iguales, de las cuales da cuatro a cada uno.

3. ¿Cómo hubiera sido más práctica la repartición? Demuéstrenlo con las barras de chocolate que trajeron a la sesión.
4. Construyan una mejor estrategia para resolver el problema planteado.

Actividad plenaria

El instructor solicitará a dos grupos que indiquen ante sus compañeros cómo resolvieron el problema.

Actividad individual: Trabajo en la recta numérica

1. Encuentre las $\frac{2}{3}$ partes de la mitad de una unidad.

Esto equivale a dividir en la recta numérica el segmento comprendido entre 0 y $\frac{1}{2}$ en tres partes iguales y tomar las dos primeras partes; es decir, que debe aplicar, de manera consecutiva al número 1, los operadores $(\frac{1}{2}x)$ y $(\frac{2}{3}x)$.

2. Verifique que la tercera parte del segmento comprendido entre 0 y $\frac{1}{2}$ es la sexta parte del segmento comprendido entre 0 y 1. Esto equivale a decir que $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$.

Actividad en parejas: Construyendo ejemplos propios

1. Elaboren tres ejemplos que ilustren matemáticamente lo explicado en la actividad anterior.
2. Demuéstrenlos utilizando las plantillas de fracciones.

Actividad plenaria

Expongan sus ejemplos ante el curso y expliquen cuál es el algoritmo de la multiplicación de los números racionales que han usado.

Actividad en grupo: Verificación de propiedades

1. Formen grupos de cuatro participantes.
2. Verifiquen si cada una de las propiedades de la suma trabajadas en la sesión 10 se cumplen para el producto que expusieron en parejas.
3. Respondan: ¿si las propiedades se cumplen para el producto, también se cumplen para la división? ¿Por qué?
4. En el caso de no cumplirse, ¿qué debemos corregir para que se den?

A continuación, se describen las propiedades del producto de números racionales.

El producto de dos números racionales es otro número racional, y cumple con las siguientes propiedades:

Asociativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$

Distributiva respecto a la suma: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Elemento neutro: el 1 es un número racional que hace de elemento neutro del producto: $a \cdot 1 = a$

Elemento inverso:

el inverso de un número racional $a \neq 0$ es otro número racional que multiplicado por a da 1:
 $1/a \cdot a = 1$

5. Piensen cuál es la importancia de la propiedad del inverso multiplicativo en la división de números racionales. Discutan sus ideas en el grupo.

Recuerden que para dividir dos números racionales positivos, se debe multiplicar el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.

El cociente de dos números fraccionarios es igual al producto entre el dividendo y el inverso del divisor.

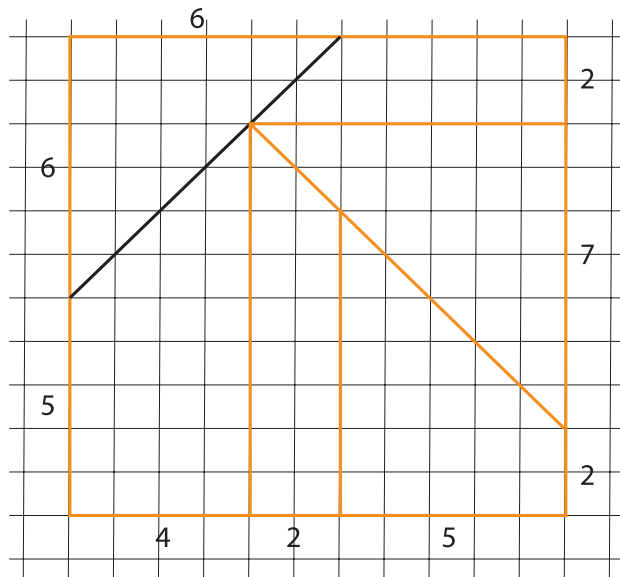
Ejemplo:

$$2/5 : 4/3 = 2/5$$

$$2/5 \cdot 3/4 = 6/20 = 3/10$$

Actividad en parejas: La fracción como operador multiplicativo

1. Construyan un rompecabezas como el que está a continuación, pero más grande, de manera que la parte que mide 4 cuadrados en el dibujo, mida 9 cuadrados en el nuevo rompecabezas.



2. Registren el procedimiento que utilizaron para la construcción del nuevo rompecabezas.

Actividad plenaria

Expongan su trabajo: expliquen el procedimiento que usaron para construir el rompecabezas, las dificultades que encontraron en el proceso y como la superaron.

12

Propiedades de la potenciación y radicación: operaciones y problemas



■ SESIÓN 12 Duración: 2 horas

Objetivos

- Aplicar las propiedades de la potenciación y radicación.
- Utilizar la potenciación y la radicación en la solución y elaboración de problemas.

Contenidos

- Conceptualización de la potenciación a través de la resolución de problemas.
- Propiedades de la potenciación y radicación.

Actividad individual: Reflexión sobre ganancias

1. Resuelva el siguiente problema:

Si a usted le propusieran que escoja una de las dos opciones siguientes:

- a. Recibir un millón y medio de dólares cada día durante un mes (30 días).
- b. Recibir 10 centavos el primer día, 20 centavos el segundo día, 40 centavos el tercer día, 80 centavos el cuarto día y así sucesivamente hasta completar los 30 días.

¿Cuál de las dos opciones aceptaría? ¿Por qué?

Actividad en parejas: Reflexión

1. Formen una pareja.
2. Discutan con su compañero sobre las razones de las elecciones que hicieron, lleguen a una conclusión con respecto a éstas y regístrenlas por escrito.
3. Lean, a continuación, el texto sobre la multiplicación abreviada.

Seguramente su respuesta se basa en el siguiente desarrollo conceptual:

La potenciación es una multiplicación abreviada que se utiliza cuando hay que multiplicar por el mismo factor varias veces.

Ejemplo

Si tengo que multiplicar $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$, esto es lo mismo que $2^6 = 64$. En esta operación, el factor que se repite toma el nombre de **base**; el número pequeño que se escribe en la parte superior derecha de la base se llama **exponente** e indica las veces que la base se repite como factor. Por su lado, al resultado, en este caso 64, se conoce con el nombre de **potencia**. Así, la sexta potencia de 2 es 64.

Ejemplos

Calculen mentalmente las siguientes operaciones y escriban el resultado en sus cuadernos:

- $10^5 + 10^3 + 10^1 + 1 =$
- $10^4 \times 10^2 \times 10 =$

Actividad plenaria

Expliquen a sus compañeros cómo harían para trabajar este concepto con sus estudiantes.

Actividad en grupo: “Las Torres de Hanoi” (busquen información en es.wikipedia.org/wiki/torres_de_hanoi)

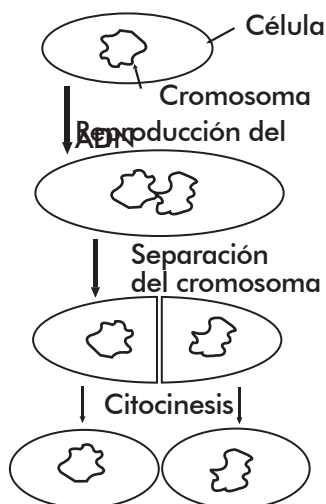
1. Formen grupos de cuatro personas.
2. Lean el siguiente texto:
El juego de las torres de Hanoi se resuelve con un mínimo de un paso, cuando hay un solo anillo; tres pasos, cuando hay dos anillos; siete pasos, cuando hay tres anillos; 15 pasos, con cuatro anillos; treinta y un pasos con cinco anillos; etc.
3. Expresen esta secuencia con símbolos matemáticos y entreguen sus respuestas al instructor.

Actividad en parejas: Análisis de problemas

1. Observen el procedimiento utilizado para resolver este problema:

La mayoría de las bacterias se reproduce de manera asexual, por medio de una simple división celular llamada fisión binaria, que produce copias genéticamente idénticas a la forma de la célula original.

Bajo condiciones ideales, una bacteria se puede dividir una vez cada 20 minutos; es decir, $1/3$ de una hora.



Es decir que si tenemos una bacteria:

en 20 minutos tendremos 2, $\rightarrow 2^1 = 1/3^1$

en 40 minutos tendremos 4, $\rightarrow 2^2 = 1/3^2$

en 60 minutos tendremos 8, $\rightarrow 2^3 = 1/3^3$

en 80 minutos tendremos 16, $\rightarrow 2^4 = 1/3^4$

en 100 minutos tendremos 32, $\rightarrow 2^5 = 1/3^5$

.

.

.

¿En 6 horas?...

2. Respondan: ¿Encuentran ustedes algún error en la forma de resolver el problema? ¿Cuál?
3. Resuelvan: si el cultivo en un laboratorio comienza con una bacteria, ¿cuántas bacterias tendrá el cultivo en seis horas?

Actividad plenaria

El instructor le pedirá a una de las parejas que exponga sus conclusiones.

Actividad en grupo: Análisis de problemas y reflexión didáctica

1. Formen grupos de tres participantes.
2. Lean el siguiente problema y realicen las actividades que se detallan a continuación.

Se tienen cuatro pesas, con las que se puede medir desde 1 kg hasta 40 kg inclusive, (siempre se pesan kilogramos enteros, no fracciones de kilogramo), ¿de qué valor debe ser cada una de las pesas?

 - a. Contesten: ¿tienen algún plan para resolver el problema? ¿Cuál?
 - b. ¿Han resuelto algún problema parecido o que tenga alguna relación con el expuesto problema? ¿Cuál?
 - c. Resuelvan el problema.
 - d. ¿Cuándo se utiliza el concepto de potenciación?
 - e. Analicen si este problema tiene alguna relación con la pregunta anterior?
 - f. Revisen y escriban los pasos que aplicaron para solucionar el problema.
3. Reflexionen y registren sus conclusiones. Guíense por las preguntas.
 - a. ¿Qué harían para contribuir a que sus estudiantes resuelvan este problema?
 - b. ¿Cómo diseñarían su clase para generar espacios nuevos que permitan explorar diferentes formas de resolución de este tipo de problemas?
 - c. ¿En qué otro contenido de las matemáticas va a ser útil este concepto de potenciación?
 - d. ¿En qué tipo de problemas se puede presentar la potenciación?
 - e. ¿Qué ventajas observan ustedes en esta forma de trabajar con los estudiantes?

Actividad plenaria

Cuando el instructor se los solicite, compartan sus trabajos con los demás participantes.

Actividad en grupo: Uso de material concreto

1. Formen grupos de cuatro participantes.
2. Ensayen cómo demostrarían a sus estudiantes las siguientes propiedades de la potenciación y radicación, a través del uso de material concreto.

Propiedades de la potenciación y radicación

- a. El producto de potencias de la misma base es igual a la base elevada a la suma de los exponentes.

$$7^5 \cdot 7^2 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^7$$

- b. El cociente de potencias de la misma base es igual a la base elevada a la diferencia de los exponentes del dividendo menos el divisor.

$$5^4 : 5^3 = 5^{4-3} = 5^1 = 5$$

- c. Una consecuencia de la propiedad anterior es el exponente cero.

$$7^0 = 49^3/49^3 = (7^2)^3/(7^2)^3 = 7^6/7^6 = 7^{6-6} = 7^0; \text{ pero } 49^3/49^3 = 1; \text{ por lo que } 7^0 = 1$$

- d. Potencia de una potencia: en este caso se escribe la misma base y se multiplican los exponentes.

$$(a^3)^2 = a^{3 \cdot 2} = a^6$$

- e. Potencia de una raíz o viceversa: en este caso, el índice de la raíz divide al exponente.

$$\sqrt{b^6} = b^{6/2} = b^3; \text{ pongamos un ejemplo:}$$

$$\sqrt{2^6} = 2^{6/2} = 2^3 = 8.$$

$$\text{Otra manera es: } \sqrt{2^6} = \sqrt{64} = 8$$

Actividad plenaria

Cuando el instructor lo solicite, compartan sus trabajos con los demás participantes.

Actividad individual: Análisis

1. Exponga, por escrito, su criterio sobre el siguiente procedimiento:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\quad}$$

Actividad plenaria

Cuando el instructor lo indique, intervengan con sus análisis frente a lo planteado.

Tarea individual: Facturas eléctricas

Para la próxima sesión, traiga las facturas de energía eléctrica de su residencia de los últimos seis meses.

13 Proporcionalidad: datos estadísticos y representaciones en el plano cartesiano



■ SESIÓN 13 Duración: 2 horas

Objetivos	Contenidos
- Reconocer las ventajas de trabajar proporcionalidad a partir de una tabla de datos y gráficas en el plano cartesiano. - Aprender a reconocer el tipo de relaciones llamadas proporcionalidad directa o inversa, a partir de acontecimientos cotidianos. - Aplicar algunas propiedades de las proporciones. - Utilizar la proporcionalidad en la solución y elaboración de problemas.	- La fracción como razón. - Concepto de proporcionalidad. - Proporcionalidad directa. - Proporcionalidad inversa.

En este capítulo se puede verificar con mayor claridad la *transversalidad de los conceptos a través de los diferentes sistemas*, que ayudarán a entender las matemáticas como un todo coherente, en lugar de una colección de técnicas aisladas y de reglas arbitrarias.

Actividad en parejas: Concepto de razón

1. Lean lo siguiente:

Lectura: La fracción como razón

En la Escuela “Francisco” hay cuatro grupos de primer año. En la sección “A” hay siete hombres y siete mujeres; en la sección “B”, treinta hombres y veinticinco mujeres; en la sección “C”, veinte hombres y diecinueve mujeres, y en la sección “D”, dieciocho hombres y quince mujeres. Al presentar el examen de matemáticas, en la sección “A” reprobaron tres hombres y cuatro mujeres; en la sección “B”, seis hombres y seis mujeres; en la sección “C”, ocho hombres y siete mujeres, y en la sección “D”, tres hombres y dos mujeres.

2. Apunten la información que se requiere en el siguiente cuadro.

Grupo	Número de estudiantes			Número de reprobados			Parte de estudiantes reprobados		
	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total	Hombres	Mujeres	Total
A									
B									
C									
D									

3. Conteste:

- a. ¿Qué grupo tiene más estudiantes?

- b. ¿Qué paralelo tiene menos estudiantes?

- c. ¿En qué grupo reprobaron más estudiantes?

- d. ¿En cuál reprobaron menos estudiantes?

- e. ¿En qué paralelo es más elevado el índice de reprobación?

- f. De los grupos "A" y "C", ¿cuál tiene mayor índice de aprobación?

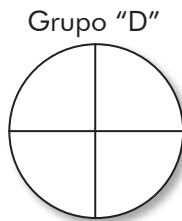
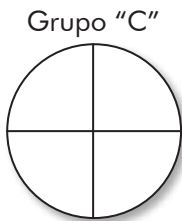
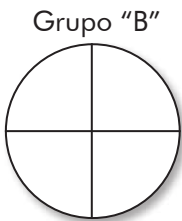
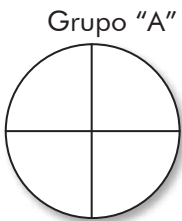
- g. ¿Qué parte del total de estudiantes de los grupos "B" y "D" reprobaron?

- h. Del total de estudiantes del grado, ¿cuál es el índice de aprobación de hombres y mujeres?

- i. En las fracciones anteriores, ¿qué representa el numerador?

- j. ¿Qué representa el denominador?

k. Representen el total de reprobados en cada círculo:



I. ¿Qué es una razón?

Actividad plenaria

Difundan su concepto de razón con sus compañeros y construyan un concepto entre todos.

Actividad individual: Razones en la vida cotidiana

1. Resuelva el siguiente planteamiento:

En las instrucciones del uso de un suavizante de ropa se indica que cada 8 medidas de agua hay que usar 2 medidas del producto. ¿Cuántas medidas del suavizante se necesitarán para mezclarlas con 24 medidas de agua?

La división indicada que represente la razón de la cantidad de agua a la cantidad de suavizante es:

$$\frac{\text{Cantidad de agua}}{\text{Cantidad de suavizante}} = \frac{8}{2}$$

Para determinar el dato requerido debe encontrar el número por el cual dividirá las 24 para obtener el mismo cociente.

Cuando dos razones tienen el mismo cociente, las puede igualar dando lugar a una proporción que simbólicamente se representan así:

$a/b = c/d$, se lee **a** es a **b** como **c** es a **d**.

Actividad individual: Razones y fracciones

1. Lea lo siguiente:

Toda fracción es una razón, pero no toda razón es una fracción.

2. Conteste las preguntas:

- ¿Qué comentarios puede hacer acerca de la frase anterior?
- ¿Cómo justifica esos comentarios?

Actividad plenaria

Realicen sus comentarios sobre las dos actividades revisadas.

Cuando el cociente entre dos magnitudes es constante, decimos que las magnitudes son **directamente proporcionales**. Este cociente se denomina **constante de proporcionalidad**.

Actividad en grupo: Proporcionalidad directa

1. Para las tres actividades siguientes, formen grupos de tres personas.
2. Consideren cinco rectángulos de 3 cm de base y alturas diferentes y luego:
 - a. Determinen el área de cada uno en unidades cuadradas.
 - b. Elaboren una tabla de datos en que se asignen al valor de las abscisas la altura del rectángulo y a las ordenadas el área.
 - c. Grafiquen en un plano cartesiano las dos magnitudes: la altura del rectángulo y el área.
 - d. Indiquen si las magnitudes están correlacionadas, si son directamente proporcionales o ninguna de las dos.
 - e. ¿Por qué podemos asegurar que el lado de un rectángulo y el área correspondiente están directamente correlacionados?
 - f. ¿Podemos afirmar que existe proporcionalidad directa entre las dos magnitudes?
 - g. ¿De qué tipo es la gráfica de una proporción directa?
 - h. Si conocen cuál es la relación que existe entre la fórmula del área de un rectángulo y el resultado de la gráfica, méncionela.
3. Escriban sus respuestas en una hoja y entréguenla al instructor.

Actividad plenaria

Discutan sus respuestas con los demás docentes.

Actividad en grupo: Proporcionalidad en la vida cotidiana

1. Reunan las facturas de energía eléctrica de su residencia de los últimos seis meses.
2. Ubiquen ordenadamente, en una tabla, los datos de energía consumida dada en KW por hora en relación con el valor facturado (antes de impuestos).
3. Con un plano cartesiano, grafiquen estos datos y determinen:
 - a. ¿Cuál es la razón entre las dos magnitudes?
 - b. ¿Es siempre la misma?
 - c. ¿Qué representa esta razón?
4. Encuentran alguna relación entre el concepto de razón y otro concepto que será analizado en la secundaria? ¿Cuál?
5. Escriban sus respuestas en una hoja y entréguensela al instructor.

Actividad en grupo: Proporcionalidad inversa

1. Encuentren cinco ejemplos diferentes de rectángulos que tengan la misma área.
2. Registren, en una tabla, el ancho y el largo de cada uno de ellos.
3. ¿Qué sucede con el largo cuando el ancho aumenta?
4. ¿Podemos afirmar que son magnitudes inversamente correlacionadas? ¿Por qué?
5. ¿Podemos asegurar también que son inversamente proporcionales? ¿Por qué?
6. ¿Cuál es el hecho que ratifica la proporcionalidad en el caso de dos magnitudes inversas?
7. Revisen los conceptos en una actividad plenaria con el instructor.
8. Entreguen una hoja con sus respuestas al instructor.

Actividad plenaria

Un grupo seleccionado por el instructor presentará al resto de la clase la primera actividad; otro grupo, la segunda y la tercera.

Luego, con ayuda del instructor, obtendrán conclusiones respecto de lo planteado.

14 | Equivalencias geométricas

■ SESIÓN 14 Duración: 2 horas

Objetivos

- Aprender que la demostración del teorema de Pitágoras se puede hacer utilizando diferentes figuras.

Contenidos

- Teorema de Pitágoras.
- Teorema de Pitágoras generalizado.
- Rompecabezas pitagóricos.

Actividad en parejas: Teorema de Pitágoras

Seguramente, todos saben de qué hablamos si se nombra el teorema de Pitágoras. El siguiente ejercicio los ayudará a refrescar su conocimiento sobre el tema.

1. En parejas, realicen la lectura sobre el teorema de Pitágoras.

Para un triángulo rectángulo, cuyos catetos llamaremos a y b y cuya hipotenusa denominaremos h , el teorema de Pitágoras indica que:

El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos; es decir: $h^2 = a^2 + b^2$

Para una mentalidad algebraica como la actualmente imperante en las matemáticas su interpretación es clara: en un triángulo rectángulo lo que mide la hipotenusa elevado al cuadrado es siempre igual que la suma de los catetos elevados al cuadrado.

Sin embargo, para un estudiante de matemáticas de la Grecia Clásica, la interpretación de a^2 no era la de el número a elevado al cuadrado, sino que era la del área de un cuadrado de lado a por lo que la interpretación del teorema de Pitágoras para un antiguo heleno sería: "En un triángulo rectángulo siempre se verifica que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos".

2. Contesten las siguientes preguntas:

- a. ¿Creen que el teorema de Pitágoras fue demostrado en su tiempo en la forma algebraica como lo conocemos ahora? ¿Por qué?

- b. Compare la interpretación de la Grecia Clásica del teorema de Pitágoras con la actual. ¿En qué favorece al pensamiento matemático?
- c. ¿Qué conclusiones pueden sacar sobre la evolución de las matemáticas en la historia de la humanidad?
- d. Compare el pensamiento de esa época de la humanidad con el de nuestros niños.

Actividad plenaria

El instructor le preguntará a algunas de las parejas sus respuestas a las preguntas para discutir las en el grupo.



Actividad en grupo: Teorema de Pitágoras

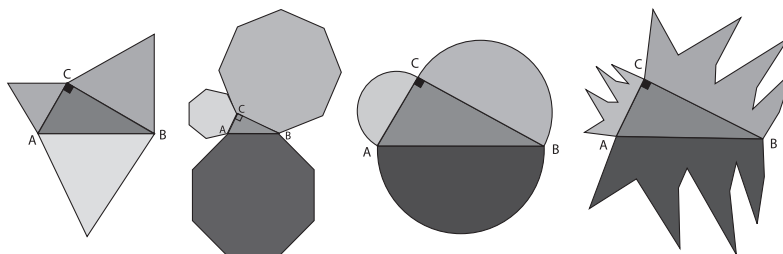
1. Formen grupos de cuatro participantes.
2. Lean el siguiente texto:

A partir de la interpretación geométrica del teorema de Pitágoras, podríamos preguntar qué ocurriría si en vez de construir cuadrados (polígono regular de cuatro lados) sobre los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo hubiéramos construido triángulos equiláteros (polígono regular de tres lados). ¿Seguirá siendo cierto que el área del triángulo equilátero construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es siempre igual a la suma de las áreas de los triángulos equiláteros contruidos sobre los catetos del triángulo rectángulo?

Las preguntas a continuación, entonces, sería consecuentes: ¿qué ocurriría si construyásemos pentágonos regulares (polígono regular de cinco lados) sobre los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo? ¿Seguirá siendo cierto que el área del pentágono regular construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es siempre igual a la suma de las áreas de los pentágonos regulares contruidos sobre los catetos del triángulo rectángulo?

Estas interrogantes nos llevan al teorema de Pitágoras generalizado.

Si en lugar de construir un cuadrado, sobre cada uno de los lados de un triángulo rectángulo, se elabora otra figura, ¿seguirá siendo cierto que el área de la figura construida sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de las figuras semejantes conformadas sobre los catetos?



3. Comprueben matemáticamente, con la tercera figura, si lo expuesto en el texto es posible.
4. Expliquen, de manera argumentada, su respuesta a la pregunta anterior.
5. Escriban sus respuestas en una hoja y entréguelas al instructor.
6. Escojan uno de los polígonos y apliquen el teorema de Pitágoras para comprobarlo de manera gráfica. Para esto, recorten piezas con las figuras que conforman el polígono seleccionado. Cuando estén seguros de su respuesta y que confirma su anterior explicación, péguenlas en un papelógrafo.
7. Cuélguelo en las paredes de la clase para que todos lo vean.

Actividad plenaria

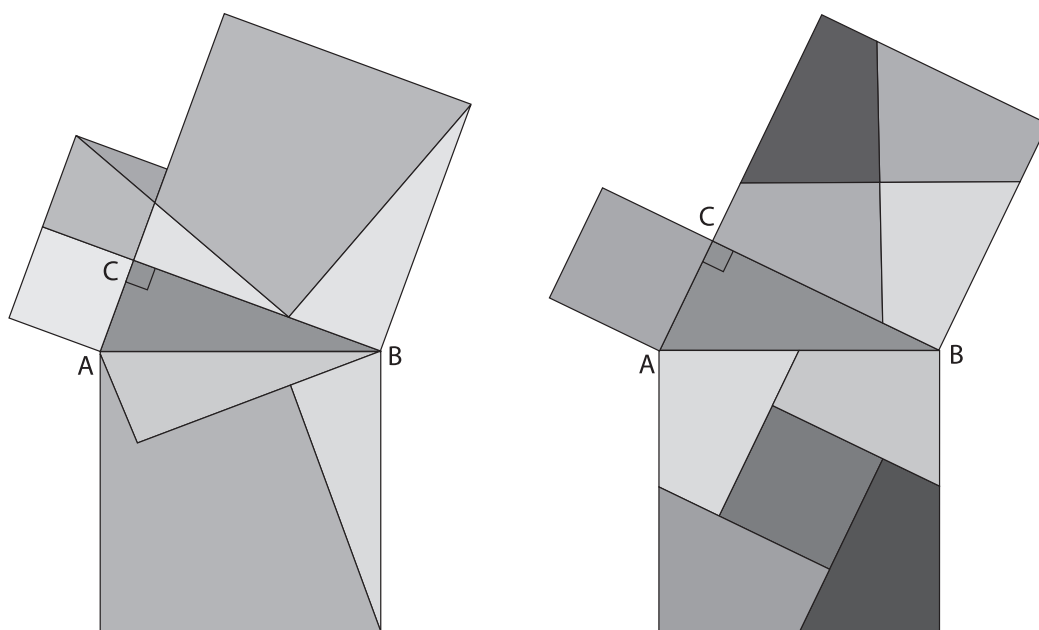
Debatan con los demás sobre las respuestas planteadas durante el trabajo en grupo.

Actividad en grupo: Rompecabezas pitagóricos

A continuación, se presentan algunas demostraciones visuales del teorema de Pitágoras en forma de rompecabezas. En todas ellas, las piezas en las que se ha dividido los cuadrados construidos sobre los catetos completan el cuadrado construido sobre la hipotenusa.

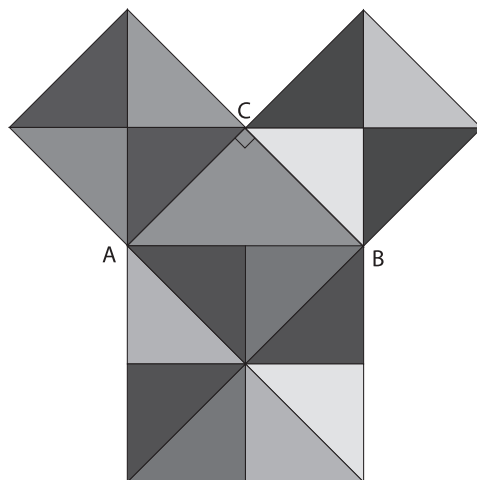
Las siguientes disecciones son válidas para cualquier triángulo rectángulo.

1. Formen grupos de cuatro personas.
2. Con cartulina, formen cualquiera de los rompecabezas mostrados a continuación:

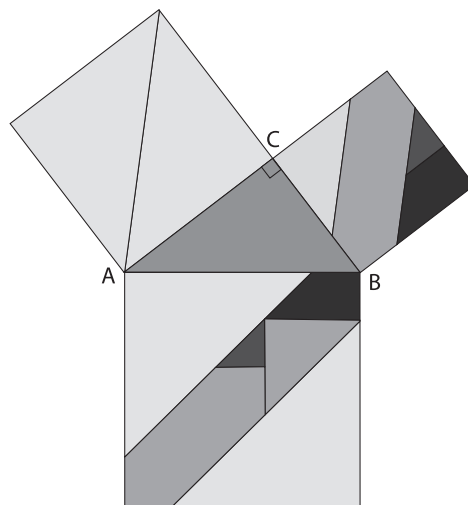


Los rompecabezas que siguen sólo son válidos en el caso de que el triángulo rectángulo inicial sea el que se indica.

Triángulo rectángulo isósceles



Triángulo 3, 4, 5



3. Una vez concluida la actividad, acérquese a los otros grupos para que armen los cuatro rompecabezas que están en las diferentes mesas.
4. Escriban los nombres de los miembros del grupo en el rompecabezas y entréguelos al instructor.

Actividad en parejas: Razones de segmentos

1. Respondan lo siguiente:
 - a. Qué condición deben cumplir dos segmentos para que su razón sea:
 - $k=3$
 - $k=1$
 - $k=1/2$
 - b. Si dos razones son iguales, ¿significa que los segmentos tienen las mismas dimensiones?
 - c. Grafique cuatro segmentos que cumplan con las siguientes condiciones:
 - c1: La razón entre los segmentos $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ es $k=4/5$
 - c2: La razón entre los segmentos $\overline{GH}$ y $\overline{JL}$ es $k=4/5$
 - c3: La razón entre los segmentos $\overline{EF}$ y $\overline{MN}$ es $k=1$
2. Escriban sus respuestas en una hoja y entréguela al instructor.

Actividad en parejas: Segmentos proporcionales

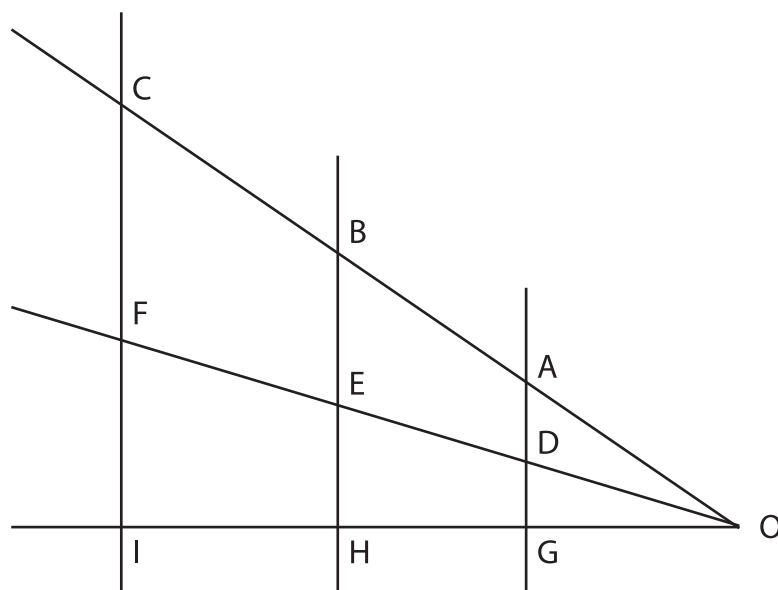
1. Calculen las razones de los cuatro segmentos a continuación:
 - $\overline{CD} = 2 \text{ cm}; \overline{EF} = 6 \text{ y } \overline{GH} = 3; \overline{JL} = 9$
2. ¿Qué interpretan según los resultados obtenidos?
3. ¿Cómo se conoce a los segmentos que cumplen con la característica del literal a de actividad 1?
4. Escriban sus respuestas en una hoja y entréguela al instructor.

Actividad plenaria

Discutan, con los demás participantes, sus respuestas a las dos actividades anteriores.

Actividad en grupo: Teorema de Thales

1. Reúnanse en grupos de cuatro participantes y observen el gráfico descrito, así como las proporcionalidades respectivas que se cumplen basadas en el teorema de Thales.



- $\overline{AB}/\overline{BC} = \overline{DE}/\overline{EF} = \overline{GH}/\overline{HI}$
- $\overline{FI}/\overline{EH} = \overline{EH}/\overline{FI}$ ó $\overline{FI}/\overline{CF} = \overline{EH}/\overline{EB} = \overline{DG}/\overline{DA}$
- $\overline{OI}/\overline{OG} = \overline{FI}/\overline{DG} = \overline{CI}/\overline{AG}$

2. A partir de lo observado, deuzcan el concepto del teorema de Thales.
3. Escribanlo en su cuaderno de anotaciones.

Actividad plenaria

Su instructor le pedirá a un grupo que exponga el teorema para debatir acerca del concepto proporcionado.

15

Regla de tres

■ SESIÓN 15 Duración: 2 horas

Objetivos

- Reflexionar sobre la importancia de utilizar conceptos matemáticos para resolver problemas de la vida cotidiana.
- Aplicar la proporcionalidad en los problemas que ameritan la aplicación de la regla de tres.

Contenidos

- Regla de tres simple: directa e inversa.
- Regla de tres compuesta: directa, inversa y mixta.

Actividad en grupo: Regla de tres simple (directa)

1. Formen grupos de cuatro docentes.
2. Realicen lo siguiente:
 - a. Tomen un resorte y dos diferentes objetos que hayan sido previamente pesados.
 - b. Cuelguen el de menor peso de un extremo del resorte y midan el alargamiento provocado.
 - c. Relacionen el peso del primer objeto con el alargamiento.
 - d. Pregúntense: si el segundo objeto pesa más, ¿el alargamiento que provocará en el resorte será mayor o menor que el anterior?
 - e. ¿Cuánto más?
 - f. Sustenten su respuesta en forma analítica.
 - g. Anótenlas en sus cuadernos.
 - h. Participen en la plenaria sobre el tema.

Actividad en grupo: Regla de tres simple (inversa)

1. Lean el texto que consta a continuación:

2. Compárenlo con sus respuestas a la actividad anterior.

La regla de tres simple relaciona tres magnitudes para obtener una cuarta.

Ejemplos:

a. Si 12 naranjas cuestan \$ 72, ¿cuál será el precio de 20 naranjas?

- La relación entre 12 y 72 determinará la relación entre 20 y el valor desconocido.

b. Si 6 obreros tardan 12 días en realizar un trabajo, ¿cuánto tardarán 8 obreros?

- La relación entre 6 y 12 nos permitirá averiguar la relación entre 8 y el valor desconocido.

Pero ¡cuidado!... Vuelva a leer los dos ejemplos. Note que ambos se parecen, pero no son iguales; es más, uno tiene un ingrediente opuesto al del otro.

En el primer caso:

Más naranjas cuestan más dinero. Menos naranjas cuestan menos dinero.

A más corresponde más, a menos corresponde menos → Son directamente proporcionales.

Este problema se resolverá aplicando la **regla de tres simple directa**.

Naranjas	\$
12	72
20	x

donde $x = \frac{72 \cdot 20}{12}$

Se multiplican los valores que están en la diagonal que no contiene a **x** y se divide ese resultado por el valor que está en la diagonal que contiene a la incógnita.

Siempre los datos que corresponden a la misma magnitud deben quedar en la misma columna: \$ sobre \$, kg sobre kg, horas sobre horas, obreros sobre obreros, etc.

En el segundo caso:

Más obreros tardarán menos tiempo. Menos obreros tardarán más tiempo.

A más corresponde menos, a menos corresponde más → Son inversamente proporcionales.

El problema se resolverá a través de la **regla de tres simple inversa**.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Obreros} & \text{días} & \\
 6 & 12 & \\
 8 & \text{---} x & \\
 \text{donde } x = \frac{12 \cdot 6}{8} & &
 \end{array}$$

Es decir que se multiplican entre sí los dos valores de la primera línea horizontal que no contiene a x y se divide el resultado por el valor de la segunda línea horizontal que implica a la incognita.

Actividad plenaria

El instructor solicitará a algunos grupos que presenten las actividades a los otros participantes, para someterlas luego a discusión.

Actividad en parejas: Magnitudes directas o inversas

- Analicen los casos de la siguiente lista y determinen si son magnitudes directas o inversamente proporcionales entre sí. Escriba sobre la línea MD o IP según corresponda.
 - El costo de una mercadería y la cantidad de la misma. _____
 - El sueldo de un obrero y el tiempo de su trabajo. _____
 - El largo y el ancho de rectángulos de igual área. _____
 - El tiempo empleado y el trabajo realizado. _____
 - La velocidad de un auto y el tiempo necesario para recorrer una distancia. _____
 - El número de obreros y el trabajo realizado. _____
 - El peso de cuerpos del mismo material y el volumen ocupado por los mismos. _____
 - El tiempo empleado en hacer un trabajo y la cantidad de obreros. _____
 - La distancia recorrida por un auto y el tiempo empleado. _____

Actividad plenaria

El instructor solicitará a cada persona sus respuestas, para que, de ser necesario, las corrijan.

Actividad en parejas: Regla de tres compuesta

- Lean el planteamiento y desarrollo de los siguientes problemas.
- Escriban comentarios al respecto en su cuaderno.

Primero: Se compraron 8 paquetes de materia prima de 150 kg, cada uno. En total se pagó \$ 480. ¿Cuánto costarán 20 paquetes de 80 kg, cada uno?

Análisis: 8 paquetes costarán menos que 20 y los de 150 kg, costarán más que los de 80 kg. Si se fijan con cuidado, ambas relaciones son directamente proporcionales (a cantidad, mayor será el costo).

Varias reglas de tres simple directas y sucesivas formarán una **regla de tres compuesta directa**.

$$\begin{array}{r} 8 \quad 480 \\ 20 \quad x \end{array}$$

$$x = \frac{480 \cdot 20}{8}$$

Nuevamente:

$$\begin{array}{r} 150 \quad \frac{480 \cdot 20}{8} \\ 80 \quad y \end{array}$$

$$y = \frac{480 \cdot 20 \cdot 80}{8 \cdot 150}$$

En la regla de tres compuesta intervienen más de tres magnitudes o valores y la relación establecida entre las conocidas permite obtener una desconocida.

Pero, ¿existe la regla de tres entre cinco, siete, nueve o más magnitudes? Por supuesto que no. En tales casos debería llamarse “regla de cinco”, “regla de siete”, etc.

En realidad son varias reglas de tres simple aplicadas sucesivamente. Y cada una de éstas puede ser directa o inversa, con lo que las operaciones de producto o cociente dependerán de eso.

Ejemplos:

- a. *Un automovilista sabe que para cubrir cierta distancia en 10 días, a razón de 12 horas diarias de marcha, debe andar un promedio de 42 kilómetros por hora. ¿A qué velocidad deberá ir para realizar ese mismo trayecto en 8 días, viajando 9 horas diarias?*

Análisis: Para cubrir el trayecto en menos días deberá viajar a más velocidad y si viaja más horas por día podrá hacerlo a menor velocidad. Ambas relaciones son inversamente proporcionales.

Varias reglas de tres simple inversas y sucesivas formarán una **regla de tres compuesta inversa**.

Las dos reglas de tres simple inversas serían:

$$\begin{array}{r} 10 \quad 42 \\ 8 \quad x \end{array}$$

$$x = \frac{42 \cdot 10}{8}$$

Nuevamente:

$$\begin{array}{r} 12 \quad \frac{42 \cdot 10}{8} \\ 9 \quad y \end{array}$$

$$y = \frac{42 \cdot 10 \cdot 12}{8 \cdot 9}$$

- b. El dueño de una tejeduría ha calculado que para elaborar 630 m de tela, 8 operarios tardan 7 días. Si 2 tejedores no pueden trabajar (con lo que quedan sólo 6), ¿cuántos días tardarán para hacer 810 m de tela?

Para tejer más tela tardarán más días (relación directa), pero menos obreros demorarán más días (relación inversa). Es, por tanto, una **regla de tres compuesta mixta**.

Varias reglas de tres simple sucesivas, unas directas y otras inversas, formarán una **regla de tres compuesta mixta**.

La dos sucesivas reglas de tres simple serían:

$$\begin{array}{r} 630 \quad 7 \\ 810 \quad x \\ x = \frac{7 \cdot 810}{630} \end{array}$$

Luego:

$$\begin{array}{r} 8 \quad \frac{7 \cdot 810}{630} \\ 6 \quad y \\ y = \frac{7 \cdot 810 \cdot 8}{630 \cdot 6} \end{array}$$

OBSERVACIÓN IMPORTANTE:

Cada dato directamente proporcional quedará en el numerador. Cada dato inversamente proporcional quedará en el denominador.

Actividad plenaria

Cuando el instructor lo requiera, comenten con los demás docentes acerca de cómo les resulta más fácil trabajar: con dos reglas de tres simples o con una regla de tres compuesta.

16 | Porcentaje e interés



■ SESIÓN 16 Duración: 2 horas

Objetivos

- Reflexionar acerca de la importancia de trabajar con temas de la vida cotidiana.
- Aplicar la proporcionalidad en los problemas sobre porcentaje e interés.

Contenidos

- Los porcentajes en la vida cotidiana.
- Fracciones decimales.
- Relación entre porcentajes, fracciones y decimales.
- El tangram y los porcentajes.
- Interés.

El porcentaje es una de las expresiones matemáticas que más usamos en la vida cotidiana. Por otra parte, la información que aparece en los medios de comunicación está repleta de datos expresados en porcentajes. Por ejemplo: “Rebajas del 10% en todos los artículos del hogar” o “La demanda mundial de crudo se reducirá en 1,6% para este año 2009”.

Un porcentaje es la proporción de una cantidad respecto de otra y representa el número de partes que nos interesan de un total de 100.

Actividad individual: Los porcentajes en la vida cotidiana

1. Lea el artículo *La crisis internacional y su gestión global*.

Lectura: La crisis internacional y su gestión global

Alfredo Acosta, profesor e investigador de la FLACSO

Alfredo Serrano, profesor visitante de la FLACSO

Respecto al comercio internacional, el Banco Mundial y la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) prevén –31 de marzo de 2009– una caída “sin precedentes” de 6,1% del volumen del comercio mundial de bienes y servicios en 2009, impactado sobre todo por una contracción aún más drástica de los intercambios de productos manufacturados. A su vez, la Organización de Países Exportadores de Petróleo (OPEP) considera –14 de abril de 2009– que la demanda mundial de crudo se reducirá en 1,6% para este año 2009. Otro capítulo aparte es el impacto en las cuentas públicas de los países industrializados.

Después de haber abogado por el dogma del equilibrio presupuestario –tanto en la Unión Europea con su Pacto de Estabilidad y en los Estados Unidos–, la mayoría de los países han incumplido sus propias condiciones impuestas, que son las mismas que han exigido a la mayoría de los países más pobres a la hora de concederles préstamos. Estados Unidos puede terminar su año con 1,5 billones de dólares de déficit, equivalente al 12% del PIB. Europa también rompe los límites establecidos en el citado Pacto de Estabilidad (del 3% como máximo), donde el déficit público se triplicó con relación a 2007. El país con más déficit de la zona del euro es Irlanda (7,1% del PIB), seguido de Grecia (5%) y Malta (4,7%), mientras que España, con un déficit del 3,4% (el Gobierno ha elevado ya esta cifra al 3,8%) se sitúa en el cuarto lugar. En el conjunto de la Unión Europea, el saldo presupuestario también empeoró significativamente, ya que pasó del 0,8% al 2,3% del PIB. Según los datos difundidos por Eurostat, la oficina estadística comunitaria, también cambió la tendencia de corrección de la deuda pública, que pasó del 66% al 69,3% del PIB.

El desempleo es otra variable que también ha sufrido un fuerte descalabro en los países industrializados. En Estados Unidos llegó al 8,5% en el mes de marzo. En los países de la OCDE fue del 7,3%, mientras que en la zona euro alcanzó el 8,5%. Francia tuvo en febrero pasado el 8,6%. El caso más llamativo es España, con un 15,5% en la tasa de desempleo dando muestras de la sensibilidad de su tejido laboral a los vaivenes del PIB, más aún cuando se trata de un modelo productivo que ha crecido en base a una burbuja inmobiliaria que ahora se ha deshinchado.



2. De acuerdo con el texto anterior, escriba sus comentarios sobre:
 - a. ¿Cuál es el uso que se le da a los porcentajes en el texto?
 - b. ¿En qué otros contextos se presentan los porcentajes?
 - c. ¿Qué manejo se le dan a los porcentajes en la Educación General Básica?
3. Lea el texto a continuación.

Recordemos que un porcentaje no es otra cosa que una fracción de denominador 100, que se escribe de otra manera. En los diarios podemos leer: “La inflación creció en 0,3% en el mes que termina”, “En la liga de fútbol, el 35% de los partidos termina en empate”, “American Airlines plantea recortes salariales del 15% para salvar su empresa”, “La UNESCO comprobó que quedan solo 2,7% de la población sin saber leer y escribir”.

Como ve, noticias relacionadas con trabajo, economía, deportes, política, educación, etc., utilizan los porcentajes.

Fíjese en esta frase: “El impuesto del IVA es del 12%”, significa que por cada \$ 100 de compras en artículos que pagan este impuesto deberá pagar adicionalmente \$ 12. Si un artículo cargado con IVA cuesta en total \$ 10; esto quiere decir que el impuesto causado será \$ 1.20. Si compra un televisor que cuesta \$ 5000, tendrá que pagar \$ 600 por el IVA.

Una de las ventajas de utilizar los porcentajes es la facilidad de compararlos: en lugar de decir “los $\frac{13}{20}$ ” o “los $\frac{16}{25}$ ”, “el 65%” o “el 64%”. Así fácilmente se puede dar cuenta que la primera fracción es mayor que la segunda.

Cuando digo $\frac{1}{2}$ o la mitad de..., estoy tratando de encontrar cuánto vale una parte de la cantidad que me han dado si la divido en dos partes iguales. Por ejemplo: el $\frac{1}{2}$ de 40 es igual a 20; el $\frac{1}{5}$ de 18 es 3,6.

NOTA IMPORTANTE: Cuando compara dos cantidades de una magnitud, está usando las *fracciones* como *razones*.

Así, cuando dice que la *proporción* entre hombres y mujeres en el instituto es de 3 a 2 respectivamente, está diciendo que por cada 3 chicos hay 2 chicas; es decir que de cada cinco estudiantes, 3 son chicos y 2 son chicas.

Un caso particular de aplicación de las *fracciones* como *razón* son los *porcentajes*, ya que éstos indican la relación de proporcionalidad que se establece entre un número y 100 (tanto por ciento), un número y mil (tanto por mil) o un número y uno (tanto por uno).

Actividad plenaria

Cuando el instructor lo solicite, expongan sus criterios sobre las lecturas precedentes.



Actividad en parejas: Fracciones decimales

1. Con el graduador circular, marquen una escala del 0 al 100, en que los 90° equivalgan a 25 unidades, 180° a 50, 270° a 75 y 360° a 100 unidades.
2. Noten que al tomar la circunferencia como unidad se puede fraccionar en 100/100 (cien centésimas), que equivalen a 1,00.

Tomando como ejemplo $1/2$ de circunferencia vean que $1/2$ equivale a $50/100$ y esto, a su vez, corresponde a 0,50.

$1/2$ es igual a 0,5 y se lee "cinco décimas".

Que $1/2$ es igual que 0,50 y se lee "cincuenta centésimas".

Actividad en grupo: ¿Qué significa el tanto por ciento de...?

1. Formen grupos de tres personas y piensen en lo siguiente:
 - a. ¿Qué significa la expresión. "El 50% de las fichas de un juego de ajedrez son blancas".
 - b. ¿Cómo expresarían con el símbolo % la expresión. "En el concierto de Juan Luis Guerra de cada 100 asistentes, 57 eran mujeres".

- 2. Con de las plantillas de fracciones, formen cantidades dadas en porcentaje, como por ejemplo 25%, 50%, 100%.
- 3. Representen, con las plantillas de fracciones, los siguientes porcentajes: 33,33%, 66,66%, 25%, 75%.
- 4. Lean el texto *Relación entre porcentajes, fracciones y decimales*.
- 5. Escriban en sus cuaderno qué conclusiones interesantes obtuvieron del texto.

Lectura: Relación entre porcentajes, fracciones y decimales

Cuando digo 1/2 o la mitad de..., estoy tratando de encontrar cuánto vale una parte de la cantidad que me han dado si la divido en dos partes iguales.

Por ejemplo: el 1/2 de 40 es igual a 20; el 1/5 de 18 es 3.6.

Siempre que deseo encontrar 1/2, 1/3, 1/4, ..., etc., de una cantidad, basta dividir dicha cantidad por: 2, 3, 4, ..., etc.

Porcentaje %	Fracción	Decimal	Gráfico
50	1/2	0,5	
25	1/4	0,25	
75	3/4	0,75	
20	1/5	0,2	
40	2/5	0,4	
60	3/5	0,6	
80	4/5	0,8	
10	1/10	0,1	
30	3/10	0,3	
70	7/10	0,7	
12.5	1/8	0,125	
5	1/20	0,05	
15	3/20	0,15	
35	7/20	0,35	
65	13/20	0,65	
85	17/20	0,85	
95	19/20	0,95	
33.33	1/3	0,333	

Esperamos que esto ayude a los niños a comprender las fracciones y los porcentajes.

Cálculo mental

- El 10% de 200=
- El 20% de 35=
- El 50% de 6=

- El 5% de 500 =
- El 25% de 32=
- El 33 1/3% de 12=

El **cálculo mental** debe ser una constante en todas las clases de matemáticas; esto ayudará a desarrollar la agilidad mental y el razonamiento en los estudiantes.

Actividad plenaria

1. Expongan sus ideas ante los demás docentes.
2. Si no forman parte del grupo que expone, realice preguntas para debatir, como:
 - a. ¿Qué relación existe entre los decimales, las fracciones y los porcentajes?
 - b. ¿Cómo haría usted para explicarle esta relación a sus estudiantes?

Actividad en parejas: Construcción de un tangram

¿Qué es un tangram?

Es un juego chino que tiene muchísimos años de haber sido inventado. Se trata de un cuadrado dividido en cinco triángulos isósceles de distintos tamaños, un cuadrado pequeño y un paralelogramo. El cuadrado original se ha dividido en siete piezas, que pueden ser ubicadas en diferentes formas para obtener distintas figuras, ya sea de personas, animales, letras, cosas, etc.

Procedimiento:

1. Dibujen un cuadrado de 20 cm de lado.
 2. Denominen A, B, C y D a cada vértice del cuadrado, en sentido antihorario, comenzando por el vértice inferior izquierdo.
 3. Marquen el punto medio de cada lado.
 4. Nombren los puntos medios: E, F, G, H. Comiencen por el lado $\overline{AB}$ en sentido antihorario.
 5. Tracen la diagonal $\overline{AC}$.
 6. Dibujen el segmento $\overline{EF}$.
 7. Tracen la diagonal $\overline{DB}$ hasta la intersección con el segmento $\overline{EF}$.
 8. Realicen el segmento $\overline{EH}$ hasta la intersección con la diagonal $\overline{AC}$.
 9. Marquen el punto de intersección del segmento $\overline{FG}$ con la diagonal $\overline{AC}$. No tracen el segmento.
 10. Unan este último punto con el de la intersección de la diagonal $\overline{DB}$ y el segmento $\overline{EF}$.
1. Encuentren qué parte del cuadrado original es cada una de las figuras.

#	Figura	Parte del cuadrado original
	Triángulo grande	
	Triángulo mediano	
	Triángulo pequeño	
	Cuadrado	
	Paralelogramo	

2. Justifiquen sus respuestas.
3. Recorten las figuras y compruebe sus aciertos.
4. Anoten sus resultados en su cuaderno.

Actividad plenaria

Revisen, con los demás docentes, sus trabajos realizados en la actividad anterior.

Actividad en parejas: Fracciones y porcentajes

1. Lean lo siguiente:

¿Cuál es el valor de los $\frac{3}{8}$ de 40? Esto es lo mismo que $\frac{3}{8} = \frac{?}{40}$. Note que se ha quintuplicado el valor del 8 para obtener 40; entonces:

$\frac{3}{8} = \frac{15}{40}$, por lo que el valor buscado es 15.

Recuerde la propiedad:

Si ambos términos de una fracción se multiplican o dividen por el mismo número, el valor de la fracción *no se altera*.

2. Reúnanse en parejas y respondan las diferentes preguntas basadas en el concepto de porcentaje:
 - a. ¿De qué número 15 es el 37,5 %?
 - b. Si de 40 tomo 15, ¿cuánto debo coger de 100 para haber tomado el mismo porcentaje?
 - c. Y de 8, ¿cuánto debo tomar?
 - d. ¿Qué porcentaje es 3 de 8?
 - e. Si 3 representa el 37,5 % de un número, ¿cuál es éste?, etc.

Actividad individual: Aplicación de la regla de tres y del cálculo de interés

1. Analice la siguiente situación:

Un banco particular presta dinero y cada mes, exige que por cada \$100 prestados se le pague de interés \$2,50.

- a. ¿Cuánto debería usted pagar en total por un préstamo de \$100 en un mes?
- b. ¿Cuánto debería usted pagar en total por un préstamo de \$1000 en un mes?

2. Observe el caso a continuación:

Debido a que por cada \$100 debe devolver \$2,50 adicionales en un mes, entonces tiene que devolver \$102,50.

En el caso del préstamo de \$1000, calcule cuántos grupos de \$100 están contenidos en los \$1000... la respuesta es 10 grupos; por lo tanto, si por cada 100 personas deben devolver \$2,50; al multiplicar 10 por \$2,50 se obtiene un valor de \$25 por concepto de intereses. Debe pues sumar los \$1000 y los \$25. Así, el total a pagar es \$1025.

Los intereses son el resultado de aplicar la tasa de interés al capital. Esta tasa de interés es un operador multiplicativo que se aplica a una cantidad de dinero que se la denomina **capital**, para obtener como resultado el precio por tener el dinero durante un tiempo determinado de duración.

3. ¿Cómo explicaría lo anterior a sus estudiantes?

Actividad en parejas: Cálculo de interés

1. Reflexionen sobre lo siguiente:

¿Podríamos decir que el interés es un caso de proporcionalidad? Si es así, ¿se lo puede resolver utilizando la regla de tres?

2. Apliquen lo comentado en el numeral precedente para la resolución del siguiente problema.

Lorena recibe un préstamo de \$5000 a una tasa de interés simple del 12 % anual.

- ¿Cuánto debe pagar en total a los seis meses?
- ¿Qué precaución deben tener al realizar este cálculo en cuanto a la tasa de interés?
- Planteen un problema de interés a través del que expliquen su razonamiento y respuestas anterior.

Actividad plenaria

- Cuando el instructor lo solicite, respondan las preguntas planteadas en la actividad anterior.
- Expongan su propuesta didáctica de clases de la primera actividad y el problema sobre intereses creado en la segunda actividad.

Tarea individual

- Averigüe si los bancos e instituciones financieras cobran interés simple o compuesto y cuál es la diferencia entre los dos.
- Reflexione sobre lo siguiente:
¿Qué otra forma conoce para resolver la proporcionalidad además de la regla de tres?

17 | Reparto proporcional

■ SESIÓN 17 Duración: 2 horas

Objetivos

- Aplicar la proporcionalidad en problemas de la vida real.

Contenidos

- Las fracciones en situaciones de reparto.
- Problemas de aplicación sobre reparto proporcional.

Actividad plenaria

Converse con el instructor y los demás participantes acerca de cómo resolvió la tarea y por qué lo hizo de esa forma.

Actividad en grupo: Las fracciones en situaciones de reparto

1. Formen grupos de cuatro personas y resuelvan cada uno de los planteamientos que se presentan y registre la información que se requiere en el cuadro.

Reparto n.º 1

Cuatro niños se repartieron tres barras iguales de chocolate. A cada uno le tocó la misma cantidad, sin que sobre nada. ¿De qué tamaño eran las barras que se repartieron, si lo que le tocó a cada uno es del tamaño que se muestra a continuación?



Reparto n.º 2

En otra ocasión, tres niños se repartieron cuatro barras de chocolate. La parte que le tocó a cada uno es del tamaño que se muestra a continuación:



¿De qué tamaño eran las barras que se repartieron?

Reparto n.º 3

Unos niños se repartieron varias barras de chocolate. A cada uno le tocó la misma cantidad sin que sobrara nada. Las barras y la porción que recibió cada niño son como las que se dibujan a continuación:



¿Cuántos niños eran y cuántas barritas se repartieron?

Reparto n.º 4

Armando repartió entre sus tres hermanos ocho barras de chocolate y no le sobró nada. La parte que le tocó a cada uno es del tamaño que se muestra a continuación:



¿De qué tamaño era cada barrita de chocolate?

Reparto n.º 5

Varios niños se repartieron algunas barras de chocolate. Cada uno recibió $\frac{5}{3}$ de barra. ¿Cuántas barras se repartieron y cuántos niños eran?

Cuadro de síntesis de la información

Reparto	Número de barras	Número de niños	Tamaño de la barra entera	Porción que le tocó a cada niño
1				
2				
3				
4				
5				

2. Contesten las siguientes preguntas:
- a. ¿En cuál(es) reparto(s) el tamaño de la barra entera de chocolate es más grande que la parte que le tocó a cada niño?
 - b. ¿En cuál es más pequeña?
 - c. ¿En cuál(es) reparto(s) se conocían tres de los datos del problema?
 - d. ¿Cuáles son esos datos?
 - e. ¿En cuál(es) reparto(s) se conocían sólo dos datos del problema?
 - f. ¿Cuáles son?
 - g. ¿Hay algún problema que pueda tener múltiples respuestas?
 - h. Si la respuesta al anterior literal es afirmativa, ¿cuál es y por qué sucede eso?
 - i. ¿Cuál es la diferencia entre el reparto número cinco y los demás?

Actividad plenaria

Comente con los demás participantes sobre:

1. ¿Cuáles son los repartos más sencillos y cuáles los más complejos? ¿Por qué?
2. ¿Con qué tipo de actividades conviene introducir el concepto de fracción en la educación general básica?
3. ¿Qué ventajas tienen los estudiantes al manipular el material concreto al momento de realizar actividades de este tipo?

Actividad en parejas: Aplicación real de reparto proporcional

1. Observen este problema:

Dos números están en relación de 3 a 7. Si el mayor es 119, ¿cuál es el menor?

$$\text{menor/mayor} = 3/7 = x/119$$

2. Contesten las interrogantes:
 - a. ¿Qué relación hay entre el producto de dos números y uno de ellos?
 - b. ¿Qué relación guardan los dos factores entre sí cuando el producto permanece constante?
3. Indiquen cuántas veces se ha multiplicado el 7 hasta convertirse en 119. El 3 debe incrementarse el mismo número de veces. ¿Cuál es el valor de la incógnita?
4. Relacionen lo anterior con el siguiente problema y resuélvanlo:

Dos amigos se asocian para emprender un negocio. El primero aporta con \$ 3500 y el segundo con \$ 28 000. ¿En qué proporción se repartirán las ganancias o las pérdidas del negocio?

A esta forma de repartir se la conoce con el nombre de **repartimientos proporcionales directos**; porque a mayor capital, mayor ganancia o pérdida según el caso.

En cambio, cuando se reparte una herencia, sin que haya un testamento, la parte que corresponde repartir entre los hijos no puede hacerse en partes iguales, sobre todo si hay menores de edad, sino que se la repartirá en forma inversamente proporcional a las edades de los beneficiarios.

5. Entreguen su trabajo al instructor.

18

Problemas integradores

SESIÓN 18 Duración: 2 horas

Objetivos

- Utilizar las operaciones estudiadas en la solución y elaboración de problemas que involucren todos los contenidos.

Contenidos

- Problema sobre proporción áurea.
- Problema sobre fondos de reserva.
- Problema sobre desechos sólidos.
- Problemas sobre porcentajes y fracciones: ensalada de frutas, representaciones gráficas.
- Micropráctica.

En este capítulo se presentan propuestas diferentes de problemas aplicados en una variedad de contextos, con el fin de motivarlos a encontrar las conexiones de las matemáticas con otras ciencias y áreas.

Estos problemas pueden ser replanteados por usted, de tal forma que se conviertan en proyectos de investigación y aplicación a la ciencia.

La propuesta ya incluye, en el marco teórico, los datos necesarios para resolver los problemas, pero queremos que ustedes generen una nueva propuesta que, a partir de la investigación conceptual, permita a los estudiantes aplicar los contenidos matemáticos en el momento oportuno.

¡Adelante!

Actividad en grupo: Operaciones aritméticas básicas

1. Formen grupos de cuatro docentes y expongan qué material suelen utilizar y cómo lo aplicarán en la enseñanza de operaciones aritméticas básicas a los estudiantes
2. Respondan: ¿qué otros contenidos podría enseñar con este material?

Desarrollo conceptual del número base 10

Objetivos:

- Utilizar material concreto para observar las unidades, decenas y centenas.
- Reconocer el conocimiento ancestral de los incas y las técnicas que utilizaban para calcular y resolver problemas.

Características del material

La *toptana nikichik*, término kichwa que significa “ordenador de números”, es un contador de madera de forma rectangular. Posee cuatro columnas con nueve hoyos por cada una. En la parte superior tiene un hoyo más grande que los anteriores, denominado 0. Aquí es donde se colocará la cantidad de unidades, decenas o unidades de mil que no alcanzan a contarse en la columna que le corresponda. De esta manera, se transformarán 10 unidades por una decena, 10 decenas por una centena, etc.

Para comenzar a operar con esta tabla, se necesita contar con varias fichas para identificar las unidades, decenas, centenas, etc.. Los incas, por su parte, usaban varios tipos de maíz, como el mote y el choclo, o cereales para reconocer los valores de cada sumando.

El orden de las columnas, de derecha a izquierda, es:

- La primera columna (color verde) corresponde a las unidades.
- La segunda columna (color azul) indica las decenas.
- La tercera columna (color rojo) señala las centenas.
- La cuarta columna (color amarillo) pertenece a las unidades de mil.



Suma sin reagrupación

En los primeros años de la Educación General Básica se recomienda verbalizar los ejercicios, por ejemplo: Martha tiene 25 borregos y su hermana le regala 13 borregos. ¿Cuántos borregos tiene Martha en total?

$$25 + 13 = 38$$

Para solucionar este problema utilizando la *toptana nikichik*, coloque las fichas o el tipo de maíz que correspondan al primer sumando, en este caso 25, de la siguiente manera: 5 motes en la columna de las unidades y dos maíces en la de las decenas. Luego, haga lo mismo con el segundo término de la suma: 3 motes en la columna de las unidades y un maíz en la de las decenas. A continuación, cuente la cantidad de maíces en cada columna. El resultado será 8 motes en el orden de las unidades y 3 maíces en el de las decenas; es decir: 38.

Suma con reagrupación

Observe el ejemplo:

$$238 + 125 = 363$$

En este caso, se utilizará el hoyo más grande para registrar las cantidades que no entren en la columna.

Coloque las fichas o maíces que correspondan al primer sumando: 8 en la columna de las unidades, 3 en la de las decenas y 2 en la de las centenas. Haga lo mismo con el del segundo sumando: 5 maíces en las unidades, 2 en las decenas y 1 en las centenas. Comience a sumar por las unidades; obtendrá 13 maíces; 9 en la columna y 4 que los ubicará en el hoyo mayor.

Para proseguir con las cifras que constan en la columna de las decenas, reagrupe las unidades en una decena, incluyendo las 4 que colocó en el hoyo mayor. Ésta pasará a conformar una nueva decena en la columna correspondiente y en las unidades sobrarán 3 motes; así, en el presente ejemplo, quedarán seis decenas y tres unidades.

Luego, cuente cuántos maíces o fichas tiene en las centenas; es decir, 3.

El resultado final será: tres motes en las unidades, seis maíces en las decenas y tres en las centenas: 363.

Resta sin reagrupación

Carlos tenía 9 trompos, pero luego de un juego perdió 4. ¿Cuántos trompos le quedaron?

$$9 - 4 = 5$$

Para operar con la *toptana*, coloque 9 motes en la columna de las unidades (minuyendo). Luego desde arriba hacia abajo, quite 4 motes (sustrayendo). Lo que queda es la respuesta; en este caso 5 (diferencia).

Resta con reagrupación

$$80 - 35 = 45$$

Ubique 8 maíces en la columna de las decenas y no coloque ningún mote en las unidades. Para quitar las 5 unidades, proceda de la siguiente forma: cambie 1 decena por 10 unidades y colóquelas en la columna de las unidades. Quite 5 motes y 3 maíces. El resultado es 4 decenas y 5 unidades; es decir, 45.

Multipliación

La multiplicación es una suma abreviada. Para multiplicar 4×3 en la *toptana*, siga estos pasos:

1. Realice agrupaciones de cuatro semillas o mullos y diga "1 vez 4, 2 veces 4 y 3 veces 4". Finalmente, agrupe y cuente el total de semillas o mullos; en este caso es igual a 12 unidades.
2. De las 12 unidades que obtuvo, cambie 10 unidades por 1 decena y tendrá 1 decena y 2 unidades; la respuesta es 12.

División

La división es una repartición en partes iguales.

- a. Para dividir 15 por 3, sigan los siguientes pasos:
- b. En la *toptana*, represente el número colocando 5 motes en la columna de las unidades y un maíz en la columna de las decenas.
- c. Reparta las 5 unidades para 3 (Juan, Pedro y Carmen) de una en una. Le sobran 2 unidades.

- d. Como falta 1 unidad para continuar repartiendo, cambien la decena por 10 unidades. Ahora pueden seguir con el reparto.
- e. Finalmente cuenten el número de moles que le tocó a cada niño, esto es 5 unidades.
- f. Investigue cómo debe ser el trabajo con la toptana en números decimales. Entréguela al instructor.

Adaptación, tomado de Avilés López, Luis Mario. Taptana Nikichik.
http://www.educarecuador.ec/_upload/Taptana%20nikichil.pdf. Fecha de acceso 04-11-2009.

Actividad en grupo: Construir nuevas clases

1. Formen grupos de cuatro personas.
2. Lean los anexos 2 y 3, que se encuentran al final del libro.
3. Escojan uno de los problemas planteados a continuación en esta sesión.
4. Planifiquen una clase de acuerdo con la didáctica planteada en este libro.
5. Para diseñar su unidad, remítanse al anexo 7 sobre el plan de clase.

Actividad plenaria

1. Pongan en práctica la clase que prepararon: ustedes serán los docentes y sus compañeros los estudiantes.
2. Luego, pregunten a sus compañeros cuáles creen que fueron los objetivos de la clase.
3. ¿Coinciden esos objetivos con los suyos?, ¿por qué?
4. Recojan las impresiones y comentarios de sus compañeros y del instructor sobre la planificación y el desarrollo de su clase, de acuerdo con la ficha de observación en el aula proporcionada en el anexo 8.

Actividad en parejas: Resolución de problemas

PROBLEMA 1. Proporción áurea

Objetivos:

- Conocer las relaciones entre las matemáticas y el arte.
- Encontrar relaciones entre nuestras medidas y el concepto estético de lo armónico.

Marco teórico:

En la película *Donald en el país de las Matemáticas* se dedica varios minutos de la película a la razón áurea. Ésta se encuentra en la arquitectura, en la naturaleza y el cuerpo humano.

Su origen se remonta a los antiguos griegos, quienes pensaban que el rectángulo áureo mostraba la proporción más estética.

Un rectángulo áureo se define como un rectángulo cuyas dimensiones satisfacen la ecuación:

$$\text{Longitud} / \text{ancho} = (\text{longitud} + \text{ancho}) / \text{longitud}$$

La razón áurea está dada por:

$$(1 + \sqrt{5}) / 2 = 8/5 = 1,61818181....$$

A menudo se simboliza por la letra griega π (Pi).

Película: *Donald en el país de las Matemáticas*

1. Observar en el filme *Donald en el país de las Matemáticas*.



En nuestro propio cuerpo existen relaciones entre la matemática y la naturaleza:

2. Formen parejas.
3. Midan las longitudes que se piden en la tabla.
 - a. Altura de cada integrante (h).
 - b. Distancia entre la planta de los pies y el ombligo (n).
 - c. Distancia entre la cima del cráneo y el ombligo (m).
 - d. Con los datos anteriores, completen la tabla como la siguiente:

Cuadro de concentración de la información

h	n	m	h/n	n/m

Anoten sus conclusiones de acuerdo con los valores obtenidos para h/n y n/m.

4. Busquen las proporciones entre esas medidas y determinen las que se acercan al número áureo.
5. ¿Qué cuerpos son más armónicos?

Durante la época del Renacimiento, las composiciones pictóricas debían ser regidas por la proporción áurea y artistas como Leonardo Da Vinci pintaron todas sus obras basándose en esta relación.
6. Contesten: ¿qué opinan ustedes al respecto? ¿por qué?
7. Realicen tres mediciones comparativas entre:
 - a. El largo y el ancho de su mano.
 - b. El largo y ancho de su pie.
 - c. El largo y ancho de su tronco.
8. Determinen las proporciones entre estas magnitudes.
9. Comparen las proporciones obtenidas con las del grupo que está trabajando junto a ustedes.

10. Verifiquen cuál respuesta se ajusta más a la razón áurea.
11. Busquen hojas de árboles, frutas o animales pequeños y encuentren la relación entre su ancho y largo y descubran la proporción áurea.
12. Dividan su estatura entre la altura a la que se encuentra su ombligo. Encuentren el promedio del grupo en la clase. ¿A qué valor se aproxima este promedio?
13. Creen tres actividades nuevas para sus estudiantes a partir del concepto de razón áurea.

PROBLEMA 2. Fondos de reserva

Objetivos:

- Aplicar el concepto matemático de porcentaje en el contexto actual.

Marco teórico:

Retrasar el comienzo de los depósitos para los fondos de reserva tiene un marcado efecto en la cantidad de dinero que un individuo acumula hasta los 65 años de edad.

1. Resuelvan el siguiente problema:

Laura empezó a ahorrar a los 20 años. Ahorró \$2000 en su fondo de reserva cada año desde los 21 años de edad hasta los 30. Después de esta edad no hizo más contribuciones.

Sara, en cambio, esperó hasta los 30 años de edad para empezar a ahorrar y guardó \$2000 cada año entre los 31 y 65 años de edad.

Si el fondo de retiro paga 12% de interés, ¿quién recibirá mayor cantidad de dinero acumulada?

2. Creen un nuevo problema que utilice como contexto los fondos de reserva.

PROBLEMA 3. Desechos sólidos

Objetivos:

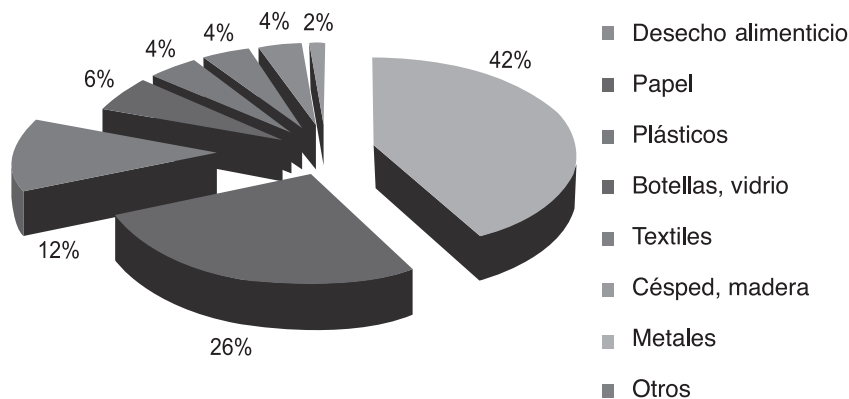
- Aplicar el porcentaje a un contexto real y actual.
- Desarrollar la habilidad para la lectura de gráficas tipo pie.

Marco teórico:

En el año 2008 se realizó un estudio sobre la composición física de los residuos en una ciudad de América Latina.

El 12% corresponde a residuos de plástico, como se observa en la gráfica a continuación, en su mayoría envases de un sólo uso y todo tipo de envoltorios y embalajes, así como el PVC, uno de los plásticos de uso más generalizado.

Nota: los datos de este problema son ficticios, sólo tienen el objetivo de ilustrar una situación que puede ser real.



1. Contesten las siguientes preguntas de acuerdo con el gráfico:
 - a. Si el estudio se realizó sobre los 5 000 000 kg de basura recopilados en un año, ¿a cuántos kilogramos corresponde cada una de las categorías mostradas?
 - b. ¿Cómo clasificarían ustedes estos residuos en residuos orgánicos y no biodegradables?
 - c. ¿Qué porcentaje representan los residuos orgánicos del 100%?
 - d. ¿Qué porcentaje representan los no degradables del 100%?
 - e. Si los impuestos municipales de la ciudad son de 0,15% por cada gramo de basura, ¿cuántos dólares recaudó el municipio por este servicio?
 - f. En los planes municipales está disminuir el desperdicio de plásticos en 5 kg por año y de botellas y vidrio en 2 kg por año. ¿Cómo quedaría la nueva distribución del gráfico para el próximo año?
 - g. ¿Qué podrían proponer ustedes para disminuir los desperdicios antes mencionados?
 - h. Investiguen propuestas para aprovechar los residuos orgánicos aquí mencionados y que puedan aplicar.
2. Inventen un nuevo problema en el que utilicen el concepto de proporción. Soliciten leer y construir gráficos.

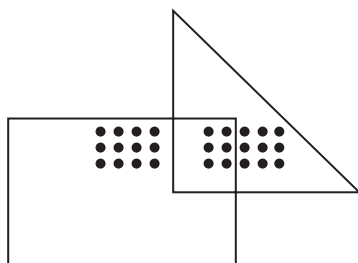
PROBLEMA 4. Fracciones y porcentajes

Objetivos:

- Aplicar conceptos de fracciones y porcentajes.
- Utilizar material concreto.

Fracción

Escriban la fracción más simple posible que represente la región especificada en cada numeral.



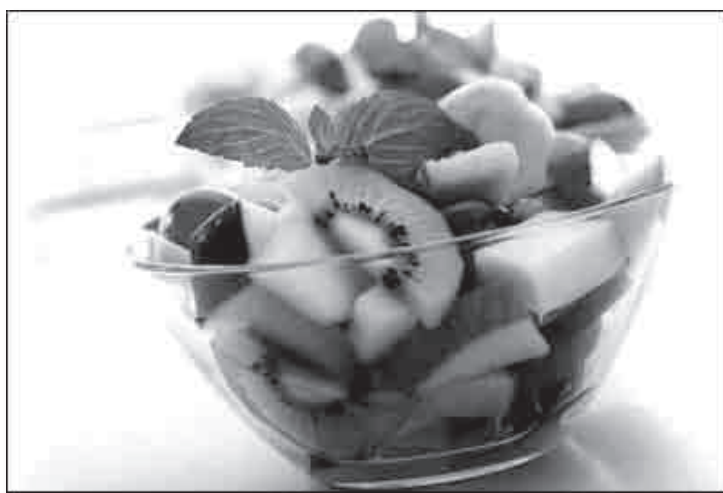
1. Los puntos dentro del rectángulo como una parte de los puntos en toda la figura.
2. Los puntos dentro del triángulo como parte de los puntos en toda la figura.
3. Los puntos dentro del rectángulo como una parte de los puntos en la unión del triángulo y el rectángulo.
4. Los puntos en la intersección del triángulo y del rectángulo como una parte de los puntos en la unión del triángulo y el rectángulo.
5. Señale la región que está representada por la fracción $1/12$.

4.2 Ensalada de frutas

Preparen al aire libre, en compañía del instructor y de sus compañeros, una deliciosa ensalada de frutas con los siguientes ingredientes:

- $1/2$ papaya
- $3 \frac{1}{2}$ bananos
- $1/4$ libra de queso rallado
- $4/3$ manzana
- $2/4$ de libra de guanábana
- $1/4$ de libra de uvas

1. Realice y responda:
 - a. Divida la porción de papaya en 12 partes iguales. ¿Cómo se denomina a cada trozo de papaya?
 - b. Divida cada banano en octavos. ¿Cuántos octavos reunió en total?
 - c. Divida cada tercio de manzana en 4 partes iguales. ¿Cuántos tercios resultaron en total?
 - d. Cuente cuántas uvas hay en un cuarto de libra. ¿A qué fracción de libra corresponde cada uva?



Luego de este análisis, distribuya los trozos de papaya, banano y manzana en la bandeja.

Coloque los trocitos de guanábana encima, espolvoree el queso rallado sobre la fruta y decore con uvas. Añada unas gotas de miel al gusto.

¡Buen provecho!

4.3 Relación entre fracciones y porcentajes

La multiplicación de fracciones permite calcular porcentajes, ya que éstos son fracciones de denominador 100. Además, en este tipo de situaciones se utiliza en su expresión decimal para expresar resultados.

Problema:

1. Observen las figuras y determinen la fracción que corresponde a las zonas sombreadas en cada una:
2. Determinen los porcentajes en cada caso.

Figura 1

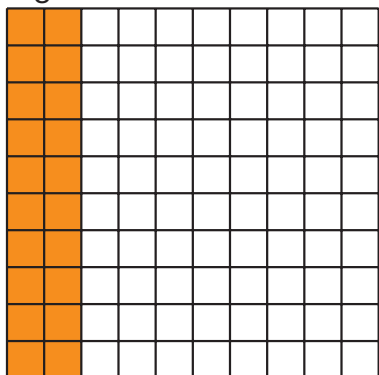


Figura 2

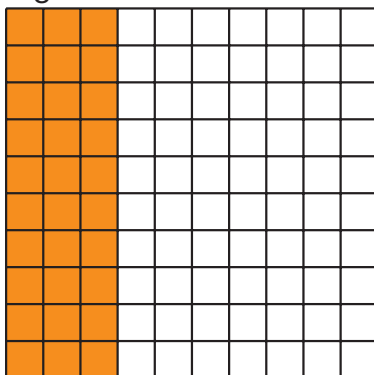


Figura 3

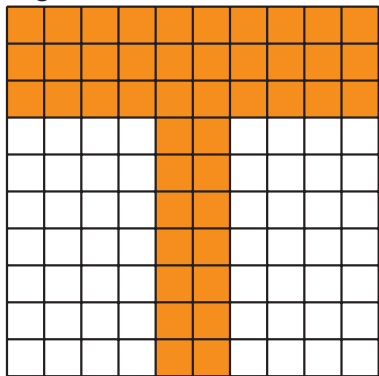
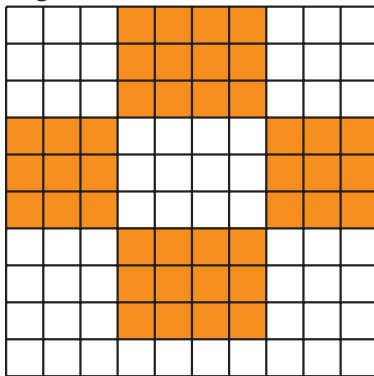


Figura 4



4.4 Nuevo problema

1. Creen ustedes un nuevo problema donde se combinen los conceptos de fracción y porcentaje.

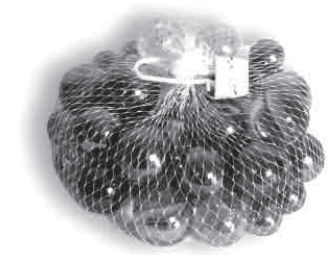
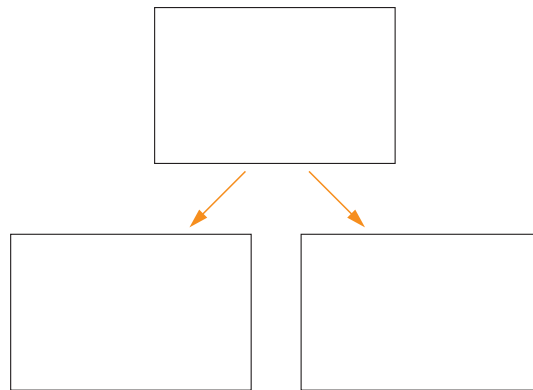
PROBLEMA 5. Las posiciones de los números del 0 al 10

Objetivo:

- Conocer y comprender los números del 0 al 10.

Año de Educación General Básica:

Segundo (y tercer) año de Educación General Básica.

Material didáctico:**Material por estudiante para uso personal:**

- El esquema de partición de tamaño A4.
- Una funda con 10 canicas (u otro tipo de material, por ejemplo tapas de botellas de plástico o de vidrio, frijoles, fideos, habas...).

Material por el docente para uso en el pizarrón:

- El esquema de partición de tamaño A3.
- Una fundita con 10 canicas (u otro tipo de material, por ejemplo tapitas de botellas de plástico o de vidrio, frijoles, fideos, habas...).
- Es preferible usar velcro para pegar el material que se pueda trabajar verticalmente en el pizarrón.

Proceso de aprendizaje:

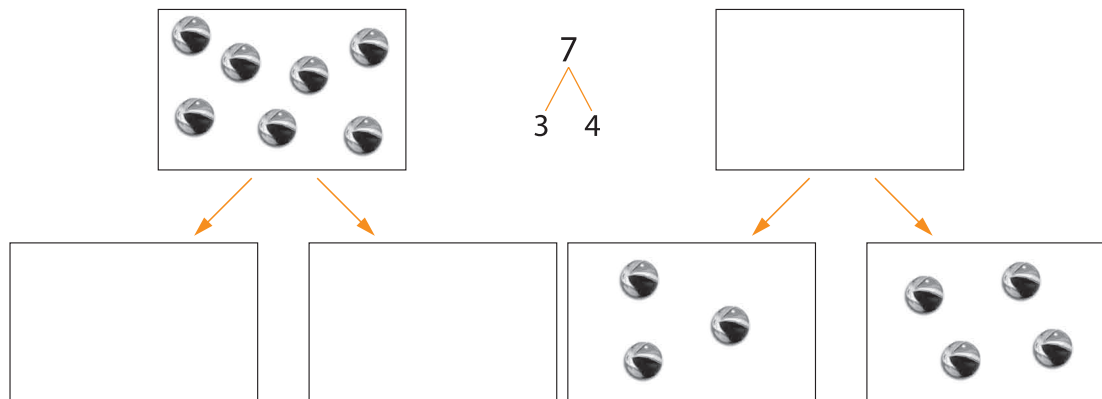
- La **fase concreta** con material concreto (por ejemplo, los estudiantes mismos, útiles escolares, frutas y verduras, juguetes,...):
 - Una mamá tiene 8 carritos y quiere repartirlos entre sus dos hijos. Si ella da 4 carritos a su hijo mayor, ¿cuántos le dará a su hijo menor? La mamá da 4 carritos a su hijo menor.
 - Se escribe 8 y se dice "8 lo reparto en 4 y 4".



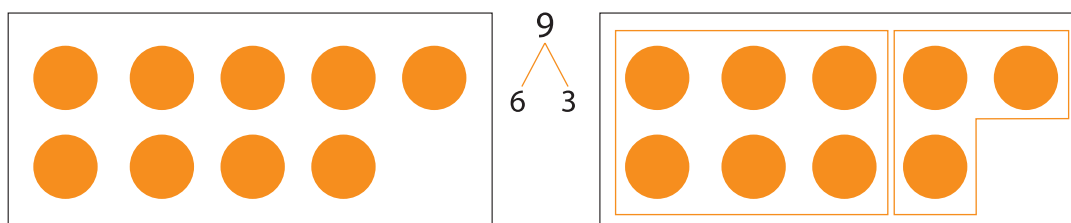
$$\begin{array}{c} 8 \\ \swarrow \searrow \\ 4 \quad 4 \end{array}$$



- La **fase semi-concreta** con material semi-concreto (el esquema de partición y la fundita de canicas):
 - Tengo 7 canicas y las divido en 2 grupos. En el primero pongo 3 canicas. ¿Cuántas canicas debo colocar en el segundo grupo? Hay 4 canicas.
 - Se escribe 7 y se dice "7 lo reparto en 3 y 4".



- La **fase gráfica** con dibujos:
 - Hay 9 círculos y los reparto en 2 grupos. En el primer grupo hay 6 círculos. ¿Cuántos hay en el segundo grupo? Hay 3 círculos en el segundo grupo.
 - Se escribe 9 y se dice "9 lo reparto en 6 y 3".



- La **fase abstracta** con números:
 - Los estudiantes completan las tablas de particiones.
 - Se dice: 0 lo parto en 0 y 0; 1 lo parto en 0 y 1; 1 lo parto en 1 y 0; 2 lo parto en 0 y 2; ...

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	2	2	0	1	5	2	4	8	0	0	0	2	2	0	1	5	2	4	8
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Hoja de evaluación:

Este es un ejemplo de una hoja de evaluación. Es importante que los estudiantes dibujen los grupos antes de solucionar el ejercicio, tanto en los dibujos como en los círculos. Cuando los estudiantes todavía tienen dificultades con el ejercicio número 3, siempre pueden usar material concreto (las canicas).

PARTICIÓN DE LOS NÚMEROS 0-1-2-3-4-5

1 Dibuja y completa.

2 Dibuja y completa.

3 Completa.

0
0

1
1
0

2
0
2
1

3
2
0
3
1

4
1
4
0
3

5
3
2
4

PARTICIÓN DE LOS NÚMEROS 0-1-2-3-4-5

1 Dibuja y completa.

2 Dibuja y completa.

3 Completa.

0
0

1
0
0
1

2
0
2
1

3
0
3
1

4
1
4
0
3

5
3
2
4

Secuencia de clases:

No es recomendable enseñar todas las particiones de todos los números del 0 al 10 en una clase. Hay que dividir los contenidos entre diferentes sesiones.

1. Las particiones de los números del 0 al 5.
2. La partición del número 6.
3. La partición del número 7.
4. La partición del número 8.
5. La partición del número 9.
6. La partición del número 10.
7. Las particiones de los números del 0 al 10.

Colaboración Annelenn Jolie
Consultora en Matemáticas de la VVOB.
Programa Escuelas Gestoras del Cambio
Para más ejercicios como éstos, consulte el Anexo 6.

19 | Problemas integradores

■ SESIÓN 19 Duración: 2 horas

Objetivos

- Utilizar las operaciones estudiadas en la solución y elaboración de problemas que involucren todos los contenidos.

Contenidos

- Problemas sobre potenciación.
- Problemas sobre regla de tres.
- Problemas sobre razones y proporciones.
- Problemas sobre porcentajes, fracciones y decimales.

En esta ocasión les proponemos algunos problemas para profundizar los conceptos que hemos estudiado.

Es muy importante para los docentes de Matemáticas aumentar el pensamiento matemático, lo que sólo se consigue a través de la resolución de problemas.

Siempre que tenga una duda, revise los conceptos trabajados en este libro. El marco conceptual al que no estamos acostumbrados a referirnos, en la mayoría de los casos, reorienta y ordena nuestro pensamiento.

¡Adelante!

Actividad en grupo: Resolver problemas

1. Formen grupos de cuatro participantes.
2. Resuelvan los siguientes problemas y registren sus respuestas.
3. Al finalizar, entreguen sus hojas de respuestas al instructor.

1. Potenciación

a. Encuentren el valor de M , si es igual a $2^{129} + 2^{130} + 2^{132} + 2^{134}$

b. Calculen: $(-243)^{-0.6}$

c. Encuentren el valor de: $\left[\frac{128 (\sqrt[5]{128})}{\sqrt{128}} \right]^{60}$

2. Regla de tres

a. Un jugador en un casino pierde, en cada jugada, la mitad de lo que tiene más un dólar. Al cabo de siete jugadas se ha quedado sin un centavo. ¿Cuánto tenía al iniciar el juego?

3. Razones y proporciones

• Panchito compra vasos: la tercera parte a 4 por \$ 6, la mitad a 6 por \$ 7, y el resto a 3 por \$ 4. Vende los dos tercios a 3 por \$ 5 y los demás a 6 por \$ 9. Si en total gana \$ 143,...

- ¿Qué número de vasos compró?
- ¿Qué relación hay entre la ganancia y la compra? ¿Y entre la ganancia y la venta?
- ¿Cómo obtenemos el valor de la ganancia en un negocio?
- ¿Qué debemos hacer para encontrar el valor de la compra?
- ¿Cuál es el valor unitario de la tercera parte de la compra?
- ¿Puede aplicar esto en los otros datos?
- ¿Cuál es el valor total de la compra?
- ¿Pueden hallar el valor total de la venta? ¿Cómo? Prueben su estrategia.
- ¿Hay otros caminos para resolver este problema?

• Un domingo apareció la siguiente noticia en la portada de un periódico:

“Con el papel del periódico de hoy se podría unir la Tierra y la Luna”. La noticia decía así: “Cada ejemplar consta de 324 páginas. El papel utilizado es de 710 225 kg y equivale a:

- Una banda de papel de 1 m de ancho y 12 400 km de largo.
- Una banda de 31 cm de ancho y 40 000 km de largo que daría la vuelta a la Tierra.
- Una cinta de 32,5 mm de ancho y 381 540 km de largo que uniría la Tierra con la Luna.

Queremos estudiar esta curiosa noticia para comprobar su veracidad y también para analizar si es una buena manera de explicar que el periódico de aquel día era muy voluminoso. Para esto hemos tomado un ejemplar y hemos medido las dimensiones de una página: 49 cm de largo y 32 cm de ancho. Con estos datos ya podemos analizar la noticia.

- ¿Qué preguntas se haría usted para resolver este problema?

4. Porcentajes, fracciones y decimales

a. El 80% de las personas son buenas; el 80%, guapas; el 80%, inteligentes y el 80%, educadas. ¿Qué porcentaje podemos asegurar que son buenas, guapas, inteligentes y educadas a la vez?

- b. Un ladrillo pesa medio ladrillo más un cuarto de kilogramo. ¿Cuántos gramos pesa el ladrillo?
- c. Descubra cuál es mi edad, sabiendo que tengo la mitad de mi edad más 20 años.
- d. Mi amigo Juan está convencido de haber resuelto el problema de los combustibles, por lo menos para los automóviles. Ha construido tres dispositivos distintos que permiten disminuir el consumo de gasolina: el primero ahorra un 45% de gasolina; el segundo, un 30% y el tercero, un 25%. Juan argumenta que si coloca los tres dispositivos en su auto, logrará ahorrar tanto como el 100%, porque $45\% + 30\% + 25\% = 100\%$. Sería fantástico si fuera verdad, porque los autos funcionarían sin gastar gasolina, pero lamentablemente hay un pequeño error en el razonamiento de Juan. ¿Cuál será el ahorro que nos proporcionarán los tres dispositivos juntos?
- e. Tenemos un vaso con agua y otro con alcohol, con la misma cantidad de líquido en cada vaso. Si llenamos una cuchara con agua del primer vaso y la echamos en el alcohol; y llenamos de nuevo la cuchara con líquido del segundo vaso y la vertemos en el primero, ¿hay más alcohol en el vaso de agua o agua en el vaso de alcohol?
- f. Un reloj tarda 12 segundos en dar las campanadas que indican las seis. Suponiendo que el ritmo con que el reloj toca las campanas es siempre el mismo y que cada hora toca tantas campanadas como indica el número de la hora, ¿cuánto tiempo tardará en tocar las campanadas de las tres? ¿Y de las doce?
- g. Dibujen un tablero cuadrado formado por 16 casillas cuadradas, es decir, un tablero de 4×4 . Divídanlo en dos partes que tengan la misma área siguiendo las líneas que separan las casillas. Encuentren todas las maneras posibles de hacerlo. ¿Es posible dividir el mismo tablero en tres partes de la misma área sin cortar ninguna casilla? ¿Por qué? ¿Y en cuatro partes?
- h. Seis estaciones de tren están situadas en una línea y se encuentran todas a la misma distancia de la anterior. ¿Cuántas veces más lejos está la sexta de la primera que la tercera de la primera?
- i. Con las cifras del 1 al 9 forma dos números, utilizándolas todas y sin repetir ninguna. ¿Cómo lo harían ustedes de manera que si uno de ellos es el numerador y el otro el denominador de una fracción, ésta sea equivalente a $1/2$? También puede hacerse de forma que la fracción sea equivalente a $1/3$, $1/4$, ... etc., hasta $1/9$.
- j. Juanita por fin aprendió a simplificar fracciones; mire cómo lo hace: $16/64 = 1/4$, es decir, elimina el segundo dígito del numerador (un 6) y el primer dígito del denominador (un 6), porque ambos son iguales. Es una auténtica barbaridad, pero resulta que el resultado es correcto. Encuentren otras fracciones formadas por un numerador de dos cifras que se puedan simplificar al estilo de Juanita.
- k. Un pastor tiene 5 panes y otro tiene 3. Encuentran a un cazador que no lleva comida y entre los tres se reparten los panes en partes iguales. El cazador, al marcharse, les da 8 monedas por la comida. ¿Cómo deberán repartirse el dinero para que la repartición sea justa?
- l. Los egipcios tenían una curiosa manera de hacer repartos con fracciones, puesto que éstas únicamente se utilizaban con numerador 1. Así, en lugar de la fracción $5/6$, escribían $1/2 + 1/3$, o en lugar de $2/9$, escribían $1/5 + 1/45$. De esta manera podían expresar cualquier fracción menor que la unidad. A veces este método permitía hacer repartos de manera mucho más directa que como lo haríamos nosotros. Imaginen que queremos repartir 4 panes entre 7 personas, de manera que todas reciban igual cantidad. ¿Cómo harían el reparto con el mínimo número de cortes?

- m. Cuando un ciclista ha recorrido $\frac{2}{3}$ de un trayecto, se le estropea la bicicleta y decide acabar la excursión a pie. Al llegar al final del recorrido, se da cuenta de que ha estado andando el doble de tiempo que si pedaleara. ¿Cuántas veces mayor ha sido la velocidad que llevó al ir montado en la bicicleta que al caminar?

Anexos



Anexo 1:

Características de las mejores prácticas para enseñar matemáticas

Las que siguen son características importantes e interrelacionadas de las mejores prácticas para enseñar matemáticas incluidas en los reportes del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, por sus siglas en Inglés). Al final presentamos un cuadro con sugerencias de lo que se debe aumentar y lo que se debe disminuir en la enseñanza en el aula de clase.

El objetivo al enseñar matemáticas es ayudar a que todos los estudiantes desarrollen la capacidad matemática. Los estudiantes deben desarrollar la comprensión de los conceptos y procedimientos matemáticos. Deben estar en capacidad de ver y creer que las matemáticas hacen sentido y que son útiles para ellos. Docente y estudiantes deben reconocer que la habilidad matemática es parte normal de la habilidad mental de todas las personas, no solamente de unos pocos dotados.

Enseñar capacidad matemática requiere ofrecer experiencias que estimulen la curiosidad de los estudiantes y construyan confianza en la investigación, la solución de problemas y la comunicación. Se debe alentar a los estudiantes a formular y resolver problemas relacionados con su entorno, para que puedan ver estructuras matemáticas en cada aspecto de sus vidas. Experiencias y materiales concretos ofrecen las bases para entender conceptos y construir significados. Los estudiantes deben tratar de crear su propia forma de interpretar una idea, relacionarla con su propia experiencia de vida, ver cómo encaja con lo que ellos ya saben y qué piensan de otras ideas relacionadas.

Que tan bien los estudiantes lleguen a entender los estudiantes las ideas matemáticas es mucho más importante que el número de habilidades que puedan adquirir. Los docentes que ayudan a los niños a desarrollar su capacidad matemática dedican menos tiempo a hablar sobre matemáticas, a asignarles trabajos de práctica de cómputo y a pedirles que memoricen mecánicamente. En cambio, les otorgan más tiempo para realizar actividades que promueven la participación activa de sus estudiantes en aplicar las matemáticas en situaciones reales. Esos docentes regularmente utilizan la manipulación de materiales concretos para construir la comprensión. Hacen a los estudiantes preguntas que promueven la exploración, la discusión, el cuestionamiento y las explicaciones. Los niños aprenden, además, los mejores métodos para determinar cuándo y cómo utilizar una gama amplia de técnicas computacionales, tales como aritmética mental, estimaciones, calculadoras o procedimientos con lápiz y papel.

Las matemáticas no son un conjunto de tópicos aislados, sino más bien un todo integrado. Matemáticas es la ciencia de patrones y relaciones. Entender y utilizar esos patrones constituye una gran parte de la habilidad o competencia matemática. Los estudiantes necesitan ver las conexiones entre conceptos y aplicaciones de principios generales en varias áreas. A medida que relacionan ideas matemáticas con experiencias cotidianas y situaciones del mundo real, se van dando cuenta que esas ideas son útiles y poderosas. El conocimiento matemático de los estudiantes aumenta a medida que entienden que varias representaciones (ej: física, verbal, numérica, pictórica y gráfica) se interrelacionan. Para lograrlo necesitan experimentar con cada una y entender cómo están conectadas.

La solución de problemas es el núcleo de un currículo que fomenta el desarrollo de la capacidad matemática. Ampliamente definida, la solución de problemas es parte integral de toda actividad ma-

temática. En lugar de considerarse un tópico separado, la solución de problemas debería ser un proceso que permea el currículo y proporciona contextos en los que se aprenden conceptos y habilidades. La solución de problemas requiere que los estudiantes investiguen preguntas, tareas y situaciones que tanto ellos como el docente podrían sugerir. Los estudiantes generan y aplican estrategias para trabajarlos y resolverlos.

Los estudiantes necesitan muchas oportunidades de usar el lenguaje para comunicar ideas matemáticas.

Discutir, escribir, leer y escuchar ideas matemáticas profundiza el entendimiento en esta área. Los estudiantes aprenden a comunicarse de diferentes maneras relacionando activamente materiales físicos, imágenes y diagramas con ideas matemáticas; reflexionando sobre ellas y clarificando su propio pensamiento; estableciendo relaciones entre el lenguaje cotidiano con ideas y símbolos matemáticos y discutiendo ideas matemáticas con sus compañeros.

Uno de los mayores cambios en la enseñanza matemática se ha dado ayudando a los estudiantes a trabajar en grupos pequeños, en proyectos de recolección de datos, construcción de gráficas y cuadros con sus hallazgos y resolución de problemas. Dar a los estudiantes oportunidades para realizar trabajo reflexivo y colaborativo con otros, constituye parte crítica de la enseñanza de matemáticas. Las ideas matemáticas las construyen las personas; los estudiantes necesitan experimentar la interacción social y la construcción de representaciones matemáticas que tengan significado, con sus compañeros y sus docentes. En un enfoque democrático, el docente no es el único que conoce y transmite conocimiento, ni debe ser el que siempre tiene “la respuesta”. Los estudiantes deben tomar la iniciativa en el planteamiento de preguntas e investigaciones que les interesen y llevar a cabo investigaciones en forma conjunta con el docente.

Razonar es fundamental para saber y hacer matemáticas. El estudiante debe entender que las matemáticas hacen sentido, que no son simplemente un conjunto de reglas y procedimientos que se deben memorizar. Por ese motivo necesitan experiencias en las que puedan explicar, justificar y refinar su propio pensamiento, no limitarse a repetir lo que dice un libro de texto. Necesitan plantear y justificar sus propias conjeturas aplicando varios procesos de razonamiento y extrayendo conclusiones lógicas.

Ayudar a que los estudiantes se muevan por etapas entre varias ideas y sus representaciones, es tarea muy importante del docente; así como también lo es, promover en los estudiantes de manera creciente, la abstracción y la generalización, mediante la reflexión y la experimentación, en lugar de ser él el único que explique y que exponga. Parte vital de hacer matemáticas conlleva, que los estudiantes discutan, hagan conjeturas, saquen conclusiones, defiendan sus ideas y escriban sus conceptualizaciones, todo lo anterior, con retroalimentación del docente.

Los conceptos de números, operaciones, y cálculos deben ser definidos, concebidos, y aplicados, ampliamente. Los problemas del mundo real requieren una diversidad de herramientas para poder manejar la información cuantitativa. Los estudiantes deben tener una buena cantidad de experiencias para poder desarrollar un sentido intuitivo de números y operaciones; una forma de “sentir” lo que está ocurriendo en las distintas situaciones en las que se podrían utilizar varias operaciones. Para dar un ejemplo de lo anterior, dos concepciones diferentes de la resta están involucradas si se pregunta (1) “Si tengo tres canicas y entrego dos, ¿cuántas conservo?” versus (2) “Si tengo tres canicas y otra persona tiene siete, ¿cuántas canicas de más tiene la otra persona?” El docente no debe eludir la diferencia entre las dos situaciones, invocando simplemente el procedimiento de la resta, con el fin de encontrar la “respuesta correcta”.

Los conceptos de geometría y medición se aprenden mejor mediante experiencias que involucren la experimentación y el descubrimiento de relaciones con materiales concretos. Cuando los estudiantes construyen su propio conocimiento de geometría y medición están mejor capacitados para usar su comprensión inicial en ambientes del mundo real. Desarrollan su sentido espacial en dos o tres dimensiones por medio de exploración con objetos reales. Los conceptos de medición se entienden mejor con experiencias verdaderas realizando mediciones y estimación de medidas. Lo que es más importante es que esas experiencias son especialmente valiosas para construir sentido numérico y operativo.

La comprensión de estadísticas, datos, azar y probabilidad se deriva de aplicaciones del mundo real.

La necesidad de tomar decisiones en base a información numérica permea la sociedad y motiva trabajar con datos reales. La probabilidad se desprende de la consideración realista de riesgo, azar e incertidumbre. Los estudiantes pueden desarrollar competencia matemática por medio de la formulación de problemas y soluciones que involucren decisiones basadas en recolección de datos, organización, representación (gráficas, tablas) y análisis.

Uno de los mayores propósitos de la evaluación es ayudar a los docentes a entender mejor qué saben los estudiantes y a tomar decisiones significativas sobre actividades de enseñanza y aprendizaje.

Debe usarse una diversidad de métodos de evaluación para valorar a los estudiantes individualmente, incluyendo pruebas escritas, orales y demostraciones, las cuales deben todas concordar con el currículo. Todos los aspectos del conocimiento matemático y sus relaciones deben ser valorados y utilizados para ayudar al docente a planear actividades de enseñanza y aprendizaje. Las pruebas estandarizadas cumplen una mejor función en la evaluación de programas que en la evaluación de estudiantes individuales.

AUMENTE	DISMINUYA
Prácticas de enseñanza	
• Uso de materiales manipulables. • Trabajo de grupo cooperativo. • Discusiones sobre matemáticas. • Cuestionamiento y realización de conjeturas. • Justificación del pensamiento. • Escritura acerca de las matemáticas. • Solución de problemas como enfoque de enseñanza. • Integración de contenidos. • Uso de calculadoras y computadores. • Facilitador del aprendizaje. • Evaluación del aprendizaje como parte integral de la enseñanza.	• Práctica mecánica. • Memorización mecánica de reglas y fórmulas. • Respuestas únicas y métodos únicos para encontrar respuestas. • Uso de hojas de ejercicios rutinarios: prácticas escritas repetitivas. • Práctica de la escritura repetitiva. • Enseñar diciendo. • Enseñar a calcular fuera de contexto. • Enfatizar la memorización. • Examinar únicamente para las calificaciones. • Ser el dispensador del conocimiento.
Matemáticas como comunicación	
• Discusiones matemáticas. • Lecturas sobre matemáticas. • Escritura sobre matemáticas. • Escucha de exposición de ideas matemáticas.	• Llenar los espacios de hojas de trabajo. • Responder preguntas que sólo necesitan como respuesta sí o no. • Responder preguntas que requieren únicamente respuestas numéricas.
Conexiones Matemáticas	
• Conectar las matemáticas con otras materias y con el mundo real. • Conectar tópicos dentro del mismo campo matemático. • Aplicar las matemáticas.	• Aprender tópicos aislados: desarrollar habilidades fuera de contexto.

Números / Operaciones / Cálculos	
• Desarrollar sentido numérico y de operaciones. • Entender el significado de conceptos claves como posición numérica, fracciones, decimales, razones, proporciones y porcentajes. • Varias estrategias para estimar. • Pensar estrategias para hechos básicos. • Uso de calculadoras para operaciones de cálculo complejas.	• Uso temprano de notaciones simbólicas. • Cálculos complejos y tediosos con lápiz y papel. • Memorización de reglas y procedimientos sin entenderlos.
Geometría / Mediciones	
• Desarrollo de sentido espacial. • Mediciones reales y los conceptos relacionados con unidades de medida. • Uso de geometría en solución de problemas.	• Memorizar hechos y relaciones. • Memorizar equivalencias entre unidades de medida. • Memorizar fórmulas geométricas.
Estadísticas / Probabilidad	
• Recolección y organización de datos. • Usar métodos estadísticos para describir, analizar, evaluar y tomar decisiones.	• Memorizar fórmulas.
Patrones / Funciones / Álgebra	
• Reconocimiento y descripción de patrones. • Identificación y uso de relaciones funcionales. • Desarrollo y utilización de tablas, gráficas y reglas para describir situaciones. • Utilización de variables para expresar relaciones.	• Manipulación de símbolos. • Memorización de procedimientos y ejercicios repetitivos.
Evaluación	
• La evaluación/valoración como parte integral de la enseñanza. • Enfocarse en una amplia gama de tareas matemáticas y optar por una visión integral de las matemáticas. • Desarrollar situaciones de problemas que para su solución requieran la aplicación de un número de ideas matemáticas. • Hacer uso de técnicas múltiples de evaluación que incluyan pruebas escritas, orales y demostraciones.	• Evaluar o valorar, contando simplemente las respuestas correctas de pruebas o exámenes realizados con el único propósito de otorgar calificaciones. • Enfocarse en un amplio número de habilidades específicas y aisladas. Hacer uso de ejercicios o planteamientos de problemas que requieran para su solución solamente de una o dos habilidades. • Utilizar únicamente exámenes o pruebas escritas.

Créditos

Traducción al español realizada por EDUTEKA de algunos apartes del capítulo cuatro (Best Practice in Mathematics) del libro *Best Practice: New Standards for Teaching and Learning in America's Schools*, escrito por Steven Zemelman, Harvey Daniels y Arthur Hyde; segunda edición, 1998, Editorial Heinemann. Este libro, en su edición original (1992), fue el primero en resumir los estándares para la enseñanza en las escuelas norteamericanas, ofreciendo descripciones prácticas de excelencia en el currículo. La segunda edición fue extensamente revisada y ampliada con descripciones actualizadas de lo que es la enseñanza de avanzada en seis áreas: lectura, escritura, matemáticas, ciencias, estudios sociales y arte. EDUTEKA recomienda ampliamente este libro, el cual se puede comprar por Internet directamente del editor: <http://www.heinemann.com/shared/products/E00091.asp>

Publicación de este documento en EDUTEKA: Septiembre 20 de 2003.

Última modificación de este documento: Septiembre 20 de 2003.

<http://www.eduteka.org/MejoresPracticas.php>

Anexo 2:

La educación matemática

El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje ¹

Silvia Vilanova, María Rocerau, Guillermo Valdez, María Oliver, Susana Vecino
Perla Medina, Mercedes Astiz, Estella Alvarez. Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de Mar del Plata. Argentina

A partir de la reforma del sistema educativo en la Argentina, podemos observar en los Contenidos Básicos Comunes para la Educación General Básica (1995) un especial énfasis en la resolución de problemas como método integral en la enseñanza de la Matemática. (...)

Esta recomendación descansa en una concepción particular sobre lo que significa la Matemática, su enseñanza y su aprendizaje.

La siguiente cita de Hersh (1986) ilustra esta cuestión: “La concepción sobre la matemática afecta la propia concepción sobre cómo debe ser enseñada. La manera de enseñar es un indicador sobre lo que uno cree que es esencial en ella... El punto entonces no es ¿cuál es la mejor manera de enseñar? sino, ¿de qué se trata la matemática?”

Sin embargo, estas concepciones, al igual que el término “resolución de problemas” varían ampliamente. Thompson (1992) señala que existe una visión de la matemática como una disciplina caracterizada por resultados precisos y procedimientos infalibles, cuyos elementos básicos son las operaciones aritméticas, los procedimientos algebraicos y los términos geométricos y teoremas; saber matemática es equivalente a ser hábil en desarrollar procedimientos e identificar los conceptos básicos de la disciplina. La concepción de enseñanza de la matemática que se desprende de esta visión conduce a una educación que pone el énfasis en la manipulación de símbolos cuyo significado raramente es comprendido.

Una visión alternativa acerca del significado y la naturaleza de la matemática consiste en considerarla una construcción social que incluye conjeturas, pruebas y refutaciones, cuyos resultados deben ser juzgados en relación al ambiente social y cultural. La idea que subyace a esta visión es que “saber matemática” es “hacer matemática”. Lo que caracteriza a la matemática es precisamente su hacer, sus procesos creativos y generativos. La idea de la enseñanza de la matemática que surge de esta concepción es que los estudiantes deben comprometerse en actividades con sentido, originadas a partir de situaciones problemáticas. Estas situaciones requieren de un pensamiento creativo, que permita conjeturar y aplicar información, descubrir, inventar y comunicar ideas, así como probar esas ideas a través de la reflexión crítica y la argumentación. Esta visión de la educación matemática está en agudo contraste con la anterior en la cual el conocimiento y manejo de conceptos y procedimientos es el objetivo último de la instrucción.

El énfasis en la resolución de problemas como método integral para la enseñanza de la matemática observado en los Contenidos Básicos Comunes, se apoya en la concepción que Ernest (1988) sintetiza así: “... hay una visión de la matemática (conducida por la resolución de problemas) como un campo de la creación y la invención humana en continua expansión, en el cual los patrones son generados y luego convertidos en conocimiento. Así, la matemática es un proceso de conjeturas y acercamientos al conocimiento (...). La matemática no es un producto terminado, porque sus resultados permanecen abiertos a revisión”.

¹ Editado para el Curso “Didáctica de las Matemáticas” del Ministerio de Educación del Ecuador, 2009.

La resolución de problemas en la educación matemática

A partir de lo anterior, existe un acuerdo general en aceptar la idea de que el objetivo primario de la educación matemática debería ser que los alumnos aprendan matemática desde la resolución de problemas. Sin embargo, dadas las múltiples interpretaciones del término, este objetivo difícilmente es claro.

En efecto, el término *resolución de problemas* ha sido usado con diversos significados, que van desde trabajar con ejercicios rutinarios hasta hacer matemática profesionalmente.(...)

Según Stanic y Kilpatrick (1988), la utilización de los términos “problema” y “resolución de problemas” ha tenido múltiples y a veces contradictorios significados a través de los años, como se describe brevemente a continuación:

Primer significado: resolver problemas como contexto

Desde esta concepción, los problemas son utilizados como vehículos al servicio de otros objetivos curriculares, jugando cinco roles principales:

- *Como una justificación para enseñar matemática:* al menos algunos problemas relacionados con experiencias de la vida cotidiana son incluidos en la enseñanza para mostrar el valor de la matemática.
- *Para proveer especial motivación a ciertos temas:* los problemas son frecuentemente usados para introducir temas, con el convencimiento implícito o explícito de que favorecerán el aprendizaje de un determinado contenido.
- *Como actividad recreativa:* muestran que la matemática puede ser “divertida” y que hay usos entretenidos para los conocimientos matemáticos.
- *Como medio para desarrollar nuevas habilidades:* se cree que, cuidadosamente secuenciados, los problemas pueden proporcionar a los estudiantes nuevas habilidades y proveer el contexto para discusiones relacionadas con algún tema.
- *Como práctica:* la mayoría de las tareas matemáticas en la escuela caen en esta categoría. Se muestra una técnica a los estudiantes y luego se presentan problemas de práctica hasta que se ha dominado la técnica.

Sin embargo, en cualquiera de estas cinco formas, los problemas son usados como medios para algunas de las metas señaladas arriba. Esto es, la resolución de problemas no es vista como una meta en sí misma, sino como facilitador del logro de otros objetivos y tiene una interpretación mínima: resolver las tareas que han sido propuestas.

Segundo significado: resolver problemas como habilidad

La mayoría de los desarrollos curriculares que ha habido bajo el término *resolución de problemas* a partir de la década de los 80 son de este tipo.

La resolución de problemas es frecuentemente vista como una de tantas habilidades a ser enseñadas en el curriculum. Esto es, resolver problemas no rutinarios es caracterizado como una habilidad de nivel superior, a ser adquirida luego de haber resuelto problemas rutinarios (habilidad que, a su vez, es adquirida a partir del aprendizaje de conceptos y habilidades matemáticas básicas).

Es importante señalar que, aún cuando en esta segunda interpretación del término los problemas son vistos como una habilidad en sí misma, las concepciones pedagógicas y epistemológicas que subyacen son precisamente las mismas que las señaladas en la interpretación anterior: las técnicas de resolución de problemas son enseñadas como un *contenido*, con problemas de práctica relacionados, para que las técnicas puedan ser dominadas.

Tercer significado: resolver problemas es “hacer matemática”

Hay un punto de vista particularmente matemático acerca del rol que los problemas juegan en la vida de aquellos que hacen matemática. Consiste en creer que el trabajo de los matemáticos es resolver problemas y que la matemática realmente consiste en problemas y soluciones.

El matemático más conocido que sostiene esta idea de la actividad matemática es Pólya. Nos hemos familiarizado con su trabajo a través del libro *How to solve it* (1954), en el cual introduce el término “heurística” para describir el arte de la resolución de problemas, concepto que desarrolla luego en *Matemática y razonamiento plausible* (1957) y *Mathematical Discovery* (1981).

La conceptualización de Pólya sobre la matemática como una actividad se evidencia en la siguiente cita: “Para un matemático, que es activo en la investigación, la matemática puede aparecer algunas veces como un juego de imaginación: hay que imaginar un teorema matemático antes de probarlo; hay que imaginar la idea de la prueba antes de ponerla en práctica. Los aspectos matemáticos son primero imaginados y luego probados, y casi todos los pasajes de este libro están destinados a mostrar que éste es el procedimiento normal. Si el aprendizaje de la matemática tiene algo que ver con el descubrimiento en matemática, a los estudiantes se les debe brindar alguna oportunidad de resolver problemas en los que primero imaginen y luego prueben alguna cuestión matemática adecuada a su nivel.” (Pólya, 1954).

Para Pólya, la pedagogía y la epistemología de la matemática están estrechamente relacionadas y considera que los estudiantes tienen que adquirir el sentido de la matemática como una actividad; es decir, sus experiencias con la matemática deben ser consistentes con la forma en que la matemática es hecha.(...)

La enseñanza de la matemática desde una concepción basada en la resolución de problemas

Enseñar a partir de la resolución de problemas, tal como lo plantea Pólya, se vuelve difícil para los docentes por tres razones diferentes:

1. Matemáticamente, porque los docentes deben poder percibir las implicaciones de las diferentes aproximaciones que realizan los estudiantes, darse cuenta si pueden ser fructíferas o no y qué podrían hacer en lugar de eso.
2. Pedagógicamente, porque el docente debe decidir cuándo intervenir, qué sugerencias ayudarán a los estudiantes, sin impedir que la resolución siga quedando en sus manos, y realizar ésto para cada estudiante o grupo de la clase.
3. Personalmente, porque el docente estará a menudo en la posición (inusual e incómoda para muchos profesores) de no saber. Trabajar bien sin conocer todas las respuestas, requiere experiencia, confianza y autoestima.(...)

Consideraciones finales

La educación matemática debería proveer a los estudiantes de una concepción de la matemática, de un sentido de la disciplina (su alcance, su poder, sus usos y su historia), y de una aproximación al hacer matemático, en el nivel adecuado a sus posibilidades. Desde esta perspectiva, la enseñanza debería ser encarada como una comprensión conceptual más que como un mero desarrollo mecánico de habilidades, que desarrolle en los estudiantes la habilidad de aplicar los contenidos que han aprendido con flexibilidad y criterio. Debería también proveer a los estudiantes de la oportunidad de explicar un amplio rango de problemas y situaciones problemáticas, que vayan desde los ejercicios hasta los problemas abiertos y situaciones de exploración, ayudando a desarrollar “un punto de vista matemático” (Schoenfeld, 1992), caracterizado por la habilidad de analizar y comprender, de percibir estructuras y relaciones estructurales, de expresarse oralmente y por escrito con argumentos claros y coherentes. En suma, debería preparar a los estudiantes para convertirse, lo más pronto posible, en aprendices independientes, intérpretes y usuarios de la matemática.

Para cumplir estos objetivos, la comunidad de práctica en la cual ellos aprenden matemática debe reflejar y sostener estas formas de pensar. Esto es, las aulas deben ser comunidades en las cuales la matemática adquiera sentido y lo que como docentes esperamos de los estudiantes, sea realmente practicado (Schoenfeld, 1992).

Bibliografía

- AUSUBEL, D.; NOVAK, J. & HANESIAN, H. (1991). *Psicología Educativa*. México D.F.: Editorial Trillas.
- BOYLE, D.G. (1971). *Lenguaje y pensamiento en el desarrollo humano*. Buenos Aires: Troquel.
- BRUNER, Jerome. (1990). *Actos de significado*. Madrid: Alianza.
- CALLEJO, María Luz. (1994). *Un club matemático para la diversidad*. Madrid: Narcea.
- KILPATRICK, J. (1985). A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. En E.A. Silver, *Teaching and Learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*, pp.1-16 Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- KLINE, Morris (1978). *El fracaso de la matemática moderna*. Madrid: Siglo XXI.
- KLINE, Morris. (1982). *Mathematics, the loss of certainty*. Oxford: Oxford University Press.
- LAMPERT, M. (1992). "Handbook for Research on Mathematics". En Schoenfeld, A.: *Learning to think mathematically, Teaching and Learning*. D.Grows, Ed. New York:Mac Millan.
- LESTER, F.K. (1980). "Research on mathematical problem solving". En R.J. Shumway (Ed) *Research in mathematics education*, pp. 286-323. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- LESTER, Frank K. (1994). Musings about mathematical problem -solving research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 25 (6), pp. 660-675.
- MARTÍ, E. (Coord) (1996). (2) Tema monográfico: El constructivismo a debate. *Anuario de Psicología*, (69). Barcelona: Gráficas 92, S. A.
- MCLEOD Douglas B. (1994). "Research on affect and mathematics learning since 1970 to the present". *Journal for Research In Mathematics Education*. Vol 25. (6) pp 637-647.
- MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN (1995). *Contenidos Básicos Comunes para la Educación General Básica*. Argentina.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2000). *Principles and standards for School Mathematics*. Reston. EEUU.
- NOVAK, Joseph (1982). *Teoría y práctica de la educación*. Madrid: Alianza.
- PIMM, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Morata.
- PÓLYA, George (1981). *Mathematical Discovery. On understanding, learning and teaching problem solving*. Combined Edition. New York: Wiley & Sons, Inc.
- PÓLYA, George (1957). *Mathematics and plausible reasoning (volumen 1 y 2)*, Princeton: Princeton University Press.
- PÓLYA, George (1954). *How to solve it*, Princeton: Princeton University Press.
- RESNIK, L. (1989). "Treating mathematics as an illstructured discipline". En R. Charles & E. Silver (Eds.) *The teaching and assesing of mathematical problem solving*, pp. 32-60. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- RESNIK, L. & Collins, Allan. (1996). Cognición y Aprendizaje. En *Anuario de Psicología* (69), pp. 189-197. Barcelona: Grafiques 92, S. A.
- SCHOENFELD, Alan (1992) "Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics". En *Handbook for Research on Matematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.
- SCHOENFELD, Alan (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.
- SCHOENFELD, Alan (1989). "Explorations of student's mathematical beliefs and behavior". En *Journal for Research in Mathematics Education* 20 (4), pp. 338-355. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- TEBEROSKY, Ana (1996). "Co-constructivismo y relaciones asimétricas". En *Anuario de Psicología*. (69) pp. 83-87. Barcelona: Grafiques 92, S.A.
- STANIC, G. & KILPATRICK, J.(1989). "Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum". En R. Charles & Silver (Eds.) *The teaching and assesing of mathematical problem solving*, pp.1-22 Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- THOMPSON, A.(1985). "Teacher's conceptions of mathematics and the teaching of problem solving". En E.A. Silver, *Teaching and Learning mathematical problem solving: multiple research perspectives* ,pp 281-294. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- VILA, Ignacio (1996). La idea de los orígenes sociales de las funciones psicológicas no es antitética con la noción de su construcción personal. En *Anuario de Psicología*. (69) pp. 89-91 Barcelona: Grafiques 92, S.A.

Anexo 3:

Constructivismo y matemáticas²

Cristina Carulla de Rojas

Margarita Botero de Meza

Caro amigo Jorge Amado: pensándolo bien, no hay receta para la tarta de mandioca que yo hago. Algo me dijo doña Alda, la mujer del Renato, el del Museo, pero aprendí haciéndola, rompiéndome la cabeza hasta encontrarle el punto. (¿No fue amando como aprendí a amar? ¿No fue viviendo como aprendí a vivir?)

Jorge Amado, Doña Flor y sus dos Maridos

Introducción

Después del movimiento de las matemáticas modernas o matemáticas nuevas en la escuela durante los años sesenta –cuando se enseñaba, por ejemplo, la teoría de conjuntos dentro de currículos basados en la organización de contenidos–, los años setenta se vieron marcados por la era de la tecnología educativa. El currículo se sustentaba entonces en la psicología conductista y la educación programada y privilegiaba el aprendizaje de algoritmos. Fue durante los ochenta que las ideas de constructivismo sobre el aprendizaje humano comenzaron a influir en el currículo, bajo la interpretación exagerada de que el niño aprende solo.

Durante los años noventa se popularizó la creencia, también alimentada desde el constructivismo, de que para que alguien pudiera aprender matemáticas era necesario aplicarlas a contextos concretos que constituyeran situaciones significativas. Se dio entonces demasiado énfasis a éstas y la enseñanza de procesos de abstracción y del formalismo propio de la disciplina se alejó cada vez más del currículo de matemáticas. Por otro lado, al finalizar los años noventa los resultados de las pruebas internacionales TIMSS (TIMSS, 1 995; TIMSS, 1 999) mostraron que en países donde los niños alcanzaron altos puntajes como Japón y Alemania, la meta de la enseñanza de matemáticas era que los alumnos comprendieran conceptos matemáticos, mientras que en Estados Unidos, donde los niños obtuvieron bajos puntajes, la meta era utilizar procedimientos matemáticos aplicados a diversas situaciones reales.

El resultado de esto fue el movimiento de reforma del año 2000 en ese país y otros sitios del mundo, que ha tratado de equilibrar el aprendizaje de las matemáticas como herramienta para modelar fenómenos de la vida real y el aprendizaje de la abstracción como soporte de la estructura conceptual y fuente de poder de las matemáticas (Porlán, 1995; RAND, 2002). La reforma busca, además de las conexiones entre las ideas matemáticas y sus aplicaciones, un aprendizaje de las matemáticas que propicie el razonamiento, la formulación de conjeturas y la invención y resolución de problemas con base en la búsqueda de evidencia lógica (estándares del NCTM, 2000).

En este documento presentaremos evidencia de que los principios del constructivismo, en la aplicación moderada que aparece en los estándares del NCTM, funcionan para orientar el currículo específico del área de matemáticas (...). Presentamos en primer lugar una definición del área. Luego, relacionamos la formación en matemáticas con los principios constructivistas (...).

Las Matemáticas

Vemos las matemáticas como una construcción del hombre para modelar y justificar sus comprensiones de sí mismo y del medio que lo rodea, como un producto de la cultura ligado a valores sociales, como una construcción intelectual armónica y bella que reta a la inteligencia a desentrañar sus

² Editado para el Curso “Didáctica de las Matemáticas” del Ministerio de Educación del Ecuador, 2009.

relaciones y como una pieza fundamental en el desarrollo científico y tecnológico de la humanidad. Por todo esto, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas exigen tener permanentemente presentes cuatro aspectos: las matemáticas como lenguaje, como sistema formal, como herramienta y como necesidad social.

1. Lenguaje

Las matemáticas son un lenguaje; es decir, un sistema y una actividad desarrollados por el ser humano para expresar nociones y relaciones que dan cuenta de su comprensión del universo, del mundo o de sí mismo. Como lenguaje, las matemáticas se convierten en un instrumento para el desarrollo del conocimiento y la interpretación de la realidad social.

2. Sistema formal

Las matemáticas también son un sistema formal conformado por una red de abstracciones, generalizaciones y formalizaciones sustentadas en la solidez lógica de sus argumentaciones. Como sistema formal, las matemáticas sustentan la validez de las explicaciones y predicciones de la ciencia.

3. Herramienta

Las matemáticas son una herramienta que permite avanzar en la comprensión del mundo que nos rodea, resolver problemas de distintas naturalezas y modelar situaciones de la vida real, de la técnica, de las ciencias y de las matemáticas mismas.

4. Necesidad social

Creemos que todos los estudiantes tienen la capacidad y la necesidad de aprender matemáticas y que por tanto debemos ofrecerles a todos las oportunidades que les permitan lograrlo. En efecto, si no todos los estudiantes tiene las posibilidades de aprender matemáticas, enfrentamos el peligro de crear una élite intelectual y una sociedad polarizada. La imagen de una sociedad en la que unos pocos tienen el conocimiento matemático que se necesita para el control del desarrollo económico y científico no es consistente ni con los valores de un sistema democrático justo, ni con sus necesidades económicas (NCTM, 1989). La equidad es, pues, un objetivo básico de nuestro currículo.

A la hora de enseñar matemáticas se debe tener en cuenta que existen, en nuestro entorno socio-cultural, numerosas situaciones más o menos cercanas a la cotidianidad de los individuos y las comunidades que necesitan de conocimiento matemático para su comprensión y manejo, desde los números que organizan una fila en un banco y las transacciones monetarias necesarias para la economía personal y familiar, hasta el movimiento de la economía nacional, las estadísticas que sustentan grandes decisiones o los principios y herramientas matemáticas que permiten los avances tecnológicos.

Los ciudadanos comunes deben tener un mínimo de conocimientos matemáticos que les permitan tomar decisiones y actuar (Skovsmose, 1999) socialmente, de modo que puedan manejar eficientemente sus asuntos personales y participar realmente en la vida comunitaria y nacional. En una sociedad democrática es un derecho de los ciudadanos tener acceso a la comprensión y poder contribuir a la construcción del sistema social imperante; esto requiere de conocimientos y posibilidad de desempeños reales con las matemáticas (Yasukawa, 2002; Niss, 1983). Como lo señala Niss (1983), la educación matemática debe tener como meta formar a los estudiantes para que puedan utilizar las matemáticas dentro de la sociedad en la que viven. Dice Niss (1983) que el estudiante deberá poder darse cuenta de las situaciones en donde las matemáticas son útiles, comprender cómo y por qué se utilizan, juzgar cuando son pertinentes y aplicar sus conocimientos matemáticos en situaciones que le sean significativas para su vida privada, social y profesional.

Nuestro currículo pretende que los estudiantes, al terminar la escuela, sean capaces de comprender y utilizar el lenguaje matemático, de comprender la estructura lógica que subyace a la construcción de las matemáticas en la solución de problemas y de modelar situaciones de las matemáticas, de las ciencias y de la vida real. Pero esto no es sólo un propósito académico propio de la escuela y di-

rigido a quienes tiene capacidades o interés especiales en el área. Aprender matemáticas es necesario para todos y para la vida individual y la social. En una lógica constructivista, es la persona globalmente entendida la que aprende, y ese aprendizaje repercute globalmente en ella, en lo que sabe, en su forma de verse y de relacionarse con los demás (Solé y Colle, Coll, Martín, Mauri, Miras, Onrubia, Solé & Zabala, 1993). Éste y otros principios del constructivismo orientan nuestro currículo del área.

Las matemáticas y los principios constructivistas

1. Proceso constructivo

También en matemáticas el aprendizaje es un proceso durante el cual cada individuo va construyendo su propio significado de los conceptos matemáticos. El aprendizaje de un concepto matemático puede tomar muchos años. Cada contacto que el estudiante tenga con ese concepto le dará nueva información acerca de la manera como funciona. Es así como, cuando un estudiante resuelve diferentes problemas en donde debe utilizar el concepto, cada uno de ellos le dará acceso a un conocimiento cada vez más complejo del mismo. Es por esta razón que cada individuo tendrá un conocimiento diferente y que no podemos hablar de un conocimiento limitado y terminado (Moreno, 1997; Rico, 1997; Tall, 1992; Sfard, 2001a). Por ejemplo, un estudiante en grado cero puede aprender a contar objetos y a clasificarlos. Más adelante podrá hacer representaciones pictóricas de la misma situación concreta y en tercero de primaria podrá establecer una relación entre la representación pictórica, la situación concreta y una expresión algebraica conformada por letras, números y operaciones. Pero todavía le queda mucho por aprender y cada situación que el estudiante tenga para aplicar el concepto le enseñará algo nuevo acerca del mismo y su conexión con otros conceptos.

El aprendizaje tampoco se da de manera lineal. El conocimiento es una red de relaciones de significado que se va modificando y a la cual se adhieren y de la cual desaparecen nuevos y viejos conceptos e ideas, cuyas conexiones se transforman permanentemente. Esta red de relaciones se modifica en la persona a partir de las experiencias que vive tanto en la escuela como en su contexto social cotidiano (Moreno, 1997; Rico, 1997; Kieran, 1992). Por ejemplo, es probable que las ideas que un niño ha construido sobre los números naturales provengan de sus experiencias en clase, pero también de su experiencia haciendo compras en la tienda del barrio o al oír hablar a los adultos. Tanto el currículo como los docentes que lo desarrollan deben tener en cuenta estas diversas posibilidades de aprendizaje para utilizarlas en el proceso de ayudar a los estudiantes en esta construcción de su aprendizaje.

2. Aprendizaje previo

De acuerdo con el principio anterior, nadie llega al salón de clase completamente ignorante en matemáticas. Es probable que cada experiencia que haya tenido en donde el concepto que va a aprender haya funcionado de manera implícita o explícita, le haya dado información acerca de él (Sfard, 2002a; Rico, 1997). Estos conocimientos previos, construidos a través de su experiencia diaria, pueden ser intuitivos o formales y es importante explorarlos para que las situaciones de aprendizaje escolar enriquezcan las visiones que traen los estudiantes.

Pero por otro lado, es muy importante reconocer que estos conocimientos previos pueden ser errados o incompletos. Sfard señala que los niños necesitan dar significado a los conceptos y a las acciones que van realizando y que “es precisamente por razón de su necesidad de acomodar nuevos conocimientos a su conocimiento previo que sus comprensiones algunas veces discrepan de las versiones oficiales” (Sfard, 2001a, p. 105). El niño hará aproximaciones distintas a la comprensión de un concepto y seguirá resignificándolo al manejarlo en diferentes contextos (Sfard, 2001a). Muchos investigadores coinciden en la idea de que los errores que cometen los estudiantes durante el proceso de aprendizaje se asemejan al recorrido histórico de la construcción de los conceptos (Tall, 1991; Sfard, 2001a). Sfard dice que al observar la historia del desarrollo de un con-

cepto matemático, uno se da cuenta de que es igual a la manera como los estudiantes aprenden matemáticas; los matemáticos pensaron inicialmente el concepto de acuerdo con sus conocimientos previos y no llegaron inmediatamente al significado que podemos encontrar en nuestros días.

Así, el conocimiento matemático de los estudiantes no necesariamente se manifiesta de manera correcta a los ojos de un observador que posee un conocimiento más estructurado, pero el error debe verse como necesario en el proceso de aprendizaje (Sierpiska; 1999). No se puede pensar que por haber enseñado un tema, éste ya queda aprendido como el docente lo espera. A veces parece que sí, porque hay concepciones que funcionan adecuadamente en algunas situaciones; pero esas mismas concepciones aparentemente correctas pueden no resultar coherentes en otros contextos (Tall, 1991).

3. Desempeños y desempeños auténticos

El estudiante aprende los conceptos matemáticos y su significado al utilizarlos en diferentes contextos. Entre más situaciones diferentes se le presenten al estudiante, más aprenderá, ya que el significado que los individuos dan a los conceptos está relacionado con la manera de cómo los utilizan en contexto y con la variedad de contextos en que lo hagan. El proceso de aprendizaje en matemáticas es dialéctico: al utilizar el concepto se refuerza el conocimiento estructural o teórico, y al reforzar la teoría se facilita la utilización del concepto. No es suficiente conocer definiciones o saber realizar procesos y usar algoritmos para que los estudiantes puedan dar significado a las ideas matemáticas (Sfard, 2001b).

Varios investigadores reconocen la importancia de que hacer matemáticas en la escuela se acerque a lo que significa saber matemáticas en la disciplina. (Ritchhart, 1999). Algunos incluso observan que los desempeños básicos de quien hace matemáticas, como “la capacidad para detectar patrones y expresar generalidad” se pueden identificar “en el niño desde su nacimiento y, ciertamente, desde su ingreso a la escuela” (Mason, 1999, p. 232). Según Ritchhart (1999), las actividades matemáticas auténticas, aquellas que se basan en el quehacer real de la disciplina, se localizan en cuatro dimensiones diferentes: cómo se hace, para qué se hace, cómo se presenta y qué se estudia en matemáticas.

El *cómo* hace referencia a acciones y métodos utilizados en las matemáticas, como experimentar, observar, detectar patrones, hacer conexiones entre conceptos y sus representaciones, organizar datos, inducir o deducir, generar hipótesis o generalizar. El *para qué* en matemáticas es, por ejemplo, para modelar fenómenos, hacer predicciones, buscar orden y regularidades, buscar relaciones o experimentar el placer de jugar con ideas. El *cómo se presenta* remite a las formas en que los matemáticos organizan la información y presentan sus ideas: Un lenguaje ideográfico universal que se expresa en tablas, fórmulas, ecuaciones, símbolos, variables, modelos, etc. El *qué* son los contenidos de las matemáticas, como la geometría, la aritmética, la probabilidad, el álgebra, el cálculo, etc. (Ritchhart, 1999, p. 35).

Los desempeños auténticos en matemáticas serán entonces aquellos que comprometen a quienes aprenden en las diferentes actividades y áreas incluidas en estas cuatro dimensiones. Éstos darán al estudiante la oportunidad de vivir un ambiente rico para construir conocimiento y generar comprensión en la disciplina. Si los matemáticos observan y analizan patrones y realizan estimaciones y predicciones a partir de ellos (Ritchhart, 1999; Mason, 1999); si “buscan patrones en los números, en el espacio, en las ciencias, en los computadores y en la imaginación” (Oteen, citado en Ritchhart, 1999, p. 39); si “las teorías matemáticas explican las relaciones entre los patrones [y] ... las aplicaciones matemáticas usan los patrones para ‘explicar’ y predecir fenómenos naturales que siguen estos patrones” (Oteen, citado en Ritchhart, 1999, p. 39), entonces deberemos ver en clase a los estudiantes de nuestros colegios realizando actividades similares.

Sfard (2001b) asegura que no es fácil diseñar *problemas genuinos* que aporten al aprendizaje del individuo y que conduzcan a ideas matemáticas importantes. Entiende por *problema genuino* aquel que confronta al estudiante con una dificultad auténtica pero manejable, con preguntas claras y significativas pero de respuestas desconocidas, inmerso en un contexto real pero estrechamente conectado con una idea matemática importante y que permita utilizar un amplio espectro de habilidades de los estudiantes y satisfacer sus intereses. Sfard también habla del peligro de convertir los cursos de matemáticas en una colección de pasatiempos y actividades agradables pero carentes de sentido matemático.

4. La interacción social

Según Sfard (2001b), para un aprendizaje realmente efectivo en matemáticas, el trabajo individual y las intervenciones sustanciales del profesor pueden ser tan vitales como el trabajo en equipo. El aprendizaje de las matemáticas es, por tanto, una mezcla intrincada de reflexión individual e interacción social. En nuestro currículo el aprendizaje en colaboración es de suma importancia. Esperamos que el estudiante tome por su cuenta la responsabilidad de darle significado individual a lo que está aprendiendo a la vez que ayuda a la construcción de un significado colectivo (Garrison, 1993 citado en Stacey, 1999).

Cada estudiante que hace el esfuerzo de comunicar ideas matemáticas aprende y muestra a su vez su pensamiento matemático (Sfard, 2000). Esto puede hacerse para otros tanto oralmente como por escrito. Varios autores han identificado la importancia de la comunicación escrita en el aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, Pegalee (2001), en su estudio acerca del rol de la metacognición en el aprendizaje, dice que parece ser de vital importancia escribir en clase de matemáticas para que los estudiantes puedan actuar sobre sus propios procesos de pensamiento. Indica que quien escribe está realizando deliberadamente una acción analítica. La escritura permite igualmente intercambiar estrategias más o menos efectivas en la resolución de problemas.

Al mismo tiempo, los estudiantes deben clarificar y validar sus comprensiones a partir de la negociación y el diálogo permanentes (Garrison, 1993, citado por Stacey, 1999). Para Sfard debemos ver el aprendizaje como un proceso que integra a cada quien a un grupo social de una dimensión mayor. Al igual que lo hacen los científicos, los estudiantes tendrán que llegar a consensos mediante la argumentación matemática en colaboración (Kasami, 2001).

Conclusión

En conclusión, (...) partimos de que el aprendizaje de las matemáticas se propicia cuando las personas ponen en juego sus ideas matemáticas en diferentes tipos de actividades auténticamente matemáticas que se realizan individualmente y en colaboración: formular hipótesis, hacer predicciones, realizar experimentos para comprobar lo dicho, generar argumentos para sustentar las propias ideas, comunicar adecuadamente las ideas usando diversas representaciones y utilizar herramientas y procedimientos matemáticos para resolver problemas. Todo esto debe permitir a los estudiantes entender y usar el sistema formal de las matemáticas y su lenguaje, así como utilizarlos en tanto herramientas para desempeñarse efectivamente en su vida individual y social.

Referencias

- Amado, J. (1984), *Doña Flor y sus dos maridos*. Bogotá: Oveja Negra.
- Coll, C., Martín, E., Mauri, T., Miras, M., Onrubia, J., Solé, I., Zabala, A. (1993). *El constructivismo en el aula*. Barcelona: Editorial Graó.

- Kasami, E. (2 001). "Promoting conceptual thinking in four upper-elementary matemáticas classrooms". *The elementary School Journal*. Chicago: University of Chicago Press. Vol. 102, n.º 1, 1-10 (ProQuest).
- Kieran, C. (1.992). "The learning and teaching of School Álgebra". En D. A. (Ed.), *The handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: MacMillan Publishing Company, pp. 390 - 417.
- Mason, J. (1 999). "Incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: Las secuencias de Tunja". *Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática*. Bogotá, Vol. 4, n.º 3, 232-246.
- Moreno, L. (1 999). "Acerca del conocimiento y sus mediaciones en la educación matemática". *Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática*. Bogotá, Vol. 4, n.º 2, pp. 103-116.
- NCTM – National Council of Teachers of Mathematics (2 000). *Curriculum and evaluation standars for school mathematics*. En <http://standars.nctm.org>.
- NCTM – National Council of Teachers of Mathematics (1 989). *Curriculum and evaluation standars for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Niss, M. (Ed) (1 983). *Investigations into assessment in Mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Pegalee, D. (2 001). "Writing, mathematics, and metacognition: Looking for connections trough students work in mathematical problem solving". *School Science and Mathematics*. Bowling Green: School Science and Mathematics Association. Vol. 101, n.º 5, pp. 1-12 (ProQuest).
- Porlán, R. (1 995). *Constructivismo y Escuela: Hacia un modelo de enseñanza-aprendizaje basado en la investigación*. Sevilla: Díada Editora S. L.
- RAND – Research And Developement, (2 002). *Mathematical Proficiency for All Students: Toward a Strategic Research and Development Program in Mathematics Education*. D. Loewenberg Ball, Chair. Draf final report of de proyect prepared for the office of Education Research andImprovement (OERI), U S, Department of Education. En <http://www.rand.org/publications/>
- Rico, L. (1 995). "Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas". *Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática*. Bogotá: una empresa docente Vol. 1, n.º 1, pp. 4-24.
- Ritchhart, R. (1 999). "Uncovering the dimensions of Disciplinary Understanding in Mathematics (and Other Subject Areas)". En Hetland L. y Veenema S. (Ed), *The Project Zero Classroom. Views on Understanding*. Cambridge: Harvard Graduate School of Education.
- Sfard, A. (2 000). On reform Movement and the Limits of Mathematical Discourse. *Mathematical Thinking and learning*, Vol. 2, n.º 3, pp. 157-189.
- Sfard, A. (2 001a). "Equilibrar algo desequilibrando: Los Estándares del NCTM a la luz de las teorías de aprendizaje de las matemáticas (primera parte)". *Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática*. Bogotá: Vol. 6, n.º 2, pp. 95-140.
- Sfard, A. (2 001b). "Equilibrar algo desequilibrando: Los Estándares del NCTM a la luz de las teorías de aprendizaje de las matemáticas (segunda parte)". *Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática*. Bogotá: Vol. 6, n.º 3, pp. 207-249.
- Sierpiska, A. (1 994). *Understanding in mathematics*. London: The Falmer Press.
- Skovmose, O. (1 999). "Hacia una filosofía de la educación matemática". *Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática*. Bogotá: una empresa docente. Vol. 6, n.º 1, pp. 3-26.
- Stacey, E. (1 999). Collaborative Learning in an Online Environment. *Journal of Distance Education/ Revue de l'enseignement à distance*.
- Tall, D. (1 991). The psychology of advanced mathematical thinking. En Tall. D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academics Publishers.
- TIMSS, (1 995). *Trends in International Mathematics and Science Study*. En <http://nces.edu.gov/>
- TIMSS, (1 999). *Trends in International Mathematics and Science Study*. En <http://nces.edu.gov/>
- Yasukawa, K. (2 002). "Mathematics and technological literacy". Valero P.y Skovsmose O. (Ed), *Mathematics Education and Society. Proceedings of the Third International Mathematics Education and Society Conference*: Helsinger, The Danish University of Education, pp. 30-42.

Anexo 4:

Las ideas de Pólya en la resolución de problemas

Cuadernos de investigación y formación en educación matemática¹

2006, Año 1, Número 1

Cristian Alfaro

Escuela de Matemática de la Universidad Nacional

crisalfaro2002@yahoo.es

Resumen

Las principales ideas de George Pólya son descritas: el método de los cuatro pasos, el papel del docente, la lógica del razonamiento plausible y cómo resolver un problema.

George Pólya fue un gran matemático que nació en Budapest en 1887 y murió en Palo Alto, California, en 1985. A lo largo de su vida generó una larga lista de resultados matemáticos y, también, trabajos dedicados a la enseñanza de esta disciplina, sobre todo en el área de la resolución de problemas.

Estos trabajos básicamente fueron escritos en los años cuarenta del siglo XX, pero su traducción no se realizó hasta los años sesenta y setenta.

Se trata de un personaje clave en la resolución de problemas y es considerado el pionero o gestor de las primeras etapas de esta temática.

La posición de Pólya respecto a la resolución de problemas se basa en una perspectiva global y no restringida a un punto de vista matemático. Es decir, este autor plantea la resolución de problemas como una serie de procedimientos que, en realidad, utilizamos y aplicamos en cualquier campo de la vida diaria.

Para ser más precisos, Pólya expresa: “Mi punto de vista es que la parte más importante de la forma de pensar que se desarrolla en matemática es la correcta actitud de la manera de cometer y tratar los problemas, tenemos problemas en la vida diaria, en las ciencias, en la política, tenemos problemas por doquier. La actitud correcta en la forma de pensar puede ser ligeramente diferente de un dominio a otro, pero sólo tenemos una cabeza y, por lo tanto, es natural que en definitiva haya sólo un método de acometer toda clase de problemas. Mi opinión personal es que lo central en la enseñanza de la matemática es desarrollar tácticas en la resolución de problemas”.²

¹ Este texto es una transcripción editada de una conferencia impartida por el Magister Cristian Alfaro, el 25 de marzo de 2006 en un Seminario Teórico. La transcripción y edición preliminar del texto fue realizada por el estudiante de la Universidad Nacional José Romilio Loría. El autor hizo la edición final. En: <http://www.cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno1/Cuadernos%201%20c%202.pdf>

² Es interesante rescatar que esta idea no nació de la noche a la mañana, Pólya desde joven era una persona muy inquieta por la física y la matemática; le encantaba asistir a conferencias y a clases para observar la demostración de teoremas. En estas charlas o lecciones, a pesar de que la exposición de los conceptos era bastante clara, la inquietud de él siempre era la siguiente: “Sí, yo tengo claro el razonamiento, pero no tengo claro cómo se origina, cómo organizar las ideas, por qué se debe hacer así, por qué se pone de tal orden y no de otro”. Esto lo llevó a cuestionar las estrategias que existían para resolver problemas o cómo se concebiría una sucesión de pasos lógicos para aplicar a la resolución de cualquier tipo de problema.

Método de los cuatro pasos

Pólya plantea, en su primer libro, el llamado “El Método de los Cuatro Pasos”, según el cual se propone lo siguiente para resolver cualquier tipo de problema:

- Comprender el problema
- Concebir un plan
- Ejecutar el plan y
- Examinar la solución

Para cada una de estas etapas, Pólya plantea una serie de preguntas y sugerencias.

1. Comprender el problema

Para este paso se siguen las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la incógnita?
- ¿Cuáles son los datos?
- ¿Cuál es la condición?
- ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?
- ¿Es insuficiente?
- ¿Es redundante?
- ¿Es contradictoria?

Es decir, esta es la etapa para determinar la incógnita, los datos y las condiciones y para decidir si esas condiciones son suficientes, no redundantes o contradictorias. De esta manera se busca que el problema sea comprendido de mejor manera.

2. Concebir un plan

Para Pólya, en esta etapa del plan, el problema debe asociarse con problemas semejantes. También debe relacionarse con resultados útiles y determinar si se puede recurrir problemas similares y a sus resultados (aquí se subraya la importancia de los problemas análogos). Algunas interrogantes útiles en esta etapa son:

- ¿Se ha encontrado con un problema semejante?
- ¿Ha visto el mismo problema planteado en forma ligeramente diferente?
- ¿Conoce un problema relacionado?
- ¿Conoce algún teorema que le pueda ser útil?
- ¿Podría enunciar el problema en otra forma?
- ¿Podría plantearlo en forma diferente nuevamente? Refiérase a las definiciones.

Estas interrogantes contribuyen a formular un plan a seguir para la resolución del problema.

3. Ejecución del plan

Durante esta etapa es primordial examinar todos los detalles y es parte importante recalcar la diferencia entre percibir que un paso es correcto y, por otro lado, demostrar que un paso es correcto. Es decir, es la diferencia que hay entre un problema por resolver y un problema por demostrar. Por esta razón, se plantean aquí los siguientes cuestionamientos:

- ¿Puede ver claramente que el paso es correcto?
- ¿Puede demostrarlo?

Pólya plantea que se debe hacer un uso intensivo de esta serie de preguntas en cada momento. Estas interrogantes están dirigidas sobre todo a lo que él llama “problema por resolver” y no tanto los problemas por demostrar. Cuando se tienen problemas por demostrar, entonces, cambia un poco el sentido. Esto es así

porque ya no se habla de datos, sino, más bien, de hipótesis. En realidad, el trabajo de Pólya es fundamentalmente orientado hacia los problemas por resolver.

En síntesis: al ejecutar el plan de solución debe comprobarse cada uno de los pasos y verificar que estén correctos.

4. Examinar la solución

También denominada “etapa de la visión retrospectiva”. En esta fase del proceso es muy importante detenerse a observar qué fue lo que se hizo; se necesita verificar el resultado y el razonamiento seguido.

Para esto, pregúntese:

- ¿Puede verificar el resultado?
- ¿Puede verificar el razonamiento?
- ¿Puede obtener el resultado en forma diferente?
- ¿Puede verlo de golpe?
- ¿Puede emplear el resultado o el método en algún otro problema?

Estas cuestiones dan una retroalimentación muy interesante para resolver otros problemas futuros: Pólya plantea que cuando se resuelve un problema (que es en sí el objetivo inmediato), también, se están creando habilidades posteriores para resolver cualquier tipo de problema. En otras palabras, cuando se aplica la visión retrospectiva del problema que se resuelve, se puede utilizar tanto la solución que se encuentra como el método utilizado; este último podrá convertirse en una nueva herramienta a la hora de enfrentara cualquier otro problema.

De hecho, es muy válido verificar si se puede obtener el resultado de otra manera; si bien es cierto que no hay una única forma o estrategia para resolver un problema, puede haber otras alternativas. Precisamente, esta visión retrospectiva tiene por objetivo que veamos esta amplia gama de posibles caminos para resolver algún tipo de problema.

EL PAPEL DEL DOCENTE EN EL PROCESO

Un aspecto muy relevante en todo este proceso es la función que tiene el docente. Según Pólya, el papel del maestro es “ayudar al alumno”, pero esto debe ser entendido con mucho cuidado. Es difícil llevarlo a la práctica, porque en realidad esa ayuda, como dice él, no tiene que ser ni mucha ni poca; sin embargo, a veces, es un poco subjetivo determinar si el profesor está ayudando mucho o está ayudando poco. La ayuda que dé un profesor debe ser la suficiente y la necesaria. Por ejemplo, no se puede plantear un problema muy difícil y abandonar al estudiante a su propia suerte, pero tampoco plantear un problema y que el mismo docente lo resuelva. Si se hace lo último, no se enseña nada significativo al estudiante; en otras palabras: es importante que el alumno asuma una parte adecuada del trabajo.

Hacer preguntas que se le hubieran podido ocurrir al alumno es, también, crucial en el proceso. Es por eso que Pólya plantea constantemente que el profesor debe ponerse en los zapatos del estudiante.

Evidentemente, cuando el docente propone un problema y sabe cómo se resuelve, presenta la solución de forma que todo parece muy natural. Sin embargo, el mismo estudiante cuestiona si realmente se le puede ocurrir a él esa solución. Allí surge una serie de circunstancias que apuntan al profesor como la única persona capaz de encontrar el mecanismo de solución para el problema:

- Preguntar y señalar el camino de distintas formas.
- Usar las preguntas para ayudar a que el alumno resuelva el problema y desarrollar en él la habilidad de resolver problemas.

Pólya recalca el interés

Según Pólya, para resolver un problema, lo que se tiene que tener fundamentalmente al inicio es interés por resolver el problema. La actitud que puede *matar* un problema es precisamente el desinterés; por ello se debe buscar la manera de interesar al alumno por resolver problemas. Entonces, es relevante el tiempo que se dedique a exponer el problema: el profesor debe atraer a los estudiantes hacia el problema y motivar su curiosidad.

En ocasiones, el docente no encontrará progreso en el estudiante y es probable se deba a que éste no tiene deseos de resolver el problema.

Un método que suele resultar útil es el de la imitación: el profesor debe ser un modelo para la resolución de problemas. Entonces, él mismo debe hacer las preguntas cuando resuelve un problema en la clase.

Ahora bien, es importante preparar con cuidado los ejemplos, no se debe proponer ahí problemas que parezcan imposibles, sino que realmente sean adecuados y que se encuentren al nivel del estudiante.

La presentación de los problemas tiene, entonces, mucho peso en el proceso. No consiste en dar una lista interminable de ejercicios para que resuelvan y punto; por el contrario, se trata de sembrar la curiosidad y el interés por el problema.

El método de interrogar del profesor

El docente debe comenzar con una pregunta general o una sugerencia, ir poco a poco a preguntas más precisas hasta obtener respuestas de los alumnos; luego, debe realizar preguntas y sugerencias simples y naturales.

Pólya muestra constantemente diálogos entre el profesor y el estudiante, así como ejemplos de problemas. Uno muy interesante es acerca del cálculo de la diagonal de un paralelepípedo. En este problema Pólya sugiere llevar al estudiante a razonar y ver problemas análogos (como el de calcular una diagonal en un rectángulo); sin embargo acotó que sería incorrecto que los profesores, con el afán de ayudar a los estudiantes, hagan sugerencias como, por ejemplo, preguntar si se puede aplicar el teorema de Pitágoras. Pólya dice que una pregunta en ese sentido sería deplorable. El estudiante que ya tiene clara la idea por donde va la solución va a ver muy natural que se va a emplear el teorema de Pitágoras; pero la persona que no ha tenido la comprensión clara del problema en ese momento va a decir: "Se qué es el teorema de Pitágoras, pero ¿cómo se aplica en este problema?".

Esas preguntas parecen simples pero no lo son, tienen que ser conformadas con mucho cuidado. Pólya insiste mucho en que sean preguntas simples, naturales, que se le puedan haber ocurrido a algún estudiante, que sean aplicables a todo tipo de problemas.

Este tipo de preguntas mencionan indirectamente las operaciones típicamente intelectuales que se van a utilizar en la resolución de problemas.

Características de las preguntas y sugerencias

La generalidad

Las preguntas y sugerencias no están restringidas a un determinado tema. Ya sea un problema algebraico o geométrico, una adivinanza, o cualquier tipo de situación que nosotros queramos enfrentar, Pólya plantea que las preguntas son aplicables. Señala que cualquier tipo de persona se

puede interesar en la resolución de problemas. De manera especial, hace la comparación con los crucigramas en el periódico, los cuales, en realidad, suscitan el interés. Este tipo de acertijos, juegos y enigmas no necesariamente contienen una aplicación directa en la vida real, pero estimulan el pensamiento. Esa curiosidad se debe trasladar a la matemática, para que también sea algo natural y, por lo tanto, las preguntas deben ser generales (que se refieran a todo tipo de temas o situaciones).

El sentido común

Las preguntas tienen que ser naturales, sencillas. Para esto Pólya recalca que es necesario ver constantemente cuáles son los datos de la pregunta y cuáles son sus posiciones.

En realidad, este tipo de preguntas se aplican a cualquier ámbito del saber y no necesariamente a la matemática. Sugieren ellas una cierta conducta que debe presentarse en forma natural en la mente de cualquiera que tenga un cierto sentido común. Pólya hace mucho hincapié en que si no existe un verdadero interés en el problema será muy complicado poder resolverlo.

El objetivo de realizar una pregunta o sugerencia es evidentemente ayudar al estudiante a resolver el problema en cuestión y, desde luego, desarrollar la habilidad de éste, de tal modo que pueda resolver por sí mismo problemas posteriormente.

¿CÓMO RESOLVER UN PROBLEMA?

Pólya insiste mucho en empezar por el enunciado, visualizar el problema como un todo. Lo natural es que el estudiante sea el primero que se familiarice con el problema como un todo; esto estimula la memoria. Ya visualizado, se tiene claro qué se debe resolver, y, una vez que suceda este proceso, se comprende el problema; aquí se aíslan sus partes y se las comienza a resolver paso a paso.

Una idea útil: comience por lo principal, vea el problema desde diferentes perspectivas, conéctelo con conocimientos anteriores, busque algo familiar y útil en lo que ha hecho antes. Si se tiene una idea incompleta hay que considerarla a fondo. Identifique en qué la idea le puede servir la idea, si lo ayudará a concebir el problema en forma global.

Ejecución del plan: inicie con la idea que lo lleve a la solución cuando esté convencido de poder suplir todos los detalles. Asegúrese de que cada paso es correcto. Si es posible, divida el proceso en pequeños y grandes pasos.

Visión retrospectiva: una vez que resuelva el problema, es importante no dejar de lado que siempre hay un aprendizaje para analizar lo que hizo; evidentemente se aplica posteriormente. El mismo problema puede ser útil en otro problema, no sólo por el tipo de problema sino por el método de solución.

LAS HEURÍSTICAS

La heurística moderna busca comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular, las operaciones mentales típicamente útiles en el proceso.

Aquí debe tenerse en cuenta un trasfondo lógico y psicológico. Pólya afirma que la selección de preguntas que se plantean para cada paso no se escogen al azar, sino que existen aspectos lógicos y psicológicos relacionados entre sí para la formulación de dichas preguntas. En su libro aclara: téngase en cuenta que el autor tiene mucha experiencia en la enseñanza de las matemáticas y la resolución de problemas.

No es fácil hacer preguntas en un orden muy definido; es claro que si esto sucede y no están al azar es porque proceden de la experiencia de muchos años de estar trabajando con eso.

Básicamente lo que Pólya propone es que el estudio de la heurística busca obtener puntos comunes en cualquier tipo de problemas. Lo que se quiere obtener son las características generales, estrategias de resolución, independientemente del problema. El objetivo es comprender estas estrategias típicamente útiles en la resolución de problemas.

Algunas de esas heurísticas son las que a continuación se describen:

1. Variación del problema

El problema original se puede variar descomponiéndolo un poco y no necesariamente se lo debe enfocar directamente, sino recurrir a un problema análogo.

Separe partes, cambie alguna condición. Pólya afirma que este procedimiento genera la movilización y la organización de los conocimientos: si apela a ese conocimiento previo que tenemos, tal vez, por ahí escondido. Este último no necesariamente sale a flote a menos que empecemos a hacer variaciones y cambios.

2. Generalización

Al analizar un caso en particular se siente la necesidad de probar el problema en un caso más general: entonces, se generaliza un poco el problema con el que se está trabajando. El método es pasar del examen de un objeto al examen de un conjunto de objetos, entre los cuales figura el primero. O, por otro lado, pasar del examen de un conjunto limitado de objetos a un conjunto más extenso que incluya al conjunto limitado.

3. Particularización

Es el caso inverso de la generalización: a partir un problema general se empieza a particularizar en algunos casos para encontrar alguna idea o luz sobre el problema por resolver. Consiste en pasar de la consideración de un conjunto de objetos dado a la consideración de un conjunto más pequeño (o incluso de un sólo objeto) contenido en el conjunto dado.

4. Analogía

Para resolver un problema se puede utilizar la solución de un problema análogo más sencillo, ya sea usando su método, su resultado o ambos.

LA LÓGICA DEL RAZONAMIENTO PLAUSIBLE

Pólya asegura que, en ocasiones, al trabajar se plantea un razonamiento que no es precisamente el silogismo que normalmente se usa. Se trata de un método de alumbramiento de muchas ideas: el *modus tollens*, que plantea que si A implica B y B es falsa, entonces A también es falsa. Este tipo de razonamiento es lógico y tiene sus características de impersonalidad, en tanto no depende de las personas.

Todos pensamos distinto, pero si aceptamos las premisas, irremediablemente aceptamos la conclusión. Es universal. Se aplica a cualquier ámbito del conocimiento. Es autosuficiente y no necesita de aspectos o elementos externos para obtener la conclusión. Es definitivo.

Sin embargo, Pólya plantea un razonamiento diferente: el razonamiento plausible. Consiste en que si A implica B y B es cierto, entonces A es más digna de crédito. Hace hincapié en que esto, desde el

punto de vista lógico, no es correcto y aceptarlo sería una locura, pero descartarlo sería aún una mayor locura.

Grosso modo, en ambos casos las dos primeras premisas son igualmente claras y definitivas; están en el mismo nivel lógico. Pero las conclusiones están en diferente nivel lógico. En el caso demostrativo, la conclusión está en el mismo nivel que las premisas, mientras que en el razonamiento plausible es menos fuerte.

En sí, lo que quiere decir es que la matemática, en su forma de exposición euclidiana, tiene una estructura lógica bastante coherente y es “más científica” que cualquier otra ciencia natural. Sin embargo, en realidad el matemático, dice Pólya, razona de distintas maneras, no de una única forma: conjeturando, buscando relaciones. Esa forma de razonar está actualmente oculta en la enseñanza de la matemática y eso es lo que él plantea que debe mostrarse al estudiante.

Las características del razonamiento plausible

Es impersonal: la verificación de una consecuencia fortalece la conjetura. Pero esta impersonalidad se logra solamente porque estos patrones son restringidos a un aspecto de la inferencia plausible. En cuanto queremos saber sobre la fuerza que da a la conjetura la verificación de una consecuencia, se presentan las diferencias personales.

Es universal: la verificación de una consecuencia es una evidencia razonable de una conjetura en cualquier dominio. Pero esta universalidad se logra por la unilateralidad del patrón. Otra vez, esta universalidad se ve empañada cuando se trata de determinar cuál es el peso de la evidencia. Así, existen límites para la universalidad de la inferencia plausible.

Es autosuficiente: la conclusión plausible está apoyada por las premisas. Pero carece de durabilidad. De hecho, otra vez, el peso de la evidencia depende de cosas no mencionadas en las premisas. La dirección está dada en las premisas (más o menos digna de crédito), pero la fuerza no. No depende de elementos externos.

Es provisional (no definitivo): no se puede separar la conclusión de las premisas. Con las premisas la conclusión goza de sentido, pero puede disminuir su valor con el tiempo aún con las premisas intactas. Su importancia es transitoria. Puede aparecer un contraejemplo que elimine la conjetura.

En conclusión: un docente de matemáticas debe tener en cuenta que un razonamiento presentado en forma correcta (lo que se llama la exposición euclidiana) con un método riguroso, puede no ser inteligible ni instructivo. Esto sucede así en tanto no se hace comprender el propósito de cada una de las etapas; es decir, si no se entiende el modo por el cual se ha obtenido dicho razonamiento.

El profesor de matemáticas debe mostrar el rostro humano de esta disciplina: dónde se equivoca, dónde se conjetura, dónde las conjeturas se desechan o se mantienen si hay problemas abiertos que aún no sabemos si tienen solución o no. Sería importante que muchos de esos aspectos pudieran incluirse en la enseñanza de las matemáticas.

REFERENCIAS

Pólya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, Alan. (1992). *Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sensemaking in Mathematics. Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*. pp. 334-370. En línea: 20 de marzo de 2006. http://gse.berkeley.edu/faculty/AHSchoenfeld/Learning-ToThink/Learning_to_think_Math.html.

Anexo 5:

Consejos prácticos para la enseñanza de las Matemáticas

Resolver problemas: estrategias. Unidades para desarrollar el razonamiento matemático

2001, segunda edición

Kare Stacey

Susie Groves

Narcea, S. A. Ediciones. Madrid.

Enseñar a resolver problemas es para muchos docentes de matemáticas una tarea nueva y poco familiar. La estrategia usual de enseñanza –exposición, ejemplos ilustrativos, ejercicios rutinarios– no es apropiada cuando el interés se quiere desplazar desde aprender cómo hacer tareas repetitivas hacia el aprendizaje sobre el proceso de exploración y aplicación de las matemáticas.

Estas sugerencias prácticas no pretenden que se entienda que solo existe una forma de enseñar con éxito la resolución de problemas. Los docentes necesitan experimentar para ser capaces de sacar el máximo provecho de su propio estilo de enseñanza.

PREPARACIÓN

El docente debe empezar por resolver los problemas él mismo. Nada puede reemplazar la experiencia personal de “hacer matemáticas”.

EL PAPEL DEL DOCENTE

Concierne al docente:

- *Ayudar a los estudiantes a aceptar los retos.* Un problema no es tal hasta que se quiere resolver.
- *Crear un ambiente de confianza en la clase* que prepare a los estudiantes a enfrentarse a situaciones no familiares y que los ayude a no sentirse demasiado angustiados cuando se bloquean.
- *Permitir que los estudiantes desarrollen sus propias ideas* para encontrar una solución y ayudarlos cuando sea necesario, sin darles directamente la respuesta.
- *Proporcionar un marco en que los estudiantes puedan reflexionar acerca de (es decir, pensar, discutir y escribir sobre) los procesos en que están inmersos y, de esta forma, aprender de la experiencia.*
- *Hablar a los estudiantes sobre los procesos involucrados cuando se hacen y aplican las matemáticas,* de manera que puedan adquirir un vocabulario que los ayude a pensar y aprender. Los estudiantes aprenden mucho más eficazmente cuando el docente dirige explícitamente su atención a las estrategias y procesos implicados en la resolución de problemas.

DAR RESPUESTAS Y SUGERENCIAS

Aunque no es importante que los estudiantes aprendan “cómo resolver” cualquier problema concreto, sí lo es que los problemas no queden planteados a la clase indefinidamente. Sugerimos que *la mayoría de los problemas se “agoten” en una discusión en clase*, aunque ocasionalmente esto suponga dar la respuesta sólo a la mayoría. En dicha discusión podrían mencionarse algunos caminos fallidos. Es importante aprender también acerca de las tentativas frustradas.

Una de las tareas más difíciles con la que el docente se enfrenta es encontrar el justo equilibrio entre decir a los estudiantes demasiado y dejarlos bloqueados mucho tiempo. Es contraproducente que los estudiantes se sientan, incapaces de moverse un ápice, pero también lo es que otra persona les resuelva el problema.

A veces todo lo que se necesita es darles ánimos: “¿Estás bloqueado? No te preocupes, ¿qué podrías intentar?” Las sugerencias pueden conducir indirecta o directamente, con menos provecho, a estrategias de resolución de problemas: “¿Qué estrategias crees que podrías intentar en esta situación?” o “¿Has buscado alguna regularidad en estos números?” Las estrategias directas, relacionadas con el contexto, como: “¿Qué consigues si encuentras las diferencias entre estos números?” apenas deberían usarse; otras como: “¿Has reconocido los números triangulares?”, deberían dejarse para casos extremos.

NO IR DEMASIADO DE PRISA

Es tan importante mantener una razonable calma, sin prolongar las unidades demasiado tiempo, como dar a los estudiantes la oportunidad de que exploren en profundidad algunos problemas e informen a otros compañeros de la clase. Se puede aprender mucho de cada experiencia.

RESUMIR CADA SESIÓN

Es buena idea finalizar la mayoría de las sesiones resumiendo los puntos importantes que se han desarrollado. Hemos constatado que los docentes no suelen conceder suficiente tiempo a esto, especialmente cuando los estudiantes están trabajando bien.

NO BORRAR

En la hoja de borrador no es necesario preocuparse excesivamente del orden. Es mejor tachar con trazos finos y escribir notas rápidas tales como “incorrecto, olvidé dividir los números por dos”.

TRABAJO ESCRITO

La mayoría de los docentes se sienten frustrados por la poca calidad de la expresión escrita de los estudiantes y se desalientan ante el esfuerzo que les exige. A pesar de ello, es bueno pedir a los estudiantes que elaboren informes de una tercera parte o la mitad de los problemas que aborden. Por suerte, los docentes se dan cuenta de que los estudiantes suelen mejorar rápida y significativamente en este aspecto cuando comienzan a percatarse de la cantidad de razonamiento que implica y empiezan a tomar decisiones que es lo más relevante para presentar una solución clara.

Explicar lo que se ha hecho de forma que cualquier otra persona pueda comprenderlo es una habilidad importante que se debe desarrollar y propicia tanto la comprobación como la reflexión. Los estudiantes aprenden más si estudian los problemas con detenimiento que si pasan rápidamente de un problema a otro.

Para tratar de facilitar la tarea de escribir, incluyendo dibujos y diagramas en su caso, sugerimos el siguiente formato:

Enunciado del problema	Copiado de la pizarra entregado por el docente
Todo el trabajo.	Esta sesión no es para que la lea nadie más que su autor. Sin embargo, los docentes deberían inducir a los estudiantes a escribir todas sus ideas.

Enunciado del problema	Copiado de la pizarra entregado por el docente
Lo que ha descubierto.	Explicación clara de lo que se ha encontrado y de por qué es cierto; resume más que repite el trabajo previo.
Las ideas que me han ayudado.	Breve enunciado de una o más sugerencias o estrategias que ayudaron a resolver el problema.

A menudo, los estudiantes se sienten un poco confusos a la hora de distinguir entre lo que deben escribir ordenadamente y en borrador, al tratar de comentar para el docente en lugar de razonar para sí mismos. A veces es útil simular un juego como “Hoy buscaremos el mejor diagrama”.

¿Bloqueado?

Inevitablemente, si un problema es un verdadero problema, el estudiante puede quedar bloqueado y pedir ayuda al docente. Sería deseable que los docentes ofrecieran esta ayuda de modo que los estudiantes aprendieran a desarrollar los recursos necesarios para ayudarse a sí mismos en lugar de necesitar siempre al docente.

Existen tres pasos para desbloquearse:

- Reconocer que se está bloqueando y aceptarlo.
- Desechar el pánico.
- Hacer algo.

Los dos primeros pasos, aunque en un sentido trivial, son previos. Sólo un estudiante que ha dominado los sentimientos de pánico puede razonar productivamente para encontrar nuevas formas de abordarlo.

Para tratar de hacer algo, sugerimos que los estudiantes se pregunten:

- ¿Qué SÉ sobre el problema?
- ¿Qué QUIERO encontrar?
- ¿Qué puedo USAR como apoyo?
- ¿Puedo hacer una CONJETURA?
- ¿Puedo COMPROBAR lo que he encontrado?

Aunque estas cuestiones no son útiles en sí mismas, lo serán cuando llenen de significado gracias a la comprensión de muchas y ricas relaciones sobre cómo han sido útiles en anteriores ocasiones. Sólo entonces plantearse la cuestión se convertirá en una alarma que recuerde al estudiante cosas que tiene que hacer. Por esta razón confiamos en que los docentes empleen con frecuencia estas cuestiones, indicando a los estudiantes cómo se pueden relacionar con las estrategias y sugerencias que se estén estudiando.

Sugerencias útiles para resolver problemas

1. LÉELO Y TRATA DE COMPRENDERLO

Nunca es excesivo insistir en que se haga una lectura cuidadosa del enunciado del problema; esto se contempla no sólo en las matemáticas sino en otras cuestiones. En el fondo de muchos fracasos está una lectura poco atenta.

Esta lectura no ha de ser pasiva, sino que debería implicar escribir, dibujar y expresar la cuestión con las propias palabras. Una lectura inicial cuidadosa reduce la probabilidad de una comprensión incorrecta y una relectura activa permite identificar interpretaciones erróneas o información que se ha olvidado. Hay que indicar a los estudiantes que es normal (y una buena idea) leer la cuestión siempre que estén bloqueados, no sólo al empezar el problema.

Las preguntas: “¿Qué sé sobre el problema?” y “¿Qué quiero encontrar?” son relevantes para hacer una lectura cuidadosa y se relacionan con los dos tipos diferentes de información que se puede extraer del enunciado de un problema.

2. ESCRIBE LO QUE HACES

Es de gran utilidad pedir a los estudiantes que registren por escrito su resolución. A menudo se resisten a escribir una buena idea y luego la olvidan o hacen lo mismo dos veces. Escribir que algo se ha intentado y no funciona, o que es imposible, es tan importante como escribir algo que es correcto sobre todo si el trabajo se prolonga más de un día. Elaborar un plan obliga con frecuencia a clarificarlo.

En el cuaderno introducido ofrecemos el consejo para comenzar, escribir o dibujar algo. Empezar un problema es quizás la parte más difícil de su resolución.

El docente debe hacer algo para evitar que los estudiantes se queden parados delante de una hoja de papel en blanco. No deben temer escribir algo incorrecto o desordenado.

Pensar sobre lo que se sabe y se quiere es una sugerencia para que las ideas fluyan. Es útil reconsiderar lo que se sabe y se quiere (quizás releendo) y escribir cuando se esté bloqueado.

3. TRABAJA SISTEMÁTICAMENTE

Trabajar sistemáticamente es un hábito sencillo y potente a la vez, que puede dar lugar a diferencias notables en la resolución de problemas. En un nivel simple, significa abordar las cosas una a una, exponerlas bien, numerar las páginas y generalmente saber hacia dónde se va. En un nivel más complejo, considerar casos de forma sistemática ayuda a encontrar regularidades e incorpora el ensayo y el error como una herramienta de análisis.

Hacer diagramas y tablas supone una aproximación sistemática y puede ser una respuesta frecuentemente a la pregunta: “¿Qué puedo usar que me ayude?”

4. USA ALGO QUE TE AYUDE

Hay muchas ayudas sencillas y concretas que facilitan la resolución de problemas, no solo para los que razonan sobre lo correcto. Muchas se pueden improvisar de inmediato, pero otras debe proporcionarles el docente. El papel cuadriculado es particularmente útil para diagramas y tablas.

Al igual que con las herramientas concretas, se debería motivar a los estudiantes a considerar las herramientas matemáticas que les pueden ser útiles. La cantidad disponible varía en gran medida según el bagaje matemático previo, pero comprende las formas de presentar datos gráficamente y el uso de símbolos (cada vez más a lo largo de la secundaria) para expresar ideas.

No obstante, el docente debe prestar atención a lo siguiente: normalmente, los estudiantes no suelen aplicar conocimientos matemáticos que no les sean totalmente familiares a una cuestión no rutinaria. Los docentes pueden mostrar cómo una técnica matemática recientemente aprendida se puede emplear para obtener una solución, pero a menudo es mejor hacerlo después de que los estudiantes hayan presentado sus propias soluciones. Si el objetivo es centrar la atención de los estudiantes en las estrategias de resolución de problemas, no se les debe presionar para que usen herramientas que no dominan.

5. BUSCA Y EXPLOTA REGULARIDADES

Encontrar y explotar regularidades es quizá una de las estrategias específicas de las matemáticas. En general los estudiantes llegan de la enseñanza primaria con un fuerte sentido de las regularidades, una gran fe en ellas. Lo importante es que usted conozca más técnicas para descubrir regularidades numéricas y comprenda que es preciso comprobarlas y verificarlas antes de usarlas indiscriminadamente.

6. USA EL ENSAYO Y ERROR

Hemos decidido incluir el ensayo y el error como una parte importante del curso por varias razones. La primera es que es una estrategia empleada de forma natural por los estudiantes: la aplican al azar, lo que suele ser infructuoso; por ello, es fundamental depurarla para que los errores se examinen en lugar de abandonarse; lo que proporciona rápidos resultados. Una segunda razón es que se puede aplicar a una amplia variedad de problemas y, con la creciente capacidad de las computadoras, se convertirá en un método cada vez más extendido. El ensayo y el error encierra una actitud extremadamente potente para resolver problemas, que no se suscita con el trabajo rutinario de clase, en concreto: *si no sabes qué hacer, intenta algo, cualquier cosa, u observa qué ocurre*. Trabajar sistemáticamente es crucial para el éxito de la técnica.

7. DESARROLLA UN BUEN SISTEMA DE REGISTRO

En la resolución de problemas, los estudiantes suelen codificar y expresar situaciones reales mediante símbolos antes de contestar las preguntas. Por ejemplo, en varias unidades donde hay juegos de estrategia, el análisis del juego exige casi siempre escribir la información; esto es, la secuencia de movimientos efectuados y el estado del juego. Encontrar una buena forma de registrar esta información no es sencillo, sin embargo resulta fundamental para el éxito del análisis de la situación. Es preciso que la notación sea fácil de escribir y recordar y debe contener toda la información esencial en la forma más concisa posible. Como traducir de una situación real a una forma simbólica es un paso preliminar esencial en la resolución de problemas, esta estrategia figura en varias unidades.

8. EXPLICA LO QUE HAS HECHO

Cuando los estudiantes han acabado un problema o han hecho su mejor esfuerzo, se debería invitar a revisar el trabajo y a elaborar un informe ordenado y coherente, escribiendo la solución con los razonamientos y no sólo la *respuesta*. Una forma de tratar de explicar esto es decirles *que cualquier otra persona pueda comprenderlo*.

Normalmente esto les parece una tarea aburrida, porque retrasa el enfrentamiento con nuevos problemas, pero merece la pena insistir en ello. El proceso de explicar, obliga al estudiante a reconsiderar la solución y le da la oportunidad de reflexionar sobre su experiencia. Se aprende más así que tratando los problemas de forma superficial.

Además de explicar *qué*, se debería motivar a los estudiantes a explicar el *porqué*. Estas explicaciones son pruebas informales y los docentes deberían buscar una progresión gradual en la precisión de estos argumentos. Las pruebas no tienen por qué estar llenas de símbolos, es mejor hacerlo con palabras.

9. COMPRUEBA TU TRABAJO

Comprobar es una actividad importante que se debería hacer de vez en cuando mientras se trabaja en un problema. Sin embargo los estudiantes se sorprenden al aprender que comprobar no sólo significa revisar los cálculos aritméticos. Es importante no repetir lo que se ha hecho si no es para hacerlo de forma diferente.

Existen distintos aspectos de la comprobación.

10. GENERALIZA TU TRABAJO

La frase *Pregúntate a ti mismo: ¿Qué ocurriría si...?* se usa para animar a los estudiantes a generalizar sus resultados. Pensamos que se debería poner el énfasis en la generalización porque:

- Es un proceso básico de las matemáticas.
- Desarrolla una comprensión más completa de los resultados.
- Motiva una revisión detallada de lo que se ha hecho.
- La pregunta que uno se hace a sí mismo es la que prefiere resolver.

Las generalizaciones u otras cuestiones del tipo *¿Qué ocurriría si...?* no deberían forzarse. Las más naturales surgen de comprender cómo funciona la primera solución o de la curiosidad y la creatividad de cada estudiante.

El cuadrado del 100 y dominó para las tablas de multiplicación

El cuadrado del 100										0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	100

- Material por estudiante para uso personal:
 - El cuadrado del 100 sin números del tamaño de una hoja A4.
 - Es preferible poner el cuadrado del 100 en una funda de plástico para que los estudiantes puedan escribir los números con un marcador de pizarrón y borrarlos con un pañuelo.
- Material para el docente para uso en grupo:
 - Un pizarrón blanco con el cuadrado del 100 sin números de un tamaño aproximado de 1m x 1m.
 - Un pizarrón blanco con el cuadrado del 100 con números de un tamaño aproximado de 1m x 1m.
 - Para pegar los números en el cuadrado del 100, se puede usar cinta adhesiva. Pero también es recomendable usar velcro para que coloquen los números en el pizarrón sin que se caigan.

Uso del material didáctico:

1		3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15		17	18	19	20
21	22	23	24		26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38		40
	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53		55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66		68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	
81	82	83	84	85	86	87		89	90
91	92		94	95	96	97	98	99	100

- En el cuadrado del 100 faltan algunos números. Los estudiantes deberán completar los números que faltan y explicar sus respuestas.

Por ejemplo: Aquí se ubica el número 54 porque después del 53 viene el 54; aquí se colocó el 39 porque antes del 40 viene el 39, ...

									0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
						17			20
	22								30
			34						40
				45					50
							58		60
								69	70
					76				80
81									90
		93							100

- En el cuadrado del 100 están solamente el 0, las unidades y las decenas. El docente dirá un número y los estudiantes lo escribirían en el lugar que corresponde. También explicarán el porqué de su respuesta.

Por ejemplo: Para ubicar el número 76 busco primero el 70 y después cuento 71, 72, 73, 74, 75 y 76.

		3							
						17			
							28		
					36				
			44						
								59	
	62								
				75					
									90
91									100

- En el cuadrado del 100 no hay ningún número. El docente dirá un número y los estudiantes lo anotará en su lugar. También explicarán el porqué.

Por ejemplo:

- Para ubicar el número 59 cuento primero en decenas hasta 50: 10, 20, 30, 40 y 50. Después cuento 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58 y 59.

- Para ubicar el número 59 cuento primero en decenas hasta 60: 10, 20, 30, 40, 50 y 60. Luego, coloco el 59 antes del 60, porque el número 59 viene antes del 60.

Hoja de evaluación:

Estos son algunos ejemplos de hojas de evaluación:

EL CUADRADO DEL 100

1. Completa:

1		3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14		16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28		30
31	32	33		35	36	37	38	39	40
	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57		59	60
61	62	63	64	65		67	68	69	70
71	72	73	74	75	76		78	79	80
81	82		84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	

									0
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

									0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2. Escriba los números en los puntos:

									0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
			*						20
		*							30
					*				40
						*			50
			*						60
*									70
				*					80
*									90
						*			100

3. Escriba los siguientes números en su lugar:
19, 85, 23, 67, 91, 34, 52, 44, 68, 76

									0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
									20
									30
									40
									50
									60
									70
									80
									90
									100

EL CUADRADO DEL 100

1. Completa:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

									0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

2. Escriba los números en los puntos:

									0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
			14						20
		23							30
					37				40
						48			50
				55					60
61									70
					76				80
82									90
							99		100

3. Escriba los siguientes números en su lugar:
19, 85, 23, 67, 91, 34, 52, 44, 68, 76

									0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
									20
		23							30
			34						40
				44					50
		52							60
						67	68		70
					76				80
				85					90
91									100

EL DOMINÓ PARA LA MEMORIZACIÓN DE LAS TABLAS DE MULTIPLICAR

Objetivo:

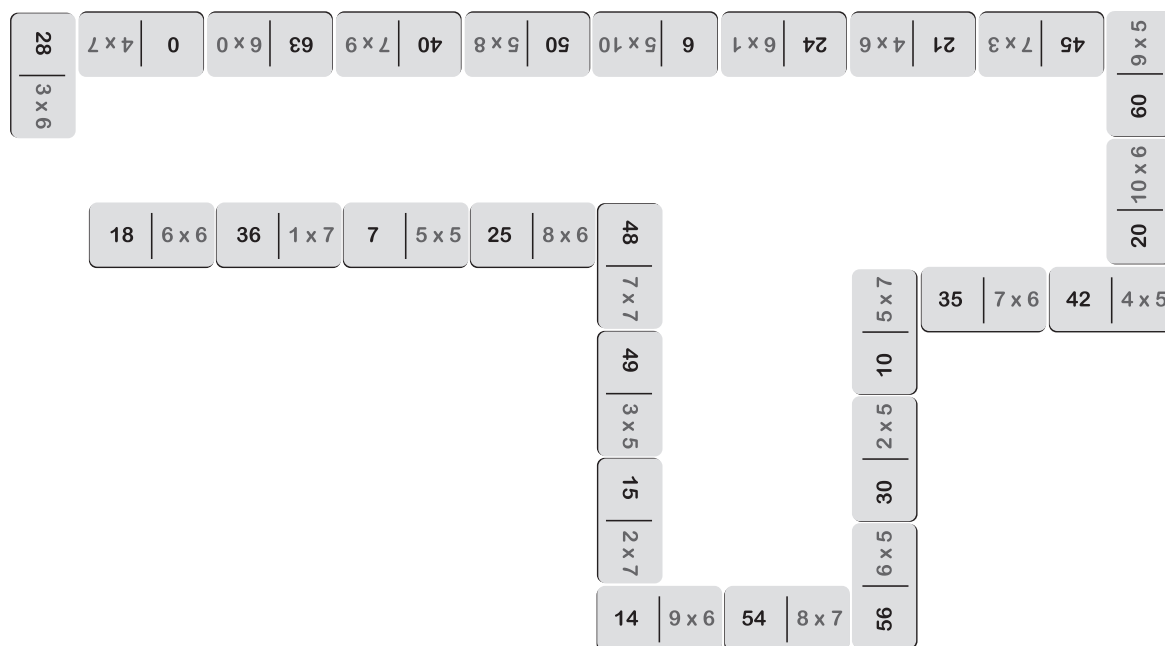
Aprender las tablas de multiplicar de manera lúdica.

Educación General Básica:

Tercer y cuarto años de Educación General Básica

La elaboración del juego:

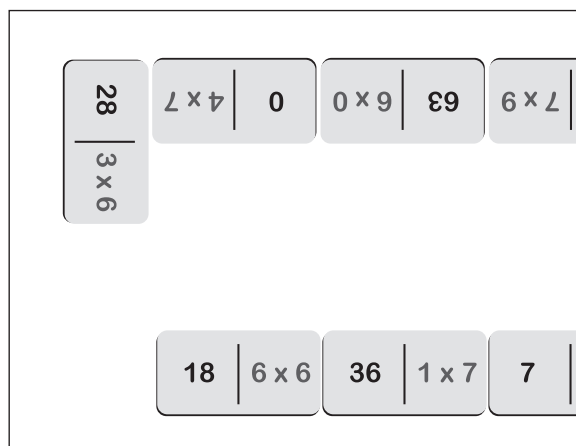
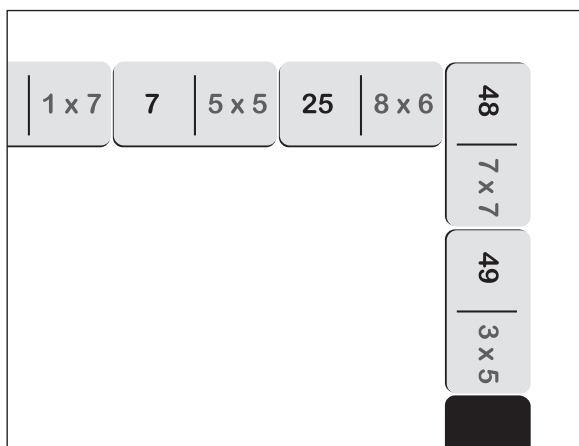
- Primero hay que decidir qué tablas de multiplicar se enseñaran. Según esto se elaborará el dominó. *Por ejemplo: Si se usan todas las tablas de multiplicación o algunas, solamente las tablas de multiplicación más difíciles (7-8-9), por familias (1-5-10, 2-4-8, 3-6-9), etc.*
- Después hay que decidir para cuántos estudiantes se quiere hacer el dominó y cuántas tarjetas se repartirá por estudiante. *Por ejemplo: 4 estudiantes - 6 tarjetas por cada uno; son 24 tarjetas más una para empezar. En total son 25 tarjetas.*
- Al lado izquierdo de la tarjeta se pone un resultado y a su lado derecho se coloca un ejercicio.
- Es importante que no se pongan dos ejercicios en el mismo dominó que posea igual resultado, los estudiantes podrían confundirse.
- También es importante que al final del juego se cierre el dominó; es decir que el resultado del último ejercicio esté en la primera tarjeta. Les puede servir a los estudiantes como un autocontrol, con la finalidad de saber si hicieron bien los cálculos o no.



Las reglas del juego:

Manera 1:

- Un estudiante divide todas las tarjetas entre sus compañeros, menos una tarjeta, la misma que colocará en el centro de mesa.



- Los estudiantes leen el ejercicio que está en la tarjeta en la mesa. El estudiante que tiene la tarjeta con el resultado puede ponerla junto a la primera tarjeta.
- Los estudiantes leen el ejercicio de la segunda tarjeta. El estudiante que posea la tarjeta con el resultado puede colocarla al lado de la segunda tarjeta, etc.
- El estudiante que termina primero todas sus tarjetas es el ganador del juego.
- El juego se termina cuando todos los estudiantes terminen con todas sus tarjetas.

Manera 2:

- Cada estudiante recibe tres tarjetas. El resto de las tarjetas se las ubica boca abajo en la mesa.
- El estudiante que empieza pone una de sus tarjetas sobre la mesa.
- Quien lo sigue lee el ejercicio que está en la tarjeta sobre la mesa y mira sus tarjetas para ver si tiene el resultado. De ser así, coloca la tarjeta en la mesa al lado de la otra. De lo contrario, toma una tarjeta del montón. Si el resultado está en la tarjeta que tomó del montón, puede ponerla sobre la mesa. Si no, tiene que guardarla. Le toca al estudiante siguiente.
- El estudiante que termina primero todas sus tarjetas es el ganador del juego.
- El juego se termina cuando todos los estudiantes hayan terminado con todas sus tarjetas.

Otras posibilidades:

- El juego de dominó también se puede usar para otros contenidos de matemáticas.

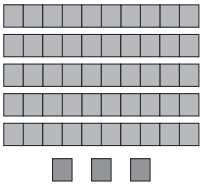
Por ejemplo:

- *Relación entre número y cantidad:* a un lado de la tarjeta se pone un número y al otro se ubica una cantidad de unidades y decenas ($53=5$ decenas y 3 unidades).

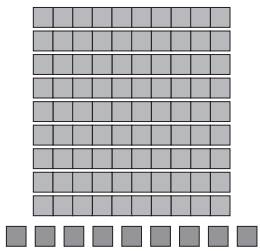
- *El reloj:* a un lado de la tarjeta se coloca un reloj que indica una hora y al otro se anota la hora en letras (son las cuatro en punto).

- Para la memorización de las tablas de multiplicación también se puede elaborar otros juegos didácticos, como: bingo, memoria, etc.

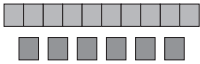
Bingo de las tablas de multiplicación.



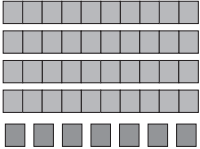
99



16



47



28



81

Dominó de relación entre número y cantidad.

9 x 10 = 90

9	6
6 x 10 = 60	15
2	90
10	7 x 5 = 35

20	10 X 10 = 100
0	3
70	3 X 10 = 30
7	40

25	1
5	8
4	8 X 10 = 80
50	9 X 5 = 45

Anexo 7:
Plan de clase

Plan de clase

Integrantes del grupo: _____

Fecha: _____

- *Meta concepto.*- Describa el contenido que va a tratar en la clase.
- *Metas de comprensión.*- Describa los objetivos que plantea alcanzar con su clase, incluyendo el nivel de pensamiento al que usted llegará.
- *Desempeños de comprensión.*- Describa las actividades que lo llevarán a cumplir esos objetivos.
- *Criterios de evaluación.*- Identifique los criterios de evaluación que aplicará para sus estudiantes y el proceso de la clase. Incluya preguntas metacognitivas.

Anexo 8:

Ficha de observación en el aula

Ficha de observación en el aula

Grupo: _____ Fecha: _____

Tema de la clase: _____

I. Organización de la clase

1. ¿Qué propósito observó en la clase? _____

2. ¿Cómo comenzó la clase? (Hubo motivación, indicaciones, comentarios, etc.)

3. ¿Se realizó la revisión de conocimientos previos? _____

4. ¿Relacionó los conocimientos actuales con los vistos anteriormente?
_____5. ¿En qué forma organizó a los grupos para trabajar?
_____6. ¿Qué materiales usaron los estudiantes para desarrollar el taller?
_____7. ¿Cómo respondió a las preguntas de los estudiantes?
_____8. ¿Las explicaciones se basaron en fundamentos teóricos y/o conocimientos científicos?
_____9. ¿Cómo propició la participación en las presentaciones de las actividades plenarias durante los trabajos grupales o en el desarrollo de la clase?
_____10. ¿Qué comprensiones cree usted que se lograron y cómo lo evidencian?
_____11. ¿Se relacionaron los conocimientos de la materia con otras asignaturas? ¿Cuáles?

12. ¿Promueve el desarrollo de habilidades del pensamiento? _____

13. ¿Cuál fue el nivel del pensamiento al que se llegó? _____

14. ¿Realiza la metacognición de las habilidades planteadas? _____

15. ¿Hubo aplicación del tema a la vida diaria? _____

16. ¿Se logró un cierre coherente de la clase? _____

II. Actitudes y valores

Promueve o ayuda a desarrollar:

1. Una autoimagen y autoestima positivas.
2. La valoración del otro y el respeto a sus derechos.
3. La tolerancia ante el fracaso.
4. El desarrollo de una actitud crítica.

III. Ejercicio docente

Se observa en el docente que:

1. ¿Su voz es suficientemente alta, con las variaciones de tono y velocidad adecuadas?
2. ¿Su terminología es sencilla y explica los tecnicismos que introduce a su clase?
3. ¿Interactúa individual y grupalmente y fomenta la interacción entre los estudiantes?
4. ¿Proporciona seguridad al estudiante en una forma seria y cercana?
5. ¿Manifiesta entusiasmo e interés al impartir su clase?
6. ¿Muestra paciencia y disposición para atender las necesidades de los estudiantes?
7. ¿Su expresión corporal es congruente?
8. ¿Mantiene un adecuado contacto visual?
9. ¿Se desplaza naturalmente por el salón?
10. ¿Las instrucciones son claras y precisas?
11. ¿Corrige errores de manera adecuada?
12. ¿Responde satisfactoriamente las preguntas de los estudiantes y aclara dudas?

IV. Técnicas

Se observa que el docente utiliza técnicas como:

1. Elaboración de cuadros sinópticos, mapas conceptuales o mentales, etc.
2. Motivación mediante retos para solucionar problemas.
3. Investigación.
4. Uso adecuado del pizarrón.
5. Empleo de preguntas adecuadas (para sondeo, reafirmar, variar el estímulo, formuladas directa o indirectamente, a diferentes estudiantes).
6. Uso de técnicas grupales.

V. Evaluación

1. ¿Emplea criterios claros de evaluación?
2. ¿Hubo una guía de preguntas para el trabajo?
3. ¿Hubo autoevaluación por parte de los estudiantes sobre su trabajo?
4. ¿Registra participaciones orales?
5. ¿Registra participaciones escritas?

Bibliografía consultada



Abarca, Sadith P. "Método participativo de enseñanza por resolución de problemas". *La Heurística problem solving*. En: http://www.utchvirtual.net/recursos_didacticos/documentos/matematicas/meto-domatematicas.pdf. En línea: 5 de noviembre de 2009.

Alfaro, Cristinan. "Las ideas de Pólya en la resolución de problemas". *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*. Año 1. Número 1. 2006. En: <http://www.cimm.ucr.ac.cr/cuadernos/cuaderno1/Cuadernos%201%20c%202.pdf>. En línea: 10 de noviembre de 2009.

Avilés López, Luis Mario. *Taptana Nikichik*. En: http://www.educarecuador.ec/_upload/Taptana%20nikichik.pdf. En línea: 4 de noviembre de 2009.

Báez, María de Jesús, Hernández, Salvador. *El Uso de Material Concreto para la Enseñanza de la Matemática*. Taller de Matemáticas del Centro de Ciencia de Sinaloa, 2002.

Becker, Pietrocola, Sánchez. *Aritmética*. Red Olímpica, 2002.

Bravo Estevez, Ma. De Lourdes; Arrieta Gallástegui, José Joaquín. "Reflexiones sobre las funciones de las demostraciones matemáticas". *Revista Iberoamericana de Educación*. En: <http://www.rieoei.org/deloslectores/838Bravo>. En línea: 25 de octubre de 2009.

Cabanne, Nora. *Didáctica de la Matemática*. Segunda edición. Editorial Bonum. Buenos Aires, 2007.

Deulofeu Piquet, Jordi. *Números*. G.P.P., 1998.

Felps, Barry C., "An Old Card Trick Revisited", *The Mathematics Teacher*, 1976.

Jolie, Anneleen. "Recomendaciones metodológicas en dos contenidos específicos: el cuadrado del 100 y dominó para las tablas de multiplicación". *Documentos consultoría en Matemática de la VVOB para el Ministerio de Educación del Ecuador*, 2009.

Miller, Heeren y Hornsby. *Matemática: razonamiento y aplicaciones*, octava edición, Editorial Pearson. 1999.

Neira, Ochoa, Bautista y Herrera. *Matemática en construcción 7*, segunda edición. Editorial Oxford University Press, 2002.

Pettorezzo Anthony, Byrkit Donald. *Introducción a la teoría de los números*. Editorial Prentice Hall, 1972.

Polya, George. *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas, 1997.

Redescolar. "La noción de orden en las matemáticas". En: http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/orden/matecl1.htm. En línea: 16 de noviembre de 2009.

Rodríguez Santos, Alberto. "El Ojo de Horus". En: <http://www.epsilon.com/paginas/thistorias1.html#historias-ojohorus>. En línea: 25 de octubre de 2008.

Ruiz Arango, Isidora. *Aritmética Contemporánea: teoría de los número*, primera edición. Editorial San Marcos, 1999.

Stacey, Kare; Groves, Susie. *Resolver problemas: estrategias. Unidades para desarrollar el razonamiento matemático*. Narcea, S.A. Ediciones. Madrid, Segunda Edición, 2001.

Stewart James y otros, Rodrigo Hernández y Constanza Sanmiguel. *Introducción al cálculo*. Editorial Thompson, 2007.

Zemelman, Steven; Daniels, Harvey y Hyde, Arthur. *Best Practice: New Standards for Teaching and Learning in America's Schools*. Editorial Hinemann. Segunda edición, 1998. Traducción al español realizada por EDUTEKA. En: <http://www.eduteka.org/MejoresPracticas.php>. En línea: 20 de septiembre de 2003.

Carulla Cristina, Margarita de Meza. "Currículo de matemáticas de la Alianza Educativa". En Ordóñez Claudia (Directora), *Currículo Alianza Educativa*, CIFE, Centro de investigación y Formación en Educación, 2003.

Bibliografía sugerida



- Alsina, Claudia y De Guzmán Ozamiz, Miguel. *Los matemáticos no son gente seria*. Rubes Editorial S.L. 128.
- De Guzmán Ozamiz, Miguel. *Para pensar mejor: Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos, segunda edición*, Pirámide, 2006.
- De Guzmán Ozamiz, Miguel. *Aventuras matemáticas*. Pirámide, 2006.
- Guzmán Ozamiz, Miguel de y Gamboa, José Mauel (Dir). *Cómo hablar, demostrar y resolver en matemáticas*. Grupo Anaya, 2003.
- Oliveros, Eladio. *Metodología de la enseñanza de las Matemáticas*. Editorial Santillana, 2002.
- Oliveros, Eladio. *Textos de Geometría básica Tomos I, II, III, IV*. Grupo Editorial AGFEM, 2003.
- Oliveros, Eladio. *Mi mundo geométrico*. Grupo Editorial AGFEM, 2005.
- Neira, Ochoa, Bautista y Herrera. *Matemática en construcción 7*, segunda edición, Editorial Oxford University Press, 2002.
- Neira, Ochoa, Bautista y Herrera. *Matemática en construcción 6*, segunda edición, Editorial Oxford University Press, 2002.
- Neira, Ochoa, Bautista y Herrera. *Matemática en construcción 5*, segunda edición, Editorial Oxford University Press, 2002.
- Neira, Ochoa, Bautista y Herrera. *Matemática en construcción 4*, segunda edición, Editorial Oxford University Press, 2002.
- Neira, Ochoa, Bautista y Herrera. *Matemática en construcción 3*, segunda edición, Editorial Oxford University Press, 2002.
- Neira, Ochoa, Bautista y Herrera. *Matemática en construcción 2*, segunda edición, Editorial Oxford University Press, 2002.
- Pólya George y Foreword by John H. Conway. *Cómo plantear y resolver problemas (How to solve it)*. Princeton University Press. 2004.
- Pólya George, *Matemáticas y razonamiento plausible. Volumen I: Inducción y analogía en Matemáticas*. Princeton University Press, 2004.
- Pólya George, "Matemáticas y razonamiento plausible". En: *Patrones de inferencia plausible, Vol. II*, Princeton University Press, 2004.
- Rencoret, María del Carmen. *Simón y las matemáticas*. Editorial Andrés Bello, 1996.
- Rencoret, María del Carmen. *Simón y los números*. Editorial Andrés Bello, 1998.
- Rencoret, María del Carmen. *Simón enseña a pensar*. Editorial Andrés Bello, 1987.
- Rencoret, María del Carmen. *Simón mi amigo*. Editorial Andrés Bello, 1998.
- Rencoret, María del Carmen. *Simón escribe los numerales*. Editorial Andrés Bello, 1991.
- Rencoret, María del Carmen. *Simón apresta a escribir numerales*. Editorial Andrés Bello, 1993.
- Stewart, James, Hernández, Rodrigo y Sanmiguel, Constanza. *Introducción al cálculo*. Editorial Thomson, 2007.



ISBN 978-9978-92-988-9



Ministerio de Educación

Educamos para tener Patria

www.educacion.gob.ec



Información: 1800 33 82 22 o info@educacion.gob.ec

