MATEMÁTICA 9

De acuerdo al nuevo currículo de la Educación General Básica

GUÍA PARA DOCENTES

DISTRIBUCIÓN GRATUITA - PROHIBIDA LA VENTA

PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA
Rafael Correa Delgado

MINISTRA DE EDUCACIÓN
Gloria Vidal Illingworth

VICEMINISTRO DE EDUCACIÓN
Pablo Cevallos Estarellas

SUBSECRETARIA DE CALIDAD EDUCATIVA
Alba Toledo Delgado

GRUPO EDEBÉ
Proyecto: Matemáticas 1,2,3 y 4
Educación Secundaria Obligatoria

DIRECCIÓN GENERAL
Antonio Garrido González

DIRECCIÓN EDITORIAL
José Luis Gómez Cutillas

DIRECCIÓN DE EDICIÓN
DE EDUCACIÓN SECUNDARIA
José Francisco Vílchez Román

DIRECCIÓN PEDAGÓGICA
Santiago Centelles Cervera

DIRECCIÓN DE PRODUCCIÓN
Juan López Navarro

EQUIPO DE EDICIÓN GRUPO EDEBÉ
© Grupo edebé, 2008
Paseo San Juan Bosco, 62
08017 Barcelona
www.edebe.com

En alianza con
EDITORIAL DON BOSCO
OBRAS SALESIANAS DE COMUNICACIÓN

GERENTE GENERAL
Marcelo Mejía Morales

DIRECCIÓN EDITORIAL
María Alexandra Prócel Alarcón

ADAPTACIÓN Y EDICIÓN DE CONTENIDOS
Equipo Editorial Don Bosco
Humberto Buitrón A.

CREACIÓN DE CONTENIDOS NUEVOS
Marcia Peña Andrade
Saúl Serrano Aguirre
Lorena Valladares Perugachi

REVISIÓN DE ESTILO
Hernán Hermosa Mantilla
Isabel Luna Riofrío
Pablo Larreátegui Plaza

COORDINACIÓN GRÁFICA
Y REDIAGRAMACIÓN EDITORIAL
Pamela Cueva Villavicencio

DIAGRAMACIÓN DE PÁGINAS NUEVAS
Susana Zurita Becerra
Franklin Ramírez Torres
Patricio Llivicura Piedra
Freddy López Canelos
Erika Delgado Chávez
Sofía Vergara Anda

ILUSTRACIÓN DE PORTADA
Eduardo Delgado Padilla
Darwin Parra Ojeda

MINISTERIO DE EDUCACIÓN DEL ECUADOR
Primera edición, Mayo 2011
Quito – Ecuador

Impreso por: **EDITOGRAN S.A.**

Presentación

Los textos **Matemática 8, 9 y 10** están orientados a trabajar, de manera progresiva, distintas destrezas con criterios de desempeño, a partir de situaciones de aprendizaje-enseñanza que exigen conocimientos, razonamientos y aplicaciones en la práctica.

La estructura metodológica se fundamenta en el aprendizaje significativo, siempre dentro de un enfoque globalizador e interdisciplinar, que permita a los y las estudiantes adoptar progresivamente métodos y estrategias matemáticos, a la par de valores como la equidad etaria, la democracia y el respeto a la naturaleza, al ser humano, a la sociedad y a las culturas.

Los textos buscan potenciar actitudes y hábitos de trabajo; desarrollar la autonomía personal para construir relaciones interpersonales dignas; afianzar un comportamiento participativo y de respeto a las diferencias, valorar la importancia de las herramientas tecnológicas y de la ciencia en la vida cotidiana y fomentar un espíritu crítico y reflexivo.

Persiguen un triple objetivo:

Formativo. Contribuir al desarrollo de las capacidades cognitivas abstractas y formales de razonamiento, deducción y análisis que permiten construir una visión alternativa de la realidad, a través del desarrollo de modelos matemáticos. Lo anterior se encamina a cubrir las macrodestrezas de comprensión de conceptos y comprensión de procesos.

Funcional. Desarrollar un conjunto de procedimientos, estrategias de resolución de problemas y técnicas de cálculo que permiten solucionar problemas de la vida cotidiana y sistematizar procesos de producción, es decir, se enfoca a la macrodestreza de aplicación de conocimientos.

Instrumental. Por una parte, interpretar hechos de la vida cotidiana y, por otra, expresar y comunicar los conocimientos matemáticos en otros ámbitos del aprendizaje. Se vincula con la macrodestreza de aprender a aprender.

Metodología

- De acuerdo con la propuesta para el área de Matemática del nuevo documento de Actualización y Fortalecimiento Curricular de la Educación General Básica, los textos de Matemática de 2.º a 10.º años trabajan los conocimientos en módulos, es decir, integrando los bloques curriculares matemáticos (Relaciones y Funciones, Estadística y Probabilidad, Numérico, Geométrico, de Medida) para comprender la fuerte relación que guardan entre sí. En este sentido, en cada módulo de los textos se relacionan, al menos, dos bloques curriculares matemáticos. Los procedimientos que se aprenden y se utilizan facilitan esta interrelación.

- El proceso de aprendizaje recurre inicialmente a métodos inductivos que parten siempre del entorno conocido por los estudiantes.

- La manipulación y la experimentación son instrumentos básicos para el conocimiento y dominio de conceptos y técnicas de trabajo necesarios en matemáticas.

- Los métodos deductivos y el uso de lenguajes abstractos se convierten en un punto de llegada y en la culminación del aprendizaje.

- **Actividad inicial**

  Plantea una actividad relacionada con la vida cotidiana, a través de la cual se pueden inferir los conocimientos que se trabajarán en el módulo. El estudiante intentará resolverla antes de comenzar con el aprendizaje, utilizando las estrategias que conozca hasta ese momento, ya que esto le permitirá tener conciencia de sus capacidades y limitaciones. En este sentido, es un reto de motivación para los nuevos conocimientos.

- **Prerrequisitos**

  Activación de conocimientos previos, tanto de conceptos como de procedimientos para el estudio del módulo. Se sugieren actividades de evaluación diagnóstica.

- **Cómo resolver problemas**

  Esta sección es de gran ayuda para los docentes y para los estudiantes, ya que fomenta el autoaprendizaje y permite adquirir herramientas para la resolución de problemas. Aunque se enfoca al ámbito matemático, la metodología puede ser aplicada en cualquier área o tipo de problema.

- **En resumen**

  Síntesis de los principales conocimientos de la unidad y un esquema gráfico que muestra la relación entre estos.

- **Ejercicios y problemas integradores**

  Sección en la que se desarrolla un problema que integra los conocimientos que son parte de los bloques curriculares trabajados en el módulo. Se sigue un método para la resolución de problemas, que permite llegar al resultado. Al finalizar, se plantea un problema de características similares que deberá ser resuelto en forma autónoma o en grupo por los estudiantes.

- **Ejercicios y problemas**

  Una vez finalizada la comprensión de conceptos y procesos, se presenta esta sección en la que se aplican los conocimientos. La resolución de ejercicios y problemas se convierte en un indicador para los docentes sobre el avance logrado o de la necesidad de refuerzo.

- **Demuestra tu ingenio**

  Plantea actividades en donde los estudiantes pondrán a prueba su razonamiento y lógica matemática y aplicar diferentes procedimientos y estrategias para resolver acertijos, enigmas, juegos, problemas…

- **Buen Vivir**

  Sección en la que se articulan los principios fundamentales del Buen Vivir con aspectos de la realidad de nuestro país. Busca motivar la reflexión, la toma de decisiones y posterior ejecución de acciones positivas a favor del ambiente, de la sociedad y de las relaciones democráticas y para la paz.

  Al inicio de cada módulo se muestra un artículo de la Constitución de la República del Ecuador relacionado con el eje elegido y al finalizar el módulo se desarrolla el tema con profundidad.

- **Autoevaluación y coevaluación**

  Permite comprobar la adquisición de conocimientos básicos propuestos y, en consecuencia, la asimilación de las destrezas con criterios de desempeño previstos para cada módulo.

- **Sección de historia**
  Una reseña de la evolución histórica de los conocimientos que se aprenden en el módulo.

- **Crónica matemática**
  Conjunto de noticias, curiosidades, anécdotas relacionadas con los conocimientos del módulo.

- Adicionalmente, al interior de cada módulo, se utilizan estrategias relacionadas con el cálculo mental, el uso de la calculadora, el uso de las TIC, el trabajo grupal, entre otras.

Resultados esperados con el uso de los textos Matemática 8, 9 y 10

Se busca una formación integral de los estudiantes, mediante el desarrollo de:

- Destrezas matemáticas.
- Destrezas de comunicación.
- Destrezas de interacción interpersonales.
- Destrezas de interacción con el mundo físico.
- Destrezas para el tratamiento de la información.
- Destrezas para la comprensión del mundo digital.
- Valores sociales y ciudadanos.
- Valores culturales y artísticos.
- Autonomía e iniciativa personal.
- Autoevaluación y evaluación conjunta.
- Capacidad de aprender a aprender.

Estrategias motivacionales para la enseñanza de la matemática

Según Good y Brophy (1998), los docentes en el proceso de enseñanza deben lograr seis objetivos motivacionales:

1. Crear un ambiente de aprendizaje favorable en el aula para minimizar la ansiedad haciendo que los alumnos logren un mejor desempeño.

2. Los docentes necesitan estimular la motivación para lograr aprender en conexión con contenidos o actividades específicas proyectando entusiasmo, induciendo curiosidad, disonancia, formulando objetivos de aprendizaje y proporcionando retroalimentación informativa que ayude al alumno a aprender con conciencia, sensatez y eficacia.

3. El educador debe discutir con los alumnos la importancia e interés de los objetivos impartidos, relacionándolos con el quehacer diario, incentivándolos hacia la búsqueda de nuevas informaciones en libros, Internet, videos, programas de televisión en donde se traten temas actuales que se relacionen con la asignatura.

4. Explicar y sugerir al estudiante que se espera que cada uno de ellos disfrute el aprendizaje.

5. Ejecutar las evaluaciones, no como una forma de control, sino como medio de comprobar el progreso de cada alumno.

6. Ayudar al estudiante a adquirir una mayor conciencia de sus procesos y diferencias referente al aprendizaje, mediante actividades de reflexión, estimulando la conciencia metacognitiva de los alumnos.

En virtud de lo señalado, el docente puede alcanzar una enseñanza eficaz. Debe poner en práctica su creatividad para diversificar la enseñanza con un poco de imaginación los trabajos de pupitre rutinarios los puede transformar en actividades desafiantes para el alumno.

Módulo 1 Bloques: Numérico. Estadística y probabilidad

Números racionales
Medidas de tendencia central

Objetivo del módulo

- Leer, escribir, representar, ordenar, comparar números racionales, resolver operaciones combinadas de adición, sustracción, multiplicación y división exacta; simplificar expresiones de números racionales con la aplicación de las reglas de potenciación y de radicación; efectuar aproximaciones de números decimales y calcular el error cometido, reconocer y valorar la utilidad de las fracciones y decimales para resolver situaciones de la vida cotidiana; calcular la media, mediana y moda de un conjunto de datos estadísticos contextualizados en problemas pertinentes.

DCD Destrezas con criterios de desempeño

- Leer y escribir números racionales de acuerdo con su definición.
- Representar números racionales en notación decimal y fraccionaria.
- Ordenar y comparar números racionales.
- Resolver operaciones combinadas de adición, sustracción, multiplicación y división exacta con números racionales.
- Simplificar expresiones de números racionales con la aplicación de las reglas de potenciación y de radicación.
- Efectuar aproximaciones de números decimales y calcular el error cometido.
- Calcular la media, mediana y moda de un conjunto de datos estadísticos contextualizados en problemas pertinentes.
- Reconocer y valorar la utilidad de las fracciones y decimales para resolver situaciones de la vida cotidiana.

Estrategias metodológicas

Relacionada con la DCD: **Resolver operaciones combinadas de adición, sustracción, multiplicación y división exacta con números racionales**

Para la activación de conocimientos previos

- Previamente, defina lo qué es un número racional: aquel que se puede expresar como cociente de dos números enteros.

$\mathbb{Q} = \{ x / x = \frac{a}{b}$; donde a, b, $\in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0 \}$

El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales incluye a los números enteros; también se los conoce como números fraccionarios. Todo número entero es racional, pues se puede expresar como cociente de enteros, el mismo número para la unidad: $a = \frac{a}{1}$.

- Refuerce el hecho de que se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir (salvo para cero) y el resultado de todas esas operaciones entre dos números racionales es siempre otro número racional, pues estas operaciones son cerradas en el conjunto de los números racionales cumplen con la propiedad de clausura o clasurativa.
- Recuerde que la ley de signos para la multiplicación (división) opera números y no solo signos:

$(+a) \cdot (+b) = +c$; $(-a) \cdot (-b) = +c$; $(+a) \cdot (-b) = -c$; $(-a) \cdot (+b) = -c$

Donde a, b y c números racionales positivos.

- Es importante también trabajar fracciones equivalentes, ampliación y simplificación, los opuestos y los inversos de fracciones.

Para la construcción del conocimiento

- En general, suprimir signos de agrupación presenta dificultades en el trabajo de los estudiantes, por lo cual es importante insistir en que se cumplan las siguientes normas: cuando una expresión está agrupada mediante un paréntesis y este se encuentra precedido de un signo positivo se elimina el paréntesis sin modificar a los términos de la expresión; si el paréntesis está antecedido por un signo menos, se lo suprime cambiando cada uno de los términos por sus opuestos. Proponga la resolución de expresiones usando una tabla como la que se muestra a continuación.

Ejemplos:

Expresión algebraica con agrupaciones	Expresión algebraica sin agrupaciones
$\frac{7}{9}+\left(\frac{1}{2}-4\right)$	$\frac{7}{9}+\frac{1}{2}-4$
$8-\left[4+\left(\frac{2}{3}-8\right)\right]$	$8-\left[4+\frac{2}{3}-8\right]$ $8-4-\frac{2}{3}+8$

Para la aplicación del conocimiento

Sugerimos utilizar ejercicios del siguiente estilo:

1) El producto de dos números racionales es 7/5, si un factor es 2/3, ¿cuál es el otro factor?

A) 21/10 B) 11/15 C) 31/15 D) 14/15

2) Si a un rectángulo tiene un determinado ancho y (7/9) m de largo, ¿cómo cambia el área al duplicar su ancho?

A) Disminuye a la mitad B) Es 2/3 mayor

C) Se duplica D) Disminuye 2/3

3) Efectúa en el caso de k reemplázalo por un dígito y resuelve

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{4}}} \qquad k-\cfrac{1}{k-\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{k}}}$$

Para la evaluación

- El siguiente es un ejemplo de una ronda de resolución de ejercicios:

a) $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\div\left(\frac{2}{6}\div\frac{1}{5}\right)=$

b) $\frac{2}{3}\div\left[5\div\left(\frac{2}{4}+1\right)-3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\right]=$

c) $\dfrac{\left(2-\frac{1}{5}\right)}{\left(3-\frac{2}{9}\right)}\div\dfrac{\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{4}-\frac{2}{7}\div\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\div\frac{1}{5}\right)}-5\frac{1}{7}=$

- Pida a los estudiantes conformar grupos de tres, indique que en conjunto resuelvan cada uno de los ejercicios planteados en una misma hoja. Solicite al grupo que planteen tres ejercicios similares a los anteriores, cada uno en hojas separadas y que se dividan uno por integrante, luego que cada uno realice un solo paso en la resolución y que intercambien entre si los procesos en cada paso hasta obtener la respuesta.

Relacionada con la DCD: **Calcular la media, mediana y moda de un conjunto de datos estadísticos contextualizados en problemas pertinentes.**

Para la activación de conocimientos previos

Repase los procedimientos que permiten expresar un número racional en forma decimal y en tanto por ciento, lo que permite representar un sector circular utilizando grados y décimas de grados. Es posible que en esta destreza por primera vez se use subíndices; es necesario explicar a los alumnos que utilizarán esta forma de lenguaje en muchas situaciones y en diferentes áreas, como por ejemplo para expresar un cambio de temperatura entre dos instantes: temperatura inicial, Ti, y temperatura final, Tf.
Presente la siguiente tabla:

Índice i	**Número de hijos por familia n_i**	**Número de familias f_i**	**Porcentaje %**	**Ángulo central °**
1	0	2	10	36
2	1	5	25	90
3	2	8	40	144
4	3	4	20	72
5	5	1	5	18
	Total	20	100	360

Realice los siguientes cuestionamientos:
¿Qué información existe?, ¿Cómo se organizó la información?, ¿Qué cálculos se realizaron? De ser el caso, describa cada elemento de la tabla. Se puede trabajar con la información de la tabla para representa gráficamente los porcentajes usando diagramas circulares. Además, puede usarse la información para calcular la media aritmética y analizar la información que esta nos proporciona.
Muestre cómo se puede realizar el cálculo de la media arimética a partir de la tabla de frecuencias, esto prepara el camino para que, en cursos posteriores, utilicen las tablas para el cálculo de las medidas, tanto de tendencia central como de dispersión.

Para la construcción del conocimiento

- Proponga una investigación en periódicos, revistas usadas, libros, etc., con diversos tipos de representaciones estadísticas. Este material, con la información que consta en el texto del estudiante, deben identificar cada tipo de conocimiento, reconocer los elementos y características de cada uno de ellos.
- Haga notar la necesidad de conocer parámetros estadísticos. Para esto, proponga situaciones que permitan reconocer las ventajas y desventajas que presenta el uso de cada una de ellos. Por ejemplo: si usted es un productor de ropa, qué estadígrafo utilizaría para proyectar sus nuevos productos; en este caso proponga la posibilidad de usar la media arimética, la mediana o la moda. Ejemplos similares deben usarse para trabajar con la media y con la mediana. Es muy importante que los estudiantes vean la aplicación de la estadística en la vida cotidiana. Se aconseja que el profesor ponga ejemplos de situaciones en las que se requiere de la estadística; por ejemplo, el censo (recuerde que el más reciente fue en el 2010 y sus resultados se levantaron oficialmente en 2011), el análisis de mercado para introducir un nuevo producto, el estudio del rating de sintonía de un programa, entre otros.
- Enfrente a los estudiantes situaciones familiares en las cuales apliquen sus conocimientos estadísticos, por ejemplo: sugiera revisar el resultado obtenido por un estudiante en una determinada materia, durante cuarto, quinto, sexto y séptimo años de EGB. Para esto, puede solicitar a sus estudiantes que lleven sus registros escolares para hacer la tarea. También puede utilizarse otras herramientas de fácil consecución como planillas de agua, luz, teléfono para mostrar estos parámetros. Resulta muy importante que durante la fase de construcción del conocimiento se planteen situaciones problema que deben ser resueltas de manera conjunta con el profesor. Así, se detectará las dificultades que generan los nuevos conceptos y se puede reforzar aquello que sea necesario.

Para la aplicación del conocimiento

- Para ampliar la construcción de gráficos estadísticos y su interpretación, el profesor/a puede proponer a los alumnos la siguiente actividad:
- Buscar información sobre la composición de la Asamblea Nacional.
- A partir de esos datos, los alumnos pueden elaborar los siguientes gráficos:

– Un diagrama de sectores con la distribución de asambleístas por partidos y agrupaciones políticas.

– Un gráfico estadístico con la distribución de los asambleistas de un determinado partido político.

- A partir de la información procesada a raíz del censo de noviembre de 2010, se pueden realizar analisis comparativos de pequeñas investigaciones que pueden realizar los estudiantes de aspectos que sean de su interés y que pueda realizarse en su entorno con los datos nacionales oficiales, para ello se puede acceder a la página www.inec.gob.ec y de acuerdo a los diferentes aspectos evaluados, establecer conclusiones y recomendaciones para mejorar la toma de muestras que permitan mejorar las aproximaciones que seguramente se obtendran. En láminas de cartulina, tamaño A4 se presentarán los resultados de las investigaciones y se las expondrá en el salón.

Para la evaluación

- Proponga a los alumnos que mediante el empleo de un programa de software libre o propietario dedicado a la creación y visualización de presentaciones, elaboren diapositivas (donde integren texto, imagen, sonido, vídeo...) sobre media, mediana y moda, su definición, fórmulas empleadas para su determinación y ejemplificación que permitan reforzar el conocimiento adquirido y que será expuesto al resto de compañeros; los cuales también emitirán sus opiniones sobre el trabajo de cada grupo. Recomendaciones, felicitaciones, críticas constructivas acerca de la forma elegida para mostrar, la exposición de la información, la creatividad de su diseño, complejidad en la elaboración.
- Pida a sus estudiantes que analicen la siguiente información tomada del Instituto Nacional de Estadísticas y Censo (http:www.inec.gob.ec) sobre el costo de la canasta familiar para el análisis de la relación entre remuneración-inflación. Representen sus análisis en diagramas o gráficos estadísticos y establezcan media, mediana y moda.

NACIONAL

CANASTA FAMILIAR BÁSICA

PARA EL ANÁLISIS DE LA RELACION INFLACIÓN - REMUNERACIÓN

Se considera la estructura fija del gasto en bienes y servicios establecida en noviembre de 1982 para un hogar tipo de cuatro miembros con 1,60 perceptores de remuneración básica unificada.

BASE: Noviembre 1982 = 100

MARZO 2011

No. Orden	Grupos y Subgrupos de Consumo	Encarecimiento Mensual	Costo Actual en Dólares	Distribución del ingreso actual	Restricción en el consumo	
					En Dólares	% del Costo
1	**TOTAL**	**0.11**	**551.87**	**492.80**	**59.07**	**10.70**
2	**ALIMENTOS Y BEBIDAS**	**0.28**	**196.97**	**180.17**	**16.80**	**3.04**
3	Cereales y derivados	0.10	43.32	42.92	0.39	0.07
4	Carne y preparaciones	-0.43	30.19	29.13	1.06	0.19
5	Pescados y mariscos	5.28	9.00	7.42	1.58	0.29
6	Grasas y aceites comestibles	4.76	7.77	7.17	0.60	0.11
7	Leche, productos lácteos y huevos	0.28	29.55	28.35	1.20	0.22
8	Verduras frescas	1.45	12.93	7.40	5.53	1.00
9	Tubérculos y derivados	-2.05	13.12	12.79	0.33	0.06
10	Leguminosas y derivados	-2.09	3.88	1.58	2.30	0.42
11	Frutas frescas	-0.25	10.72	8.42	2.30	0.42
12	Azúcar, sal y condimentos	-1.36	10.96	10.87	0.08	0.02
13	Café, té y bebidas gaseosas	1.23	6.24	5.44	0.80	0.14
14	Otros productos alimenticios	-0.10	2.08	1.64	0.44	0.08
15	Alim. y beb. consumidas fuera del	0.15	17.21	17.02	0.19	0.03
14	Otros productos alimenticios	-0.10	2.08	1.64	0.44	0.08
15	Alim. y beb. consumidas fuera del	0.15	17.21	17.02	0.19	0.03

La fracción generatriz

Es la fracción irreducible de la que procede un número decimal limitado, periódico puro o periódico mixto. Para calcular la fracción generatriz:

De un número decimal limitado

- Llamamos *x* al número decimal.
- Multiplicamos la expresión de *x* por la potencia de 10 necesaria (según el número de cifras decimales) para eliminar la coma.
- Despejamos *x* y simplificamos la fracción.

Ejemplo: 2,75

$$x = 2{,}75$$

$$100\,x = 275$$

$$x = \frac{275}{100} = \frac{11}{4}$$

De un número decimal ilimitado periódico puro

- Llamamos *x* al número decimal.
- Multiplicamos la expresión de *x* por la potencia de 10 necesaria para que la coma quede justo después del primer período.
- A la expresión obtenida le restamos la expresión inicial.
- Despejamos *x* y simplificamos la fracción.

Ejemplo: $17{,}\overset{\frown}{8}$

$$\begin{cases} x = 17{,}888... \\ 10\,x = 178{,}888... \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} 10\,x = & 178{,}888... \\ -\ x = & -17{,}888... \\ \hline 9\,x = & 161 \end{array}$$

$$x = \frac{161}{9}$$

De un número decimal ilimitado periódico mixto

- Llamamos *x* al número decimal.
- En primer lugar, multiplicamos la expresión de *x* por la potencia de 10 necesaria para que la coma quede justo después del primer período.
- A continuación, multiplicamos la expresión de *x* por la potencia de 10 necesaria para que la coma quede justo antes del primer período.
- Restamos las dos expresiones obtenidas.
- Despejamos *x* y simplificamos la fracción.

$$x = 17{,}2\overset{\frown}{35} \Rightarrow \begin{cases} 10\,x = 172{,}3535... \\ 1\,000\,x = 17235{,}3535... \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} 1\,000\,x = & 17235{,}3535... \\ -\ 10\,x = & -\ 172{,}3535... \\ \hline 990\,x = & 17\,063 \end{array} \Rightarrow x = \frac{17\,063}{990}$$

Buen Vivir: Biodiversidad y ambiente sano

- Los alumnos/as realizarán diversas operaciones de forma aproximada que se relacionen con el ambiente. En ellos deben calcular los porcentajes de contaminación, estimar resultados en operaciones relacionadas con el tiempo atmosférico, la temperatura de la Tierra, etc. En relación con el tema de las áreas protegidas en nuestro país, motive un trabajo interrelacionado con las áreas de Estudios Sociales y Ciencias Naturales, ya que esto le permitirá llevar adelante una investigación en la que se encontrarán diversos datos numéricos (de números enteros y racionales). Ubicar espacialmente las zonas y valorar la enorme biodiversidad del país.
- Pídales que busquen lecturas relacionadas con el tema propuesto. Pueden ingresar a las páginas web http://www.fnatura.org/ o www.ambiente.gob.ec. Reflexionen sobre la información. Se recomienda seguir el siguiente esquema de trabajo:
- Lectura individual del texto.
- Comentario en mesa redonda o foro abierto en el aula.
- Conclusiones.
- Finalmente, motive a sus estudiantes para que se propongan un compromiso individual y lo lleven a cabo.
- Es importante que asuman la responsabilidad de defender los derechos de la naturaleza.

Bibliografía

http://www.mendomatica.mendoza.edu.ar/nro18/nrosracionales%20positivosEGB.pdf

http://www.vitutor.net/2/11/moda_media.html

http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/3eso/numeros/decimales/numerosdecimales.htm

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/B1_24_UNAM/index.htm

PARRA, C. y SAIZ, I., Didáctica de las matemáticas, aportes y reflexiones, Paidós, Buenos Aires, 2008.

PRADA, D., CELA, P., Matemáticas 4.° curso, Narcea Ediciones, España, 1971

SANTILLANA, ¿Cómo trabajar el área de Matemática?, Grupo Santillana S. A., Ecuador, 2010.

SPIEGEL, M., Estadística, McGraw Hill, México, 2000.

Refuerzo Operaciones con fracciones y decimales

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

A la hora de operar con fracciones, elegimos la fracción irreducible para agilitar los cálculos.

Recuerda, además, que para sumar o restar fracciones, estas han de tener el mismo denominador.

1. Efectúa gráficamente las operaciones indicadas en la figura 5 y completa esta oración.

   Para sumar o restar fracciones con el mismo denominador, se suman los .... y se deja el mismo ....

2. Completa los pasos que faltan para recordar cómo se suman fracciones de diferente denominador:

$$\frac{5}{12}+\frac{3}{20}$$

— Calculamos el m.c.m. de los denominadores: m.c.m. (12 y 20) = 60.

— Transformamos las dos fracciones en otras equivalentes con común denominador:

- Para hacerlo, dividimos el m.c.m. (60) por el denominador de la primera fracción (12) y multiplicamos el resultado por su numerador (5).

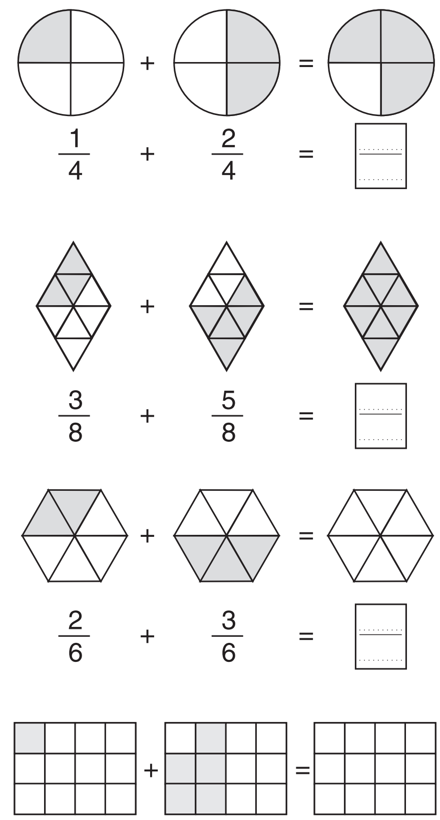
$$60 \div 12 = 5\,;5 \cdot 5 = 25 \quad ; \quad \frac{5}{12} = \frac{\dots\dots}{60}$$

- A continuación, dividimos el m.c.m. (60) por el denominador de la segunda fracción (20) y multiplicamos el resultado por su numerador (3).

$$60 \div 20 = 3\,;3 \cdot 3 = 9 \quad ; \quad \frac{3}{20} = \frac{\dots\dots}{60}$$

— Sumamos las fracciones obtenidas y simplificamos el resultado.

$$\frac{\dots\dots}{60}+\frac{\dots\dots}{60}=\frac{\dots\dots+\dots\dots}{60}=\frac{34}{60}\xrightarrow[\div 2]{\text{Simplificamos}}=\frac{\dots\dots}{30}$$



$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{\dots}{\dots}$$

$$\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=\frac{\dots}{\dots}$$

$$\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{\dots}{\dots}$$

$$\frac{1}{12}+\frac{5}{12}=\frac{\dots}{\dots}$$

Fig. 5.

3. Para restar dos fracciones de diferente denominador, las simplificaremos para obtener sus correspondientes fracciones irreducibles, las reduciremos a común denominador y las restaremos. Completa los pasos indicados en la figura 6 y los pasos indicados a continuación.

$$\frac{7}{21}-\frac{4}{10}\xrightarrow{\text{Simplificamos}}=\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\xrightarrow[\text{Común denominador}]{}=\frac{\dots\dots}{15}-\frac{\dots\dots}{15}=\frac{-1}{15}$$

m.c.d. (7 y 21) = 7	m.c.d. (4 y 10) = 2
7 ÷ 7 = 1	4 ÷ 2 = 2
21 ÷ 7 = 3	10 ÷ 2 = 5

m.c.m. (3 y 5) = 15

15 ÷ 3 = ... ; ...... ? 1 = ...

15 ÷ 5 = ... ; ...... ? 2 = ...

Fig. 6

4. Efectúa las siguientes operaciones.

   a) $\frac{2}{9}+\frac{1}{5}=\frac{\dots\dots}{45}+\frac{\dots\dots}{45}$ b) $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{\dots\dots}{12}-\frac{\dots\dots}{12}$

5. Calcula:

   a) 7,25 + 21,14 b) 12,72 – 10,25 c) 3,12 · 2,15 d) 7,14 ÷ 2,05

Refuerzo Variables y datos estadísticos

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

1. Pregunta a tus compañeros o compañeras los siguientes datos y completa la tabla. Fíjate en el ejemplo:

   «Laura tiene 13 años, tiene cabello castaño, mide 1,54 m y pesa 48 kg., vive en Cuenca, estudia en 9.º de EGB, le gusta jugar al básquetbol y su cantante favorita es Shakira.»

Nombre	Edad	Color del cabello	Estatura (m)	Peso (kg)	Residencia	Curso	Deporte preferido	Cantante favorito
Laura	13	Castaño	1,54	48	Cuenca	9.º EGB	Básquetbol	Shakira
Tú								
Compañero 1								
Compañero 2								
Compañero 3								

   Cada una de las características anteriores es una variable estadística.

2. Anota las características anteriores cuyos valores vienen representados por números.

   — Edad ....

   Estas características son variables estadísticas cuantitativas.

3. Anota las características cuyos valores no son numéricos.

   — ....

   Estas características son variables estadísticas cualitativas.

4. Escribe tres variables estadísticas cualitativas y tres cuantitativas, y pon ejemplos de los valores que puede tomar cada una de ellas.

5. Indica si las siguientes afirmaciones son correctas y corrige las incorrectas.

   a) Una variable estadística son los resultados de un estudio realizado en diferentes estados.
   b) El estado civil es una variable estadística cualitativa.
   c) Las marcas de auto más vendidas en el año 2007 es una variable estadística cuantitativa.

6. Completa la siguiente tabla.

Película	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
La amenaza fantasma	85	$\frac{85}{160} = 0{,}53$
Titanic		
Hombres de negro		
Indiferentes		

La amenaza fantasma:
85 alumnos

Titanic:
40 alumnos

Hombres de negro:
30 alumnos

Indiferentes:
5 alumnos

Fig. 1.

El número de veces que se repite un valor determinado de la variable estadística es su frecuencia ....

El resultado de dividir la frecuencia absoluta de un valor entre el número total de datos es la .... de dicho valor.

Ficha de evaluación

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

1. Halla la fracción irreducible equivalente a cada una de las siguientes fracciones.

a) $\frac{36}{8}$ b) $\frac{44}{11}$ c) $\frac{125}{5}$ d) $\frac{24}{14}$

2. Efectúa estas operaciones.

a) $\frac{3}{7}+\frac{2}{21}-\frac{1}{14}$ b) $\frac{2}{6}\div\frac{3}{7}$ c) $\frac{5}{3}\cdot\frac{-12}{7}+\frac{1}{2}\div\frac{2}{3}-\frac{5}{9}$ d) $\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$

3. Efectúa estas operaciones.

a) $1,\widehat{35}+2,\widehat{42}$ b) $4,8\widehat{2}-1,\widehat{3}$ c) $0,\widehat{26}+0,8\widehat{24}$ d) $7\cdot 5,2\widehat{4}$

4. Miguel ha completado las tres cuartas partes de su colección de cromos. La quinta parte de los cromos que le faltan son de motos y los otros 32 son de automóviles. Calcula el número de cromos que forman la colección de Miguel. (Haz un esquema del problema.)

5. Redondea los siguientes números hasta las centenas, y calcula el error absoluto que se comete con el redondeo.

a) 9,384 5 b) –3,456 2 c) –1,095 20 d) 11,000 34

6. Se ha preguntado a 25 alumnos de 9.º de EGB el número de libros que leen, en promedio, al año. Las respuestas han sido: 3, 2, 1, 4, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 3, 6, 3, 4, 5, 2, 2, 1, 3, 4, 2, 2, 1, 1, 3.

a) Organiza estos datos y construye la tabla de frecuencias absolutas y relativas.

b) Calcula la frecuencia relativa acumulada del valor 3. ¿Qué significado tiene esta frecuencia?

c) Representa los datos en un diagrama de barras y construye el polígono de frecuencias correspondiente.

7. Define media aritmética, moda y mediana de un grupo de datos. A continuación, escribe dos conjuntos estadísticos diferentes con más de cinco datos que tengan la misma media y la misma moda.

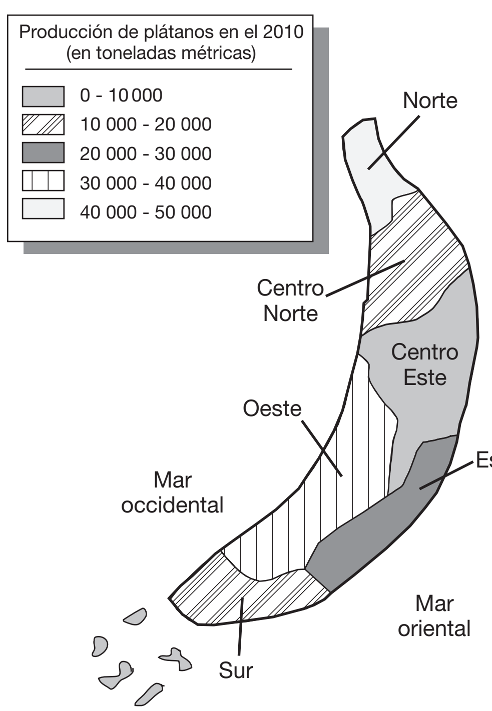
— Calcula la mediana del conjunto estadístico de la actividad 6.

8. Observa el cartograma de la figura y responde a las siguientes preguntas sobre la cosecha de plátanos en ese año en la República de Banania.

a) ¿En qué zona se ha conseguido la mejor cosecha? ¿En qué zona se ha dado la peor?

b) ¿Qué zonas han tenido una cosecha comprendida entre las 10 000 y las 20 000 toneladas métricas?

c) Sabiendo que el pasado año la cosecha total fue de 321 000 toneladas métricas, ¿cómo crees que ha ido la cosecha del año actual?



Ficha de evaluación

Solucionario

1. a) $\dfrac{9}{2}$; b) 4; c) 25; d) $\dfrac{12}{7}$

2. a) $\dfrac{18+4-3}{42}=\dfrac{19}{42}$

   b) $\dfrac{14}{18}=\dfrac{7}{9}$

   c) $\dfrac{-60}{-12}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{9}=\dfrac{-180+27-20}{36}=-\dfrac{173}{36}$

   d) $\dfrac{14}{15}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{14}{30}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{59}{30}$

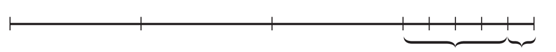
3. a) $1,35+2,42=\dfrac{134}{99}+\dfrac{240}{99}=\dfrac{374}{99}$

   b) $4,8\widehat{2}-1,\widehat{3}=\dfrac{434}{90}-\dfrac{12}{9}=\dfrac{314}{90}=\dfrac{157}{45}$

   c) $0,\widehat{26}+0,8\widehat{24}=\dfrac{26}{99}+\dfrac{816}{990}=\dfrac{1076}{990}=$

   $=\dfrac{538}{495}$

   d) $7\cdot 5,2\widehat{4}=7\cdot\dfrac{472}{90}=\dfrac{3\,304}{90}=\dfrac{1652}{45}$

4. 

   $32 \div 4 \cdot 5 \cdot 4 = 160$

   La colección consta de 160 cromos.

5. a) 9,38 error: 0,0045

   b) −3,46 error: 0,0038

   c) −1,1 error: 0,0048

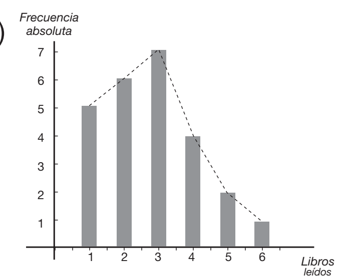
   d) 11 error: 0,00034

6. a)

Libros leídos	Recuento	Número
1	⧄	5
2	⧄ |	6
3	⧄ | |	7
4	☐	4
5	| |	2
6	|	1

Libros leídos	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
1	5	$\frac{5}{25}=0,2$
2	6	$\frac{6}{25}=0,24$
3	7	$\frac{7}{25}=0,28$
4	4	$\frac{4}{25}=0,16$
5	2	$\frac{2}{25}=0,08$
6	1	$\frac{1}{25}=0,04$

b) La frecuencia relativa acumulada del valor 3 es 0,72. Esto quiere decir que el 72 % de los alumnos de la clase ha leído 3 o menos libros.

c) 

7. La media aritmética de un conjunto de datos es la suma de los valores de los datos dividida por el número total de datos.
   La moda de un conjunto de datos es el valor de los datos que tiene mayor frecuencia absoluta.
   La mediana de un conjunto de datos, después ordenarlos de menor a mayor es:
   - El dato que ocupa el lugar central, si el número de datos es impar.
   - La media aritmética de los dos datos centrales, si el número de datos es impar.
     Respuesta sugerida:
     a) 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3.
     b) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5.
   - La mediana del conjunto Ω es 3.
8. **a)** En la zona Norte se ha conseguido mejor cosecha y en la zona Centro Este la peor. **b)** Centro Norte y Sur. **c)** Según el cartograma I producción de plátanos total oscila entre 110 000 y 170 000 toneladas métricas. Por tanto, la cosecha del año actual ha sido peor que la del año anterior.

Indicadores esenciales de evaluación

	Puede continuar	Necesita refuerzo
	% de alumnos/as	
• Aplica las operaciones con números reales y fraccionarios en la resolución de problemas.		
• Aplica correctamente los algoritmos de la suma, la resta, la multiplicación y la división de fracciones positivas y negativas. Efectúa operaciones combinadas con fracciones positivas y negativas.		
• Calcula media, mediana, moda y rango.		
• Comprende la diferencia entre variable cualitativa y cuantitativa.		

Módulo 2 **Bloques:** Numérico. Geométrico

Números irracionales
Perímetros y áreas de polígonos

Objetivos del módulo

- Aplicar las operaciones básicas en la resolución de problemas con números irracionales para desarrollar un pensamiento crítico.
- Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de triángulos rectángulos para el cálculo de perímetros y áreas.

DCD Destrezas con criterios de desempeño

- Leer y escribir números irracionales de acuerdo con su definición.
- Representar gráficamente números irracionales con el uso del teorema de Pitágoras.
- Ordenar, comparar y ubicar en la recta numérica números irracionales con el uso de la escala adecuada.
- Resolver operaciones combinadas de adición, sustracción, multiplicación y división exacta con números irracionales.
- Deducir las fórmulas para el cálculo de áreas de polígonos regulares por la descomposición en triángulos.
- Aplicar las fórmulas de áreas de polígonos regulares en la resolución de problemas.
- Utilizar el teorema de Pitágoras en la resolución de triángulos rectángulos.

Estrategias metodológicas

Relacionada con la DCD: **Resolver operaciones combinadas de adición, sustracción, multiplicación y división exacta con números irracionales.**

Para la activación de conocimientos previos

- Antes de iniciar este tema, puede ser conveniente revisar la relación entre los números decimales y los números racionales, haciendo hincapié en que todos los números decimales que pueden expresarse mediante un número racional son limitados o ilimitados pero periódicos. Así, puede pedirse el cálculo de la fracción generatriz de diversos números decimales (limitados, periódicos puros y periódicos mixtos) y la determinación de los números decimales correspondientes a diversos números racionales.
- Realice un repaso de la obtención de la fracción generatriz.
- Proponga ejemplos sencillos en los cuales se evidencie que se cumplen las propiedades de la suma y la potencia en el conjunto de los números racionales.

Para la construcción del conocimiento

- Busque ejercicios que combinen las operaciones estudiadas en el módulo. Resuelva con los estudiantes uno de los ejercicios justificando cada paso. Por ejemplo, en el ejercicio, deben evidenciarse las propiedades de las operaciones, la ley de los signos, las reglas para suprimir signos de agrupación, y la conversión de un número decimal periódico a fraccionario y algunos números irracionales.

Puede utilizar ejercicios como los siguientes:

a) $\left(\frac{5}{\sqrt{4}} \cdot \sqrt{6} + \sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{\frac{5}{36}} - 1,\widehat{3}$

b) $\left(\sqrt{\frac{5}{36}} \cdot 1,\widehat{4}\right) - \left(\frac{\sqrt{12}}{5} \cdot \sqrt{5}\right)^{7}$

Para la aplicación del conocimiento

- Anime a sus estudiantes a llevar adelante las actividades propuestas en el texto del alumno.
- Puede organizar grupos de estudiantes. Previamente, usted preparará unas tarjetas con el proceso de diversas operaciones combinadas. Cada grupo debe organizar el proceso de resolución del ejercicio que les corresponde.
- Solicite que intercambien, entre grupos, los ejercicios realizados y que justifiquen la organización del proceso propuesto.
- Realice una feria de ventas en el aula. Guíese por la actividad planteada al inicio del módulo. En la feria se comercializarán productos propios de su localidad y se realizarán diversas operaciones que usted proponga para ejercitar el trabajo con números irracionales.

Para la evaluación

- Forme grupos de trabajo
- Solicite a los estudiantes que planteen un ejercicio en el cual se combinen varias de las operaciones estudiadas.
- Previa la evaluación usted debe planificar para cada grupo condiciones que deben tener los ejercicios que se plantearán así como la forma de evaluación.

Ejemplo:

El ejercicio debe contener:	
Operaciones: suma, resta, multiplicación, división, potencia y radicación.	
Dos números irracionales y un decimal periódico.	
Paréntesis y corchetes.	
Evidenciar al menos una propiedad de la potenciación.	
Resolución del ejercicio argumentando los procesos.	

	Observaciones
Cumplen con todas las condiciones solicitadas.	
Aplican propiedades y leyes en la resolución del ejercicio.	
Las justificaciones tienen relación con los conocimientos desarrollados.	

- Forme grupos de tres o cuatro estudiantes. Entregue hojas con ejercicios a cada grupo. Determine un tiempo para la realización del trabajo. Observe cómo es el aporte de los integrantes, quiénes necesitan ayuda, quiénes pueden apoyar a otros compañeros.

Relacionada con la DCD: **Utilizar el teorema de Pitágoras en la resolución de triángulos rectángulos.**

Para la activación de conocimientos previos

- Para poder hallar aproximadamente el lado desconocido de un triángulo rectángulo es conveniente que recuerden previamente el cálculo de la raíz cuadrada de un número natural.

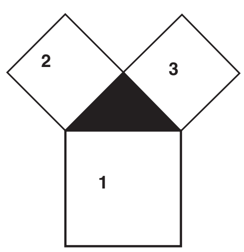
- Repase previamente con los estudiantes la definición de teorema. Se sugiere utilizar la siguiente: teorema. (Del lat. theorēma, y este del gr. θεώρημα). Proposición demostrable lógicamente partiendo de axiomas o de otros teoremas ya demostrados, mediante reglas de inferencia aceptadas. (Tomada de Real Academia de Lengua Española, versión en línea http://www.rae.es).

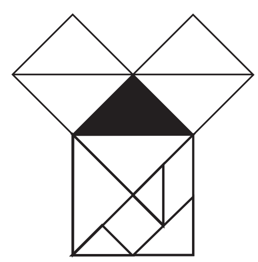
También es conveniente recordar la biografía de Pitágoras. Una de las dificultades con la Matemática es que los estudiantes no suelen establecer relaciones con otras áreas del saber. En este caso específico es muy importante que se logre comprender el pensamiento pitagórico y su influencia no solo en la Matemática, sino también en la Música, la Literatura, las Ciencias Políticas. Pida a sus estudiantes que formen parejas e investiguen en enciclopedias o Internet la vida y obra de este pensador clásico.

Se debe insistir en que el teorema de Pitágoras solo puede aplicarse a triángulos rectángulos. Con este fin es útil aplicar el recíproco del teorema de Pitágoras mediante actividades, como, por ejemplo: comprueba si el triángulo cuyos lados miden 12 cm, 16 cm y 20 cm es rectángulo.

Para la construcción del conocimiento

- Trabaje con varios tangrams para comprobar geométricamente la validez del teorema de Pitágoras por equivalencia entre áreas de figuras planas, en el caso particular del triángulo rectángulo isósceles.





- Observe la aplicación del teorema de Pitágoras al cálculo de longitudes en triángulos rectángulos.

- Plantee ejercicios sencillos para verificar la comprensión de los conceptos; por ejemplo:

1. Calcula la altura de un rectángulo cuya diagonal mide 4,8 cm y la base 4 cm.
2. El perímetro de un trapecio isósceles es de 110 m, las bases miden 40 y 30 m respectivamente. Calcula los lados no paralelos y el área.

- Se debe insistir en que el teorema de Pitágoras solo puede aplicarse a triángulos rectángulos. Con este fin es útil aplicar el recíproco del teorema de Pitágoras mediante actividades, como, por ejemplo: comprueba si el triángulo cuyos lados miden 12 cm, 16 cm y 20 cm es rectángulo.

Para la aplicación del conocimiento

Plantee los siguientes problemas:

- Tres números a, b y c forman una terna pitagórica si están relacionados por el teorema de Pitágoras, es decir, si $a^2 = b^2 + c^2$:

  ¿Es pitagórica la terna 30, 24, 18?

  Encuentra tres ternas pitagóricas diferentes formadas por números naturales comprendidos entre 1 y 100.

- Dado un triángulo de lados a, b y c, de los cuales a es el mayor, será acutángulo si $a^2 < b^2 + c^2$. Esto para demostrar que el teorema de Pitágoras también puede utilizarse para clasificar un triángulo en acutángulo, rectángulo u obtusángulo.

También plantee otros problemas de aplicación para que los estudiantes analicen los datos, los grafiquen y encuentren la respuesta. Este tipo de ejercicio será retomado para la evaluación:

- Se quiere construir una rampa que cubra una plataforma, desde un punto situado a 3,2 m de ella. La plataforma tiene 2,4 m de altura. ¿De qué longitud se construirá la rampa?
- Una antena de un televisor mide 15 cm y está sostenida por alambres: uno de estos mide 25 cm. ¿A qué distancia se fijará el otro alambre a partir de la base de la antena?
- Una escalera de 7,2 m de longitud está apoyada contra una pared, distando en su pie 4 m. Calcula la altura de la pared.
- Demuestra si el siguiente problema puede ser resuelto:

  Tienes un cubo cuya arista es igual a 3 cm. Su volumen es 27 cm^3 y este cubo puede ser cortado en 27 cubos pequeños. La arista de cada cubo pequeño es igual a 1 cm.

Para la evaluación

- Pida a sus estudiantes que elaboren una escalera a escala que cumpla las condiciones del ejemplo 10, página 67 del texto. A la vez que construyan otras tres de diferente tamaño y se planteen sus propios cuestionamientos y los resuelvan.

- Pida a sus estudiantes que analicen, discutan los siguientes enunciados y los comprueben con una aplicación del teorema de Pitágoras:

  - Los principios del teorema de Pitágoras permiten reconocer el ángulo de elevación y el ángulo de depresión en relación con un punto determinado.
  - Los principios del teorema de Pitágoras se pueden aplicar a la solución de problemas sobre alturas y distancias.
  - Los principios del teorema de Pitágoras permiten hallar el área de figuras como el rectángulo, el prisma y el cuadrado.

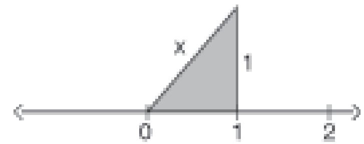
Recomendaciones para docentes

Sección para uso exclusivo del educador

Representación gráfica de los números irracionales

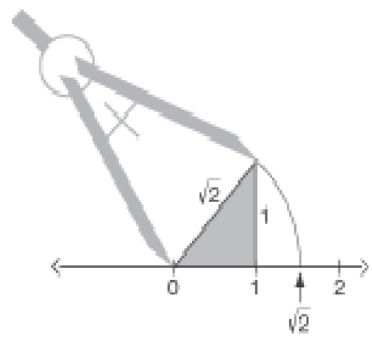
A cada número racional le corresponde un punto en la recta, pero en realidad estos no la completan. También la constituyen los irracionales. En general, representar un número con infinitas cifras decimales no periódicas es imposible y por lo tanto nos tendríamos que conformar con una aproximación. De todas maneras, hay métodos geométricos que permiten representar algunos números irracionales en la recta numérica. Ejemplo.

tRepresentación de $\sqrt{2}$

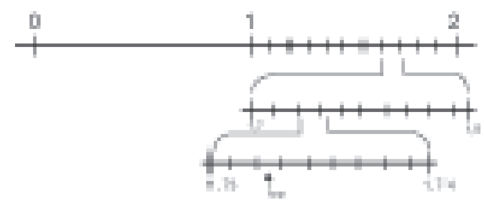


- Hay que tener claro que $\sqrt{2}$ =1,414..., es decir, 1< 1,414 < 2, entonces trazamos una recta, marcamos en ella los puntos 0, 1 y 2.
- Levantamos sobre el punto 1 un segmento perpendicular de una unidad de longitud.
- Unimos el extremo superior de este segmento con el origen (0).
- Observamos el triángulo rectángulo cuyos catetos miden una unidad cada uno.
- Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa del triángulo.

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$



- Trasladamos el segmento x sobre la recta con un compás.
- El punto de intersección del arco y la recta numérica corresponde a la raíz de dos.
- Cuando un número irracional está dado por su expresión decimal podemos representarlo de forma aproximada mediante el proceso que describimos a continuación.



Observemos que la raíz de tres está situada en el segmento rojo que es una centésima parte del intervalo 1,7-1,8.

Buen Vivir: Derechos del consumidor

La actividad inicial puede servir para que el profesor destaque la importancia de las aproximaciones en la vida cotidiana. Así, puede proponer a sus alumnos que efectúen diversas operaciones: calcular el importe aproximado de una compra, averiguar si una cantidad de dinero será suficiente para pagar el valor de una factura con sus impuestos, detectar errores en facturas, etc. De la misma manera, debe aprovecharse esta actividad para despertar en sus estudiantes el interés por conocer los derechos del consumidor. Estos se relacionan con la calidad, precio, oferta, atención y otros beneficios que se generan por la compra o el uso de un determinado bien o servicio. Específicamente en el tema del consumo de bienes alimentarios es muy importante adquirir los conocimientos acerca de los estándares de calidad relacionados con la preparación, el embalaje, la presentación, el transporte, el expendio, los registros sanitarios, ya que, de estos dependen la salud de los consumidores y afectan directamente a la conservación del medioambiente.

Para trabajar sobre el tema de la economía familiar, entren en la página web http://www.micip.gob.ec/index.php?option=com_content&view=article&id=458&Itemid=135 del Ministerio de Industrias y Productividad, allí encontrarán algunos folletos informativos que pueden servir de guía para conocer diversas estrategias de ahorro doméstico y para elaborar unas recomendaciones propias sobre cómo aliviar los gastos en la casa. Es un trabajo de creatividad y a la vez de compromiso, pues deben ser tareas que se lleven a cabo por parte de los integrantes de la familia.

Bibliografía

http://www.phy6.org/stargaze/Mpyth.htm

http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/GeometriaInteractiva/IIICiclo/NivelIX/AplicacionesdePitagoras/AplicacionesdePitagoras.htm

http://www.monlau.es/btecnologico/mates/realytrigo/rep_graf.htm

http://www.educa.madrid.org

DEPLANCHE, Y., Diccioförmulas, Edunsa, España, 1996.

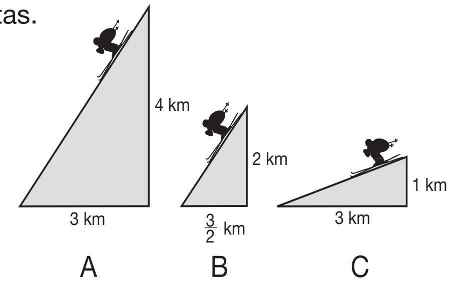
MINISTERIO DE EDUCACIÓN, Actualización y Fortalecimiento Curricular de la Educación Básica, Quito, 2010.

Refuerzo

Números irracionales

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

En una estación de esquí hay 3 pistas.



1. Calcula la distancia que recorre un esquiador si baja por la pista A.

$$h^2 = (\ldots\ldots)^2 + (\ldots\ldots)^2$$

— ¿Es un número natural la longitud de la pista A?

2. Calcula la distancia que recorre un esquiador si baja por la pista B.

— ¿Es un número natural la longitud de la pista B?

— ¿Puedes escribir en forma de fracción dicha longitud?

3. Calcula la distancia que recorre un esquiador si baja por la pista C.

— ¿Es un número natural la longitud de la pista C?

— ¿Puedes escribir en forma de fracción dicha longitud?

Como no puedes escribir esta medida en forma de fracción, se trata de un número **irracional.**

4. Escribe la definición de número irracional.

5. De igual manera, queremos construir una pista con una longitud de $\sqrt{3}$ km. Si la base mide $\sqrt{2}$ km, ¿qué altura deberá tener la pista?

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + (\ldots\ldots)^2$$

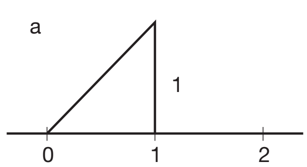
$$3 = 2 + \ldots\ldots$$

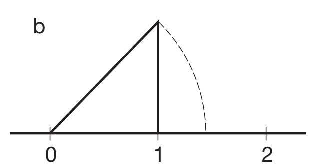
— ¿Cuáles pueden ser la base y la altura de una pista que mida $\sqrt{5}$ km?

— Efectúa el dibujo correspondiente.

El proceso que acabamos de ver sirve para representar números irracionales sobre la recta real.

Así, para representar $\sqrt{2}$ cm, dibujamos el triángulo rectángulo de catetos 1 cm como indica la figura *a* y, con un compás, trasladamos la hipotenusa del triángulo sobre la recta (figura *b*).



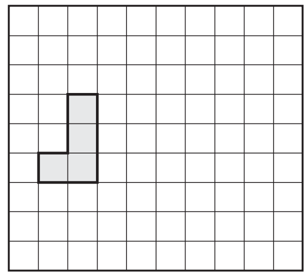


Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

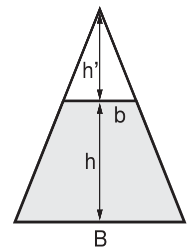
1. Una figura formada por cuadrados recibe el nombre de poliminó. Si el número de cuadrados es cuatro, se trata de un tetraminó; si es de cinco, de un pentominó... Existen cinco tetraminós diferentes. Uno de ellos es el representado en la figura de la derecha. Ahora resuelve los siguientes apartados.

   a) Dibuja los restantes tetraminós.

   b) Intenta construir un cuadrado con los cinco tetraminós. ¿Por qué crees que no es posible? Si añades un pentominó, ¿podrás formar un cuadrado?



2. Halla una fórmula para calcular el área del trapecio de la figura de la derecha, como diferencia de áreas de triángulos.



3. Halla el área de un cuadrado cuyo perímetro es 18 cm.

4. Halla el lado y el perímetro de un cuadrado cuya área es 64 cm^2.

5. El área de un rectángulo es 12 cm^2 y la longitud de su base es 4 cm. Calcula su perímetro.

6. Con un cordel de 16 cm podemos formar distintos rectángulos; por ejemplo, un rectángulo de base 1 cm y de altura 7 cm, un rectángulo de base 2 cm y de altura .... cm.

   Considerando que el perímetro de los rectángulos que se pueden formar es siempre de 16 cm, completa la siguiente tabla.

Base del rectángulo	Altura del rectángulo	Perímetro del rectángulo	Área del rectángulo
1 cm	7 cm	16 cm	7 cm^2
2 cm		16 cm	
3 cm			
4 cm			
5 cm			
6 cm			
7 cm			

— ¿Cuál es el rectángulo con mayor área que se puede formar?

7. Recorta 16 cuadrados de 1 cm de lado y forma con todos ellos distintos rectángulos. A continuación, completa la siguiente tabla.

Base del rectángulo	Altura del rectángulo	Área del rectángulo	Perímetro del rectángulo
1 cm	16 cm	16 cm^2	34 cm
2 cm		16 cm^2	
4 cm			
8 cm			
16 cm			

— ¿Cuál es el rectángulo de menor perímetro?

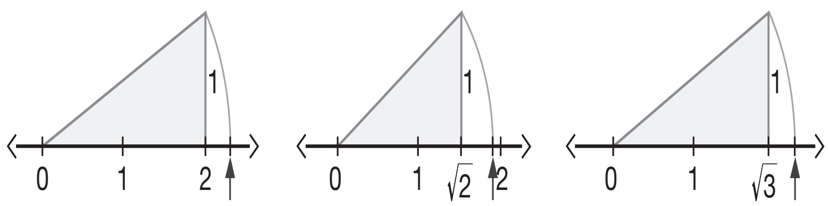
Ficha de evaluación

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

1. Representa, sobre la recta, los siguientes números reales: $-\sqrt{13}$; 1,5; $\sqrt{7}$; –3; π; 0,6.

   Recuerda que $13 = 2^2 + 3^2$; $7 = 2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2$; $3 = 1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2$; $2 = 1^2 + 1^2$.

2. Elige, de entre las siguientes, la representación correcta del número $\sqrt{5}$.



3. Realiza las siguientes operaciones.

   a. $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{\frac{5}{36}} =$

   b. $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{6}\right)+\sqrt{\frac{5}{36}}-5\sqrt{3} =$

   c. $\left(\frac{\sqrt{5}}{6}\cdot\sqrt{6}\right)-\left(\frac{\sqrt{12}}{5}+\sqrt{5}\right) =$

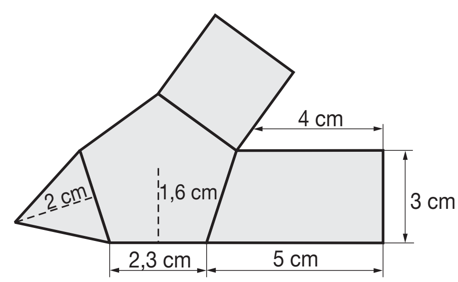
   d. $\frac{\sqrt{2}\,\{(\pi)^2-(\pi+2)\}-\sqrt{2}\,\pi^2}{\pi+2} =$

4. Tres hermanos se reparten una herencia. El primero recibe 150 ha de terreno; el segundo, 140 ha 25 a, y el tercero, 1 km^2 3 hm^2 5 dam^2.

   a) Ordena de mayor a menor la extensión de las tres fincas.

   b) Calcula las hectáreas que ocupa la extensión total de las tierras que han heredado.

5. Averigua el perímetro y el área del recinto de la figura de la derecha. Ten en cuenta que una de las figuras de las que está compuesta es un triángulo equilátero y otra un cuadrado.

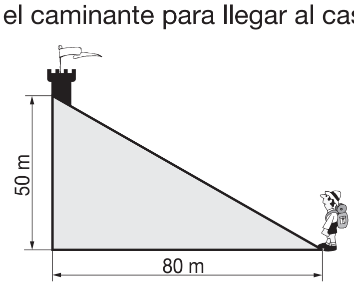


6. Se quiere cubrir una pared de una cocina con baldosas cuadradas de 15 cm de lado. ¿Cuántas baldosas serán necesarias si la pared tiene la forma de un rectángulo de 45 dm de base y 3 m de altura?

7. Enumera objetos de tu alrededor cuya superficie estimes que sea:

   a) Mayor que 1 m^2. b) Menor que 1 m^2 pero mayor que 1 dm^2. c) Menor que 1 dm^2.

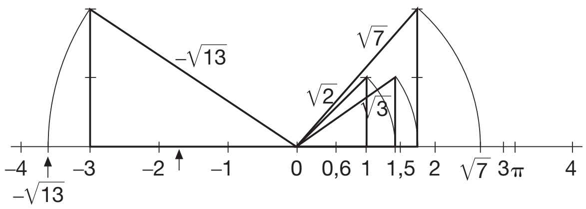
8. Calcula la distancia que ha de recorrer el caminante para llegar al castillo.



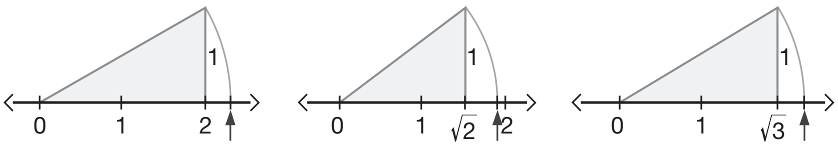
Ficha de evaluación

Solucionario

1.



2.



La primera representación corresponde a $\sqrt{5}$, puesto que:

$$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

3. a. $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{\frac{5}{36}}=\sqrt{15}$

b. $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{6}\right)+\sqrt{\frac{5}{36}}-5\sqrt{3}=\frac{\sqrt{5}}{6}$

c. $\left(\frac{\sqrt{5}}{6}\cdot\sqrt{6}\right)-\left(\frac{\sqrt{12}}{5}+\sqrt{5}\right)=\frac{-2\sqrt{3}}{5}$

d. $\frac{\sqrt{2}\,\{(\pi)^2-(\pi+2)\}-\sqrt{2}\,\pi^2}{\pi+2}=\sqrt{2}$

4. a) 150 ha > 140 ha 25 a > 1 km^2 3 hm^2 5 dam^2

b) 150 + 140,25 + 103,05 = 393,3

La extensión total es de 393,3 ha.

5. P = 2,3 + 2,3 + 2,3 + 2,3 + 2,3 + 2,3 + 4 + 3 + 5 + + 2,3 = 28,1 cm.

El perímetro del recinto es 28,1 cm.

$A_{cuadrado} = 2{,}3^2 = 5{,}29$

$A_{triángulo}\ \frac{1}{2} = \cdot 2{,}3 \cdot 2 = 2{,}3$

$A_{pentágono} = \frac{5\cdot 2{,}3\cdot 1{,}6}{2} = 9{,}2$

$A_{trapecio} = \frac{(5+4)\cdot 3}{2} = 13{,}5$

A = 5,29 + 2,3 + 9,2 + 13,5 = 30,29

El área del recinto es 30,29 cm^2.

6. $A_{pared} = 450 \cdot 300 = 135\,000$

$A_{baldosa} = 15 \cdot 15 = 225$

$\frac{135\,000}{225} = 600$

Serán necesarias 600 baldosas.

7. Respuesta sugerida: a) el comedor de una casa; b) una carpeta; c) una tarjeta de crédito.

8. $d = \sqrt{50^2+80^2} = 94{,}34$

La distancia que ha de recorrer es de 94,34 m.

Indicadores esenciales de evaluación

	Puede continuar	Necesita refuerzo
	% de alumnos/as	
• Representa sobre la recta números irracionales.		
• Resuelve operaciones con números irracionales.		
• Deduce las fórmulas del área de polígonos regulares y las aplica en la resolución de problemas.		
• Calcula el perímetro y el área de las distintas figuras planas.		
• Aplica el teorema de Pitágoras en la resolución de triángulos rectángulos.		
• Aplica el teorema de Pitágoras en la resolución de problemas de la vida cotidiana.		

Módulo 3 **Bloques:** Numérico. Relaciones y funciones

Números reales
Polinomios

Objetivos del módulo

- Factorizar polinomios y desarrollar productos notables para determinar sus raíces a través de material concreto, procesos algebraicos y gráficos.
- Aplicar las operaciones básicas con números reales para utilizarlos en diferentes contextos por medio de las TIC.

DCD Destrezas con criterios de desempeño

- Simplificar expresiones de números reales con la aplicación de las operaciones básicas.
- Resolver las cuatro operaciones básicas con números reales.
- Interpretar y utilizar los números reales en diferentes contextos, eligiendo la notación y la aproximación adecuadas en cada caso.
- Utilizar las TIC para realizar operaciones con cualquier tipo de expresión numérica.
- Desarrollar estrategias de cálculo mental.
- Calcular el error cometido con aproximaciones de números reales.
- Simplificar polinomios con la aplicación de las operaciones y de sus propiedades.
- Representar polinomios de hasta segundo grado con material concreto.
- Factorizar polinomios y desarrollar productos notables.

Estrategias metodológicas

Relacionada con la DCD: **Calcular el error cometido con aproximaciones de números reales**

Para la activación de conocimientos previos

- Recuerde cómo hacer el redondeo y el truncamiento de números decimales aplicándolos a los números irracionales.
- Para truncar un número decimal hasta un orden determinado se ponen las cifras anteriores a ese orden inclusive, eliminando las demás. Así: 45,1234 truncar hasta las décimas es 45,1.
- El alumno observará, en este caso, que se trata de una necesidad derivada del hecho de que los números irracionales tienen infinitas cifras decimales no periódicas. Esta es la razón por la que no podemos escribir todas las cifras decimales ni tampoco simbolizarlas mediante un período.

Para la construcción del conocimiento

- Distinguir las aproximaciones de números reales, determinar su orden de aproximación y utilizarlo para efectuar truncamientos y redondeos. Puede utilizar la siguiente tabla.

Número	Redondear/decimales				Truncar/decimales			
	4	3	2	1	4	3	2	1
1,234567	1,2346	1,235	1,23	1,2	1,2345	1,234	1,23	1,2
30,44030	30,4403	30,4400	30,4400	30,4000	30,4403	30,4400	30	
5,18025	5,1803	5,180	5,18	5,2	5,1802	5,180	5,18	5,1
50,48911								

- Analice la información que se propone en el texto de la pág. 85 referente al error absoluto y error relativo.

Para la aplicación del conocimiento

- Junto con el profesor de Cultura Física, se puede preparar carreras de 100 m planos. Unos cinco estudiantes se encargarán de cronometrar las competencias y anotar los resultados individualmente, para luego compararlos con el resto de la clase y observar si coinciden o existen pequeñas diferencias en el tiempo.
- Analice la utilidad de realizar aproximadamente y la conveniencia de redondear o truncar.
- Mencione situaciones en donde se requiere de exactitud para las mediciones.

Para la evaluación

- Solicite que realice un análisis del ejercicio integrador de la pág. 108 y argumenten el proceso que se utilizó en su resolución.

- Pida a sus estudiantes que, utilizando la calculadora, expresen fracciones en forma decimal y completen la tabla con base en la del ejemplo.

Número	Expresión decimal	Truncamiento	Rendondeo
$^{27}/_{5}$			

Relacionada con la DCD: **Simplificar polinomios con la aplicación de las operaciones y sus propiedades.**

Para la activación de conocimientos previos

- Realice un resumen de todo lo aprendido sobre los polinomios hasta este momento.Puede utilizar el resumen de la pág. 107 del texto del estudiante.
- Recalque que sumar y restar polinomios es sumar y restar sus términos semejantes.

  Resuelva (4x + 3y) + (5x + y)

$$\begin{array}{r} 4x + 3y \\ + \; 5x + y \\ \hline 9x + 4y \end{array}$$

- Pida a sus estudiantes que coloquen en forma vertical los términos semejantes de los diversos polinomios, uno debajo del otro, dejando un espacio libre si el polinomio carece de ese término. Luego se procede a sumar. Por ejemplo para sumar los polinomios: $5x^4 - 16x^3 + 8x^2 - 9x + 3$; $7x^4 + 3x^2 - 11x + 6$; $9x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 6x + 9$ procedemos así:

$$\begin{array}{rrrrr} 5x^4 & -\,16x^3 & +\;8x^2 & -\;9x & +\,3 \\ 7x^4 & & +\;3x^2 & -\,11x & +\,6 \\ 9x^4 & +\;5x^3 & +\,10x^2 & +\;6x & +\,9 \\ \hline 21x^4 & -\,11x^3 & +\,21x^2 & -\,14x & +\,18 \end{array}$$

- Para la sustracción de un polinomio P, denominado minuendo, otro Q denominado sustraendo se suma al minuendo el opuesto al sustraendo. Se puede utilizar el método de colocación vertical; por ejemplo para restar los polinomios: $3a^2 + 6ab - 7b^2$ de $5a^2 + 2ab + 5b^2$ se procede así:

$$\begin{array}{r} 5a^2 + 2ab + 5b^2 \\ -\ 3a^2 + 6ab - 7b^2 \\ \hline 2a^2 + 8ab - 2b^2 \end{array}$$

- Valor numérico de una expresión algebraica es el número que se obtiene al sustituir en esta el valor numérico dado y realizar las operaciones indicadas.

  $x^3 - 3a^3$ para $x = 2$; $a = 5$

  $2^3 - 3(5)^3 = 8 - 3(125) = 8 - 375 = -367$

- Un polinomio está ordenado si los monomios que lo forman están escritos de mayor a menor grado.

$P(x) = 2x^3 + 5x - 3$

Para la construcción del conocimiento

- En el ejercicio resuelto, puede establecer los pasos que se siguen en una división de polinomios. La información se consigna en la página 98 del texto del estudiante.

$3x^3$	$-2x^3$	$-4x^2$	$+2x$	-2	x^2	$-2x^2$	-2
$-2x^3$	$+6x^3$	$-3x^2$			$3x^2$	$+4x$	$+15$
0	$4x^3$	$+7x^2$	$+2x$	-3			
	$-4x^3$	$+8x^2$	$-4x$				
	0	$15x^2$	$+6x$	-3			
		$15x^2$	$+30x$	$+15$			
			$+36x$	$+12$			

Regla de Ruffini

La regla de Ruffini conocida también como división sintética se utiliza cuando el divisor es de la forma"x-a". Permite obtener más fácilmente los coeficientes del cociente en una división de polinomios. En el ejemplo $(3x^4 - 5x^2 + 4x - 6) \div (x + 4)$ se puede proceder de la manera habitual o utilizando la regla de Ruffini.

Proceso (algoritmo)

Se dispone los coeficientes del dividendo y el término independiente del polinomio divisor, este último cambiado de signo. Si el polinomio dividendo es incompleto se pone un 0 en el lugar correspondiente al término que falta.

	3	0	−5	4	−6
−4					

Se baja el primer coeficiente (3) se multiplica por (−4) y se suma el producto obtenido (−12) al segundo coeficiente 0.

	3	0	−5	4	−6
−4		−12			
	3	−12			

La suma obtenida (−12) se multiplica por (−4) y este producto se suma al siguiente coeficiente (−5).

	3	0	−5	4	−6
−4		−12	+48		
	3	−12	+43		

Se continúa este proceso hasta efectuar la suma correspondiente al último coeficiente.

	3	0	−5	4	−6
−4		−12	+48	−172	
	3	−12	+43	−168	

	3	0	−5	4	−6
−4		−12	+48	−172	+672
	3	−12	+43	−168	+666

La última suma obtenida (+666) es el resto de la división. Con los coeficientes restantes (3, −12, 43, −168) se construye el polinomio cociente, teniendo en cuenta que su grado será una unidad menor que el grado del dividendo, pues el divisor es de grado 1.

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 - 5x^2 + 4x - 6 \div x + 4 & x + 4 \\ \cline{2-2} R(x) \longrightarrow 666 & 3x^3 - 12x^2 + 43x - 168 \longleftarrow C(x) \end{array}$$

$$\therefore \ \frac{3x^4 - 5x^2 + 4x - 6}{x + 4} = 3x^3 - 12x^2 + 43x - 168 + \frac{666}{x + 4}$$

Para la aplicación del conocimiento

- Plantee ejercicios como el ejemplo:

  Calcular el cociente y resto en cada una de estas divisiones:

  a. $(x^5 + 7x^3 - 5x + 1) \div (x + 2x)$ b. $(x^3 - 5x^2 + x) \div (x^2 - 1)$

Para la evaluación

- Utilizando el proceso de reproducción de problemas de la pág. 106, solicite que completen la tabla.

Dividendo	Divisor	Cociente	Resta
$5x^3 + 2x^2 - 7x + 5$		$2x + 7$	$-25x - 30$

Recomendaciones para docentes

Sección para uso exclusivo del educador

En octavo de Básica se trabaja la siguente definición de raíz cuadrada: se suguiere que el docente dé el mismo tratamiento pero con los números racionales.

Sea **b** un número entero positivo o cero, su raíz cuadrada entera (si existe), es el número entero positivo **a** o cero, tal que el cuadrado de **a** sea **b**. $\sqrt{b} = a$, si y solo si: $a^2 = b$; con $a, b \in R^+$

a) $\sqrt{4} = 2$ b) $\sqrt{(2)^2} = \sqrt{4} = 2$ c) $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

d) $-\sqrt{4} = -2$ e) $\sqrt{-4}$, no tiene raíz cuadrada en los reales.

Recuerde que es un error afirmar que la $\sqrt{4}$ es 2 y –2.

Observe las raíces cuadradas de algunos números racionales.

$\sqrt{0} = 0$ $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ $\sqrt{25} = 5$ $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

Buen Vivir: Cultura Física y tiempo libre

La actividad inicial puede servir para que el profesor aborde el tema de la necesidad de cuidar la salud integral de las personas, a través del deporte y del aprovechamiento del tiempo libre; en concordancia con el cuidado y protección del medioambiente sano. En este sentido, es necesario explicar la obligación del Estado de promover la cultura física y el derecho de los ciudadanos a disfrutar de espacios y alternativas de recreación.

Es muy importante conversar al respecto de los problemas de salud originados por la falta de ejercicio físico, como problemas cardiovsculares, hipertensión, obesidad y otros. Este punto debe servir para motivarlos a la práctica de actividad física, no necesariamente un deporte, sino acciones sencillas como subir gradas, caminar, pasear al aire libre, entre otras. De ser posible, invite a un especialista al aula para que pueda explicar a sus estudiantes las consecuencias para la salud por la inactividad. Se sorprenderán al conocer las cifras y los datos vinculados con esta situación.

Pida que realicen las actividades propuestas en la página 111 de la sección Buen Vivir y a la vez que asuman el compromiso de participar en las jornadas deportivas de la institución. Reflexionen sobre el lema «Mente sana en cuerpo sano».

Bibliografía

http://sauce.pntic.mec.es/jdiego/calculo/calculo.htm

http://matematicasies.com/?-Polinomios,62-

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, Actualización y Fortalecimiento Curricular de la Educación Básica, Quito, 2010.

LEITHOLD, Louis, Álgebra y Trigometría analítica, Harna México,1999.

SÁENZ R., LARA J.,BENALCÁZAR H., LEÓN H., Módulo de Matemática Bachillerato, Centro de Matemática - Universidad Central del Ecuador, Quito, 2007.

Refuerzo **Números reales, aproximaciones y errores**

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

1. Halla un número racional comprendido entre $\sqrt{5}$ y $\sqrt{6}$.
2. Halla un número irracional comprendido entre 1,5 y $1,\widehat{5}$.

Nos encontramos a un patinador y le preguntamos qué distancia ha recorrido.

3. Indica cuál de las tres respuestas te parece más adecuada.

   a) He recorrido $\sqrt{2}$ km. b) He recorrido 1,414 2136 km. c) He recorrido 1,4 km.

Expresar un resultado con muchas cifras decimales no siempre tiene sentido.

4. Con la calculadora, busca el valor de los siguientes números, con cuatro cifras decimales, y anótalo en la segunda columna de la tabla.

   — En la tercera columna, escribe el número con sólo dos cifras decimales.

   — Calcula la diferencia entre los valores de la segunda columna y la tercera, y anótala en la cuarta columna.

Número	Valor calculadora	Truncando	Error
$\sqrt{2}$	1,4142	1,41	1,4142 − 1,41 = 0,0042
$\sqrt{3}$			
$\sqrt{5}$			
$\sqrt{8}$			
$\sqrt{11}$			
$\sqrt{12}$			
$\sqrt{14}$			

5. Repite la actividad anterior modificando un poco el método:

   — Deja la primera cifra decimal igual.

   — Observa la tercera cifra decimal.

   - Si la tercera cifra decimal es menor que 5, deja la segunda cifra igual.
   - Si la tercera cifra decimal es mayor o igual que 5, súmale 1 a la segunda cifra decimal.

Número	Valor calculadora	Redondeando	Error
$\sqrt{2}$			
$\sqrt{3}$			
$\sqrt{5}$	2,2360	2,24	2,24 − 2,2360 = 0,004
$\sqrt{8}$			
$\sqrt{11}$			
$\sqrt{12}$			
$\sqrt{14}$			

6. Observa las tablas anteriores y responde:

   — ¿En cuál has obtenido los errores menores?

   — ¿Qué método te parece mejor, el truncamiento o el redondeo?

   — ¿En qué casos coinciden los errores?

7. Efectúa las siguientes operaciones, sustituyendo los números irracionales que aparecen aproximados por redondeo con tres cifras decimales.

   a) $2+3\sqrt{5}-13=$

   c) $2\sqrt{5}+17\sqrt{13}-15=$

   b) $\sqrt{2}\cdot 7+3\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-3=$

   d) $\sqrt{3}\cdot\left(\dfrac{1}{2}-2\sqrt{5}\right)=$

8. Redondea $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ y $\sqrt{10}$ hasta las milésimas y calcula $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}$.

   — ¿Es $\sqrt{2}+\sqrt{5}=\sqrt{7}$? ¿Es $\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{10}$?

Refuerzo Operaciones con polinomios, números irracionales

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

1. Completa estas operaciones con polinomios.

a) Suma los polinomios $P(x) = 3x^2 + 2x + 1$ y $Q(x) = 5x^3 - 7x + 8$.

+	P(x)	=	....	....	$+ 2x$	$+ 1$
	Q(x)	=	$5x^3$	....	....	$+ 8$
	P(x) + Q(x)	=	..... x^3	$+ 3x^2$	....	$+ 9$

b) Resta los polinomios $P(x) = x^5 + 2x^4 - 7x^3 + 8$ y $Q(x) = x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 5$.

−	P(x)	=	x^5	....	$- 7x^3$	....	....	....
	Q(x)	=	x^5	$+ 5x^4$	....	$- 4x^2$	....	$+ 5$
	P(x) − Q(x)	=	....	$- 3x^4$	....	+ 4.....	....	$+ 3$

c) Multiplica los polinomios $P(x) = 7x^3 - 5x + 2$ y $Q(x) = 2x^2 + 5x - 1$.

×	P(x)	=		$7x^3$	....	$- 5x$	$+ 2$	
	Q(x)	=			$2x^2$	$+ 5x$	$- 1$	
				$- 7x^3$	....	$+ 5x$	$- 2$	
		....		....	....	$+10x$		
	....	....		$- 10x^3$	$+ 4x^2$	....	......	

$P(x) \cdot Q(x) =$ $14x^5$ $+ 35x^4$ .... $- 2$

d) Halla el cociente y el resto de la división entre $A(x) = 8x^4 + 6x^3 - 4$ y $B(x) = 2x^2$.

	$8x^4 + 6x^3 - 4$	$2x^2$
+	....	$4x^2 +$ ....
	$0 \quad + 6x^3$	
+	$- 6x^3$	
	....	

2. Completa:

Es fácil comprobar que $20x^5 + 7x^4 - 3x^3 - 24x^2 + 6x = (5x^3 + 3x^2 - 6) \cdot (4x^2 - x)$; por tanto, $4x^2 - x$ es un .... de $20x^5 + 7x^4 - 3x^3 - 24x^2 + 6x$, y $5x^3 + 3x^2 - 6$ también es un .... de ....

De forma similar, $20x^5 + 7x^4 - 3x^3 - 24x^2 + 6x$ es un .... de $4x^2 - x$, y también lo es de ....

3. Completa:

a) $x = 1$ es una .... de $P(x) = x^5 - x^3$, puesto que $P(1) = 1^5 -$ .... También $x = -1$ es una .... de $P(x)$, porque P(.........) = ... = 0. Pero $x =$ .... no es una .... de $P(x)$, ya que $P(2) =$ .... $- 2^3 = 24 \neq$ ....

b) Si consideramos $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$, las posibles raíces son.. Como $P(2) =$ ...., entonces 2 es una raíz de $P(x)$ y $P(x) = (x - 2)\,Q(x)$. Si aplicamos la regla de Ruffini para calcular $Q(x)$, obtenemos:

$Q(x) =$ .... $+ x - 12$ cuyas raíces son $x_1 = 3$, $x_2 =$ .... Luego, podemos expresar $Q(x)$ como sigue: $Q(x) = (x -$ ....$)(x + 4)$. Por tanto: $P(x) = (x -$ ....$)(x -$ ....$)(x +$ ....$)$.

☑ Ficha de evaluación

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

1. Si $a = 0{,}3$ y $b = -0{,}7$, representa gráficamente:
   a) (b, a)
   b) [a + b, a – b]
   c) [a, – b)
   d) El intervalo de centro *b* cuyos extremos distan 1,5 unidades de *b*.

2. Di si es necesario redondear o truncar números decimales y, si lo es, explica en qué circunstancia o circunstancias y pon un ejemplo.

3. Redondea hasta las centésimas los siguientes números decimales.
   a) 2,32547
   b) 21,8274
   c) –12,37123

4. Medimos la altura de un jugador de baloncesto y la anchura de una hoja de papel. Los resultados obtenidos son los siguientes:

   $$2{,}00 \pm 0{,}04 \text{ m} \qquad 21{,}2 \pm 0{,}6 \text{ cm}$$

   Compara el error absoluto y el error relativo de ambas medidas. ¿Cuál de las dos medidas es mejor?

5. Expresa en lenguaje algebraico:
   a) El doble de la suma de *x* es *y* : ....
   b) El cubo del doble de *a* : ....
   c) El cociente del doble de *a* entre *b* es igual a 7: ....
   d) El triple de un número más 8 es igual a siete veces dicho número: ....

6. Propón un enunciado que corresponda a la siguiente igualdad.

   $$3x - 2 = 2x + 4$$

7. Sean $P(x) = x^3 - x^2 + 2x - 15$, $Q(x) = x^4 - 5x^2$ y $R(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 5$. Calcula:

   a) $P(x) + Q(x) - R(x)$ b) $P(x) \cdot Q(x)$ c) $-P(x) + 2\,Q(x)$

8. Dados los polinomios $P(x) = 3x^2 + 2x - 1$ y $Q(x) = 6x^3 + 13x^2 + 4x - 3$, calcula:

   a) $P(x) + Q(x)$ c) $P(x) \cdot Q(x)$
   b) $Q(x) - P(x)$ d) $(P(x))^2$

9. Divide estos polinomios entre $(x - 1)$ utilizando la regla de Ruffini.

   a) $6x^3 + 10x^2 + 2x - 2$ c) $8x^3 + 4x^2 - x - 1$
   b) $2x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ d) $3x^4 - 3x^3 - 2x^2 - x - 1$
   — ¿Es $x = 1$ raíz de estos polinomios? Justifícalo.

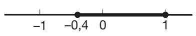
10. Factoriza los siguientes polinomios.

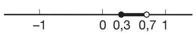
    a) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$
    b) $x^3 + 5x^2 + x + 5$
    c) $12x^3 - 16x^2 - 20x + 8$
    — Indica, a continuación, sus raíces.

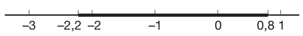
Ficha de evaluación

Solucionario

1. a) 

   b) 

   c) 

   d) 

2. Es necesario, porque existen números reales con infinitas cifras decimales no periódicas que sólo podemos simbolizar o aproximar. Además, puede ser adecuado redondear o truncar números decimales exactos, periódicos puros o periódicos mixtos si tienen muchas cifras decimales y tenemos que trabajar con ellos.

3. a) 2,33; b) 21,83; c) –12,37.

4. Primera medida — Segunda medida

   $E_a = 0{,}04\,m = 4\,cm$ — $E_a = 0{,}6\,cm$

   $E_r = \dfrac{0{,}04\,m}{2{,}00\,m} = 0{,}02$ — $E_r = \dfrac{0{,}6\,cm}{21{,}2\,cm} = 0{,}03$

   Para comparar los errores absolutos debemos calcularlos en la misma unidad, en este caso en cm. Observamos que el error absoluto de la primera medida es mucho mayor que el de la segunda.

   No obstante, el error relativo de la primera medida es menor que el de la segunda.

   Está mejor efectuada la primera medida, porque hay un error de 0,02 unidades por cada unidad medida, mientras que el error de la segunda es de 0,03 unidades por cada unidad medida.

5. a) $2\,(x + y)$; b) $(2\,a)^3$; c) $\dfrac{2\,a}{b} = 7$; d) $3\,x + 8 = 7\,x$

6. El triple de un número menos 2 es igual al doble de dicho número más 4.

7. a)

$$\begin{array}{rrrrr}
 & x^3 & -\;x^2 & +2x & -15 \\
x^4 & & -5x^2 & & \\
 & -2x^3 & +3x^2 & -2x & +\;5 \\
\hline
x^4 & -\;x^3 & -3x^2 & & -10
\end{array}$$

$P(x) + Q(x) - R(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 - 10$

   b)

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & x^3 & -x^2 & +2x & -15 \\
 & & & & x^4 & -5x^2 \\
\hline
 & -5x^5 & +\;5x^4 & -10x^3 & -75x^2 & \\
x^7 & -x^6 & +2x^5 & -15x^4 & & \\
\hline
x^7 & -x^6 & -3x^5 & -10x^4 & -10x^3 & -75x^2
\end{array}$$

$P(x) \cdot Q(x) = x^7 - x^6 - 3x^5 - 10x^4 - 10x^3 - 75x^2$

8. a) $P(x) + Q(x) = 6x^3 + 16x^2 + 6x - 4$

   b) $Q(x) - P(x) = 6x^3 + 10x^2 + 2x - 2$

   c) $P(x) \cdot Q(x) = 18x^5 + 51x^4 + 32x^3 - 14x^2 - 10x + 3$

   d) $(P(x))^2 = 9x^4 + 12x^3 - 2x^2 - 4x + 1$

9. a)

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 6 & 10 & 2 & -2 \\
1 & & 6 & 16 & 18 \\
\hline
 & 6 & 16 & 18 & 16
\end{array}$$

   R = 16

   $C(x) = 6x^2 + 16x + 18$

   b)

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & 0 & -3 & 2 & -1 \\
1 & & 2 & 2 & -1 & 1 \\
\hline
 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0
\end{array}$$

   R = 0

   $C(x) = 2x^3 + 2x^2 - x + 1$

   c)

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 8 & 4 & -1 & -1 \\
1 & & 8 & 12 & 11 \\
\hline
 & 8 & 12 & 11 & 10
\end{array}$$

   R = 10

   $C(x) = 8x^2 + 12x + 11$

   d)

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 3 & -3 & -2 & -1 & -1 \\
1 & & 3 & 0 & -2 & -3 \\
\hline
 & 3 & 0 & -2 & -3 & -4
\end{array}$$

   R = –4

   $C(x) = 3x^3 - 2x - 3$

   x = 1 es una raíz del polinomio del apartado *b)*, pero no de los apartados *a), c),* y *d),* pues, según el teorema del resto, el resto de la división del polinomio entre x – 1 debería ser cero.

10. a) $(x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4)$

    — Raíces: 1, 2, 3, 4

    b) $(x + 5) \cdot (x^2 + 1)$

    — Raíces: –5

    c) $4 \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (3x - 1)$

    — Raíces: –1, 2, $\dfrac{1}{3}$

Indicadores esenciales de evaluación

	Puede continuar	Necesita refuerzo
	% de alumnos/as	
• Aplica las operaciones con números reales a la resolución de problemas.		
• Aplica correctamente los algoritmos de cálculo con polinomios.		
• Factoriza polinomios y desarrolla productos notables.		

Módulo 4 **Bloques:** Numérico. Relaciones y funciones.

Números reales
Patrones de crecimiento lineal

Objetivos del módulo

- Aplicar las reglas de potenciación en la resolución de problemas de números reales con exponentes negativos para desarrollar un razonamiento lógico-matemático.
- Reconocer una función lineal por medio del análisis de su tabla de valores o de su gráfico para comprender y predecir variaciones constantes.

DCD Destrezas con criterios de desempeño

- Simplificar expresiones de números reales con exponentes negativos con la aplicación de la reglas de potenciación y radicación.
- Reconocer patrones de crecimiento lineal en tablas de valores y gráficos.
- Graficar patrones de crecimiento lineal a partir de su tabla de valores.
- Presentar de manera clara y ordenada los ejercicios realizados.
- Confiar en las propias capacidades para efectuar operaciones matemáticas.
- Usar la calculadora de forma racional para operar con potencias.

Estrategias metodológicas

Relacionada con la DCD: **Simplificar expresiones de números reales con exponentes negativos con la aplicación de la reglas de potenciación y radicación.**

Para la activación de conocimientos previos

- Es necesario que los alumnos sean capaces de aplicar el concepto de potencia a la descripción de situaciones de la vida real. Por este motivo, sería interesante plantearles actividades operativamente sencillas en un contexto real; por ejemplo, describir en forma de potencia situaciones del tipo: “Una escuela tiene seis aulas, en cada aula hay seis alumnos y cada alumno tiene seis lápices de colores. ¿Cuántos lápices tienen entre todos?”.

- También es muy importante que relacionen las propiedades de las potencias con las propiedades de la multiplicación. Así mismo, puede ser útil utilizar ejemplos de aplicación incorrecta de las propiedades de la potenciación (por ejemplo, $(2 + 3)^2 \neq 2^2 + 3^2$).

- Hay que insistir en el uso razonable de la calculadora, la cual ha de ser una herramienta utilizada solo cuando sea necesaria; se tiene que prestar mucha atención, en este caso, a los pasos que hay que seguir para introducir una expresión numérica. Insistir, de nuevo, en la necesidad de efectuar todas las operaciones sencillas o inmediatas sin el recurso de la calculadora. En cualquier caso, hay que poner énfasis en el proceso de introducir paréntesis con el fin de modificar el orden en que se efectuarán las operaciones.

- Presenta un cuadro en el cual el estudiante pueda completar las propiedades de la potenciación. Utilice la información de la pág. 120 y 121.

Para la construcción del conocimiento

- Considere las reglas para trabajar con exponentes negativos y resuelva ejercicios como:

a) $2^{-3} = \frac{1}{2^{3}} = \frac{1}{8}$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{4}$

c) $(3)^{-4} = \frac{9}{(-3)^{-4}} = \frac{1}{81}$ d) $\frac{2^2 \times 2^2}{2^3 \times 2^4} = \frac{2^{2+2}}{2^{2+4}}$

$= \frac{2^4}{2^7}$

Es decir, el cociente $\frac{2^4}{2^7} = 2^{-3}$

Procede a justificar cada uno de los pasos de solución mencionando las propiedades de la potencia que emplea.

- Con un ejercicio como: $\frac{2^2 \times 4}{2^3 \times 2^4} = \frac{4}{2}\frac{4}{16} = \frac{16}{128} = \frac{1}{8}$
- Haga notar a los estudiantes como por transitividad es posible establecer que $2^{-3} = \frac{1}{8}$, luego $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$
- Llegue con los estudiantes a concluir:

Generalidad: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a \neq 0$

Para la aplicación del conocimiento

- Solicite a los alumnos que desarrollen los ejercicios 1 y 2 de la página 121 del texto.
- Presente el siguiente cuadro a los estudiantes, deberán completarlo con lo solicitado según corresponda el ejemplo dado.

Potencia	**Desarrollo de la potencia**	**Valor numérico de la potencia**
2^2	$2 \cdot 2$	4
2^{-2}	$2^0 : 2^2 = \frac{2^0}{2^2}$	$\frac{2^0}{2^2} = \frac{1}{4}$
3^2		
3^{-2}		
4^2		
4^{-4}		
5^2		
5^{-5}		

Para la evaluación

- Solicite a los estudiantes la realización de un resumen de los contenidos tratados en esta sección y luego la exposición de los mismos.
- Para llevar adelante la observación del trabajo propuesto anteriormente, se debe preparar antes la lista de control bien elaborada por el propio observador, o bien recogida en algún texto que trate de los aspectos a observar.

  La lista de control evita la pérdida de información que conlleva la simple retención memorística: muchos datos se pierden o se recuerdan deformados. Durante la sesión, en silencio y de modo que su presencia pase lo más desapercibida posible, rodea los correspondientes "sí" o "no" según lo que observa.

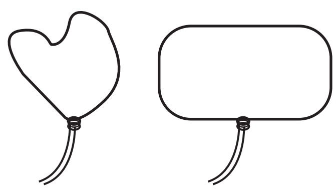
Relacionada con la DCD: **Graficar patrones de crecimiento lineal a partir de su tabla de valores.**

Para la activación de conocimientos previos

Verifique la comprensión de sucesiones. Se sugiere que se motive el reconocimiento de patrones lineales en la vida diaria; por ejemplo, gastos por consumo de alimentos, tiempo empleado por un auto en un determinado recorrrido.

Para la construcción del conocimiento

• Solicite que completen tablas de datos en base a ejercicios prácticos. Ejemplo:
Utilizando una cuerda anudada con una medida de 50 cm, formen rectángulos de tal forma que varíe la base y la altura.



Base x	**1**	**2**	**3**	**...**
Altura y	**24**	**23**	**...**	**...**

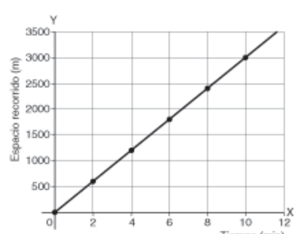
• Interpretar el significado de pares ordenados de la tabla.
• Representar pares ordenados en el plano cartesiano.
• Reconocer patrones crecientes.
• Reconocer patrones decrecientes.
• Graficar patrones lineales.

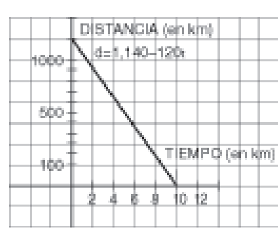
Para la aplicación del conocimiento

• Solicite que elaboren tablas y analicen gráficas con base a información de situaciones reales. Ejemplo: El alquiler de auto viene dado por un precio fijo de $ 5 y se cobra $ 1 por cada 10 km de recorrido.
• Buscar en libros, periódicos, revistas, Internet, consultar con profesionales médicos, encontrar tablas de valores que puedan ser usados para graficar patrones de crecimiento lineal. Estos deberán ser elaborados en materiales alternativos, con dibujos alusivos al tema, colores a libre elección y presentados en el aula de clase con la explicación de cómo fueren hechos.

Para la evaluación

• Presenten graficos de crecimiento o decrecimeinto lineal y solicite que elaboren una tabla de valores y creen problemas con la informacion que se presenta en la grafica.





Recomendaciones para docentes

Sección para uso exclusivo del educador

Conceptos básicos de funciones

Relación: Una relación establece la correspondecia entre los elementos de dos conjuntos no vacíos A y B. Usualmente, al conjunto A se lo denomina conjunto de partida, y al conjunto B, de llegada. Simbólicamente, la relación se representa por R y se cumple que: $R \subseteq A \times B$

Función: Sean X y Y dos conjuntos no vacíos, subconjuntos de los números reales. Una función de variable real de X en Y es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento de X un único elemento de Y. Esto se representa simbólicamente por:

$$f : X \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto y = f(x)$$

A la variable *x* se le llama variable independiante *y* a la variable y se la conoce como variable dependiente.

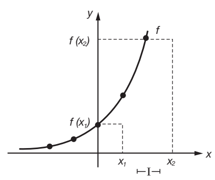
Dominio: Sea *f* una función de la variable real *f:* X⟶Y. El conjunto X para el cual se encuentra definida, constituye el dominio de la función. Este conjunto se representa simbólicamente *por dom f.*

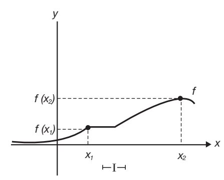
Rango: Sea *f* una función de la variable real *f:* X⟶Y, el conjunto de todos las imágenes de los elementos del dominio, constituye el rango de la función. Este conjunto se representa simbólicamente por *rg f.*

Función Estrictamente Creciente: Una función *f* es estrictamente creciente en un intervalo I, si para cualquier elección de x_1, y x_2 en I, siempre que $x_1, < x_2$, tenemos f (x_1) < f (x_2). Esto es:

$$\forall\ x_1, x_2 \in \mathrm{I}\ [(x_1 < x_2) \Longrightarrow \mathrm{T}(f(x_1) < f(x_2))]$$

f es estrictamente creciente



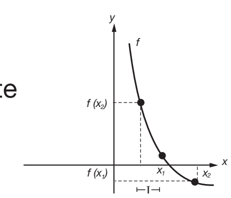


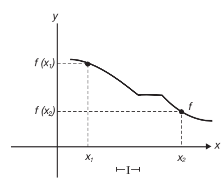
f no es estrictamente creciente

Función Estrictamente Decreciente: Una función *f* es estrictamente decreciente en un intervalo I, si para cualquier elección de x_1, y x_2 en I, siempre que $x_1, < x_2$, tenemos f (x_1) > f (x_2). Esto es:

$$\forall\ x_1, x_2 \in \mathrm{I}\ [(x_1 < x_2) \Longrightarrow (f(x_1) > f(x_2))]$$

f es estrictamente decreciente





f no es estrictamente decreciente

Función Monótona: Se dice que *f* es una función monótona en un intervalo I, si y solo si *f* es o estrictamente creciente o estrictamente decreciente en ese intervalo.

Buen Vivir: **Hábitat y vivienda**

A lo largo del módulo, el profesor puede trabajar con el tema de la necesidad humana de una vivienda, así como enfrentar la realidad del país en torno a este tema. Es preciso que los jóvenes conozcan la situación actual de muchos hogares ecuatorianos que carecen de vivienda y se planteen soluciones dignas a este problema.

Es muy importante que siempre que se trabaje un problema latente de la sociedad, motivando a los estudiantes a buscar soluciones y a ser parte activa de ellas, para que aprendan que es posible cambiar la realidad con esfuerzo y trabajo. Este tipo de práctica les permitirá asumir, poco a poco, ejercer su derecho a la participación en la vida social y les motivará a exigir cumplimiento de las autoridades de la localidad. El derecho a la vivienda está ligado intrínsecamente con la garantía de llevar una vida digna y también lleva consigo otros de tipo económico y social, como el acceso a servicios básicos, vías y carreteras, transporte, movilidad, seguridad. En este sentido, desde la práctica educativa es preciso crear responsabilidad ciudadana.

Bibliografía

ICM-ESPOL, Fundamentos de Matemáticas para bachillerato, 2006.

REES, Paúl y SPARKS, Fred, Álgebra elemental, McGraw Hill Interamericana, México, 1994.

Refuerzo Operaciones combinadas y operaciones con potencias. Sucesiones

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

1. Efectúa las siguientes operaciones con potencias.

a) $(-5)^{\frac{2}{5}} \cdot (-5)^{\frac{3}{4}} \cdot (-5)^{\frac{10}{3}} =$

c) $\left(-\frac{2}{7}\right)^{\frac{1}{3}} \div \left(-\frac{2}{7}\right)^{-\frac{6}{5}} =$

b) $\left[\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{4}{3}}\right]^{\frac{2}{5}} =$

d) $\left[2 \cdot (-5)^2 \cdot \frac{3}{5}\right]^{\frac{6}{7}} =$

2. Expresa en forma de potencia de base real y exponente racional:

3. Efectúa estas multiplicaciones.

a) $5^5 \cdot 5^6 = 5^{(\ldots\ldots + \ldots\ldots)} = 5^{\ldots\ldots}$

c) $(-3)^6 \cdot (-3)^8 = (-3)^{(\ldots\ldots + \ldots\ldots)} =$

b) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2} \div \left(\frac{5}{3}\right)^{3} = \left(\frac{5}{3}\right)^{(\ldots\ldots + \ldots\ldots)} =$

d) $\left(-\frac{2}{9}\right)^{2} \div \left(-\frac{2}{9}\right)^{-6} =$

4. Efectúa estas divisiones.

a) $3^2 \div 3^4 = 3^{(\ldots\ldots - \ldots\ldots)} = 3^{\ldots\ldots}$

c) $(-7)^5 \div (-7)^{-3} = (-7)^{(\ldots\ldots - \ldots\ldots)} =$

b) $\left(\frac{6}{5}\right)^{-3} \div \left(\frac{6}{5}\right)^{7} = \left(\frac{6}{5}\right)^{(\ldots\ldots - \ldots\ldots)} =$

d) $\left(-\frac{3}{2}\right)^{4} \div \left(-\frac{3}{2}\right)^{-15} =$

5. Considera la sucesión 2, 4, 6... Veamos cómo determinar su término general. Observa que, si queremos prolongar la sucesión, podemos considerar dos opciones:

a) Cada término se obtiene multiplicando por .... el número del lugar que ocupa. Luego la sucesión es:

2, 4, 6, ..., ..., ...

Y la expresión del término general será:

$a_n = \ldots\ldots \cdot \ldots\ldots$

b) Cada término, a partir del tercero, se obtiene sumando los dos términos .... Luego la sucesión la podemos continuar como sigue:

2, 4, 6, ..., ..., ...

Y la expresión del término general será:

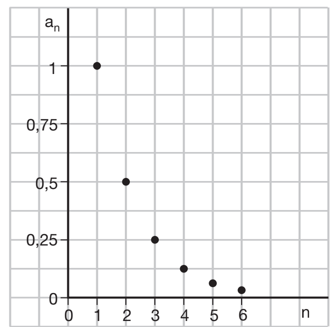
$a_n = a_{n-1} + \ldots\ldots$

6. Considera la sucesión 1, 1, 2, 3, 5..., denominada sucesión de Fibonacci, y escribe la expresión de un término a partir de otros términos anteriores.

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

1. Las sucesiones pueden representarse en un sistema de coordenadas cartesianas. Para ello asignamos a cada término un punto del plano cuya abscisa es igual al lugar que ocupa el término y cuya ordenada es el valor de éste.

   Observa la imagen de la derecha, que corresponde a la representación gráfica de una sucesión.



   a) Escribe los cuatro primeros términos.
   b) Escribe la expresión del término general de la sucesión.
   c) ¿Podrías decir qué le ocurre al valor de un término que ocupa un lugar muy avanzado?
   d) ¿Se trata de una sucesión creciente o decreciente?

2. Representa, en un sistema de coordenadas, la sucesión cuyo término general es $a_n = 2 - \dfrac{1}{n}$.

   — ¿Podrías decir qué le ocurre al valor de un término que ocupa un lugar muy avanzado?

3. Elabora una tabla de valores y dibuja las gráficas de las siguientes funciones.

   a) $y = -4$ b) $y = \dfrac{1}{3}x$ c) $y = 7x - 5$ d) $y = -\dfrac{2}{5}x$

   — Indica el valor de la pendiente de cada una de las funciones anteriores.
   — Ordena las funciones de menor a mayor pendiente.
   — ¿Cuáles de las funciones son crecientes? ¿Cuál es el signo de la pendiente?
   — ¿Cuáles de las funciones son decrecientes? ¿Cuál es el signo de la pendiente?
   — ¿Cuál de las funciones no es creciente ni decreciente?
   — Completa:
   - Una función de primer grado es creciente si su pendiente es .... y es decreciente si su pendiente es ....
   -

Función	Pendiente	Ordenada en el origen	Cuadrantes
$y = -4$	0	-4	3° y 4°
$y = \dfrac{1}{3}x$			
$y = 7x - 5$			
$y = -\dfrac{2}{5}x$			

   - La función $y = -4$ tiene pendiente igual a ...., su ordenada en el origen es b = ... La recta pasa por los cuadrantes .... Es una función ....
   - La función $y = \dfrac{1}{3}x$ tiene pendiente igual a ...., su ordenada en el origen es b = ... La recta pasa por los cuadrantes .... Es una función ....
   - La función $y = 7x - 5$ tiene pendiente igual a ...., su ordenada en el origen es b = ... La recta pasa por los cuadrantes .... Es una función ....
   - La función $y = -\dfrac{2}{5}x$ tiene pendiente igual a ...., su ordenada en el origen es b = ... La recta pasa por los cuadrantes .... Es una función ....

4. Obtén la expresión algebraica de cada una de las funciones dadas por las siguientes tablas de valores.

a)

x	1	2	3	4
y	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$

b)

x	-2	2	4	6
y	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$

c)

x	-3	2	9	12
y	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{2}$	-2

☑ Ficha de evaluación

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

1. Una patrulla espacial se ve obligada a disparar contra un meteorito que está a punto de chocar contra un satélite habitado. La patrulla está formada por una nave capitana y una escolta de seis naves más. Todas las naves tienen el mismo sistema de defensa: tres láseres en cada una de sus dos alas y otro en la parte delantera. El comandante ordena que ataquen en ráfagas de siete disparos. ¿Cuántos disparos se producen en cada ráfaga? Expresa el resultado en forma de potencia.

2. Recuerda que las potencias cuyo exponente es un número racional negativo pueden transformarse en potencias de exponente un número racional positivo.

   — Observa y completa:

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{2}{5}} = \left(\frac{1}{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{2}{5}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{2}{5}} ; \left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{\frac{.....}{.....}}\right)^{.....} = \left(\frac{.....}{.....}\right)^{.....} ; \left(\frac{6}{4}\right)^{-\frac{2}{3}} = ... ; \left(\frac{-9}{5}\right)^{-\frac{3}{2}} = ...$$

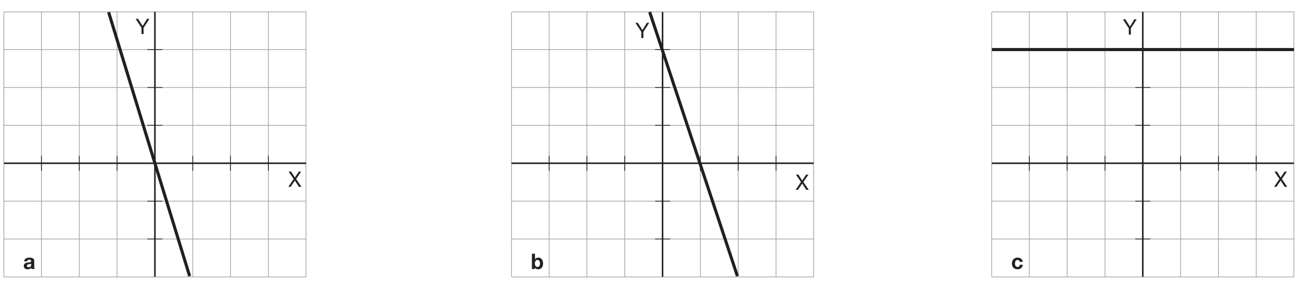
3. Al calentar un determinado líquido con una temperatura inicial de 0 °C, su temperatura aumenta 2 °C cada 3 s.

   a) Las magnitudes temperatura y tiempo, ¿siguen una relación de proporcionalidad directa? ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

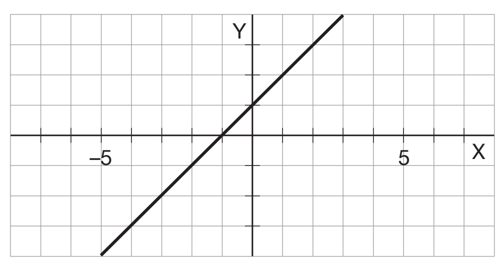
   b) Obtén la expresión algebraica de la función que hace corresponder a cada temperatura el tiempo invertido en alcanzarla. ¿Es una función de proporcionalidad directa?

   c) Dibuja la gráfica de esta función.

4. Obtén la expresión algebraica de las funciones expresadas mediante las siguientes gráficas.



5. Obtén la ordenada en el origen y escribe las coordenadas de un punto de la recta representada en la figura.



   a) Halla la ecuación de la recta a partir de los datos obtenidos anteriormente. Indica los pasos seguidos.

   b) Traza una recta paralela a la anterior y que pase por el punto (1, –2). ¿Cuál será su ecuación?

6. Una tortuga se halla a 10 m de una señal de un cruce de carreteras y empieza a desplazarse en línea recta, alejándose de la señal a una velocidad de 0,02 m/s.

   a) Construye una tabla de valores que relacione la distancia de la tortuga a la señal, medida en metros, respecto del tiempo transcurrido, medido en minutos.

   b) Representa gráficamente la función y obtén su expresión algebraica.

   c) ¿Al cabo de cuánto tiempo se hallará a 22 metros de la señal?

   d) ¿Qué espacio recorrerá en 5 minutos? ¿A qué distancia se hallará de la señal?

Ficha de evaluación

Solucionario

1. $7^3 = 343$. En cada ráfaga se producen 343 disparos.

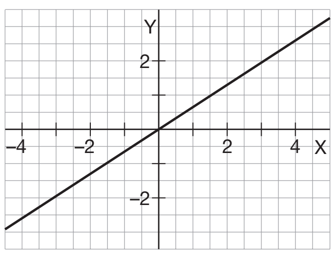
2. $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{5}} = \left(\dfrac{1}{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{\frac{1}{5}}$

$\left(\dfrac{6}{4}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\dfrac{4}{6}\right)^{\frac{2}{3}}$; $\left(\dfrac{-9}{5}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\dfrac{-5}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$

3. a) Sí, $k = \dfrac{2}{3}$; b) $y = \dfrac{2}{3}x$, sí.

c)

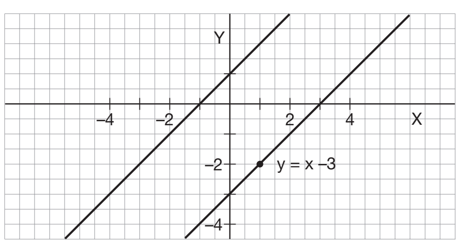
x	y
0	0
1	$\frac{2}{3}$



4. a) $y = -3x$; b) $y = -3x + 3$; c) $y = 3$

5. $b = 1$, P $(-1, 0)$.
   a) $y = mx + b$;
   $b = 1 \Rightarrow y = mx + 1$
   $0 = -m + 1 \Rightarrow m = 1$
   La ecuación de la recta es $y = x + 1$.

   b)

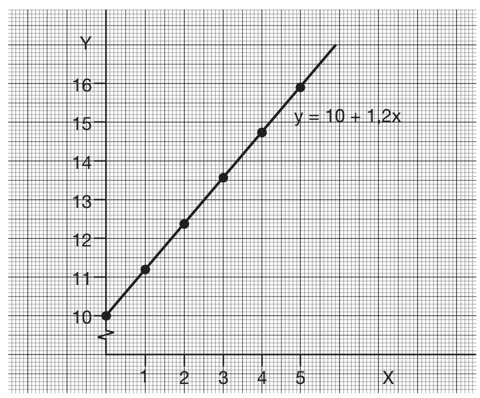


6. a) $0{,}02\ \text{m/s} \cdot \dfrac{60\ \text{s}}{1\ \text{min}} = 1{,}2\ \text{m/min}$

$x \rightarrow$ Tiempo transcurrido en minutos
$y \rightarrow$ Distancia a la señal en metros

x	0	1	2	3	4	5
y	10	11,2	12,4	13,6	14,8	16

b)



c) $22 = 10 + 1{,}2x$

$x = \dfrac{22 - 10}{1{,}2} = 10$

Al cabo de 10 min.

d) $1{,}2\ \text{m/min} \cdot 5\ \text{min} = 6\ \text{m}$

$y = 10 + 1{,}2 \cdot 5 = 16\ \text{m}$

Indicadores esenciales de evaluación

Indicadores esenciales de evaluación	Puede continuar	Necesita refuerzo
	% de alumnos/as	
• Calcula potencias de base real y exponente negativo.		
• Calcula potencias de base real y exponente entero aplicando las propiedades de estas operaciones.		
• Utiliza racionalmente la calculadora para hallar potencias.		
• Construye sucesiones y las clasifica en crecientes y decrecientes.		
• Halla el término general de una sucesión.		
• Representa gráficamente sucesiones.		
• Aplica correctamente las sucesiones en la resolución de problemas.		
• Distingue entre funciones constantes y lineales.		
• Obtiene la expresión algebraica de expresiones constantes y lineales.		
• Representa gráficamente funciones constantes y lineales.		
• Identifica funciones constantes y lineales en situaciones de la vida cotidiana.		
• Muestra interés y perseverancia en el trabajo con funciones constantes y lineales.		

Módulo 5 **Bloques:** Relaciones y funciones. Estadística y probabilidad

Ecuaciones e inecuaciones de primer grado Diagramas de tallo y hojas

Objetivo del módulo

- Aplicar y demostrar procesos algebraicos utilizando ecuaciones e inecuaciones para la resolución de problemas.

DCD Destrezas con criterios de desempeño

- Resolver ecuaciones de primer grado con procesos algebraicos.
- Resolver inecuaciones de primer grado con una incógnita con procesos algebraicos.
- Utilizar el lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones en contextos diversos como la vida cotidiana y los ámbitos socioeconómico, científico y social.
- Resolver problemas de la vida cotidiana utilizando ecuaciones e inecuaciones.
- Tener predisposición para comprobar los resultados obtenidos en la resolución de problemas.
- Utilizar los símbolos propios de las desigualdades así como sus principales características.
- Representar datos estadísticos en diagramas de tallo y hojas.
- Valorar la utilidad del lenguaje algebraico para expresar diferentes situaciones de la vida cotidiana.

Estrategias metodológicas

Relacionada con la DCD: **Resolver ecuaciones de primer grado con procesos algebraicos.**

Para la activación de conocimientos previos

- Revise lo concerniente a las propiedades de las igualdades.
- Cuando se habla de igualdad matemática se establece una comparación de expresiones representada por el signo igual, que separa el primer del segundo miembro.
- En la igualdad se dan cinco propiedades.

1. Propiedad idéntica o reflexiva: toda expresión es igual a sí misma.

$$6b = 6b$$

2. Propiedad simétrica: consiste en poder cambiar el orden de los miembros sin que la igualdad se altere.

Si $39 + 11 = 50$, entonces $50 = 39 + 11$

3. Propiedad transitiva: enuncia que si dos igualdades tienen un miembro en común, los otros dos miembros también son iguales.

Si $4 + 6 = 10$ y $10 = 5 + 5$, entonces $4 + 6 = 5 + 5$

4. Propiedad uniforme: establece que si se aumenta o disminuye la misma cantidad en ambos miembros, la igualdad se conserva.

Si $2 + 5 = 7$, entonces $(2 + 5) + 3 = (7) + (3)$

5. Propiedad cancelativa: indica que en una igualdad se pueden suprimir dos elementos iguales en ambos miembros y la igualdad no se altera.

$$\text{Si } (2 \times 6) - 4 = 12 - 4, \text{ entonces } 2 \times 6 = 12$$

- Estas propiedades y su correcto manejo serán fundamentales para la solución de ecuaciones. Puede remitirse a la página web http://www.pps.k12.or.us de donde se ha tomado esta información presentada.

Para la construcción del conocimiento

- A continuación presentamos un ejemplo de resolución de una ecuación en la que se propone justificaciones a los procesos que se van realizando

Proceso de solución	Nombre de la propiedad o procedimiento	Notación de la propiedad o procedimiento
$\frac{4x+1}{5} = \frac{2}{3} + \frac{2x+1}{3}$	Uniforme (×) de la igualdad por el mcm de los denominadores	$a = b \Rightarrow a \times c = b \times c$ mcm (3,5) = 15
$3(4x+1) = 5(2) + 5(2x+1)$	Distributiva y clausurativa de la multiplicación	$a \cdot (b + c) = ab + ac$ $\forall a, b \in R, ab \in R$
$12x + 3 = 10 + 10x + 5$	Uniforme (+) de la ilgualdad	$a = b \Rightarrow a + c = b + c$
$12x + 3 - 3 - 10x = 10 + 10x + 5 - 3 - 10x$	Conmutativa y asociativa de la adición	$a + b = b + a$ $(a + b) + c = a + (b + c)$
$(12x - 10x) + (3 - 3) = (10x - 10x) + (10 + 5 - 3)$	Inverso aditivo y clausurativa de la suma	$a + (-a) = (-a) + a = 0$ $\forall a, b \in R, a + b \in R$
$2x + 0 = 0 + 12$	Elemento neutro de la suma	$a + 0 = 0 + a = a$
$2x = 12$	Uniforme (×) de la igualdad	$a = b \Rightarrow a \times c = b \times c$
$\frac{1}{2}\, 2x = \frac{1}{2}\, 12$	Inverso multiplicativo y clausurativa de la multiplicación	$a \cdot (\frac{1}{a}) = (\frac{1}{a}) \cdot a = 1$ Recuerde que: $\frac{1}{a} = a^{-1}$ $\forall a, b \in R, ab \in R$
$x = 6$		

- Este esquema de resolución debe ser usado y aplicado por los estudiantes en los trabajos, lecciones y en general en todas las tareas que los estudiantes realicen y desde luego en las ejemplificaciones que usted proponga en sus clases. Este trabajo al inicio puede causar ciertas molestias, pero los frutos que se obtendrán en el corto plazo son importantes, esto justifica impulsar el esquema de trabajo propuesto. La conciencia de las propiedades de las operaciones y de las igualdades, el manejo adecuado de la simbología, la comunicación matemática se ve favorecida, las demostraciones irán ganando en formalidad, pues los razonamientos, argumentos y justificaciones se realizarán con bases matemáticas adecuadas.

Para la aplicación del conocimiento

- Pida a los estudiantes que presenten por escrito todo el proceso para resolver las ecuaciones de primer grado. Así por ejemplo:

1. Agrupar la incógnita.

El primer paso será agrupar en un miembro todos los términos que tengan la incógnita y juntar en el otro todos los términos en los que no aparece. Para hacer esta transposición los términos que suman se transponen restando y viceversa; los términos que multiplican se transponen dividiendo y viceversa.

Ejemplo: $5x - 9 - 104 + 20x = 45 - 6 + 5x$

Trasposición: $5x + 20x - 5x = 45 - 6 + 9 + 104$

2. Despejar cada lado, una vez hecho esto se realiza las operaciones de cada lado.

$$(5 + 20 - 5)x = 45 - 6 + 9 + 104$$

$$20x = 152$$

3. Determinar el valor de la incógnita.

Para despejar la incógnita, el número que multiplica a la «x» se transpone al otro miembro dividiendo. $x = 152/20$, por lo que $x = 7{,}6$.

Para la evaluación

- Debe lograrse que el estudiante en la resolución de problemas pueda:
  1. Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita (sencillas, con paréntesis y con denominadores).
  2. Traducir enunciados al lenguaje algebraico.
  3. Escribir frases que representen a expresiones algebraicas.
  4. Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita (sencillas, con paréntesis y con denominadores).
  5. Resolver un problema mediante el planteamiento de una ecuación.
  6. Resolver oralmente ecuaciones del tipo $ax + b = 0$.
  7. Determinar si dos inecuaciones son equivalentes.

Relacionada con la DCD: **Representar datos estadísticos en diagramas de tallo y hojas.**

Para la activación de conocimientos previos

- Es importante que los/as estudiantes comprendan que el diagrama de tallo y hojas permite obtener simultáneamente una distribución de frecuencias de la variable y su representación gráfica. Este tipo de representación es similar a un histograma debido a que los valores de los datos se presentan en intervalos y desplegados en barras. Sin embargo, de un diagrama de tallo y hoja se puede recobrar más información de los dígitos de cada uno de los números y también se puede ver si algún valor es identificado como atípico.
- Se sugiere que el profesor/a trabaje este conocimiento con información propia de su entorno; por ejemplo, las edades de un grupo humano, entre otros.

Para la construcción del conocimiento

- Reconocer la estructura del diagrama de tallo y hojas.
- Construir diagramas de tallo y hojas con información real, en que se maneje la información en dos o tres cifras, por ejemplo, las edades de los estudiantes.
- Realizar el diagrama, colocando en la primera columna, el tallo, la cifra de las decenas (en caso de números de dos cifras) y en la segunda columna, las hojas, la cifra de las unidades. Si los datos tienen tres cifras, el tallo tiene dos cifras y las hojas una.
- Finalmente y lo que importa, es que se debe interpretar la información resumida en el diagrama.

Para la aplicación del conocimiento

- Los estudiantes explicarán la información resumida en un diagrama de tallo y hojas, expresarán sus opiniones sobre las ventajas de este tipo de presentación de datos.
- Algunas ventajas son:

  1) Con una rápida observación, conocemos la información cuantitativa del fenómeno.

  2) Es útil especialmente si el número de datos es pequeño, hasta 40 datos. Cuando las cantidades son muy grandes, la observación de datos se dificulta.

Para la evaluación

- Pida a los estudiantes que describan información pertinente a su condición, a partir del diagrama de tallos y hojas. La información incluirá su edad, estatura, peso, talla del calzado entre otros. Si su Institución es mixta, para ciertos casos (estatura) debe tratarse por separado, pues la diferencia de género refleja diferencia de datos.

Recomendaciones para docentes

Sección para uso exclusivo del educador

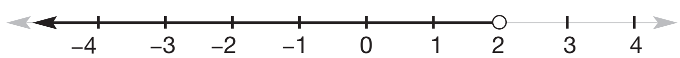
Para resolver una inecuación

Resolver una inecuación es hallar los valores que satisfagan la inecuación.
Las inecuaciones se resuelven en forma semejante que las ecuaciones. Realizar las operaciones indicadas si las hay, suprimir signos de agrupación, transponer términos, etc., con la diferencia ya anotada de que al multiplicar o dividir los dos miembros por un número negativo, esta cambia de sentido (si el signo es >, se escribe < y viceversa).
Tenga en cuenta que las inecuaciones poseen, en general, infinitas soluciones y que estas se expresan de dos formas: a) Mediante una inecuación sencilla, elemental. b) En forma gráfica, representada en una recta donde se da énfasis al conjunto solución.
Resolvamos algunos ejemplos: $5x - 10 < 0$
Despejando la incógnita y simplificando:

$$5x - 10 < 0 \quad \Rightarrow \quad 5x - 10 + 10 < 0 + 10 \quad \Rightarrow \quad 5x < 10 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{10}{5} \quad \Rightarrow \quad x < 2$$

El conjunto de los números reales menores que 2 son soluciones de la inecuación.
2 es el límite superior de x; es decir, que la inecuación dada (desigualdad), solo se verifica para los valores de x menores que 2.
Verifiquemos sustituyendo $x < 2$ en la inecuación, por ejemplo: $x = 1$.

Gráficamente representado:



Recuerde:

1. Si a los dos miembros de una inecuación se suma (o se resta) un mismo número, se obtiene otra inecuación equivalente. En consecuencia, un término cualquiera de una inecuación puede transponerse de un miembro a otro cambiándose por su opuesto.
2. Si se multiplican (o dividen) a los dos miembros de una inecuación por un número positivo, resulta otra inecuación equivalente. En consecuencia, se puede suprimir denominadores positivos sin que varie la relación de orden.
3. Si se multiplican o dividen los dos miembros de una inecuación por un número negativo se obtiene otra inecuación equivalente al cambiar el signo de la relación de orden por su contrario.

Buen Vivir: Trabajo y seguridad social

El profesor/a puede utilizar la actividad inicial del módulo, así como los conocimientos de este, para reflexionar acerca de la importancia del trabajo en los seres humanos. Es necesario reforzar valores transversales como la disciplina, la constancia, el orden y otros que ayudan a las personas a cumplir sus labores con eficiencia. Es muy importante que se aproveche este tema para fortalecer la necesidad de educación para que los estudiantes se motiven a aprender. Explique también que hay diferentes posibilidades de demostrar los talentos y capacidades, es decir que hay trabajos físicos, intelectuales, manuales, mecánicos, etc. y que todos son complementarios. Recuerde a los alumnos/as que el trabajo y la organización son formas de coexistencia armónica en todos los tiempos y sociedades.

Aproveche también este tema para reflexionar acerca de la inclusión de las personas con capacidades especiales en el trabajo, más aun si en el aula existe una. Refuerce el sentido de dignidad, respeto, igualdad, integración y cumplimiento de derechos por parte de la sociedad y del Estado hacia las personas con capacidades especiales. Analice si en la escuela y fuentes de trabajo de la localidad existen las condiciones adecuadas para que se dé la integración de personas con diversas capacidades en su institución. ¿Qué es necesario? ¿Cuál es el compromiso que como compañeros deben asumir?

Bibliografía

http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/ciencias/2001065/html/un1/diagrama_tallos_y_hojas.html
http://www.estadisticaparatodos.es/taller/graficas/tallos_hojas.html
http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/33/matematicas-33.html

Ficha 1

Refuerzo Resolución de problemas con expresiones algebráicas

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

El uso de expresiones algebraicas es de gran ayuda a la hora de plantear la resolución de un problema.

1. Completa los pasos que faltan en los diversos planteamientos que podemos seguir para resolver el problema del enunciado siguiente.

   El padre de María ha comprado dos tablas de madera cortas y una larga. Ha pagado \$ 12,6 por todas ellas. Si la tabla larga cuesta \$ 1,8 más que cada una de las cortas, calcula el precio de cada tabla.

Muchas veces una representación gráfica, esquemática y simplificada nos ayudará a resolver el problema.	Se aproxima el planteamiento gráfico y el simbolismo algebraico, y se da sentido a la introducción de incógnitas para indicar las cantidades desconocidas.
Tabla corta:	Tabla corta: x
Tabla corta: 12,6	Tabla corta: x ....
Tabla larga:	Tabla larga: x 1,8
3 tablas cortas + 1,8 = ...	
3 tablas cortas = 12,6 – 1,8	Ecuación: $x + x + x + 1{,}8 = 12{,}6$
3 tablas cortas = 10,80 ; entonces, 1 tabla corta = 10,80 ÷	.... x = 12,6 – .... → 3x = ...
Tabla corta = \$ 3,6	x = 10,8 ÷ .... → x = 3,6
La tabla corta vale \$ 3,6 y la larga, \$ 5,4.	La tabla corta vale \$ .... y la larga, \$ .....

2. Resuelve los problemas de cada uno de estos apartados.
   a) La suma de dos números pares consecutivos es 34. ¿Cuáles son estos números?
   b) Un andinista llega a la cima de una montaña después de cuatro días de ascensión. El primer día recorrió la mitad del trayecto; el segundo día, un cuarto; el tercer día, un octavo, y el cuarto día, los 1 000 m que lo separaban de la cima.

      ¿Cuál es la distancia que ha recorrido el andinista durante la ascensión?
   c) El número de autobuses de una determinada línea que circulan cada día se reduce durante el verano. Así, el mes de junio circuló la mitad; el mes de julio, una tercera parte, y el mes de agosto sólo circularon 9.

      ¿Cuál es el número de autobuses de esta línea que circulan los meses que no son verano?
3. Relaciona con flechas cada expresión numérica con su expresión algebraica correspondiente.

$3 \cdot 4 + 5 \cdot 7$	
$12 \cdot 64 + 6 \cdot 72$	
$43 \cdot 65 + 11 \cdot 45$	$3a + 5b$
$3 \cdot 24 + 5 \cdot 55$	$12a + 6b$
$12 \cdot 6 - 4 \cdot 5$	$34a - 6b$
$12 \cdot 33 + 6 \cdot 72$	$47a + 5b$
$12 \cdot 56 - 6 \cdot 77$	$43a + 11b$
$34 \cdot 15 - 6 \cdot 39$	$12a - 6b$
$47 \cdot 12 + 5 \cdot 65$	$12a - 4b$
$12 \cdot 6 - 6 \cdot 44$	$13a + 7b - 12c$
$3 \cdot 91 + 8 \cdot 55$	$3a + 8b$
$47 \cdot 36 + 5 \cdot 33$	
$13 \cdot 74 + 7 \cdot 84 - 12 \cdot 66$	

Refuerzo Sistemas de inecuaciones

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

1. Resuelve este sistema de inecuaciones. Sigue los pasos indicados y completa:

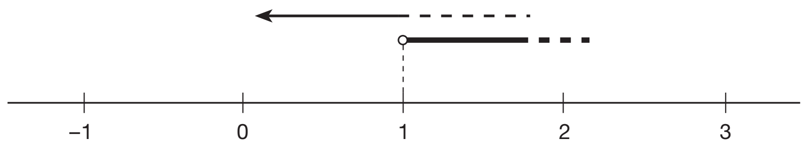
$$\left.\begin{array}{r} 2x+1>3 \\ x+2\geq 2x \end{array}\right\}$$

— Resuelve cada una de las inecuaciones.

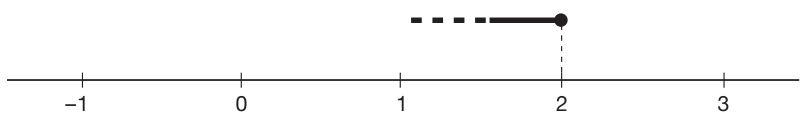
Primera inecuación: $2x + 1 > 3$; $2x > 3 -$ ....; $x >$ ....; $\mathbf{S_1} = ($ ...., $+\infty)$

Segunda inecuación: $x + 2 \geq 2x$; .... ≥ -2; $x \leq$ ....; $\mathbf{S_2} = (-\infty,$ ....$]$

— Representa en una misma recta numérica el conjunto solución de cada inecuación.



— Determina las soluciones comunes a las dos inecuaciones. Para hacerlo, dibuja la intersección de los intervalos solución de cada inecuación. Éste será el conjunto solución del sistema.



— El conjunto solución es, entonces: $\mathbf{S} = ($.................., ...$]$.

Cuando no hay ningún valor que verifique todas las inecuaciones del sistema al mismo tiempo, decimos que el sistema no tiene solución.

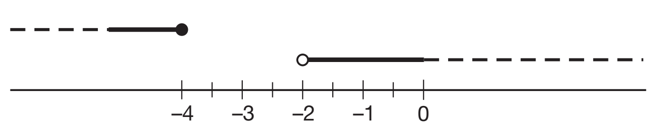
2. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones. $\left.\begin{array}{r} 4x+3>-5 \\ 3x+2\leq 2(x-1) \end{array}\right\}$

— Resuelve cada una de las inecuaciones.

Primera inecuación: $4x + 3 > -5$; $4x >$ .... ; $x >$ ....; $\mathbf{S_1} = ($ ...., $+\infty)$

Segunda inecuación: $3x + 2 \leq 2x - 2$; .... $\leq$ ....; $x \leq$ ....; $\mathbf{S_2} = (-\infty,$ ....$]$

— Represent en una misma recta numérica el conjunto solución de cada inecuación.



— Determina las soluciones comunes a las dos inecuaciones.

— Como no existen valores que sean a la vez solución de las dos inecuaciones, el sistema no tiene solución. $\mathbf{S} =$ ....

3. Resuelve ahora los siguientes sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} 3x-1>x+1 \\ 2x-1\leq 9 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 7-x\leq -5 \\ \frac{1}{2}(x-8)\leq 3 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} 3x-1>2 \\ x+2\leq 3 \end{array}\right\}$

Módulo 5

☑ Ficha de evaluación

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

1. En una oficina se instalan *m* mesas, de seis patas cada una, y el triple de sillas, de cuatro patas cada una, para que trabajen dos personas en cada mesa. Escribe en lenguaje algebraico:
   a) El número de sillas.
   b) El número de personas que trabajarán en la oficina.
   c) El número de patas de sillas y de mesas que habrá en total.

2. Calcula el número de sillas y de personas que trabajarán en la oficina del ejercicio 1 si en total se instalan 8 mesas.

3. Resuelve las ecuaciones siguientes.
   a) $2 + 3x = 5x - 6$
   b) $3 - 2(x - 5) = 4$
   c) $3x + 5(x + 2) = 6(x + 3)$
   d) $2x - (x - 3) = 5(x - 1)$

4. Resuelve estas ecuaciones.
   a) $\frac{x}{5} - \frac{x}{2} = -3$
   b) $x + 2 + \frac{x}{3} = 2\left(\frac{x}{3} + 8\right)$
   c) $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{2} = -1$
   d) $\frac{x-3}{x+8} = \frac{5}{16}$

5. Inti dice a un compañero:
   «*El doble de mi edad más 3 es igual al triple de mi edad menos 13.*»
   ¿Qué edad tiene Inti?

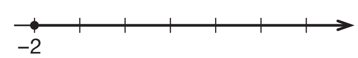
6. Expresa algebraicamente las situaciones descritas por las siguientes frases.
   a) La madre de Úrsula es muy joven. Aunque a su edad le añadas 10, no llega a los 45 años.
   b) Juan guarda en su cartera dos billetes de 5 dólares. Si a esta cantidad le suma la calderilla que lleva en el bolsillo de los pantalones, puede comprar una entrada de $ 15 para el partido del domingo, y todavía le sobra dinero.

7. Indica cuáles de los siguientes valores son soluciones de la inecuación $\frac{5x-4}{3} < 3x$.
   a) $x = -1$ b) $x = 0$ c) $x = 1$ d) $x = 2$

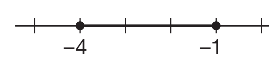
8. Determina si estas dos inecuaciones son equivalentes.
   a) $2x + 3 > 1 + 3x$ b) $5x - 2 < 8$

9. Resuelve los siguientes sistemas indicando los pasos del procedimiento que has utilizado. Representa gráficamente las soluciones.
   a) $\left.\begin{array}{l} x - 1 \geq -3 \\ 4x + \frac{2}{7} < \frac{3}{7}x + 1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 3y < 2 - y \\ y + 1 \leq 3 + 5y \end{array}\right\}$

10. Escribe una inecuación o sistema de inecuaciones de primer grado con una incógnita para cada uno de los intervalos representados en la figura.



a



b

11. Queremos construir una piscina de 100 m^2 de superficie como máximo. Si la longitud es de 12 m, ¿cuánto puede medir de ancho?

12. Plantea un conjunto de datos tomados de una situación de la vida diaria que pueda ser representado mediante la técnica del diagrama de tallo y hojas.

Ficha de evaluación

Solucionario

1. a) $3m$; b) $2m$; c) $6m + 4 \quad 3m = 18m$

2. 24 sillas; 16 personas.

3. a) $-2x = -8$; $x = 4$
   b) $3 - 2x + 10 = 4$; $-2x = -9$; $x = 4{,}5$
   c) $3x + 5x + 10 = 6x + 18$; $2x = 8$; $x = 4$
   d) $2x - x + 3 = 5x - 5$; $-4x = -8$; $x = 2$

4. a) $2x - 5x = -30$; $-3x = -30$; $x = 10$
   b) $3x + 6 + x = 2x + 48$; $2x = 42$; $x = 21$
   c) $x - 1 - x - 1 = -2$; $0x = 0 \Rightarrow$ infinitas soluciones
   d) $16\,(x - 3) = 5\,(x + 8)$; $16x - 48 = 5x + 40$; $11x = 88$; $x = 8$

5. Si x es la edad de Inti, la ecuación que hemos de plantear es:

$$2x + 3 = 3x - 13$$

Resolución:

$$-x = -16;\ x = 16$$

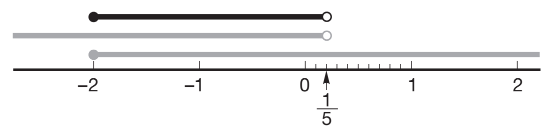
La edad de Inti es 16 años.

6. a) $x + 10 < 45$; *b)* $10 + x > 15$.
7. a) $-3 \quad -3$; b) $-\dfrac{4}{3} < 0$; c) $\dfrac{1}{3} < 3$; d) $2 < 6$.
   Son solución $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

8. a) $2x + 3 > 1 + 3x$; $2x - 3x > 1 - 3$;
   $-x > -2$; $x < 2$
   b) $5x - 2 < 8$; $5x < 8 + 2$; $5x < 10$;
   $x < 2$
   En efecto, las dos ecuaciones son equivalentes.

9. a) $\left.\begin{array}{l} x \geq -2 \\ 28x + 2 < 3x + 7 \end{array}\right\}$

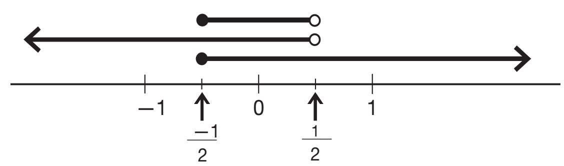
$$\mathbf{S} = \left[-2, \frac{1}{5}\right) \qquad \left.\begin{array}{l} x \geq -2 \\ x < \dfrac{1}{5} \end{array}\right\}$$



b) $3y + y < 2$; $4y < 2$; $y < \dfrac{1}{2}$

$y - 5y \leq 3 - 1$; $-4y \leq 2$; $4y \geq -2$; $y \geq -\dfrac{1}{2}$

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$



10. Respuesta sugerida.
    a) $2x + 1 \geq -3$
    b) $\left.\begin{array}{l} 2x \leq -2 \\ 4 - x \leq 8 \end{array}\right\}$

11. Llamamos *a* a la anchura.
    Entonces, $12 \cdot a \leq 100$; $a \leq \dfrac{25}{3}$

12. Respuesta abierta.

Indicadores esenciales de evaluación

	Puede continuar	Necesita refuerzo
	% de alumnos/as	
• Escribe ecuaciones correspondientes a enunciados verbales sencillos.		
• Identifica la incógnita y los miembros de una ecuación. Reconocer las soluciones de una ecuación.		
• Aplica los métodos del razonamiento inverso y de tanteo para resolver ecuaciones sencillas.		
• Resuelve ecuaciones de primer grado con una incógnita aplicando las propiedades de las igualdades.		
• Resuelve inecuaciones.		
• Resuelve problemas de la vida cotidiana mediante el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.		
• Elabora digramas de tallo y hojas.		

Módulo 6 **Bloques:** Geométrico. De medida

Líneas de simetría
Áreas
Medidas en grados de ángulos notables

Objetivo del módulo

- Resolver problemas de áreas de prismas y cilindros y analizar sus soluciones para profundizar y relacionar conocimientos matemáticos.

DCD Destrezas con criterios de desempeño

- Reconocer líneas de simetría en figuras geométricas.
- Construir pirámides y conos a partir de patrones en dos dimensiones.
- Calcular áreas laterales de prismas y cilindros en la resolución de problemas.
- Reconocer medidas en grados de ángulos notables en los cuatro cuadrantes con el uso de instrumental geométrico.
- Afrontar problemas geométricos con confianza en las propias capacidades.

Estrategias metodológicas

Relacionada con la DCD: **Reconocer líneas de simetría en figuras geométricas.**

Para la activación de conocimientos previos

- Algunos alumnos tienen dificultades para asimilar el concepto de movimiento en geometría, sobre todo en el caso de las simetrías. Para superarlas, es útil el uso de figuras planas recortadas en cartulina.
- Este tipo de material manipulativo permite visualizar los *momentos intermedios* del proceso de transformación, insistiendo en el hecho de que en geometría éstos no se consideran.
- Así, el profesor/a puede proponer actividades en las que, por grupos, los alumnos compartan sus experiencias al efectuar movimientos en el plano con diversas figuras recortadas.
- Adicionalmente, es recomendable que el profesor/a informe de que las simetrías axiales también reciben el nombre de *reflexiones*, y que les sugiera experimentos sencillos con espejos.
- Este tipo de experiencias permite comprender más fácilmente algunas propiedades de las simetrías axiales; por ejemplo, que la *transformación inversa* de una reflexión es ella misma. Y a continuación, si el profesor/a lo considera conveniente, introducir ya el concepto de transformación inversa.

Para la construcción del conocimiento

- Definir los conceptos de transformación geométrica, transformación isométrica, vector y sentido de una figura, y utilizarlos para efectuar movimientos en el plano.
- Las transformaciones geométricas son la o las operaciones geométricas que permiten crear una nueva figura a partir de una previamente dada. La nueva figura se llamará "homólogo" de la original.
- Hay varios tipos de transformaciones geométricas; de estas, analizaremos la simetría, la traslación y la rotación.

1. **Simetría:** correspondencia biunívoca entre dos puntos del plano o del espacio, situados a uno y otro lado del centro, eje o plano de simetría y a la misma distancia de él.
2. **Traslación:** es un movimiento en el plano que puede ser entendido como un deslizamiento en línea recta sin que se produzcan giros.
3. **Rotación:** es el movimiento al rededor de un punto fijo o de una recta fija realizando un giro.

- Analizar el procedimiento para construir la figura simétrica de una dada. Estudiar las propiedades que se cumplen en una simetría central y en una simetría axial.
- Observar en un ejemplo el procedimiento para trasladar una figura plana. Analizar las propiedades que se cumplen en una traslación.
- Analizar el procedimiento al rotar un segmento AB al rededor de un punto A, un ángulo determinado.

Para la aplicación del conocimiento

Existe una variedad de actividades referentes a la simetría; por ejemplo se puede dibujar, en una hoja doblada por la mitad, la mitad de una figura geométrica y luego cortarla; dibujar triángulos dados segmentos simétricos; identificar los ejes de simetría en figuras dadas. A continuación presentamos una actividad interesante tomada de la página web: http//curso0708.wikispaces.com.

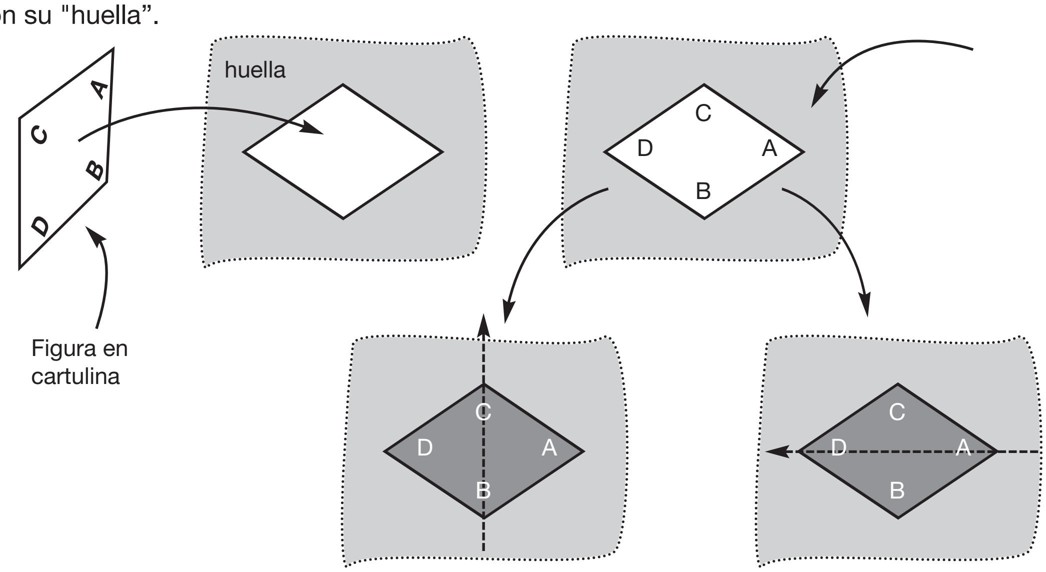
Movimientos sobre huella

El objetivo es que los alumnos conozcan la definición y las características generales de la simetría y la ubiquen. Además sepan diferenciar la simetría rotacional de la axial, y comprueben cuántos órdenes de simetría tienen.

Necesitan una cartulina de forma poligonal (por ej. rombo), cartón, tijeras, marcadores.

El modelo se detalla a continuación. Se recorta la cartulina con la forma poligonal y se identifican los vértices por ambas caras, de manera que se ponga la misma letra en cada vértice en las dos caras en que se puede postrar la "huella de la figura" sobre la hoja. Se cuenta el número de movimientos en que se puede encajar sin que se repitan, y ese será el número de líneas de simetría que tiene.

En este ejercicio los alumnos comprueban otra manera de describir ejes de simetría en un plano; hay tantas líneas de simetría como maneras diferentes en que se pueda mover la figura para que vuelva a coincidir con su "huella”.



Tomado de:http://curso0708.wikispaces.com/Aplicaci%C3%B3n+en+el+aula+de+la+simetr%C3%ADa

Para la evaluación

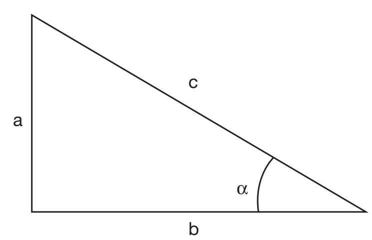
Motive a sus estudiantes a que realicen las actividades y problemas planteados en este módulo y que hacen referencia a la simetría de las figuras. Podría usar el tangram.

Solicite que realicen un trabajo práctico similar al que se planteó en la sección anterior. Los elementos deberán ser los del entorno. La creatividad es uno de los recursos que más debe ser considerado.

Relacionada con la DCD: **Reconocer medidas en grados de ángulos notables en los cuatro cuadrantes con el uso de instrumental geométrico.**

Para la activación de conocimientos previos

- Recuerde el teorema de Pitágoras, el cual dice: "En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la medida de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos"
- Determinen las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo. Para ello sería conveniente realizar un ejercicio práctico.
- Si miramos el triángulo podemos describir tres razones que son intrínsecas de los ángulos agudos, ya que las razones solamente dependen del ángulo α debido al teorema de Tales.



$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}\ ;\ \text{sen}(\alpha) = \frac{a}{c}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{longitud del cateto adyacente a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}\ ;\ \cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$

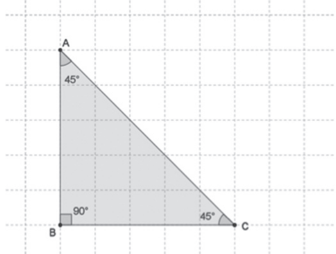
$$\tan(\alpha) = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud del cateto adyacente a } \alpha}\ ;\ \tan(\alpha) = \frac{a}{b}$$

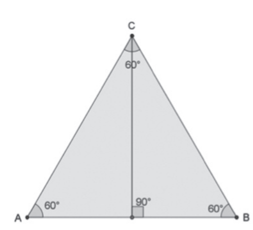
- A partir de estas definiciones podemos calcular razones trigonométricas aproximadamente dibujando y midiendo simplemente.
- Estas razones trigonométricas evidentemente no dependen del triángulo que tracemos sólo dependen del ángulo.
- También deben señalarse desde el principio algunas propiedades sencillas e intuitivas, el seno y el coseno proveen valores entre 0 y 1.
- Las razones trigonométricas son sólo números y no tienen una magnitud asociada. Por tanto, nunca deben acompañarse de unidades de medida.
- Si en el cálculo de las razones trigonométricas aparecen raíces, conviene recordar que estas deben conservarse y, como mucho, puede calcularse una aproximación después de simplificar al máximo la expresión con raíces. Esto es especialmente importante en los problemas porque la simplificación puede llevar a errores. En cualquier caso, si se lleva a cabo la aproximación, debe darse un número mínimo de cifras significativas.

Para la construcción del conocimiento

- Observen las definiciones de seno, coseno y tangente de un ángulo agudo, y saberlas aplicar. Deduzcan a partir de estas las razones trigonométricas inversas.

- Obtengan las razones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60° a partir de construcciones geométricas sencillas.
- Dibuje las razones trigonométricas de ángulos notables.





Para la aplicación del conocimiento

- Reconozcan, a través de ejemplos, las aplicaciones de la trigonometría en otras ciencias. Así: En Topografía se puede determinar la altura de un edificio, teniendo la base y el ángulo. Por ejemplo, la torre de Pisa, fue construida sobre una base de arena poco consistente; debido a ello ésta se aparta cada vez más de su vertical. Originalmente tenía una altura de 54,6m, aproximadamente. En 1990 un observador situado a 46 m del centro de la base de la torre, determinó un ángulo de elevación de 54º a la punta de la torre, el observador para determinar al desplazamiento (hundimiento en el suelo es muy pequeño, comparado con la altura de la torre) aplicó la ley del seno para determinar el ángulo de inclinación y la ley del coseno para determinar el desplazamiento de la torre.
- En la aviación, si dos aviones parten de una base aérea a la misma velocidad formando un ángulo y siguiendo en trayectorias rectas, se puede determinar la distancia que se encuentran entre los mismos.

Para la evaluación

Resuelva problemas que se basen en triángulos rectángulos y la aplicación de las relaciones trigonométricas.

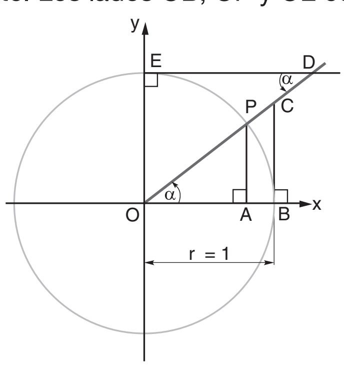
Recomendaciones para docentes

Sección para uso exclusivo del educador

Razones trigonométricas en la circunferencia goniométrica

Se llama circunferencia goniométrica a la que tiene por radio la unidad (r=1) y su centro coincide con el origen del sistema de coordenadas cartesianas. Los ejes del plano delimitan cuatro cuadrantes que se enumeran en el sentido antihorario.

En la construcción observamos los triángulos semejantes: ΔOAP, ΔOBC y ΔDEO con sus ángulos homólogos respectivamente. Los lados $\overline{OB}$, $\overline{OP}$ y $\overline{OE}$ corresponden al radio y su medida es la unidad.



$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{AP}}{1} = \overline{AP} \qquad \cot(\alpha) = \frac{\overline{ED}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{ED}}{1} = \overline{ED}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OA}}{1} = \overline{OA} \qquad \sec(\alpha) = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC}}{1} = \overline{OC}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{CB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CB}}{1} = \overline{CB} \qquad \csc(\alpha) = \frac{\overline{OD}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{OD}}{1} = \overline{OD}$$

La ordenada del punto P de la circunferencia corresponde al seno y la abscisa al coseno; dichas funciones toman valores entre -1 y 1 incluidos.

Buen Vivir: Biodiversidad y ambiente sano

Conservación del patrimonio natural

Este módulo permite al profesor/a afianzar en sus estudiantes la importancia de los bienes patrimoniales en el sentido de pertenencia e identidad; a la vez, es necesario tratar el tema de las obligaciones de todos/as los ecuatorianos/as por conservarlos y cuidarlos para que de esta manera sigan trascendiendo en el tiempo y sigan siendo un símbolo del país.

Establecer dos bandos, el uno a favor de la explotación del Parque Nacional Yasuní-ITT y el otro en contra de la extracción de los recursos. Deberán presentar un debate, con argumentos ecológicos, económicos, presentar en tablas, imágenes, proyecciones. Invitar a alumnos de otros cursos para que sean el jurado y determinen quién realmente tiene la razón. Otra opción sería la de invitar a un ambientalista que dé una conferencia sobre el tema.

Bibliografía

http://www.aulafacil.com/matematicas-basicas/geometria/curso/Lecc-30.htm

http://curso0708.wikispaces.com/Aplicaci%C3%B3n+en+el+aula+de+la+simetr%C3%ADa

http://platea.pntic.mec.es/jcarias/cns1/02excel/05ftrigexcel.htm

http://www.amazoniaporlavida.org/es/Parque-nacional-Yasuni/El-Parque-Nacional-Yasuni.html

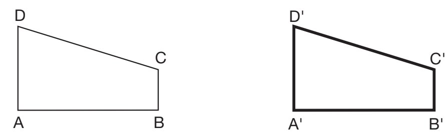
Refuerzo Transformaciones isométricas y simetrías

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

1. Las *transformaciones isométricas* o *movimientos* transforman una figura en otra de la misma .... y del mismo .... Para reforzar la comprensión de sus propiedades, completa la siguiente tabla.

Movimiento	Elementos	Puntos invariantes	Rectas invariantes	Sentido
	Vector traslación: $\vec{v}$		Las rectas paralelas al vector de traslación.	Directo
Simetría central		El centro: *O*		
Simetría axial	Eje de simetría: *e*			
Giro (≠180°)				

Observa el cuadrilátero de la figura siguiente:



— El movimiento que ha descrito el cuadrilátero es una ....

— Un vector de .... sería, por ejemplo, *DD'*. Otros vectores serían: ...., ... o ....

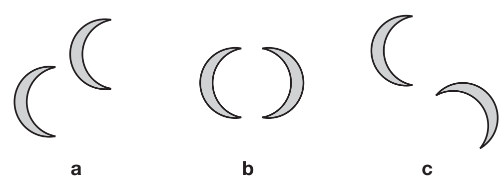
— Las rectas paralelas al vector de traslación, como la recta que contiene a los lados *AB* y *A'B'*, son ....

— Es un movimiento ...., ya que conserva el sentido de la figura.

2. ¿Por qué las ambulancias llevan escrita la palabra Ambulancia de esta manera?

— Si escribimos la palabra AMBULANCIA con mayúsculas, ¿qué letras se verán igual a través de un espejo? ¿Qué característica tienen estas letras?

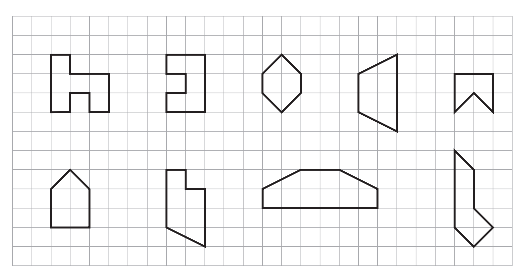
3. Indica el movimiento que se ha aplicado en cada caso y señala sus características.



4. En la figura de la derecha tienes dibujados diferentes polígonos.

— Investiga cuáles sirven para embaldosar y cuáles no.

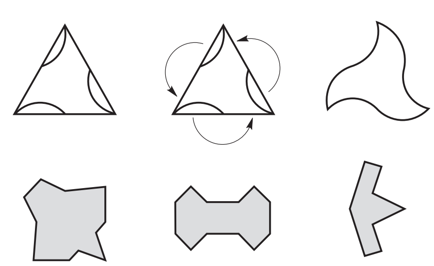
— Diseña otros polígonos que sirvan para embaldosar.



5. Observa, en la figura de la derecha, cómo, a partir de un triángulo equilátero, podemos obtener la baldosa que se denomina *pajarito*.

— Averigua cómo se han obtenido las baldosas *pez volador, hueso* y *avión*, representadas en la figura de la derecha.

— Recorta varias copias de cada una de ellas y forma los mosaicos correspondientes.



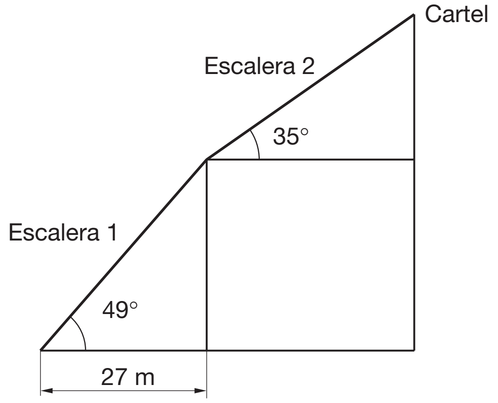
Refuerzo **Triángulos rectángulos y factores de conversión**

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

1. La suma de los ángulos de un triángulo cualquiera es siempre 180°. Sabes que un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo de 90°. Por tanto, la suma de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo es: 180 – 90 = 90°. Completa las líneas de puntos siguientes:

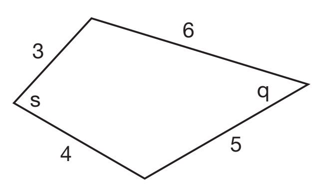
   • Si un ángulo agudo de un triángulo rectángulo mide 60°, el otro mide 90 – ....
   • Si un ángulo agudo de un triángulo rectángulo mide 30°, el otro mide ....
   • Si un ángulo agudo de un triángulo rectángulo mide 45°, el otro mide ....

2. Un operario ha de colocar un cartel en la azotea de un edificio. Para ello, debe subir dos tramos de escalera de la misma longitud pero distinta inclinación, tal como muestra la figura.



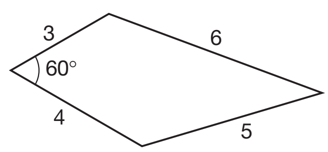
   ¿Cuál es la altura máxima a la que se llega con la segunda escalera respecto del suelo?

3. Cuatro estacas están unidas por sus extremos formando un cuadrilátero. Las estacas miden 3, 4, 5 y 6 metros, y están colocadas de la forma que se indica en la imagen.



   ¿Qué valores pueden tener los ángulos *s* y *q*?

   Las estacas toman ahora esta otra configuración: las estacas de 3 y 4 metros forman un ángulo de 60º.

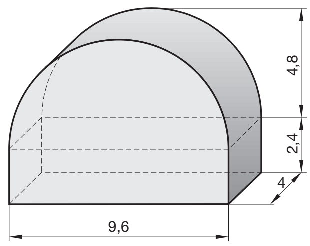


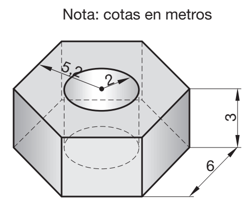
   ¿Cuáles son ahora los ángulos internos del cuadrilátero?

☑ Ficha de evaluación

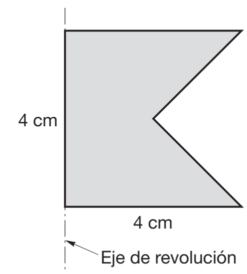
Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

1. Calcula el área total de los cuerpos siguientes.



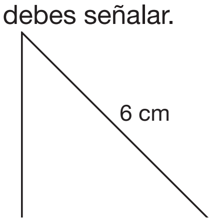


2. Calcula el área del cuerpo geométrico que se obtiene al girar la siguiente figura plana alrededor del eje de revolución dibujado.



3. Indica la medida de los ángulos de estos triángulos rectángulos, sabiendo que tienen un ángulo de 45° que debes señalar.

Fig. 3



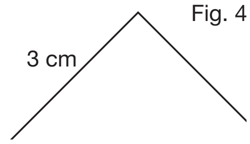


Fig. 4

Sabemos que sen 45° = cos 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Con ello podemos deducir que si *h* es el valor de la hipotenusa, ambos catetos de un triángulo rectángulo con un ángulo de 45° deben medir $\frac{\sqrt{2}}{2}h$.

a) ¿Cuánto miden los catetos en el triángulo de la figura 3? ....

b) ¿Cuánto miden la hipotenusa y el otro cateto del triángulo de la figura 4?....................

c) Comprueba que ambos triángulos cumplen el teorema de Pitágoras.

4. Calcula, utilizando siempre un ángulo del primer cuadrante, las razones trigonométricas de los ángulos siguientes.

	sen α	cos α	tan α
120°			
$\frac{5\pi}{3}$ rad			
$\frac{5\pi}{4}$ rad			
−750°			
2 385°			

5. Halla todos los ángulos comprendidos entre 0° y 360° que verifican:

a) $\cos\alpha = \frac{-1}{2}$ b) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ c) $\tan\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{3}$

Ficha de evaluación

Solucionario

1. $A_1 = 2 \cdot 4\text{ m} \cdot 2{,}4\text{ m} + 2 \cdot 9{,}6\text{ m} \cdot 2{,}4\text{ m} +$

   $+ 9{,}6\text{ m} \cdot 4\text{ m} + \pi \cdot (4{,}8\text{ m})^2 + \pi \cdot 4{,}8\text{ m} \cdot 4\text{ m}$

   $A_1 = 236{,}38\text{ m}^2$

   $$A_2 = 6 \cdot 6\text{m} \cdot 3\text{m} + 2 \cdot \frac{36\text{m} \cdot 5{,}2\text{m}}{2} -$$

   $$-2 \cdot \pi \cdot (2\text{m})^2 + 2 \cdot \pi \cdot 2\text{m} \cdot 3\text{m}$$

   $A_2 = 307{,}77\text{ m}^2$

2. La figura plana genera dos troncos de cono unidos por la base menor.

   Calculamos el área de cada uno sin la base compartida.

   $A_{tronco} = \pi\, g\, (R + r) + \pi\, R^2$

   $A_{tronco} = (\pi \cdot 2\sqrt{2} \cdot (4 + 2) + \pi \cdot 4^2)\text{ cm}^2$

   $A_{tronco} = 103{,}58\text{ cm}^2$

   $A_{total} = 207{,}16\text{ cm}^2$

3. a) Si el valor de la hipotenusa es de 6 cm, los dos catetos de un triángulo rectángulo con un ángulo de 45° deben medir:

   $$\frac{\sqrt{2}}{2} 6 = 3\sqrt{2}\text{ cm}$$

   b) Si el cateto contiguo al ángulo de 45° mide 3 cm,la hipotenusa mide $h = 3\sqrt{2}$ cm, y el otro cateto, evidentemente, mide lo mismo que el primero: 3 cm.

   c) Comprobemos mediante el teorema de Pitágoras:

   - $\left(3\sqrt{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 6^2$

     $3^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 2 = 36;\ \ 36 = 36$

   - $3^2 + 3^3 = \left(3\sqrt{2}\right)^2$

     $9 + 9 = 9 \cdot 2;\ \ 18 = 18$

4.

	sen α	cos α	tan α
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{3}$ rad	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{4}$ rad	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
–750°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
2 385°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

5. a) 1200
   b) 3000
   c) 150°, 330°

Indicadores esenciales de evaluación

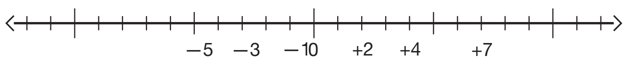
	Puede continuar	Necesita refuerzo
	% de alumnos/as	
• Reconoce los movimientos del plano y sus propiedades.		
• Aplica los distintos movimientos del plano a la construcción de figuras.		
• Reconoce poliedros regulares, prismas y pirámides; distingue sus elementos y los clasifica.		
• Calcula áreas y volúmenes de figuras y cuerpos geométricos.		
• Obtiene los cuerpos de revolución a partir de sus figuras planas generatrices, e identifica cilindros conos y esferas.		
• Transforma unidades angulares en grados.		
• Calcula las razones trigonométricas de un ángulo agudo.		
• Determina un ángulo conocida una de sus razones geométricas.		
• Calcula las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera conocidas las coordenadas de un punto de su lado extremo.		
• Reconoce la utilidad de la geometría en diferentes situaciones de la vida cotidiana.		
• Adquiere el hábito de presentar de manera clara y ordenada el proceso de resolución de un problema geométrico.		

Módulo 1 Números racionales Medidas de tendencia central

Actividad inicial

La superficie visible del B-15A será 1/9 de 3 100 km^2. El valor resultante es de 344,44 km^2 .
La superficie sumergida del iceberg será 8/9 de 3 100 km^2. Por lo tanto, están bajo el agua 2 755,56 km^2 de superficie.

Evaluación diagnóstica

- 

Se divide la recta en partes iguales y se señala el punto 0. A partir de este punto, hacia la derecha se representan los números positivos y hacia la izquierda los negativos, contando tantas particiones como indica el valor absoluto del número que se va a representar.

- $\frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{3}{2}$ y $\frac{11}{13}$
- $\frac{3}{4}; \frac{4}{7}; \frac{2}{4}$
- 0,5; 0,03; 0,75; 5,6; 0,2
- El 3.

Actividades

2. $\frac{10}{55} = \frac{2}{11}$

4. a) 2 520; b) 4 050

6. Positivas: $\frac{5}{4}, \frac{-1}{-8}, \frac{7}{3}$

Negativas: $\frac{-2}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{2}{-5}$

$\frac{2}{-5} = \frac{-2}{5}, \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}$

8. $\frac{-48}{156}$

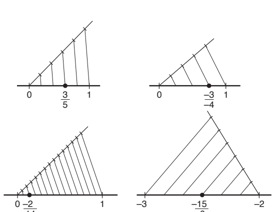
10. a) –78; b) 6; c) –5; d) 6 ó –6

12. $\frac{-24 : 12}{36 : 12} = \frac{-2}{3}$; $\frac{105 : 15}{540 : 15} = \frac{7}{36}$

$\frac{42 : 6}{18 : 6} = \frac{7}{3}$; $\frac{173}{252}$

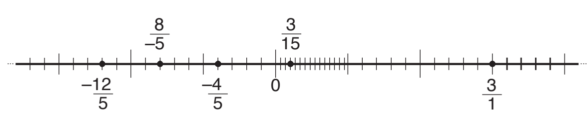
$\frac{360 : 120}{480 : 120} = \frac{3}{4}$; $\frac{188 : 47}{705 : 47} = \frac{4}{15}$

14. $\begin{array}{r|l} 15 & 6 \\ \hline 3 & 2 \end{array}$



16. a) $\frac{6}{4}$ b) $-\frac{14}{6}$

18. $\begin{array}{r|l} 12 & 5 \\ \hline 2 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 8 & 5 \\ \hline 3 & 1 \end{array}$



$\frac{-12}{5} < \frac{8}{-5} < \frac{-4}{5} < \frac{3}{15} < \frac{3}{1}$

20. a) $\frac{-3}{7} - \frac{20}{54} = \frac{-162}{378} - \frac{140}{378} = \frac{-302}{378} = \frac{-151}{189}$

b) $\frac{-2}{21} + \frac{7}{8} = \frac{-16}{168} + \frac{147}{168} = \frac{131}{168}$

22. $\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{11}{45}$

24. $180 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdot 3 = 180 \cdot \frac{5}{12} \cdot 3 = 225$

Valentina tardará 225 min en terminar de leerlo.

26. a) $\frac{25}{49}$; b) $\frac{16}{9}$; c) $\frac{9}{4} + \frac{8}{64} = \frac{38}{16} = \frac{19}{8}$

28. a) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$; b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4$; c) $\frac{2}{3}$; d) $\left(\frac{4}{7}\right)^3$

30. 1; $\frac{8}{50}; \frac{1}{4}; \frac{147}{27}; \frac{108}{75}; \frac{25}{64}; \frac{20}{45}; \frac{72}{50}$

32. $0,\widehat{846153}; 1,\widehat{142857}; -0,3\widehat{571428}; -0,75; 1,\widehat{4};$

$0,3\widehat{571428}$

34. $\frac{74}{10} = \frac{37}{5}; \frac{7}{100}; \frac{-4\,562}{1\,000} = \frac{-2\,281}{500};$

$\frac{-5}{900} = \frac{-1}{180}; \frac{212}{99}; \frac{3\,229}{990}$

36. a) 10,32
b) 1,92
c) 3,744
d) 2,225
e) 0,66
f) 5,809 5
g) 0,281 4

38. a) 2,8; el error es de 0,015.
b) 3,5; el error es de 0,05.
c) 67,9; el error es de 0,008.

40. a) 12,379
b) 19,3025

42. a) Cualitativa.
b) Cuantitativa discreta.
c) Cuantitativa continua.
d) Según cómo se formule la pregunta, puede ser cualitativa o cuantitativa.

44. Respuesta abierta

46. a) Si la empresa no es muy grande, no hace falta escoger una muestra. Se puede llevar a cabo una encuesta a todos los trabajadores.
b) No hace falta coger una muestra. Se pueden obtener los datos de la secretaria del centro.
c) Obligatoriamente hay que elegir una muestra cogiendo bombillas al azar.
d) No hace falta coger una muestra. Se puede efectuar una encuesta a todos los alumnos.

48.

Deporte preferido	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Porcentaje
Baloncesto	4	0,16	16 %
Natación	10	0,4	40 %
Fútbol	6	0,24	24 %
Voleibol	5	0,2	20 %
	25	1	100 %

50. Llamamos *x* a la frecuencia absoluta del valor *pocas, y* a la del valor *bastantes* y *z* a la del valor *muchas*.

La frecuencia absoluta del valor *pocas* es 5, la del valor *bastantes* es 15 y la del valor *muchas* es 10.

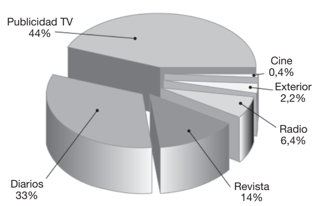
$$\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} = \frac{x+y+z}{1+3+2} = \frac{30}{6} = 5$$

$$\frac{x}{1} = 5 \Rightarrow x = 1 \cdot 5 = 5$$

$$\frac{y}{3} = 5 \Rightarrow y = 3 \cdot 5 = 15$$

$$\frac{z}{2} = 5 \Rightarrow z = 2 \cdot 5 = 10$$

52. $0{,}44 \cdot 360° = 158{,}4°$
$0{,}33 \cdot 360° = 118{,}8°$
$0{,}14 \cdot 360° = 50{,}4°$
$0{,}064 \cdot 360° = 23{,}04°$
$0{,}022 \cdot 360° = 7{,}92°$
$0{,}004 \cdot 360° = 1{,}44°$
————
360°



54. Calculamos el consumo medio bimensual:

$$\bar{x} = \frac{29+50+28+41+29+37}{6} = 35{,}67$$

Por lo tanto, el consumo medio mensual será

$$\frac{35{,}67}{2} = 17{,}83\ m^3$$

56. 16,1579; 14 y 15; 11
16,3; 14, 15 y 20; 11 y 22

58. **El enunciado es falso.**

En resumen

Población; muestra; absoluta, relativa, absoluta acumulada, relativa acumulada.

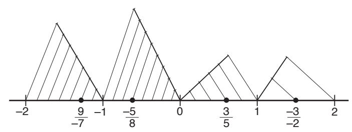
Ejercicios y problemas

60. a) 800; b) 2 500; c) 11 250; d) 640

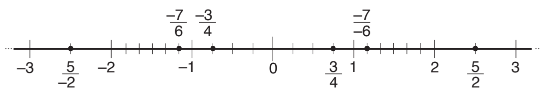
62. a) $6 \times 15 = 10 \times 9 \rightarrow$ sí son equivalentes; b) no son equivalentes.

64. $\frac{-3}{8}$
— Sí, son todas equivalentes

66. $\frac{-3}{-2} = 1\frac{1}{2}$; $\frac{9}{-7} = -1\frac{2}{7}$

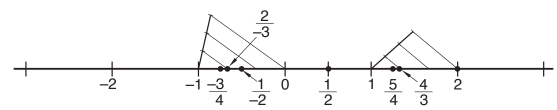


68. a)



$$\frac{5}{-2} < \frac{-7}{6} < \frac{-3}{4} < \frac{3}{4} < \frac{-7}{-6} < \frac{5}{2}$$

b)



$$\frac{-3}{4} < \frac{2}{-3} < \frac{1}{-2} < \frac{1}{2} < \frac{5}{4} < \frac{4}{3} < 2$$

70. a) $\frac{-3}{10}$; b) $\frac{13}{125}$; c) $-\frac{68}{9}$; d) $\frac{10}{3}$

72. a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{-1}{2^5} = -\frac{1}{32}$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} : \left(\frac{3}{4}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 : \left(\frac{3}{4}\right)^4 =$

$= \left(\frac{3}{4}\right)^6 = \frac{729}{4096}$

c) $-\left(-\frac{7}{8}\right)^{-14} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^9 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^3 =$

$= -\left(\frac{7}{8}\right)^{-14} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{12} = -\left(\frac{7}{8}\right)^{-2} = -\left(\frac{8}{7}\right)^2 =$

$= -\frac{8^2}{7^2} = -\frac{64}{49}$

74. a) $\sqrt{\frac{25}{25} + \frac{11}{25}} = \sqrt{\frac{36}{25}} = \pm\frac{6}{5}$

b) $\sqrt{\frac{7}{2} - \frac{5}{4}} = \sqrt{\frac{14}{4} - \frac{5}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}$

c) $\sqrt{\frac{120}{49} - \frac{20}{49}} = \sqrt{\frac{100}{49}} = \pm\frac{10}{7}$

d) $\sqrt{\frac{7}{4} + \frac{21}{2}} = \sqrt{\frac{7}{4} + \frac{42}{4}} = \sqrt{\frac{49}{4}} = \pm\frac{7}{2}$

76. Calculamos los resultados de las operaciones:

$$2,\widehat{3} + 0,5 + 1,0\widehat{3} = \frac{23-2}{9} + \frac{5}{10} + \frac{103-10}{90} =$$

$$= \frac{21}{9} + \frac{5}{10} + \frac{93}{90} = \frac{210}{90} + \frac{45}{90} + \frac{93}{90} = \frac{348}{90} = \frac{58}{15}$$

$$4,8\widehat{6} - 1,3\widehat{4} = \frac{486-48}{90} - \frac{134-13}{90} =$$

$$= \frac{438}{90} - \frac{121}{90} = \frac{317}{90}$$

$$1,\widehat{6} \cdot 2,\widehat{1} = \frac{16-1}{9} \cdot \frac{21-2}{9} = \frac{15}{9} \cdot \frac{19}{9} = \frac{285}{81} = \frac{95}{27}$$

$$7,\widehat{6} : 2,\widehat{2} = \frac{76-7}{9} : \frac{22-2}{9} = \frac{69}{9} : \frac{20}{9} = \frac{621}{180} = \frac{69}{20}$$

La relación que se establece entre los números 1, 2, 3 y 4, y las letras a, b, c y d es:

1 – b 2 – c 3 – d 4 – a

78. Respuesta sugerida: $\frac{1}{3} = 0,\widehat{3}$; $\frac{-5}{3} = -1,\widehat{6}$;

$\frac{9}{3} = 3$

Se trata de números decimales periódicos puros de período 3 o 6, siempre y cuando no sean enteros.

$\frac{1}{4} = 0,25$; $\frac{3}{50} = 0,06$; $\frac{13}{-10} = -1,3$. Obtenemos números decimales limitados.

82. a) 12,5; el error es de 0,044.
b) 0,3; el error es de 0,02.
c) 9,6; el error es de 0,04.
d) 17,1; el error es de 0,046.

84. Sería conveniente tomar una muestra en el estudio estadístico sobre el nivel cultural de los habitantes de un país y en el estudio sobre el lugar preferido por los ecuatorianos para pasar las vacaciones, porque, en ambos casos, la población es excesivamente grande para entrevistar a toda.

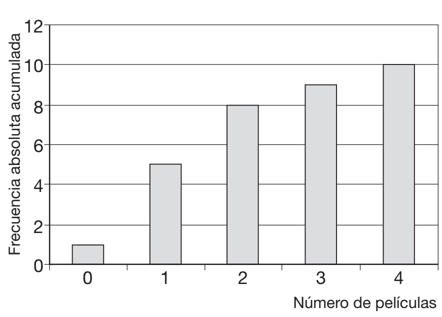
86. a) Falsa; b) falsa; c) cierta; d) cierta.

88. Respuesta abierta.

90. a)

N.º de películas	0	1	2	3	4
Frecuencia absoluta	1	4	3	1	1
Frecuencia absoluta acumulada	1	5	8	9	10
Frecuencia relativa	0,1	0,4	0,3	0,1	0,1
Frecuencia relativa acumulada	0,1	0,5	0,8	0,9	1

b)



92.

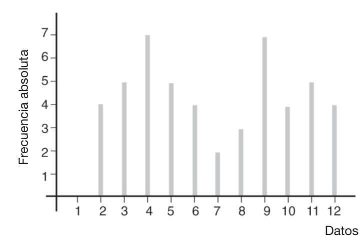
Mes de nacimiento	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
Enero	20	20	0,0615	0,0615
Febrero	30	50	0,0923	0,1538
Marzo	10	60	0,0308	0,1846
Abril	50	110	0,1538	0,3384
Mayo	25	135	0,0769	0,4153
Junio	30	165	0,0923	0,5076

Mes de nacimiento	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
Julio	20	185	0,0615	0,5691
Agosto	45	230	0,1385	0,7076
Septiembre	10	240	0,0308	0,7384
Octubre	25	265	0,0769	0,8153
Noviembre	35	300	0,1077	0,923
Diciembre	25	325	0,0769	1

Moda: abril; media: 27 nacimientos/mes.

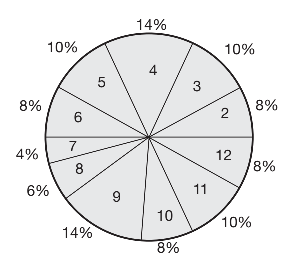
94.

Dato	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
2	4	4	0,08	0,08
3	5	9	0,1	0,18
4	7	16	0,14	0,32
5	5	21	0,1	0,42
6	4	25	0,08	0,5
7	2	27	0,04	0,54
8	3	30	0,06	0,6
9	7	37	0,14	0,74
10	4	41	0,08	0,82
11	5	46	0,1	0,92
12	4	50	0,08	1



Las amplitudes de los sectores serán:

$0,08 \cdot 360° = 28,8°$
$0,1 \cdot 360° = 36°$
$0,14 \cdot 360° = 50,4°$
$0,1 \cdot 360° = 36°$
$0,08 \cdot 360° = 28,8°$
$0,04 \cdot 360° = 14,4°$
$0,06 \cdot 360° = 21,6°$
$0,14 \cdot 360° = 50,4°$
$0,08 \cdot 360° = 28,8°$
$0,1 \cdot 360° = 36°$
$0,08 \cdot 360° = 28,8°$



Media aritmética: 6,89; bimodal: 4 y 9; mediana: 6, 5.

96. Respuesta abierta. A partir de los datos obtenidos, cada alumno/a construiría una tabla de distribución de frecuencias, un diagrama de sectores y la media aritmética, de manera similar a como resolvieron la actividad 51.

98. Edad media: 43 años; moda: 59 años; mediana: 43,5 años.

100. Los \$ 24 que tiene en estos momentos son la suma de $\frac{11}{11}$ (la totalidad) del dinero que tenía hace una semana más $\frac{1}{11}$ de ese dinero que ha ahorrado esta semana. Por lo tanto, en estos momentos tiene $\frac{11}{11}+\frac{1}{11}=\frac{12}{11}$ del dinero que tenía hace una semana. Así pues, si resolvemos, tenemos:

$$\frac{12}{11} \text{ de } \dots = 24 \rightarrow \begin{cases} 24 : 12 = 2 \\ 2 \cdot 11 = 22 \end{cases}$$

Hace una semana tenía \$ 22.

102. $1-\frac{1}{3}=\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

Calculamos el número total de bolas que hay en la caja:

$$\frac{2}{3} \text{ de } \dots = 60 \rightarrow \begin{cases} 60 : 2 = 30 \\ 30 \cdot 3 = 90 \end{cases}$$

Inicialmente en la caja hay 90 bolas.

Bolas rojas: $\frac{1}{3}$ de $90 = 30$

Bolas amarillas: de $90 = 20$

Bolas verdes: $90 - (30 - 20) = 40$

En la caja hay 30 bolas rojas, 20 bolas amarillas y 40 bolas verdes.

104. Hemos caminado $\frac{47}{50}$ del trayecto. Queda por recorrer $1-\frac{47}{50}=\frac{50}{50}-\frac{47}{50}=\frac{3}{50}$ del total.

En bicicleta recorremos $\frac{5}{6}$ de

Queda por recorrer: $\frac{3}{50}=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{50}=\frac{15}{300}=\frac{1}{20}$

$1-\frac{47}{50}-\frac{1}{20}=\frac{100}{100}-\frac{94}{100}-\frac{5}{100}=\frac{1}{100}$ del total. Por lo tanto:

$$\frac{1}{100} \text{ de } \dots = 2 \rightarrow \begin{cases} 2 : 1 = 2 \\ 2 \cdot 100 = 200 \end{cases}$$

La distancia que separa la ciudad del pueblo es de 200 km.

106. Entre el comedor y la cocina, Elisa destinará

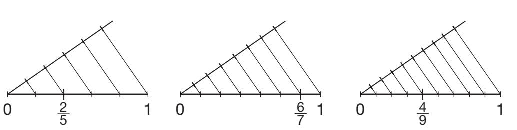
$$\frac{4}{7}+\frac{1}{8}=\frac{32}{56}+\frac{7}{56}=\frac{39}{56}$$

del presupuesto. El resto, es decir $1-\frac{39}{56}=\frac{17}{56}$, a los tres dormitorios, destinando, por tanto, $\frac{17}{56}:3=\frac{17}{168}$ del presupuesto a cada habitación. Ordenando las fracciones tenemos:

$$\frac{4}{7}=\frac{96}{168}>\frac{1}{8}=\frac{21}{168}>\frac{17}{168}$$

Es decir, el presupuesto destinado al comedor es el mayor y el destinado a cada uno de los dormitorios el más pequeño.

108.



110. Puesto que los datos están ordenados y la mediana es:

$5 \Rightarrow a = 5$

La moda de la serie estadística es $7 \Rightarrow b = 7$

112. a) Calculamos la media aritmética:

$$\bar{x}=\frac{3+5+2+4+6+8+7}{7}=5$$

b) Al sumar 2 unidades a cada uno de los datos obtenemos la siguiente serie 5, 7, 4, 6, 8, 10, 9.

$$\bar{x}=\frac{5+7+4+6+8+10+9}{7}=7$$

Se observa que la media aritmética ha aumentado 2 unidades.

c) Al multiplicar por 3 cada uno de los datos obtenemos la siguiente serie: 9, 15, 6, 12, 18, 24, 21.

$$\bar{x}=\frac{9+15+6+12+18+24+21}{7}=15$$

Se observa que la media aritmética ha quedado multiplicada por 3.

114. Calculamos a qué equivalen los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{4}{5}$ de la fracción que debemos hallar.

$$\frac{-17}{45}-\left(\frac{-5}{9}\right)=\frac{-17}{45}+\frac{5}{9}=\frac{-17}{45}+\frac{25}{45}=\frac{8}{45}$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$$

$$\frac{8}{15} \text{ de } \dots = \frac{8}{45} \rightarrow \begin{cases} \frac{8}{45}:8=\frac{8}{360}=\frac{1}{45} \\ \frac{1}{45}\cdot 15=\frac{15}{45}=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Se trata de la fracción $\frac{1}{3}$.

116. La primera llena $\frac{1}{7}$ del depósito en una hora, y la segunda $\frac{1}{5}$. Si manan las dos a la vez, llenarán $\frac{1}{7}+\frac{1}{5}=\frac{12}{35}$ del depósito por hora.

Demuestra tu ingenio

Llena y vacía recipientes

Hay varias soluciones posibles. Una de ellas es la que se presenta a continuación, indicando con tres valores la cantidad de agua que va quedando en cada recipiente:

Recipiente	**1.º**	**2.º**	**3.º**
Capacidad	**7,5**	**2**	**5,5**
Situación inicial	7,5	0	0
Se llena el 3.er recipiente	2	0	5,5
Se llena el 2.º con el 3.º	2	2	3,5
Se llena el 2.º en el 1.º	4	0	3,5
Se llena el 2.º con el 3.º	4	2	1,5
Se vacía el 2.º en el 1.º	6	0	1,5

Así, podemos obtener un volumen de agua de 6 litros.

Hay que saber leer las estadísticas

Tamaño pie. No. El estudio se llevaría a cabo probablemente en escolares y los niños mayores, cuyos pies son más grandes, leen mejor que los menores, con pies más pequeños.

Accidentes. No. Se usa el auto más por los alrededores de casa.

Políticos. No. A no ser que todos cobren exactamente lo mismo.

Señal. Puede haber lugares en el río donde la profundidad sea muy grande.

Autoevaluación

2. $a = \dfrac{221}{120}$

$b = \dfrac{23}{20}$

Coevaluación

2. $-3,45 < -3,4 < -3,444 < \dfrac{-6}{4} < -\dfrac{1}{2} <$

$< 0,4 < \dfrac{5}{3}$

4. a) $\dfrac{11 \cdot 3 + 12 \cdot 2 + 13 \cdot 3 + a \cdot 2}{3 + 2 + 3 + 2} = 12,4$

$\dfrac{96 + 2a}{10} = 12,4 \Rightarrow a = 14$

El valor de *a* es 14.

b) Moda. Existen dos modas: 11 y 13.

Mediana. Hay dos datos centrales, 12 y 13.

$\dfrac{12 + 13}{2} = 12,5$

La mediana es 12,5.

Módulo 2 Números fraccionarios

Actividad inicial

Para averiguar qué miembro de la familia se aproxima más al precio real, vamos a calcular el error absoluto cometido por cada uno de ellos.

El precio exacto de los artículos comprados es:

$1,62 + 2,02 + 0,34 + 0,34 + 0,62 + 12,85 + 1,11 = 8,90$

El hijo aproxima por truncamiento. Es decir, aproxima todos los precios por defecto. Su error es: $|6 - 8,90| = 2,90$.

La hija aproxima todos los precios por exceso. Su error es: $|13 - 8,90| = 4,10$.

El padre aproxima una mitad de los precios por defecto y la otra mitad por exceso. Su error es: $|9,50 - 8,90| = 0,60$.

La madre aproxima por redondeo. Su error es: $|9 - 8,90| = 0,10$.

Observamos que la madre, que aproximó por redondeo, fue quien se acercó más al precio real.

Evaluación diagnóstica

- Naturales, enteros y racionales.
- Todo número racional puede expresarse mediante el número decimal que resulta de dividir el numerador por el denominador de uno cualquiera de sus representantes.

  No todo número decimal puede expresarse como uno racional. Sólo los decimales limitados o ilimitados periódicos.

- $\dfrac{5}{24} = 0,208\widehat{3}$

  $1 + \dfrac{3}{4} = 1,75$

  $\sqrt{2} = 1,414...$

  $3\sqrt{5} = 6,708...$

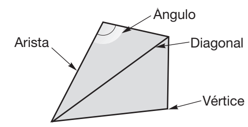
  $\pi = 3,141...$

- $32\ \cancel{dam} = 32\ dam \dfrac{10\ m}{1\ \cancel{dam}} = 320\ m$

  $542,3\ hm^2 = 542,3\ \cancel{hm^2} \dfrac{1\ km^2}{100\ \cancel{hm^2}} = 5,423\ km^2$

  $15,5\ dm = 15,5\ dm \dfrac{1\ hm}{1000\ \cancel{dm}} = 0,01551\ hm$

  $0,021\ m^2 = 0,021\ m^2 \dfrac{10000\ cm^2}{1\ \cancel{m^2}} = 210\ cm^2$

- 

Actividades

2. $\sqrt{20^2 + 35^2} = \sqrt{1625} = 5\sqrt{65} = 40,311...$

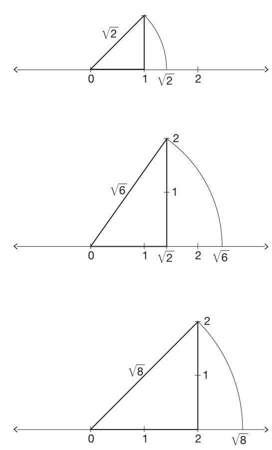
El tercer lado mide 40,311... cm.

4. $2\ \pi\ 3 = 6\ \pi = 18,849...$

La longitud de la circunferencia es 18,849... cm.

Se trata de un número irracional, puesto que es el producto de un número racional por uno irracional.

6.



8. La primera representación corresponde a $\sqrt{5}$ puesto que $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

10. π.

12. a) $\dfrac{1}{2}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$; c) $\sqrt[3]{9}$; d) $1 + \sqrt{7}$; e) $\dfrac{1}{25}\sqrt{7}$; f) $\dfrac{1}{4}$; g) $\dfrac{1}{\pi^8}$.

14. a) 0; b) $\dfrac{21\sqrt{5}}{\sqrt{21}}$; c) π.

16. Respuesta abierta.

18. Respuesta abierta.

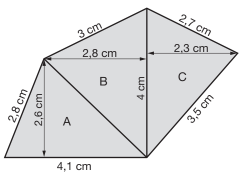
20. a) 0; b) $\sqrt{2}$

22. $A = \dfrac{7 \cdot 5}{2} = 17,5\ cm^2$

24. $\dfrac{360}{60} = 6$: se trata de un hexágono.

$A = \dfrac{6 \cdot 11{,}5 \cdot 10}{2} = 345\,\text{cm}^2$

26.



$P = 4{,}1 + 2{,}8 + 3 + 2{,}7 + 3{,}5 = 16{,}1\,\text{cm}$

El área del pentágono es la suma de las áreas de los tres triángulos.

$A = A_A + A_B + A_C =$

$= \dfrac{4{,}1 \cdot 2{,}6}{2} + \dfrac{4 \cdot 2{,}8}{2} + \dfrac{4 \cdot 2{,}3}{2} = 15{,}5\ \text{cm}^2$

28. a) Estimación de longitudes y aplicación de fórmulas. El pintor estima la anchura y la altura de la pared para calcular su área. Si conoce el área que puede pintar con cada bote, podrá saber cuántos botes necesita para pintar la pared.

b) Adición repetida. Contamos el número de cuadrículas que ocupa el bosque en el mapa. Como sabemos el área que corresponde a cada cuadrícula, podremos estimar el área del bosque.

30. Las superficies de las provincias son las siguientes.

Nombre	Superficie (km^2)
Pastaza	29 520
Morona Santiago	25 690
Zamora Chinchipe	23 111
Orellana	20 733
Sucumbíos	18 612
Manabí	18 400
Guayas	17 139
Esmeraldas	15216
Napo	13 271
Loja	11 027
Pichincha	9 494
Azuay	8 639
Galápagos	8 010
Cotopaxi	6 569
Los Ríos	6 254
El Oro	5 988
Chimborazo	5 287
Cañar	3 908
Imbabura	4 599
Santo Domingo de los Tsáchilas	3857
Santa Elena	3763
Carchi	3 699
Tungurahua	3 333,6
Bolívar	3 254

32. Calculamos la longitud del otro lado de la finca.

$\sqrt{193^2 - 95^2} = 168\,\text{m}$

La superficie de la finca será: $A = 95 \cdot 168 = 15\,960\,\text{m}^2$

34. Para resolver el problema dividimos la figura en 1 triángulo y 2 rectángulos. Así, podemos descomponer el problema en dos subproblemas:

1. Calcular el área de cada una de estas figuras: 18 cm^2, 27 cm^2 y 30 cm^2.
2. Sumar estas áreas: $18 + 27 + 30 = 75$ cm^2.

36. Descomponemos el problema en las siguientes partes:

1. Hallamos el área del cuadrado: 16 m^2
2. Calculamos las dimensiones del rectángulo:

$$b \cdot h = 16$$
$$2h \cdot h = 16 \Rightarrow h = \sqrt{8} = 2{,}83\,\text{m}$$
$$b = 2 \cdot 2{,}83 = 5{,}66\ \text{m}$$

En resumen

• De izquierda a derecha: metro, paralelogramos, polígonos regulares, metro cuadrado.

Ejercicios y problemas

38. Un número irracional sí que puede expresarse en forma decimal, como un número decimal ilimitado y no periódico. Sin embargo, no puede expresarse en forma fraccionaria, pues esto es propiedad exclusiva de los números racionales.

40. $d = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

El resultado es un número irracional.

42. Racionales: 4,487252; 8,454545; $0{,}\overparen{253}$; $32{,}2\overparen{9}$; $7{,}\overparen{56211}$.

Irracionales: 54,235412...; 0,4785125...

44. $\sqrt{7}$ es un número irracional. Demostración: Supongamos que $\sqrt{7}$ es un número racional.

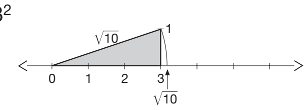
$\sqrt{7} = \dfrac{a}{b}$ (con *a* y *b* números primos entre sí)

$$\left(\sqrt{7}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow 7 = \frac{a^2}{b^2}$$

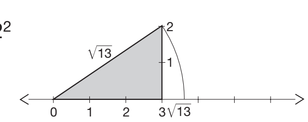
Si $\dfrac{a}{b}$ es irreducible, también lo es $\dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{a \cdot a}{b \cdot b}$, luego es imposible que $\dfrac{a^2}{b^2} = 7$ y, por tanto, es falso que $\sqrt{7} = \dfrac{a}{b}$. En consecuencia, $\sqrt{7}$ no es un número racional y por ello $\sqrt{7}$ es un número irracional.

— No, ya que es imposible obtener todas sus cifras decimales y, por tanto, no podemos saber si más adelante empiezan a repetirse.

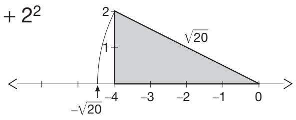
46. a) $10 = 1^2 + 3^2$



b) $13 = 3^2 + 2^2$



c) $20 = 4^2 + 2^2$



48. a) $2 < 3 < \sqrt{13}$; b) $1 < \sqrt{15} < 4$; c) $3 < 3\sqrt{3} < 6$, en los dos tiángulos rectángulos.

50. a) $\sqrt{2} < \pi$; b) $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < \sqrt{5} < \sqrt{7}$

52. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{3}{\sqrt{5}}$; c) $\sqrt{2}$; d) $\frac{\sqrt{7}}{5}$

54. a) $\sqrt{15}$; b) $\frac{\sqrt{5}}{6}$; c) $\frac{-2\sqrt{5}}{6}$; d) $-\sqrt{2}$

56. $r1 = \frac{3}{2}$; $r2 = 2$.

58. a) $P = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 14$ cm

$A = 4 \cdot 2{,}6 = 10{,}4$ cm^2

b) $P = 51{,}5 + 51{,}5 + 50 = 153$ cm

$$A = \frac{50 \cdot 45}{2} = 1125 \text{ cm}^2$$

c) $P = 6 \cdot 12 = 72$ m

$$A = \frac{72 \cdot 10{,}39}{2} = 374 \text{ m}^2$$

d) $P = 5 + 2 + 1{,}3 + 4 + 1{,}3 + 2 = 15{,}6$ cm

$A_1 = \frac{(5+4)\,1{,}2}{2} = 5{,}4$ cm^2 $A_2 = 5 \cdot 2 = 10$ cm^2

$A = A_1 + A_2 = 5{,}4 + 10 = 15{,}4$ cm^2

60. $A = \frac{20 \cdot 15}{2} = 150$ cm^2

62. a) 128 dm = 12,8 m; 825 cm = 8,25 m;

$$A = \frac{(14 + 12{,}8) \cdot 8{,}25}{2} = 110{,}55 \text{ m}^2$$

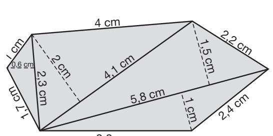
b) 1,25 hm = 125 m; 15,2 dam = 152 m;

$$A = \frac{(125 + 152) \cdot 86}{2} = 11\,911 \text{ m}^2$$

64. $P = 5 \cdot 400 = 2000$ cm

$$A = \frac{2000 \cdot 275}{2} = 275\,000 \text{ cm}^2$$

66.



$P = 3{,}8 + 1{,}7 + 1 + 4 + 2{,}2 + 2{,}4 = 15{,}1$ cm

$$A = \frac{2{,}3 \cdot 0{,}6}{2} + \frac{4{,}1 \cdot 2}{2} + \frac{5{,}8 \cdot 1{,}5}{2} + \frac{5{,}8 \cdot 1}{2} =$$

$= 12{,}04$ cm^2

68. — $P_A = 5 \cdot 10{,}9 = 54{,}5$ cm

$$A_A = \frac{54{,}5 \cdot 7{,}5}{2} = 204{,}38 \text{ cm}^2$$

La apotema del pentágono *B* se obtiene a partir de la relación entre polígonos semejantes.

$$\frac{c_A}{c_B} = \frac{10{,}9}{5} = 2{,}18 \Rightarrow ap_B = \frac{7{,}5}{2{,}18} = 3{,}44 \text{ cm}$$

$P_B = 5 \cdot 5 = 25$ cm

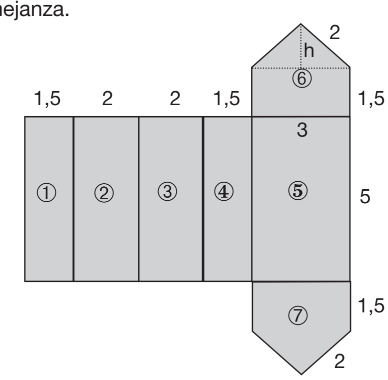
$$A_B = \frac{25 \cdot 3{,}44}{2} = 43 \text{ cm}^2$$

— $\frac{P_A}{P_B} = \frac{54{,}5 \text{ cm}}{25 \text{ cm}} = 2{,}18$

$$\frac{A_A}{A_B} = \frac{204{,}38 \text{ cm}^2}{43 \text{ cm}^2} = 4{,}75$$

— La razón entre perímetros de polígonos semejantes es igual a la razón de proporcionalidad entre los lados, que recibe el nombre de razón de semejanza. La razón entre las áreas de polígonos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

70. —



— Hallamos la altura *h* aplicando el teorema de Pitágoras: Calculamos las áreas de las caras:

$h = \sqrt{2^2 - 1{,}5^2} = 1{,}32$ m

$A_1 = A_4 = 1{,}5 \cdot 5 = 7{,}5$ m^2

$A_2 = A_3 = 2 \cdot 5 = 10$ m^2

$A_5 = 3 \cdot 5 = 15$ m^2

$A_6 = A_7 = 3 \cdot 1{,}5 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1{,}32 = 6{,}48$ m^2

$A_{Total} = 2 \cdot 7{,}5 + 2 \cdot 10 + 15 + 2 \cdot 6{,}48 = 62{,}96$ m^2

Se necesita una superficie de madera de 62,96 m^2.

72. Las áreas son iguales, mientras que la figura *a* tiene un perímetro mayor.

74. $d = \sqrt{9^2 + 14^2} = 16{,}64$ cm

76. $P = 7 + 6 + 4 + 4 + 2 + \sqrt{1^2 + 2^2} = 25{,}24$ m

$A = A_{cuadrado} + A_{trapecio} =$

$$= 4 \cdot 4 + \frac{(7+6) \cdot 2}{2} = 29 \text{ m}^2$$

78. $h^2 + 1^2 = 2^2$

$h = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ cm

Obtenemos un número irracional.

— $h \simeq 1{,}732$. De esta manera tenemos un número racional.

84. $\sqrt{120^2 + 140^2} = 184{,}39$ m

$\sqrt{120^2 + 100^2} = 156{,}20$ m

Así, la longitud del cable señalado en rojo es:

$184{,}39 + 156{,}20 = 340{,}59$ m

86. Lado del cuadrado $= \frac{80}{4} = 20$ cm

Las longitudes de los lados de los rectángulos serán de 20 cm y 10 cm. Por lo tanto, el perímetro de uno de ellos será:

$$P = 2 \cdot 20 + 2 \cdot 10 = 60 \text{ cm}$$

88. Respuesta abierta.

90. Como las alturas de los tres triángulos coinciden, las bases de los triángulos guardan entre sí la misma relación que sus áreas. Así, la base de *BDE* es 3 veces la base de *ABE,* es decir $3 \cdot 3 = 9$ cm. Del mismo modo, la base de *BCD* es 4 veces la de *ABE*, es decir, $4 \cdot 3 = 12$ cm. Por tanto, las dimensiones del trapecio son:

$B = AC = 12 + 3 = 15$ cm

$b = ED = 9$ cm

$h = BE = 4$ cm

Demuestra tu ingenio

Geoplano

a) Existen 3 cuadrados y 1 rectángulo diferentes (no superponibles) que se representan en la figura.

Si la separación entre los clavos es de 1 cm, el perímetro y el área de estas figuras es:

$P_1 = 4 \cdot 1 = 4$ cm $A_1 = 1^2 = 1$ cm^2

$P_2 = 4 \cdot 2 = 8$ cm $A_2 = 2^2 = 4$ cm^2

$P_3 = 4 \cdot \sqrt{2} = 5,7$ cm $A_3 = 2A_1 = 2$ cm^2

$P_4 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 6$ cm $A_4 = 1 \cdot 2 = 2$ cm^2

b) Existen 8 triángulos diferentes (no superponibles) que se representan en la figura.

Si la separación entre los clavos es de 1 cm, el perímetro y el área de los triángulos será:

$P_1 = 1 + 1 + \sqrt{2} = 3,4$ cm

$A_1 = \frac{1}{2} 1 \cdot 1 = 0,5$ cm^2

$P_2 = 1 + 2 + \sqrt{5} = 5,2$ cm

$c_2 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$A_2 = \frac{1}{2} 1 \cdot 2 = 1$ cm^2

$P_3 = 1 + \sqrt{5} + \sqrt{8} = 6,1$ cm

$b_3 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$; $c_3 = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

$A_3 = \frac{1}{2} 1 \cdot 2 = 1$ cm^2

$P_4 = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{5} = 4,7$ cm

$A_4 = \frac{1}{2} 1 \cdot 1 = 0,5$ cm^2

$P_5 = 2 + 2 + \sqrt{8} = 6,8$ cm

$A_5 = \frac{1}{2} 2 \cdot 2 = 2$ cm^2

$P_6 = 2 + \sqrt{5} + \sqrt{5} = 6,5$ cm

$A_6 = \frac{1}{2} 2 \cdot 2 = 2$ cm^2

$P_7 = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 4,8$ cm

$A_7 = \frac{1}{2} 2 \cdot 1 = 1$ cm^2

$P_8 = \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{5} = 5,9$ cm

$A_8 = 2 \cdot 2 - A_1 - A_2 - A_2 = 4 - 0,5 - 1 - 1 = 1,5$ cm^2

El menor triángulo rectángulo es el primero de estos triángulos. El área de los otros triángulos en función de ésta se expresa así:

$A_2 = 2$ A $A_3 = 2$ A $A_4 = $ A

$A_5 = 4$ A $A_6 = 4$ A $A_7 = 2$ A $A_8 = 3$ A

El área de los cuadriláteros en función de ésta se expresa así:

$A_1 = 2$ A $A_2 = 8$ A $A_3 = 4$ A $A_4 = 4$ A

Autoevaluación

2. Un lado de la estrella mide $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ cm. Por tanto, su perímetro es: $P = 5 \cdot 10 = 50$ cm.

El área de los cinco triángulos es:

$$A = 5 \frac{6 \cdot 4}{2} = 60 \text{ cm}^2$$

El área del pentágono central es:

4. La representación correcta es la del apartado *a.*

Coevaluación

2. $P = 4 + 3,3 + 1 + 3,3 = 11,6$ cm

$h = \sqrt{3,3^2 - 1,5^2} = 2,9$ cm

4. $\sqrt{150^2 + 260^2} = 300,1666204...$

Valor aproximado: 300 cm

• A partir de éste módulo, se colocarán en la sección **Solucionario**, únicamente las respuestas correspondientes a los apartados **Actividad inicial, Evaluación diagnóstica y Ejercicios y problemas**, puesto que para este momento, los⁄as estudiantes habrán desarrollado la autonomía necesaria para encontrar las soluciones de las actividades, tareas y evaluaciones de los modulos por sí solos.

Módulo 3 Números reales Polinomios

Actividad inicial

— El número de oro aparece en la pirámide de Keops, en el Partenón (cuyo alzado se inscribe en un rectángulo áureo), en el boceto del cuadro de Dalí *Leda atómica,* en las tarjetas de crédito (donde los lados están en relación aproximadamente igual a ϕ), en la relación entre las longitudes de las falanges humanas y en el cálculo del número de descendientes de una abeja macho.

— La relación entre los lados de un carné de identidad es:

$$\frac{8,6 \text{ cm}}{5,4 \text{ cm}} = 1,6 \approx \phi$$

Evaluación diagnóstica

• Racionales: $-\frac{2}{5}$; $-1,25$; $6,34$

Irracionales: $-\sqrt{11}$; $\frac{\pi}{3}$; $1 - \sqrt{2}$; $-1,202\,002..$

- No, porque en principio la cinta métrica elegida sólo permite medir hasta los centímetros: 1 cm, 2 cm, 3 cm...
- 1,414213 es ilimitado no periódico;

  $0{,}1\overset{\frown}{153846}$ es ilimitado periódico mixto;

  3,141595... es ilimitado no periódico;

  1,8 es limitado;

  9,48683... es ilimitado no periódico

- $2 \cdot 4 = 8$; $3 \cdot 25 = 75$; $\frac{1}{4}64 = 16$; $2a$; $3a$; $\frac{1}{4}a$.
- $5(-1)^2 + 3(-1)\frac{1}{2} = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$
- $4a$ coeficiente: 4
  parte literal: a

  $6ab$ coeficiente: 6
  parte literal: ab

  $-2ab^2$ coeficiente: -2
  parte literal: ab^2
- a) $5a + 2b - 2a + 4b^2 - 4b = 3a - 2b + 4b^2$

  b) $5xy + 2x - 2xy + 4x - 4b = 3xy + 6x$

Ejercicios y problemas

66. Es verdadera. Entre dos números reales distintos siempre podemos encontrar otro número real. Una forma de hacerlo es hallar el punto equidistante entre ellos, que es la semisuma de ambos.

68. Respuesta abierta.

70. $-\sqrt{1} < \frac{-3}{4} < 0 < \frac{2}{7} < 0{,}75 < \sqrt{5} < 3 = \sqrt{9} < 5$

72. a) $[-2, 5]$; b) $(-3, -1]$; c) $(2, 6)$; d) $[-2, -1]$

74. a) $(-6, 3)$. Centro $= -1{,}5$. Amplitud $= 9$
    $[-2, 10]$. Centro $= 4$. Amplitud $= 12$
    b) $[-2, 3)$

76. a) 2,080... $\rightarrow$ 2
    b) 0,25 $\rightarrow$ 0,3
    c) 9,5874... $\rightarrow$ 9,59

78. $\sqrt{3} = 1{,}732050808..$
    Aproximación: 1,73
    Cota del error absoluto: 0,003

80. a) $2x$; b) $2x + 1$; c) $(2x)^2$; d) $3(2x + 1)$;
    e) $x + (x + 1) + (x + 2)$; f) $x^2(x + 1)^2$

82. a) -2 ; b) 0

84. a) $10a - 20b$; b) $7x - 10y$; c) $x - 5y + 4$; d) $2b - ab$

86. a) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
    b) $a^2 - 25 = (a + 5)(a - 5)$
    c) $\frac{a^2}{9} - 16 = \left(\frac{a}{3} + 4\right)\left(\frac{a}{3} - 4\right)$
    d) $4a^2 - 81b^2 = (2a + 9b)(2a - 9b)$

88.

·	a	5b	–3a	a – b
4	$4a$	$20b$	$-12a$	$4a - 4b$
3a	$3a^2$	$15ab$	$-9a^2$	$3a^2 - 3ab$
–2b	$-2ab$	$-10b^2$	$6ab$	$-2ab + 2b^2$
a + b	$a^2 + ab$	$5ab + 5b^2$	$-3a^2 - ab$	$a^2 - b^2$

90. a) x; b) $1 - 6b$; c) $9b^2 + 3a - 27ab + 7b^6$

92. a) $P(1) = 2 \cdot 1^3 + 8 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 12 = 0$
    b) $P(2) = 2 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 12 = 40$
    c) $P(3) = 2 \cdot 3^3 + 8 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 12 = 120$

94. Sí, por ejemplo la suma de los polinomios $x^5 + 2x^2$ y $-x^5 + x$ da un polinomio de grado 2: $2x^2 + x$.

96. El grado del polinomio cociente es la resta del grado del dividendo menos el grado del divisor.

98. a) $P(x) \cdot Q(x) =$

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & & 2x^2 & +4x & -8 \\
 & & & x^3 & -x & +2 \\
\hline
 & & & 4x^2 & +8x & -16 \\
 & & -2x^3 & -4x^2 & +8x & \\
2x^5 & +4x^4 & -8x^3 & & & \\
\hline
2x^5 & +4x^4 & -10x^3 & & +16x & -16
\end{array}$$

b) En el anterior apartado se ha obtenido $P(x) \cdot Q(x)$, por tanto, para hallar $P(x) \cdot Q(x)$, basta multiplicar el resultado de a) por $\frac{1}{2}$:
$\frac{1}{2}P(x) \cdot Q(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x - 8$

100. a)

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & 2 & -3 \\
-3 & & -3 & 3 \\
\hline
 & 1 & -1 & \boxed{0}
\end{array}$$

$(x^2 + 2x - 3) : (x + 3) = x - 1$

b)

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -7 & 6 \\
1 & & 1 & 1 & -6 \\
\hline
 & 1 & 1 & -6 & \boxed{0}
\end{array}$$

$(x^3 - 7x - 6) : (x - 1) = x^2 + x - 6$

c)

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 8 & -23 & -30 \\
-10 & & -10 & 20 & 30 \\
\hline
 & 1 & -2 & -3 & \boxed{0}
\end{array}$$

$(x^3 + 8x^2 - 23x - 30) : (x + 10) = x^2 - 2x - 3$

102. a) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$; $A(x) = x^2 + 2x + 1$
     b) Suma de x con el anterior a x:
     $x + x - 1 = 2x - 1$.
     Así, pues: $(2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$
     c) Triple del número siguiente a x:
     $3 \cdot (x + 1) = 3x + 3$. Se tiene:
     $(x - 1) \cdot (3x + 3) = 3x^2 + 3x - 3x - 3 = 3x^2 - 3$;
     $C(x) = 3x^2 - 3$
     d) Cubo del número anterior a x:
     $(x - 1)^3 = (x - 1)^2 \cdot (x - 1) = (x^2 - 2x + 1) \cdot$
     $\cdot (x - 1) = x^3 - 2x^2 + x - x^2 + 2x - 1 =$
     $= x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Se tiene:

$$x^3 - (x-1)^3 = x^3 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) =$$
$$= 3x^2 - 3x + 1;$$
$$D(x) = 3x^2 - 3x + 1$$

104. Para calcular P(*a*) podemos proceder de los siguientes modos:
    1) Sustituimos *a* en el polinomio P(*x*) y efectuamos las operaciones correspondientes.
    2) Dividimos P(*x*) entre *x* – *a*. El residuo que se obtiene es igual a P(*a*).

106. Las posibles raíces enteras del polinomio serán los divisores del término independiente: ±1; ±2; ±4.

108. $P(1) = 2 \Rightarrow a \cdot 1 + b = 2 \Rightarrow a + b = 2$

$P(2) = 5 \Rightarrow a \cdot 2 + b = 5 \Rightarrow 2a + b = 5$

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 2 \\ 2a + b = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rl} -a - b = & -2 \\ 2a + b = & 5 \\ \hline a \quad = & 3 \end{array}\right\}$$

$a + b = 2 \Rightarrow 3 + b = 2 \Rightarrow b = 2 - 3 = -1$

El polinomio P(x) es: $P(x) = 3x - 1$

110. a) $(3x^3 + 18x^2 + 33x + 18) : (x - 3)$
    Cociente: $3x^2 + 27x + 114$
    Resto: 360
    No es divisor.

    b) $(3x^3 + 18x^2 + 33x + 18) : (x + 1)$
    Cociente: $3x^2 + 15x + 18$
    Resto: 0
    Sí que es divisor.

    c) $(3x^3 + 18x^2 + 33x + 18) : (3x^2 + 3x + 6)$
    Cociente: $x + 5$
    Resto: $12x - 12$
    No es divisor.

    d) $(3x^3 + 18x^2 + 33x + 18) : (x^2 - 4x - 1)$
    Cociente: $3x + 30$
    Resto: $156x + 48$
    No es divisor.

112. a) $x(x - 1)^2$
    b) $(x - 3)(x + 1)(x + 3)$
    c) $(x^2 - 3)(x^2 + 3)$ (también podríamos escribir: $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 3)$)
    d) $3m(t^2 + 4t - 6) = 3m(t + 4t - 6)$
    e) $(u^2 - 9u + 14) + (uv - 7v) = (u - 7)(u - 2) + v(u - 7) = (u - 7)(u + v - 2)$
    f) $mn(n^2 - 5n + 6) = mn(n - 3)(n - 2)$

114. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

118. a) 2ab; b) 50xy; c) x^2; d) $25y^2$

120. a) $(3\mathbf{x^3})^2 \cdot (2\mathbf{x^2})^3 - (5\mathbf{x^6})^2 = \mathbf{47}x^{12}$
    b) $(-\mathbf{2x})(-\mathbf{5x^3} - 2x^2 + x - 12) =$
    $= 10x^4 + \mathbf{4x^3} - \mathbf{2x^2} + 24x$

122. Sea $P(x) = ax + b$

$$P(1) = a \cdot 1 + b = 1$$
$$P(2) = a \cdot 2 + b = 4$$

Para obtener los coeficientes *a* y *b* debemos resolver el sistema:

$$a + b = 1$$
$$2a + b = 4$$

Si utilizamos el método de reducción:

$$\begin{array}{rrl} 2a & +b & = 4 \\ -a & -b & = 1 \\ \hline a & & = 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rrl} 2a & +b & = 4 \\ -2a & -2b & = -2 \\ \hline & -b & = 2 \\ & b & = -2 \end{array}$$

El polinomio es $P(x) = 3x - 2$.

124. El polinomio debe tener los factores $(x - 3)(x + 1)$ y $(x - 2)$:
$P(x) = (x - 3)(x + 1)(x - 2) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

126. Sea *x* el dinero que tiene el primer amigo. El dinero del segundo amigo es: $x^2 - 5x$
El dinero que tiene el tercer amigo es:

$$\left(\frac{x^2 - 5x}{10}\right)^2 = \frac{x^4 - 10x^3 + 25x^2}{100} =$$
$$= \frac{1}{100}x^4 - \frac{10}{100}x^3 + \frac{25}{100}x^2 =$$
$$= \frac{1}{100}x^4 - \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{4}x^2$$

La cantidad de dinero que podrán reunir expresada mediante un polinomio es:

$$D(x) = x + x^2 - 5x + \frac{1}{100}x^4 - \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow D(x) = \frac{1}{100}x^4 - \frac{1}{10}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - 4x$$

Hallamos la cantidad de dinero que podrán reunir si el primer amigo dispone de 10 dólares:

$$x = 10 \Rightarrow D(10) = \frac{1}{100} \cdot 10^4 - \frac{1}{10} \cdot 10^3 +$$
$$+ \frac{5}{4} \cdot 10^2 - 4 \cdot 10 = 100 - 100 + 125 - 40 = 85$$

Podrán reunir 85 dólares:

130. La expresión algebraica de la diagonal existente, que es la que cumplirán todas las filas, columnas y la otra diagonal es:

$2(x^2 - 1) + 5x^2 + 1 + 4(2x^2 + 1) =$
$= 2x^2 - 2 + 5x^2 + 1 + 8x^2 + 8 = 15x^2 + 3$

$2(x^2 - 1)$	$\mathbf{7x^2 + 3}$	$\mathbf{6x^2 + 2}$
$\mathbf{9x^2 + 5}$	$5x^2 + 1$	$\mathbf{x^2 - 3}$
$\mathbf{4x^2}$	$\mathbf{3x^2 - 1}$	$4(2x^2 + 1)$

132. a) $x^2 - 2x - 8$
    b) $3x + 6$
    c) $6x^2 - 4x - 2$

134. a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{x}$ c) $\frac{u^2 w}{5b^2}$ d) $\frac{p}{2}$
    e) $\frac{2}{x}$ f) $\frac{m}{m-3}$ g) $u + 1$ h) $\frac{1}{p}$

Módulo 4 Números reales
Patrones de crecimiento lineal

Actividad inicial

El número de nenúfares viene dado por:

$N = N_0 \cdot 2^{d/2}$, donde N_0 es el número de nenúfares en un día determinado y *d* es el número de días transcurridos desde dicho día.

Al cabo de 20 días habrá: $N = 40 \cdot 2^{20/2} = 40\,960$ nenúfares.

Seis días antes del día en que hay 40 nenúfares había: $N = 40 \cdot 2^{-6/2} = 5$ nenúfares.

Evaluación diagnóstica

- $-5+\frac{4}{5}\left[\frac{-1}{4}-\frac{2}{4}\right]-\frac{5}{3}\left(\frac{14}{8}\right)=-5+\frac{-3}{5}-\frac{35}{12}=\frac{-511}{60}$
- a) $5x$; b) b^3; c) $\frac{17}{5}y$
- $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}=\frac{1}{3^{-4}}=3^4$;

  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-9}=\left(\frac{3}{2}\right)^{9}$;

  $\left(\frac{-7}{9}\right)^{3}:\left(\frac{7}{-9}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{9}{7}\right)^{-11}=\left(\frac{-7}{9}\right)^{3-(-4)}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^{11}=$

  $=\left(\frac{-7}{9}\right)^{7}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^{11}=-\left(\frac{7}{9}\right)^{18}$
- Racionales: $\frac{1}{3}$; 4; $\frac{-4}{5}$; $\frac{7}{2}$; $2{,}333\,33...$

  Irracionales: $\sqrt{2}$; $-\sqrt{5}$; π
- $\sqrt{\frac{16}{25}}=\pm\frac{4}{5}$; $\sqrt{\frac{1}{81}}=\pm\frac{1}{9}$; $\sqrt{\frac{4}{169}}=\pm\frac{2}{13}$
- $10^x = 100$ $\quad x = 2$
- 11, 22, 33 y 44; 1, 5, 25, y 125
- a) $\frac{3^2-3\cdot 3+2}{3^2+1}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

  b) $\frac{5^2-3\cdot 5+2}{5^2+1}=\frac{12}{26}=\frac{6}{13}$

  c) $\frac{10^2-3\cdot 10+2}{10^2+1}=\frac{72}{101}$

Ejercicios y problemas

18. a) $(+5)^2\,(+5)^5\,(+5)^{-2} = (+5)^{2+5-2} = (+5)^5$;

    b) $\frac{(-9)^5\cdot(-9)^4}{(-9)^{-3}\cdot(-9)^2}=(-9)^5\cdot(-9)^4\cdot(-9)^3\cdot(-9)^{-2}=$

    $=(-9)^{5+4+3-2}=(-9)^{10}$

20. a) $\frac{4}{x}$; b) $-22x^2z^2$; c) $-5y$; d) $\frac{15c+2}{10a}$

22. a) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}$; b) $\frac{7}{2}; \frac{11}{4}; \frac{5}{2}; \frac{19}{8}$; c) $0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2$;

    d) $-3; -1; 1; 3$

24. Para deducir la expresión algebraica de una función lineal, es necesario conocer dos puntos: el (0, 0) y otro.

    Para deducir la expresión algebraica de una función afín no lineal, es necesario conocer dos puntos.

26. La gráfica de la función lineal pasa por el punto (2, 6) y, por tanto, cumple:

    $y = mx$; $6 = 2m \rightarrow m = 3$

    La función lineal es $y = 3x$.

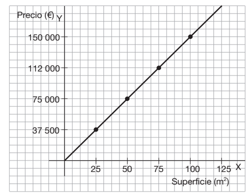
    a) $6 \neq 3 \cdot 4$. No pertenece.

    b) $3 = 3 \cdot 1$. Sí pertenece.

    c) $4 \neq 3 \cdot 2$. No pertenece.

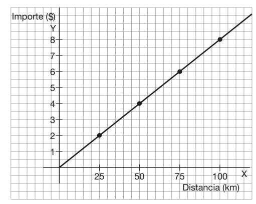
28. a)

Superficie en m^2 *(x)*	25	50	75	100
Precio en dólares *(y)*	37500	75000	112500	150000



b)

Distancia en km *(x)*	25	50	75	100
Importe en dólares *(y)*	2	4	6	8



30. a) Cada término se obtiene multiplicando por 3 el número que indica el lugar que ocupa dicho término en la sucesión: $a_n = 3n$.

    b) Cada término se obtiene sumando a 68 el producto de –4 por el número que indica el lugar que ocupa dicho término en la sucesión: $a_n = 68 - 4n$.

    c) Cada término se obtiene elevando al cuadrado el número que indica el lugar que ocupa dicho término en la sucesión: $a_n = n^2$.

    d) Cada término se obtiene sumando a –1 el producto de 2 por el número que indica el lugar que ocupa dicho término en la sucesión: $a_n = -1 + 2n$.

    e) Cada término, excepto los dos primeros, se obtiene sumando los dos términos inmediatamente anteriores: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, si $n \geq 3$.

    f) Cada término se obtiene multiplicando el número que indica el lugar que ocupa dicho término en la sucesión por este mismo número disminuido en una unidad: $a_n = n \cdot (n-1)$.

32. a) $a_1 = 4 - 3 \cdot 1 = 1$

    $a_2 = 4 - 3 \cdot 2 = -2$

    $a_3 = 4 - 3 \cdot 3 = -5$

    $a_4 = 4 - 3 \cdot 4 = -8$

    $a_5 = 4 - 3 \cdot 5 = -11$

    b) $a_1 = \frac{5\cdot 1-3}{2\cdot 1}=\frac{2}{2}=1$

    $a_2 = \frac{5\cdot 2-3}{2\cdot 2}=\frac{7}{4}$

    $a_3 = \frac{5\cdot 3-3}{2\cdot 3}=\frac{12}{6}=2$

    $a_4 = \frac{5\cdot 4-3}{2\cdot 4}=\frac{17}{8}$

    $a_5 = \frac{5\cdot 5-3}{2\cdot 5}=\frac{22}{10}=\frac{11}{5}$

    c) $a_1 = \frac{3\cdot 1-2}{1}=\frac{1}{1}=1$

    $a_2 = \frac{3\cdot 2-2}{2}=\frac{4}{2}=2$

    $a_3 = \frac{3\cdot 3-2}{3}=\frac{7}{3}$

    $a_4 = \frac{3\cdot 4-2}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$

    $a_5 = \frac{3\cdot 5-2}{5}=\frac{13}{5}$

    d) $a_1 = \frac{1^2-2}{2\cdot 1}=\frac{-1}{2}$

    $a_2 = \frac{2^2-2}{2\cdot 2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

    $a_3 = \frac{3^2-2}{2\cdot 3}=\frac{7}{6}$

    $a_4 = \frac{4^2-2}{2\cdot 4}=\frac{14}{8}=\frac{7}{4}$

    $a_5 = \frac{5^2-2}{2\cdot 5}=\frac{23}{10}$

34. La **pieza 1** es un triángulo de base igual a la mitad del lado del cuadrado que limita el tangram y de altura igual a la cuarta parte del lado de dicho cuadrado.

Su área es: $A = \dfrac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{2} = \dfrac{2 \cdot 5}{2} = 5 \text{ cm}^2$

Pieza 2: $A = \dfrac{4\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = \dfrac{8 \cdot 5}{2} = 20 \text{ cm}^2$

La **pieza 3** es un cuadrado. Para hallar la medida de su lado hay que calcular la diagonal del tangram ya que el lado de la pieza 3 es una cuarta parte de la diagonal del tangram:

$$d^2 = (4\sqrt{5})^2 + (4\sqrt{5})^2 = 16 \cdot 5 - 16 \cdot 5 = 160$$

$$d = \sqrt{160} = \sqrt{2^5 \cdot 5} = 2^2\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$$

El área de la pieza 3 es: $A = \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 10 \text{ cm}^2$, resultado coherente puesto que tiene el doble de superficie que la pieza 1.

El área de la **pieza 4** es la misma que la de la pieza 2. Su valor es 20 cm^2.

El área de la **pieza 5** es la misma que la de la pieza 1. Su valor es 5 cm^2.

La **pieza 6** es un triángulo de base y altura iguales a la mitad del lado del cuadrado que limita el tangram. Su área es:

$$A = \frac{2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 10 \text{cm}^2$$

La **pieza 7** es un paralelogramo de base igual a la mitad del lado del cuadrado que limita el tangram y de altura igual a la cuarta parte de dicho lado. Su área es: $A = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 10 \text{ cm}^2$

38. Los datos conocidos son:

$a_1 = 20$; $a_6 = 35$; $n = 6$

$35 = 20 + 5d$

$15 = 5d \Rightarrow d = 3$

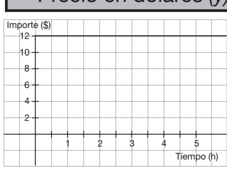
Las etapas serán de: 20, 23, 26, 29, 32 y 35 km.

$S_n = \dfrac{(20 + 35) \cdot 6}{2} = 165$

Habrán recorrido 165 km.

40. a)

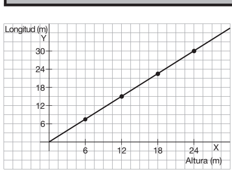
Tiempo en horas *(x)*	1	2	3	4	5
Precio en dólares *(y)*	12	12	12	12	12



b) $m = 0$.

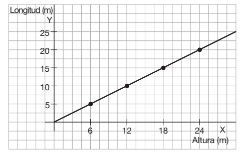
42.

Altura del edificio en metros *(x)*	6	12	18	24
Longitud de la sombra a las 8 de la mañana en metros *(y)*	7,5	15	22,5	30



Pendiente: $\dfrac{30}{24} = \dfrac{5}{4}$

Altura del edificio en metros *(x)*	6	12	18	24
Longitud de la sombra a las 10 de la mañana en metros *(y)*	5	10	15	20



Pendiente: $\dfrac{20}{24} = \dfrac{5}{6}$

A las 11 de la mañana el Sol está más alto, por lo que la pendiente de la función es menor y, por tanto, las sombras serán menores.

44. a) $t = 5 \text{ min} = 300 \text{ s}$

$e = v \cdot t = 1{,}5 \cdot 300 = 450$

$e_s = 450 + 100 = 550$

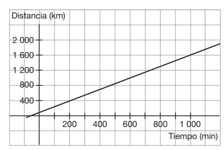
Recorrerá 450 m y se encontrará a 550 m de la señal.

b) $300 = 1{,}5 \cdot t \rightarrow t = \dfrac{300}{1{,}5} = 200$

Al cabo de 3 min 20 s.

c) $e = 1{,}5 \cdot t + 100$

d)



46. — 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

No es una progresión aritmética.

— 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19

Obtenemos una progresión aritmética de diferencia 2 y cuyo primer término es 3.

— 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2

Se obtiene un valor constante, 2.

Módulo 5 Ecuaciones e inecuaciones de primer grado Diagramas de tallo y hojas

Actividad inicial

Sin plantear todavía una ecuación podemos razonar de la siguiente manera: Si el lado desigual del triángulo es una parte del total del perímetro, cada uno de los dos lados iguales serán tres partes de ese total. Por lo tanto, hemos dividido el perímetro en 7 partes iguales (1 + 3 + 3), cada una de ellas de 210/7 = 30 m. Así, el jardín tendrá un lado de 30 m y dos lados de 90 m (30 · 3) cada uno.

- El doble de 6 es $6 \cdot 2 = 12$.

  El triple de 12 es $12 \cdot 3 = 36$.

  La quinta parte de 25 es $25 : 5 = 5$.

  — Doble: $2 \cdot a$

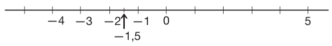
  Triple: $3 \cdot a$

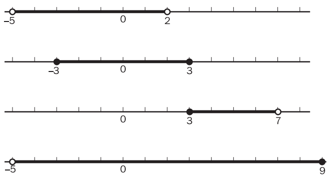
  Quinta parte: $\dfrac{a}{5}$

- $2 \cdot (-3)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot \dfrac{1}{2} = 2 \cdot 9 - (-6) =$

  $= 18 + 6 = 24$

- 5;0;– 1;– 1,5;– 2;– 3;– 4



- 

- Respuesta sugerida: 3,2; 3,4 y 3,6.

Ejercicios y problemas

64. La suma de las expresiones algebraicas de la tercera columna es igual a 15.

$$2x - 2 + 3\,(x - 2) + 8 = 15$$
$$2x - 2 + 3x - 6 + 8 = 15$$
$$2x + 3x = 15 + 2 + 6 - 8$$
$$5x = 15$$
$$x = \frac{15}{5} = 3$$

Al hallar el valor numérico de las expresiones algebraicas de la primera fila para $x = 3$ se obtiene:

2	y + 7	4

$$2 + y + 7 + 4 = 15$$
$$y = 15 - 2 - 7 - 4 = 2$$

El valor de x es 3 y el valor de y es 2.

66. a) Cierta; b) falsa; c) cierta; d) cierta

68. La solución es $x = 8$.

70. Se pueden proponer infinitas ecuaciones equivalentes a una dada. La solución siempre será la misma.
   a) Multiplicamos, por ejemplo, por 2:
   $4x - 10 = 10x + 4; \quad x = -\frac{7}{3}$
   b) Multiplicamos, por ejemplo, por 5:
   $20\,(x - 1) = 15\,(x + 2); \quad x = 2$
   c) Multiplicamos, por ejemplo, por 3:
   $9\,(x - 1) - 60 = 21; \quad x = 10$
   d) Multiplicamos, por ejemplo, por 2:
   $4\,(x + 3) + 10 = 18; \quad x = -1$
   e) Multiplicamos, por ejemplo, por 3:
   $2x - 3 = \frac{3x + 15}{2}; \quad x = 21$
   f) Multiplicamos, por ejemplo, por 2:
   $\frac{x + 2}{2} - \frac{x + 1}{3} = 4; \quad x = 20$

72. a) $x = 0$; b) $x = \frac{-1}{3}$; c) $x = \frac{9}{2}$;
   d) $x = \frac{1}{2}$; e) $x = -3$

74. Identidades a) y b).
   c) $x = \frac{26}{2} = 13$; d) $x = 12 - 8 = 4$.

76. 1

78. a) $3x + 2 = x - 6$
   $3x - x = -6 - 2;\; 2x = -8;\; x = \frac{-8}{2} = -4$
   b) $-y - 1 = 5 + y$
   $-1 - 5 = y + y;\; -6 = 2y;\; y = \frac{-6}{2} = -3$
   c) $x + 8 + 3x - 3 = 2x - 3$
   $x + 3x - 2x = -3 - 8 + 3;\; 2x = -8;\; x = \frac{-8}{2} = -4$
   d) $1 + x = 5 - x$
   $x + x = 5 - 1;\; 2x = 4;\; x = \frac{4}{2} = 2$
   e) $z - 2 = -3z - 10$
   $z + 3z = -10 + 2;\; 4z = -8;\; z = \frac{-8}{4} = -2$
   f) $\frac{x + 8}{2} = x$
   $x + 8 = 2x;\; 8 = 2x - x;\; x = 8$

80. a) $5 > 3$ c) $3 > -7$
   b) $2 < 8$ d) $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$

82. No. Por ejemplo, si consideramos las desigualdades $30 > -5$ y $-2 > -3$ y las multiplicamos miembro por miembro, obtenemos la desigualdad $-60 < 15$.

84. Sólo se cumple si a y b tienen el mismo signo. Queda excluido el caso de que a o b sean cero ya que la división por cero no tiene sentido.

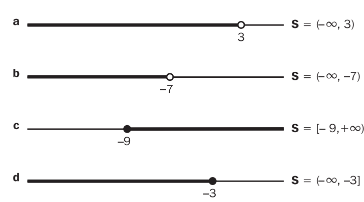
Estos ejemplos cumplen la condición:

$$3 < 5 \Rightarrow 1 < \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{1}{5} < \frac{1}{3};$$
$$-7 < -6 \Rightarrow 1 > \frac{-6}{-7} \Rightarrow \frac{1}{-6} < \frac{1}{-7}$$

En cambio éstos no la cumplen:

$$-3 < 5 \Rightarrow 1 > \frac{5}{-3} \Rightarrow \frac{1}{5} > \frac{1}{-3};$$
$$7 > -6 \Rightarrow 1 > \frac{-6}{7} \Rightarrow \frac{1}{-6} < \frac{1}{7}$$

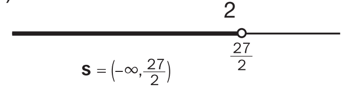
86. Respuesta sugerida:
   a) $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$
   b) $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$
   c) $x = -1, y = 2$; $x = -1, y = 5$ y $x = 1, y = 1$

88. 

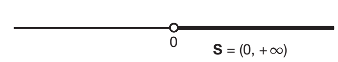
90. Respuesta sugerida:
   $2x \leq 10$
   $2\,(x + 3) \leq 16$
   — Son equivalentes.

92. a) $5x - 2x \leq 9 + 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{12}{3} = 4$

b) $2x < 21 + 6 \Leftrightarrow x < \frac{27}{2}$



c) $-4x - x < 12 - 12 \Leftrightarrow x > 0$



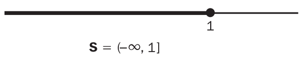
d) $14x - 8x - 6x < -3 + 2 \Leftrightarrow 0x < -1$

$\mathbf{S} = \varnothing$

e) $2x - 15x + 13x < 3 - 8 - 3 \Leftrightarrow 0x < -8$

$\mathbf{S} = \varnothing$

f) $-3x - 2x - 5x \geq 1 - 12 + 1 \Leftrightarrow x \leq 1$



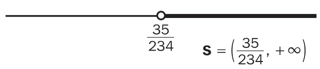
g) $-5x + 3x + 2x > 21 - 1 \Leftrightarrow 0x > 20$

$\mathbf{S} = \varnothing$

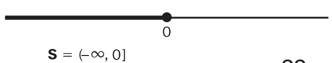
h) $5x - 5x < -9 + 15 - 6 \Leftrightarrow 0x < 0$

$\mathbf{S} = \varnothing$

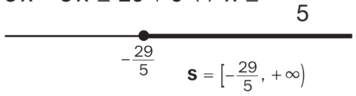
i) $-210x - 24x < 15 - 50 \Leftrightarrow x > \dfrac{35}{234}$



j) $-2x - 3x + 7x \leq 4 - 10 + 6 \Leftrightarrow x \leq 0$



k) $3x - 8x \leq 20 + 9 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{29}{5}$



l) $5x - 2x + 3x \leq 30 + 1 + 15 + 2 \Leftrightarrow x \leq 8$

94. a) $2x - 3y > 5$

$2 \cdot 2 - 3(-1) = 4 + 3 = 7$

$7 > 5 \Rightarrow (2, -1)$ es solución de la inecuación.

b) $4x + 3y > 0$

$4 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 8 - 3 = 5$

$5 > 0 \Rightarrow (2, -1)$ no es solución de la inecuación.

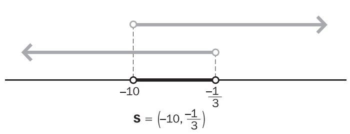
96. Ningún valor es solución del sistema.

98. a) Primera inecuación:

$x < \dfrac{-1}{3} \Rightarrow \mathbf{S_1} = \left(-\infty, \dfrac{-1}{3}\right)$

Segunda inecuación:

$x > -10 \Rightarrow \mathbf{S_2} = (-10, +\infty)$

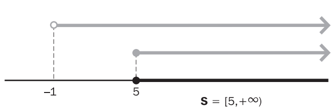


b) Primera inecuación:

$x \geq 5 \Rightarrow \mathbf{S_1} = [5, +\infty)$

Segunda inecuación:

$x > -1 \Rightarrow \mathbf{S_2} = (-1, +\infty)$

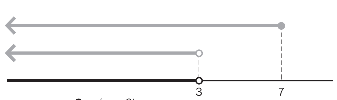


c) Primera inecuación:

$x < 3 \Rightarrow \mathbf{S_1} = (-\infty, 3)$

Segunda inecuación:

$x \leq 7 \Rightarrow \mathbf{S_2} = (-\infty, 7]$

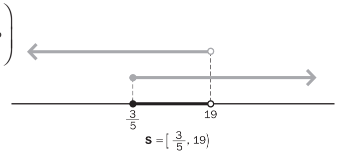


d) Primera inecuación:

$x \geq \dfrac{3}{5} \Rightarrow \mathbf{S_1} = \left[\dfrac{3}{5}, +\infty\right)$

Segunda inecuación:

$x < 19 \Rightarrow \mathbf{S_2} = (-\infty, 19)$



100. Llamamos x a los kilogramos de pasta. Por tanto, los kilogramos de azúcar serán $3x$ y los de arroz $6x$.

$$x + 3x + 6x = 1200$$

$$10x = 1200;\ x = \frac{1200}{10} = 120$$

Se han recogido 120 kilogramos de pasta, 360 de azúcar y 720 de arroz.

102. a) $18x + 0{,}75y$

b) $18 \cdot 3 + 0{,}75 \cdot 523 = 446{,}25$

Debe pagar \$ 446,25.

104. Mohammed Ibn Musa Al-Khwarizmi nació en la ciudad de Khwarizmi (actual Khiva, en Uzbekistán) en el año 783.

106. Respuesta abierta.

108. Llamamos x al tiempo que tardarían los dos pintores en pintar la pared.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 1$$

$$6 \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3}\right) = 6 \cdot 1$$

$$6 \cdot \frac{x}{2} + 6 \cdot \frac{x}{3} = 6 \cdot 1$$

$$3x + 2x = 6$$

$$5x = 6$$

$$x = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

Tardarían 1,2 horas en pintar la pared.

110. a) Llamamos x al número de horas que tarda el bus en alcanzar al automóvil.

El número de horas que el automóvil llevará de viaje hasta que el bus le alcance es $x + 2$.

La distancia que ha recorrido el bus puede expresarse como $120x$ y la que ha recorrido el automóvil como $90(x + 2)$.

$$120x = 90(x + 2)$$

$$120x = 90x + 180$$

$$120x - 90x = 180$$

$$30x = 180$$

$$x = \frac{180}{30} = 6$$

Se encontrarán después de 6 horas de la salida del coche; es decir, a las 16 horas.

b) $120x = 120 \cdot 6 = 720$

Habrán recorrido 720 km.

112. Llamamos x a la longitud del cateto más pequeño. Así, la ecuación que tenemos que resolver es:

$$\frac{x \cdot (x + 1)}{2} = 10$$

Resolvemos la ecuación por el método de ensayo-error y obtenemos $x = 4$. Por lo tanto, los catetos miden 4 cm y 5 cm.

116. El perímetro del triángulo es $3x$ y el del rectángulo vale: $2x + 10$. La condición del enunciado es:

$3x < 2x + 10$

$x < 10$

118. Sea x la aportación de Mónica. Entonces, la de Víctor es: $x - 4{,}8$. Se tiene:

$$x + x - 4{,}8 > 18 \Rightarrow x > \frac{22{,}8}{2} = 11{,}4$$

La aportación de Mónica ha sido superior a \$ 11,4.

120. Representamos por x el número de vasos que se deben comprar.

$9 + 0{,}5 \cdot (x - 12) \leq 0{,}6x$

$9 + 0{,}5x - 6 \leq 0{,}6x$

$0{,}5x - 0{,}6x \leq -9 + 6$

$-0{,}1x \leq -3 \Rightarrow x \geq \dfrac{3}{0{,}1} = 30$

Se deben comprar un mínimo de 30 vasos.

122. Representamos por x la nota que puede haber obtenido en la tercera prueba.

Nota media: $\frac{6+7+x}{3}=\frac{13+x}{3}$

Se tiene el siguiente sistema de inecuaciones:

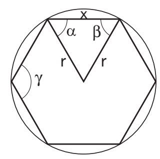
$$\left.\begin{array}{l}\frac{13+x}{3}>6{,}5\\ \frac{13+x}{3}<7{,}5\end{array}\right\}$$

Primera inecuación:	Segunda inecuación:
$13+x>19{,}5$	$13+x<22{,}5$
$x>19{,}5-13;$	$x<22{,}5-13$
$x>6{,}5$	$x<9{,}5$

La solución del sistema de inecuaciones es: S = (6,5, 9,5). Es decir, puede haber obtenido una nota mayor que 6,5 y menor que 9,5.

124. Partimos de que los ángulos de un hexágono regular son de 120°, ya que se puede descomponer en cuatro triángulos y se obtiene:

$$\gamma=\frac{4\cdot180°}{6}=120°$$



De la figura se deduce, por simetría, que:

$$\alpha=\beta=\frac{\gamma}{2}=60°.$$

En el triángulo dentro del hexágono, el tercer ángulo vale también 60°. Al ser los tres ángulos iguales y dos lados iguales, es un triángulo equilátero. Por tanto, la relación entre el radio r de la circunferencia y el lado x del rectángulo es: $x=r$.

Si el perímetro del rectángulo ha de ser mayor que la longitud de la circunferencia, se tiene:

$$2x+2\cdot2>2\pi\cdot x\Rightarrow 2x(\pi-1)<2\cdot2\Rightarrow x<\frac{2}{\pi-1}$$

128. Llamamos x a la altura de la lámina grande (antes de recortarla).

	Lámina grande	Lámina pequeña
Base	20	14
Altura	x	x – 6
Área	20x	14(x – 6)

$$20x-14(x-6)=174$$
$$20x-14x+84=174$$
$$20x-14x=174-84$$
$$6x=90$$
$$x=\frac{90}{6}=15$$

La altura de la lámina antes de recortarla era 15 cm.

130.

Número de minerales	Cajas
x	$\frac{x}{5}+1$
x – 1	$\frac{x-1}{4}$

Así, se cumple que:

$$\frac{x}{5}+1=\frac{x-1}{4}\Rightarrow x=25$$

Por lo tanto, Silvia tiene 25 minerales y 6 cajas.

132. $\left.\begin{array}{l}3x-2\le12\\-(3x-2)\le2\end{array}\right\}$

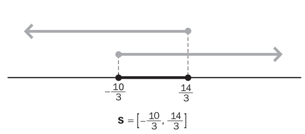
Primera inecuación: $3x-2\le12\Leftrightarrow x\le\frac{14}{3}$

$\mathbf{S_1}=\left(-\infty,\frac{14}{3}\right]$

Segunda inecuación:

$-(3x-2)\le12\Leftrightarrow x\ge\frac{10}{-3}$

$\mathbf{S_2}=\left[-\frac{10}{3},+\infty\right)$



134. x → aumento de la velocidad en km/h

Inecuación: $6+x>\frac{4}{0{,}5}\Leftrightarrow x>2$

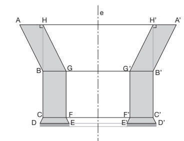
Deberá aumentar la velocidad en más de 2 km/h.

Módulo 6 Líneas de simetría. Áreas. Medidas en grados de ángulos notables

Actividad inicial

Primero dibujamos el primer edificio y la calle a escala 1:2000.

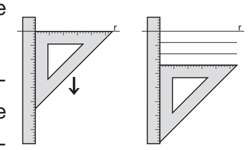
A continuación, buscamos el centro de la calle y trazamos el eje de simetría; de esta manera, el segundo edificio nos quedará en el otro lado de la calle.

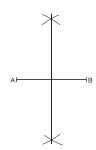


Por último, dibujamos el segundo edificio, simétrico al primero.

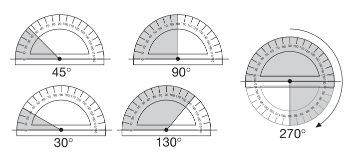
Evaluación diagnóstica

- Veamos cómo trazar rectas paralelas con regla y escuadra.
  - — Colocamos uno de los lados que forman el ángulo recto de la escuadra sobre la recta r.
  - — Apoyamos la regla sobre el otro lado de la escuadra que forma ángulo recto.
  - — Deslizamos la escuadra sobre la regla, sujetando ésta con fuerza para impedir que se mueva. De este modo, obtenemos rectas paralelas a r.



- 

Los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento.

- 

- El primer poliedro es convexo, ya que todos sus ángulos son convexos. El segundo poliedro es cóncavo, ya que tiene ángulos cóncavos.

-

Rectángulo	$A=b\cdot h$
Cuadrado	$A=a^2$
Romboide	$A=b\cdot h$
Rombo	$A=\frac{D\cdot d}{2}$
Triángulo	$A=\frac{b\cdot h}{2}$
Trapecio	$A=\frac{(B+b)\cdot h}{2}$
Polígono regular	$A=\frac{P\cdot ap}{2}$
Círculo	$A=\pi\cdot r^2$
Sector circular	$A=\frac{\pi r^2}{360}\cdot n=l\cdot\frac{r}{2}$
Segmento circular	$A=\frac{\pi r^2}{360}\cdot n-\frac{b\cdot h}{2}$
Corona circular	$A=\pi(R^2-r^2)$
Trapecio circular	$A=\frac{\pi\cdot(R^2-r^2)}{360}\cdot n$

- Aplicamos el teorema de Pitágoras:

  $h = \sqrt{25^2 + 32^2} = 41$ cm

- 1. Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.
  2. Dos triángulos son semejantes si tienen los lados proporcionales.
  3. Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales.

     — Para los triángulos rectángulos estos criterios se reducen a dos:

     Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen un ángulo agudo igual

     Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen los catetos proporcionales, o un cateto y la hipotenusa proporcionales.

- Primero aplicamos el teorema de Pitágoras:

  $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{8{,}5^2 - 7{,}6^2} = 3{,}8$ cm

  Aplicamos el teorema de Tales:

  $\frac{b'}{b} = \frac{a'}{a}$

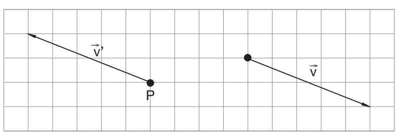
  $a' = \frac{a \cdot b'}{b} = \frac{8{,}5 \cdot 5{,}7}{3{,}8} = 12{,}7$ cm

  $\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$

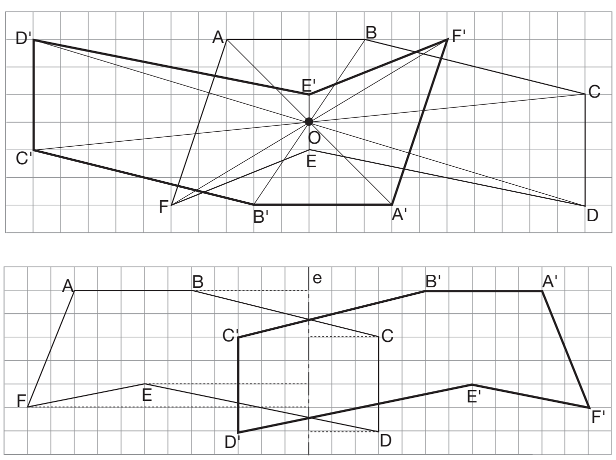
  $c' = \frac{c \cdot b'}{b} = \frac{7{,}6 \cdot 5{,}7}{3{,}8} = 11{,}4$ cm

Ejercicios y problemas

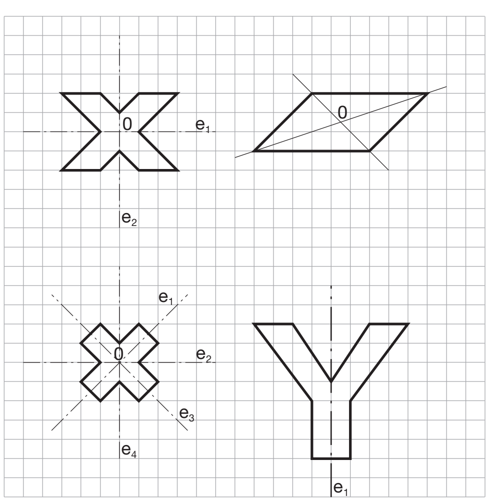
20.



22.



24.



26. $A_{esfera} = 4\,\pi\,r^2$ $\qquad \frac{4\,\pi\,r^2}{\pi\,r^2} = 4$

$A_{círculo\ máximo} = \pi\,r^2$

El área de la esfera es cuatro veces la de un círculo máximo.

28. a) $A = \sqrt{3}\,a^2 = \sqrt{3} \cdot 4^2 = 27{,}71$

El área del tetraedro es de 27,71 cm^2.

b) $A = 2\sqrt{3}\,a^2 = 2\sqrt{3} \cdot 5^2 = 86{,}60$

El área del octaedro es de 86,60 cm^2.

c) $A = 5\sqrt{3}\,a^2 = 5\sqrt{3} \cdot 6^2 = 311{,}77$

El área del icosaedro es de 311,77 cm^2.

d) $A = 6\,a^2 = 6 \cdot 7^2 = 294$

El área del cubo es de 294 cm^2.

e) $A = 30\,a \cdot ap = 30 \cdot 1{,}8 \cdot 1{,}24 = 66{,}96$

El área del dodecaedro es de 66,96 cm^2.

30. Tetraedro:

$A = \sqrt{3}\,a^2;\ 240 = \sqrt{3}\,a^2;\ a^2 = ;\ \frac{240}{\sqrt{3}}$

$a^2 = 138{,}56;\ a = 11{,}77$

Las aristas del tetraedro miden 11,77 cm.

Octaedro:

$A = 2\sqrt{3}\,a^2;\ 240 = 2\sqrt{3}\,a^2;\ a^2 = ;\ \frac{240}{2\sqrt{3}}$

$a^2 = 69{,}28;\ a = 8{,}32$

Las aristas del octaedro miden 8,32 cm.

32. En primer lugar, hallamos la longitud del lado del cuadrado y el apotema de la pirámide.

$l^2 + l^2 = 15^2;\ 2l^2 = 225;\ l^2 = 112{,}5;\ l = 10{,}61$

$ap = \sqrt{\left(\frac{10{,}61}{2}\right)^2 + 17^2} = \sqrt{317{,}14} = 17{,}81$

Perímetro de la base: $P = 4 \cdot 10{,}61 = 42{,}44$

$A_{lateral} = \frac{P \cdot ap}{2} = \frac{42{,}44 \cdot 17{,}81}{2} = 377{,}93$

$A_{base} = l^2 = 112{,}5$

$A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = 377{,}93 + 112{,}5 = 490{,}43$

El área lateral de la pirámide es de 377,93 cm^2 y el área total, de 490,43 cm^2.

34. a) $A_{lateral} = 2\,\pi\,r \cdot g = 2\,\pi \cdot 2 \cdot 7 = 87{,}96$

$A_{total} = 2\,\pi\,r \cdot (g + r) = 2\,\pi \cdot 2\,(7 + 2) = 113{,}10$

El área lateral del cilindro es de 87,96 cm^2 y el área total, de 113,10 cm^2.

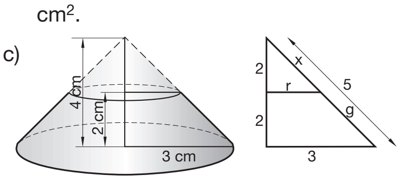
b) $g = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$A_{lateral} = \pi\,r \cdot g = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 47{,}12$

$A_{total} = \pi\,r \cdot (g + r) = \pi \cdot 3\,(5 + 3) = 75{,}40$

El área lateral del cono es de 47,12 cm^2 y el área total, de 75,40 cm^2.

c)



$\frac{r}{3} = \frac{2}{4};\ r = \frac{2 \cdot 3}{4} = 1{,}5$

$\frac{5}{4} = \frac{x}{2};\ x = \frac{5 \cdot 2}{4} = 2{,}5$

$g = 5 - x = 5 - 2{,}5 = 2{,}5$

$A_{lateral} = \pi\ g \cdot (R + r) = \pi \cdot 2{,}5 \cdot (3 + 1{,}5) = 35{,}34$

$A_{total} = \pi\ g \cdot (R + r) + \pi\ R^2 + \pi\ r^2 = \pi \cdot 2{,}5\ (3 + 1{,}5) +$

$+ \pi \cdot 3^2 + \pi \cdot 1{,}5^2 = 70{,}69$

El área lateral del tronco de cono es de 35,34 cm^2 y el área total, de 70,69 cm^2.

36. $\text{sen}\ \alpha = -0{,}8;\ \cos\ \alpha = 0{,}6;$

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{-0{,}8}{0{,}6} = -\dfrac{4}{3}$

$\text{sen}\ \beta = 0{,}6;\ \cos\ \beta = 0{,}8;\ \text{tg}\ \beta = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = \dfrac{3}{4}$

$\text{sen}\ \gamma = 0{,}43;\ \cos\ \gamma = -0{,}9;$

$\text{tg}\ \gamma = \dfrac{0{,}43}{-0{,}9} = -\dfrac{43}{90}$

$\text{sen}\ \delta = -0{,}7;\ \cos\ \delta = -0{,}7;\ \text{tg}\ \delta = \dfrac{-0{,}7}{-0{,}7} = 1$

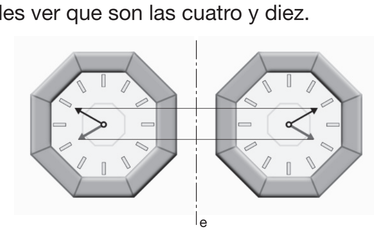
38. a) $180° - 126° = 54°$
$\text{sen}\ 126° = \text{sen}\ 54°$
$\cos\ 126° = -\cos\ 54°$
$\text{tg}\ 126° = -\text{tg}\ 54°$

b) $248° - 180° = 68°$
$\text{sen}\ 248° = -\text{sen}\ 68°$
$\cos\ 248° = -\cos\ 68°$
$\text{tg}\ 248° = \text{tg}\ 68°$

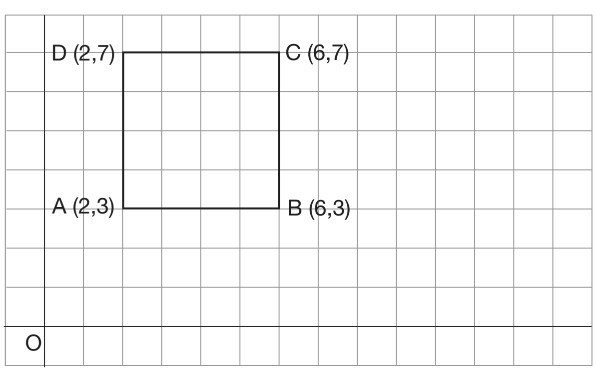
c) $360° - 350° = 10°$
$\text{sen}\ 350° = -\text{sen}\ 10°$
$\cos\ 350° = \cos\ 10°$
$\text{tg}\ 350° = -\text{tg}\ 10°$

d) $-110° + 180° = 70°$
$\text{sen}\ (-110°) = -\text{sen}\ 70°$
$\cos\ (-110°) = -\cos\ 70°$
$\text{tg}\ (-110°) = \text{tg}\ 70°$

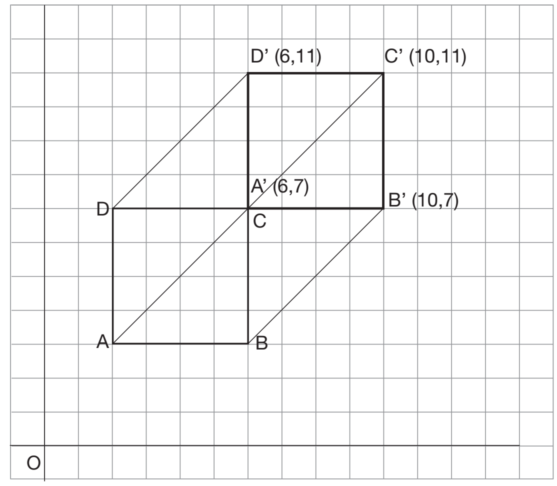
40. Si realizamos una simetría axial al reloj con eje de simetría *e*, puedes ver que son las cuatro y diez.



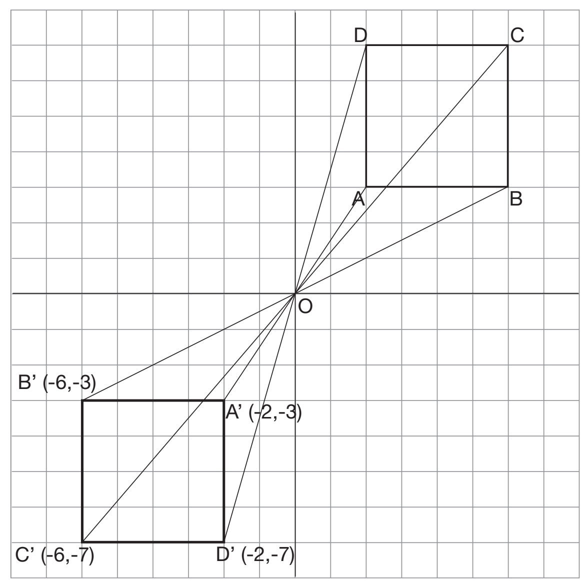
42.



a) El homólogo de *A* es el vértice *C.* Las nuevas coordenadas de *A'* serán *A'*(6,7). Trazamos semirrectas paralelas desde los otros vértices *B, C* y *D,* y obtenemos *B', C'* y *D'.*



b) Trazamos semirrectas con origen en cada uno de los vértices y que pasen por 0. Determinamos así los vértices homólogos.



c) Trazamos semirrectas perpendiculares al eje de ordenadas con origen en cada uno de los vértices. Determinamos así los vértices homólogos.