PRECISIONES CURRICULARES
PARA EL BACHILLERATO GENERAL UNIFICADO

ÁREA DE MATEMATICA

TERCER CURSO

Precisiones para la enseñanza y el aprendizaje

1 Precisiones generales

El eje curricular integrador del área propone la elaboración de modelos como el mecanismo para resolver problemas. En un desarrollo gradual, que durará los tres años del bachillerato, los estudiantes deberán comprender que la solución de aquellos que se estudian con la matemática pasan por un proceso que se inicia con una representación de los elementos del *problema original* mediante conceptos y lenguaje matemático, que continúa con la formulación de un *problema matemático*, de cuyos análisis y resolución, tras la interpretación respectiva, esperamos encontrar una solución al *problema original*.

Una manera de lograr esta comprensión gradual consiste en que, desde el inicio del bachillerato, los estudiante se enfrenten con la tarea de elaborar modelos y, a través de ellos, resuelvan problemas, por más simples que estos sean. Esta labor puede ser desarrollada por el docente en algunas fases.

1. **El problema.** En cada bloque, para introducir los temas principales, el docente propondrá a la clase uno o varios problemas o situaciones cuya representación matemática utilizará los conceptos matemáticos principales que se quieran estudiar en dicho tema.
2. **Experimentación.** El docente propondrá diversas actividades a los estudiantes para que se familiaricen con el problema o la situación. Estas actividades podrán consistir, entre otras, en experimentar con los elementos del problema, lo que les permitirá tomar datos, que serán presentados mediante tablas o gráficos. A partir de estas representaciones, los estudiantes podrán conjeturar soluciones o descubrir algunas "no soluciones". El docente, en cambio, contará con el material y el vocabulario suficientes para introducir los conceptos objetos de estudio, y que serán indispensables para resolver el problema o explicar la situación.
3. **Modelar.** De los datos pasamos a una representación de los elementos del problema y de las relaciones existentes entre ellos mediante conceptos matemáticos; en otras palabras, *elaboramos un modelo* del problema, con lo cual obtenemos, a su vez, un *problema matemático*. En la medida en que se utilizarán funciones para este proceso, se hará necesaria la identificación de *variables* y las *relaciones de dependencia* entre ellas; esto dará lugar a etiquetar a algunas variables como *independientes* y otras como *dependientes*, y a identificar algunas relaciones como *funciones*. Acompañando a este proceso, estará siempre el uso explícito por parte del estudiante de los símbolos (letras) que utilice para representar las variables y las funciones. El docente deberá insistir en el uso consistente de esos símbolos, y del uso correcto del lenguaje para la descripción de dichas representaciones.
4. **Interpretación y Generalización.** Una vez obtenido el modelo, se resuelve el *problema matemático*, se interpreta la solución matemática para dar solución al *problema original*. A continuación, debemos enfatizar en que la solución matemática encontrada permite obtener métodos generales que pueden resolver una variedad de problemas "del mismo tipo", o pueden guiarnos a dar solución a problemas nuevos más complejos, pero, para ello, es necesario estudiar, con mayor profundidad, los conceptos que surgieron como abstracciones de los elementos que intervinieron en la elaboración del modelo.

   En esta fase, también se pueden estudiar varios de los conceptos únicamente con motivaciones matemáticas como las de demostrar un teorema mediante dos métodos diferentes; Por ejemplo, la fórmula para calcular la suma de los primeros *n* números de una progresión aritmética suele ser demostrada mediante inducción matemática; sin embargo, mediante argumentos geométricos —que incluyen la fórmula del área de un rectángulo, condiciones suficientes para la congruencia de triángulos, entre otros— también se obtiene una demostración de la mencionada fórmula.

En cada una de estas fases, el docente debe insistir en el uso correcto del lenguaje por parte de los estudiantes, tanto escrito como oral, en la formulación e identificación de los diversos elementos que aparecen en el proceso de la elaboración del modelo.

A continuación, vemos los ejes de aprendizaje que aparecen en cada una de las fases.

1. En la del problema, el estudiante debe **leer** un texto que, en la mayoría de las ocasiones, se refieren a temas no matemáticos. También debe **expresarse oralmente** para hablar sobre el problema, para averiguar sobre él, etcétera. Sin las destrezas necesarias de la **lengua en forma escrita y oral**, no comprenderá lo que el problema le plantea.

   Dado que los problemas que se utilicen deben ser, preferentemente, no matemáticos, en esta fase se **integran diferentes conocimientos adquiridos**; por ejemplo, con la economía y las finanzas, la biología, la física y la química, etcétera.
2. En la fase de experimentación, se tiene una oportunidad valiosa para hacer uso de las **tecnologías de la información**, mediante la toma de datos, la elaboración de tablas, de gráficos, etcétera. También se **integran conocimientos adquiridos**, pues en esta fase casi siempre se recurre a conocimientos matemáticos que los estudiantes ya conocen; por ejemplo, elaborar gráficas, realizar ciertos cálculos, tanto "a mano" como a través de "tecnologías".

   Otro elemento presente en esta fase es la **conjetura**, cuando se procesan e interpretan los datos obtenidos, y se proponen soluciones, o caminos a seguir para resolver el problema.

   Finalmente, el uso correcto de la **lengua** se evidencia a través de la presentación de los datos recogidos, de las síntesis que de ellos se hagan.
3. En la fase de modelar, la **abstracción** es una de las principales herramientas con la que los estudiantes deben contar, pues es la que les permite identificar las variables y las relaciones entre las variables. El **uso correcto de la lengua** les permite elegir, adecuadamente, los símbolos, que representan los elementos del problema, para su manipulación posterior.
4. En la fase de los conceptos, una vez más la **abstracción**, la **generalización**, el **uso correcto de la lengua**, las **tecnologías** estarán presentes.

   La manera de saber que algo es una solución es "probar", **justificar**, que lo hallado es una solución; parte del desarrollo de los conceptos está encaminado, precisamente, a ese fin.

En el perfil de salida del BGU, se propone que el egresado resuelva problemas que la vida cotidiana le plantea. Es de esperar que los problemas que se proponen en el bachillerato, tanto para introducir los conceptos, objetos de estudio, como los que tienen que resolver como parte de su formación, sean de la vida cotidiana. Sin embargo, muchos de los problemas de la vida real no pueden ser resueltos con los conocimientos matemáticos adquiridos en el bachillerato y, en varias ocasiones, ni siquiera con los que se adquirirán en la universidad, a nivel de la licenciatura (ingeniería); serán necesarios estudios especializados de maestría y/o doctorado.

A pesar de esta situación, siempre es posible adaptar los problemas reales y conformar al menos dos tipos de problemas que podrán ser utilizados en el aula:

1. **Problemas reales**, en los que se requiere de matemática para resolverlos; pueden simplificarse para que los conocimientos necesarios sean los que los estudiantes poseen o pueden poseer en el nivel en el que se encuentran. En estos problemas, los conceptos matemáticos adquieren sentido.
2. **Problemas ilustrativos**, cuyo único objetivo es ejemplificar conceptos, términos y teoremas.

Hay una gran variedad de problemas reales que pueden ser simplificados, sin que por ello se pierda la posibilidad de utilizarlos como buenos prototipos de lo que con la matemática puede hacerse en la vida cotidiana. En las últimas décadas, un buen número de esos problemas han sido modelados con herramientas matemáticas relativamente sencillas de comprender; algunos ejemplos se encuentran propuestos en el bloque de "Matemáticas discretas".

2 Tercero de bachillerato

Una pregunta que los estudiantes formulan a sus profesores frecuentemente es: "¿para qué sirve esto?", donde "esto" es el tema que se está estudiando en ese momento. Y es esta pregunta, quizás, una de las más difíciles de responder sin caer en un enunciado vacío que se limita a repetir que tiene importantes aplicaciones en alguna ciencia.

Y es que la gran parte de las aplicaciones elementales y más conocidas de la Matemática se nos "agotan" en la Educación Básica: cuentas, proporciones de los ingredientes en una receta, etcétera. En cambio, gran parte de los contenidos matemáticos que tradicionalmente han sido trabajados en el Bachillerato son, en realidad, soporte de otros contenidos matemáticos, necesarios en el aprendizaje de otros campos del conocimiento, y que se estudian en la universidad. Incluso estos últimos no siempre se aplican directamente en la solución de problemas, sino que sirven, a su vez, de base para estudios de doctorado dónde sí se resuelven problemas que podríamos llamar de la "vida real", pero que son complejos.

Sin embargo, los últimos 70 años, fomentado en parte por el desarrollo de las ciencias de la computación, ha emergido el campo de las Matemáticas Discretas. Los problemas que aborda son trabajados con matemática no básica, pero varios de esos problemas pueden ser explicados con un lenguaje matemático sencillo funciones, matrices y teoría elemental de números, que son asequibles a los estudiantes del Bachillerato.

En este año del Bachillerato, se incorporan elementos básicos de la teoría de Números. Esta rama de la matemática fue considerada por mucho tiempo como un campo sin interés práctico, propio de las matemáticas puras. Sin embargo, las técnicas y herramientas que ha desarrollado, en la actualidad, dan soporte a muchas aplicaciones computacionales. Los docentes pueden utilizar una de sus aplicaciones reales, la que se va a mostrar a continuación, para introducir el tema de la *aritmética modular*.

El profesor plantea, a la clase, el siguiente problema de gran actualidad.

Problema 1 (Esquema de cifrado de clave pública RSA)**.** *Hoy en día, es normal enviar información a través de Internet. Muchas veces esa información es confidencial; por ejemplo, la clave de una cuenta de banco o el número de una tarjeta de crédito. Para evitar que una clave sea interceptada, el sistema **emisor** —desde donde se emite el mensaje— cifra la clave mediante un código secreto antes del envío, y lo que se envía es la clave cifrada. Cuando el mensaje cifrado llegue al sistema del banco (**receptor**), éste deberá descifrar el mensaje para obtener la clave.*

Para ello, tanto el sistema que envía la clave cifrada como el sistema del banco que recibe la clave cifrada deben conocer el método de cifrado. Un método común de cifrado consiste en darle al emisor una parte de la información del método de cifrado. Esa parte de información que el emisor conoce es de dominio público, así, cualquier sistema que quiere enviar un mensaje al receptor, utiliza esa información pública, pero, únicamente, el receptor podrá descifrar el mensaje.

Antes de que el docente indique el procedimiento de cifrado y de descifrado, es necesario conocer ya algo sobre la aritmética modular. Con la motivación de que los conceptos que van a estudiarse a continuación servirán para aprender el método de cifrado que se anunció en el problema, éste tema se puede empezar con el planteamiento a la clase de las siguientes preguntas:

a) *Si hoy es miércoles y faltan 23 días para mi cumpleaños, ¿en qué día (el nombre del día) celebraré mi cumpleaños?*

b) *Estamos en el mes de noviembre, ¿en qué mes estaremos* 26 *meses más tarde?*

c) *A las* 6 *de la tarde del lunes ocurrió un derrumbe en una mina. El equipo de rescate tardó* 50 *horas en sacar a los mineros atrapados. ¿A qué hora del día del rescate salieron los mineros?*

Solicite a los estudiantes que respondan estas preguntas sin contar uno a uno los días o los meses, en el caso de las dos primeras preguntas, o una a una las horas, en el caso de la tercera. De las respuestas de los estudiantes, deberá sistematizarlas de la siguiente manera.

a) Al dividir 23 días para 7 días que tiene una semana, obtenemos 3 como cociente y 2 como residuo (es decir, en 23 días caben 3 semanas y 2 días). Se tiene, entonces, la siguiente igualdad:
$$23 = 7\cdot 3 + 2.$$
Para determinar qué día es el de mi cumpleaños, añadimos 2 días a miércoles; es decir, mi cumpleaños cae en viernes.

b) La división entre 26 y 12 da un cociente de 2 y un residuo de 2. Entonces:
$$26 = 12\cdot 2 + 2.$$
Para determinar el mes en el que estaremos, añadimos dos meses a noviembre; es decir, luego de 26 meses, estaremos en enero.

c) De la igualdad
$$50 = 24\cdot 2 + 2,$$
los mineros saldrán, dos días después de ocurrido el accidente, 2 horas más tarde de las 6; es decir, saldrán a las 8 de la noche del miércoles.

A partir de esto se introduce el concepto de $r = a \bmod n$, con lo que las tres igualdades pueden ser escritas de la siguiente manera:

$$2 = 23 \bmod 7, \quad 2 = 26 \bmod 12, \quad 2 = 50 \bmod 24.$$

A continuación, mediante ejemplos, se **generaliza** para obtener el siguiente resultado:

Teorema 1.

$$(a \cdot b) \bmod n = [(a \bmod n) \cdot (b \bmod n)] \bmod n. \qquad (1)$$

Con lo trabajado hasta aquí, ya se cuenta con las herramientas suficientes para aprender el método a través de un ejemplo. Tal vez, sea necesario que el docente haga un repaso de los siguientes conceptos: *divisibilidad*, *números primos*, *máximo común divisor* y *mínimo común múltiplo*, pues son utilizados a lo largo del ejemplo y del método de cifrado.

Ejemplo. Como se dijo, el método consiste en que el receptor debe hacer pública cierta información que el emisor utilizará para cifrar el mensaje que enviará. Esta información se obtiene de la siguiente manera.

Información que publica el emisor.

1. El receptor escoge dos números primos que los va a mantener en secreto. Por ejemplo, $p = 5$ y $q = 17$.
2. Define $n = pq$; es decir, $n = 85$.
3. Calcula el número $m = \text{mcm}(p-1, q-1)$; en este caso:

$$m = \text{mcm}(4, 16) = 16.$$

4. Elige un número r que no tenga divisores en común con m —excepto 1. Por ejemplo, $r = 3$, no tiene divisores en común con 16.
5. La información que el receptor hace pública son los números n y r; en este caso, publica los números 85 y 3.

Procedimiento de cifrado del emisor. Supongamos que la clave que se va a enviar es MOL. Con la información publicada por el receptor, el emisor procede de la siguiente manera.

1. El emisor codifica la palabra MOL mediante una secuencia de números, asignando a cada letra del alfabeto un número. Por ejemplo, a la A el 1, a la B el 2, ..., a la Z el 27. Así, la clave MOL se transforma en la secuencia de números

$$13,\ 16,\ 12.$$

   La asignación de los números a cada letra es arbitraria, salvo que hay que asegurarse de que el máximo común divisor de cada número de la secuencia y n (en este caso, 85) sea igual a 1 (es decir, que no tenga divisores en común distintos del 1).

2. Cada número en la secuencia es reemplazado por los siguientes números:

$$13^3 \bmod 85,\ 16^3 \bmod 85,\ 12^3 \bmod 85;$$

   es decir, la secuencia cifrada enviada por el emisor y recibida por receptor es la siguiente:

$$72,\ 16,\ 28.$$

Procedimiento de descifrado del receptor.

1. Obtiene un número s tal que $r \cdot s = 1 \bmod m$, es decir, tal que

$$3s = 1 \bmod 16.$$

   Esto se logra mediante el cálculo de potencias sucesivas de $r \bmod m$ hasta que se obtenga el 1; el s buscado es el penúltimo residuo. En este caso, tenemos los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} 3 \bmod 16 &= 3, \\ 3^2 \bmod 16 &= 9 \bmod 16 = 9, \\ 3^3 \bmod 16 &= 27 \bmod 16 = 11, \\ 3^4 \bmod 16 &= 81 \bmod 16 = 1. \end{aligned}$$

   Entonces $s = 11$.

2. La secuencia descifrada se obtiene mediante los siguientes cálculos:

$$72^{11} \bmod 85 = 13,\ 16^{11} \bmod 85 = 16,\ 28^{11} \bmod 85 = 12,$$

   que es la secuencia antes del cifrado.

El procedimiento mostrado lleva el nombre de **Esquema de cifrado de clave pública RSA**. Las letras RSA son las iniciales de los nombres de los creadores del método en 1973: Ron Rivest, Adi Shamir y Len Adleman.

En los últimos cálculos, el docente tiene un ejemplo valioso para mostrar que la **tecnología** sola no es suficiente para resolver un problema.

En efecto, muchas calculadoras no tienen la capacidad para calcular de manera exacta el número 72^{11}, un número de al menos 20 cifras; luego, tampoco pueden obtener el residuo de dividir este número entre 85. Sin embargo, mediante la aplicación de la propiedad (1), este cálculo se vuelve sencillo:

1. Se sabe que $72 \bmod 85 = 72$.
2. Con ayuda de la tecnología, si es necesario, se obtiene

$$72^2 \bmod 85 = 84.$$

3. Ahora se calcula $72^4 \bmod 85$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 72^4 \bmod 85 &= [(72^2 \bmod 85)(72^2 \bmod 85)] \bmod 85 \\ &= [(84) \cdot (84)] \bmod 85 \\ &= [(84 \bmod 85)(84 \bmod 85)] \bmod 85 \\ &= (1 \cdot 1) \bmod 85 = 1. \end{aligned}$$

4. Se calcula $72^8 \bmod 85$:

$$\begin{aligned} 72^8 \bmod 85 &= [(72^4 \bmod 85)(72^4 \bmod 85)] \bmod 85 \\ &= (1 \cdot 1) \bmod 85 = 1. \end{aligned}$$

5. Se calcula $72^{11} \bmod 85$:

$$\begin{aligned} 72^{11} \bmod 85 &= (72^8 \cdot 72^2 \cdot 72) \bmod 85 \\ &= [(72^8 \bmod 85)(72^2 \bmod 85) \\ &\quad (72 \bmod 85)] \bmod 85 \\ &= [(1)(84)(72)] \bmod 85 \\ &= 6048 \bmod 85 = 13. \end{aligned}$$

En estos cálculos se combinan la **tecnología** con las propiedades de la aritmética modular. Esto muestra la necesidad de fomentar ambas.

Luego de que los estudiantes practiquen con algunos ejemplos, en los que se enfatice, fundamentalmente, en la verificación de las hipótesis que exige el método para la elección del número r y de la codificación en números de cada letra del mensaje, es necesario que el docente plantee una pregunta fundamental: *¿Por qué funciona el método?*

Al responder esta pregunta, se evidencia el verdadero sentido de utilidad de la Matemática. Que el procedimiento utilizado haga lo que dice que hace —enviar mensajes secretos casi imposibles de descifrar—, solo puede ser establecido a través de una **demostración** dentro de una teoría matemática. Y, aunque el teorema fundamental que se utiliza no pueda ni deba ser demostrado, debe ser enunciado y, a través de ejemplos, lograr que los estudiantes lo comprendan. Una vez logrado esto, el docente podrá explicar de una manera sencilla el por qué el método funciona.

Otro de los ejes de aprendizaje que se trabajan a través de este problema es el de la **integración de conocimientos**: los números primos, máximo común divisor, etcétera, se entrelazan con un problema de las ciencias de la computación.

Finalmente, este problema también se presta para mostrar la utilidad de que una función sea inversible, pues el proceso de cifrado y descifrado puede ser visto como una función que es inversible.

En efecto, sean $\mathscr{O}$ el conjunto de todos los mensajes que pueden enviarse desde el emisor, y $\mathscr{M}$ el conjunto de todos los mensajes posibles que se pueden enviar al receptor. El esquema de cifrado de clave pública asigna a cada mensaje del conjunto $\mathscr{O}$ un único mensaje cifrado en $\mathscr{M}$; por lo tanto, existe una función $\kappa\colon \mathscr{O} \longrightarrow \mathscr{M}$ tal que si x es el mensaje original, $y = \kappa(x)$ es el mensaje cifrado.

Ahora bien, para obtener nuevamente el mensaje original, y no otro, no es posible que dos mensajes diferentes, x_1 y x_2, tengan el mismo mensaje cifrado; por lo tanto, la función κ es una función inyectiva, existe la función inversa κ^{-1} de $\operatorname{rec}(\kappa)$ sobre $\mathscr{O}$.

Si la función κ no fuera inversible, no sería posible recuperar el mensaje original a partir del cifrado.

La definición de la función κ está contenida en el procedimiento que sigue el emisor para cifrar el mensaje; la inversa κ^{-1} está definida a través del procedimiento que sigue el receptor para descifrar el mensaje recibido.

2.1 Bloque de Funciones y Números

Los conceptos fundamentales de la matemática son, en general, los más difíciles de aprender. Y este es el caso del concepto de función. Por ello su estudio y asimilación se planifican para lograrse a lo largo de los tres años del bachillerato. En cada año, hay tres tipos de contenidos en los que se estudian las funciones:

1. *Características generales de cualquier función*: concepto, dominio, recorrido, evaluación, representaciones, monotonía, simetría (paridad). Estas se estudian al inicio de cada año.
2. *Funciones elementales*, un par o trío cada año. Para cada una de éstas, se estudian las características generales.
3. *Problemas* que pueden ser modelados mediante alguna función.

Solo de esta manera es posible que, al final del bachillerato, se logre una comprensión del concepto de función.

Por lo expuesto, se insiste en que tanto en segundo como en tercer año, al inicio, se revisen nuevamente las características generales de las funciones, pero que ya se incorporen en los ejemplos las funciones que fueron estudiadas los años anteriores. Para el caso del tercero de bachillerato, la revisión de las características generales se hará con funciones lineales, cuadráticas, polinomiales, racionales y trigonométricas.

Al repaso de las características generales hay que añadir el método para determinar las propiedades de una función particular a partir de las propiedades de una función "madre" que es sometida a traslaciones y homotecias hasta obtenerse la función objeto de análisis.

En este año, se deben estudiar las funciones *exponenciales*, *logarítmicas* y *sucesiones*.

Exponenciales. El problema de reproducción de una pareja de conejos (que en cada generación procrean dos crías) puede servir al docente para trabajar con datos discretos que, al graficarlos, sugieran una función distinta a las estudiadas en años anteriores, pues el dibujo obtenido no corresponde ni a una recta, ni a una parábola, ni a ninguna curva trigonométrica, etcétera.

La función exponencial sirve de herramienta para describir fenómenos de crecimiento o bien rápido o bien lento. Dos ejemplos importantes son:

- Crecimiento poblacional exponencial: tomando datos de censos recientes, se puede modelar la población del Ecuador, con el objeto de predecir la población en las siguientes décadas.
- Decaimiento de una sustancia radioactiva como, por ejemplo, el carbono 14 y la datación de objetos arqueológicos. En el 2005, se utilizó este método para datar los restos arqueológicos de la cultura La Tolita. El docente puede proveer de datos relevantes y de interés a sus estudiantes, y pedir que se los grafique. Las gráficas deben sugerir generalizaciones sobre la monotonía y comportamiento asintótico de las funciones exponenciales.

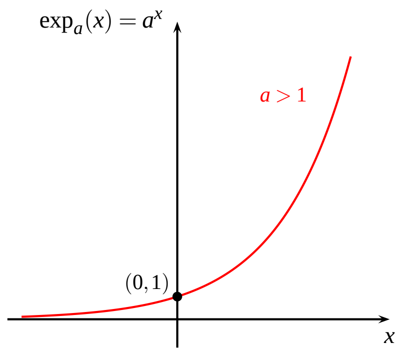
A través de estos problemas, se **integran conocimientos** de otros campos de estudio, como la historia, la química, con la matemática.

A este nivel no es posible presentar una definición de a^x cuando $a \in \mathbb{R}^+$ y $x \in \mathbb{R}$, por lo que se recomienda que, para ofrecer una "definición provisional" (hasta que en los estudios universitarios se acceda a una definición en el sentido estricto de la palabra), se parta de las propiedades de las potencias de números enteros, que ya han sido estudiadas en la EGB, para aceptar la existencia de una función $\exp_a\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que satisface las mismas propiedades de las potencias de números enteros, y que para cada $x \in \mathbb{R}$, en lugar de escribir $\exp_a(x)$ se escribe a^x.

Aunque no se tenga una definición formal de a^x, es importante hacer notar por qué está función no se define para $a \leq 0$. El siguiente ejemplo, ayuda en la cuestión: ¿a qué sería igual $(-2)^x$? Si x fuera un número racional de la forma $\frac{1}{n}$ con n un número par, sería imposible asignar un valor a $(-2)^x$ compatible con las otras propiedades de las exponenciales. Más aún, para cualquier número racional x, expresado en forma canónica (fracción irreducible) y con denominador un número par, no sería posible definir $(-2)^x$.

Con la ayuda de la tecnología, los estudiantes pueden obtener las características generales de la función como dominio, imagen, monotonía, paridad, la gráfica, y los comportamientos al infinito.

En particular, pueden concluir que la gráfica de a^x cuando $a > 1$ es



y que la función tiene las siguientes características:

- el dominio es $\mathbb{R}$;
- el recorrido es $\mathbb{R}^+$;
- es una función creciente;
- crece ilimitadamente a valores positivos si x es positivo y grande;
- pasa por el punto $(0,1)$; es decir, corta el eje vertical en 1; y
- se acerca a 0 si x es negativo y grande; es decir, el eje horizontal es una asíntota.

Mediante traslaciones, homotecias y reflexiones, se pueden determinar todas las características de funciones obtenidas por composición de funciones exponenciales y lineales:

$$x \mapsto ka^{\lambda x+\mu} + m$$

a partir de la función "madre" $x \mapsto a^x$. Cabe recalcar que para realizar este estudio no se requiere siquiera de la tecnología; basta con conocer las propiedades de a^x y los efectos de las traslaciones y homotecias.

Veamos un ejemplo. Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función cuya ley de asignación es

$$f(x) = -2\left(\frac{1}{4}\right)^{2x+1} + \frac{3}{4}.$$

En este caso, tenemos

$$k = -2, \quad a = \frac{1}{4}, \quad \lambda = 2, \quad \mu = 1 \quad \text{y} \quad m = \frac{3}{4}.$$

En primer lugar, al aplicar las propiedades básicas de los exponentes, podemos escribir la ley de asignación de f de las siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\left(\frac{1}{4}\right)^{2x+1} + \frac{3}{4} \\ &= (-2)(4^{-1})^{2x}(4^{-1}) + \frac{3}{4} \\ &= -2^{-1}(4^{-2})^x + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^x + \frac{3}{4}.$$

Sin recurrir siquiera a una calculadora gráfica (o un software para graficar), el estudiante puede realizar a mano alzada un gráfico bastante aproximado de la función f, a partir del gráfico de la función g definida por

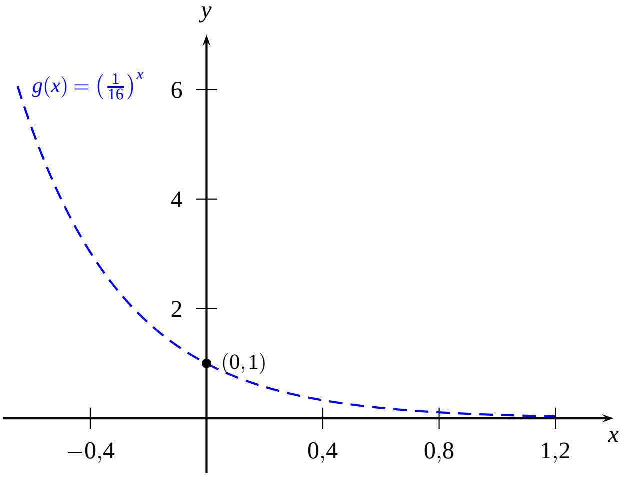
$$g(x) = \left(\frac{1}{16}\right)^x$$

mediante la aplicación de traslaciones, homotecias y reflexiones.

En efecto, como la base de g es un número menor que 1, podemos decir lo siguiente sobre g:

1. su dominio es $\mathbb{R}$;
2. su recorrido es $\mathbb{R}^+$; es decir, $g(x)$ siempre toma valores mayores que 0;
3. es una función decreciente;
4. crece ilimitadamente a valores positivos si x es negativo y grande;
5. pasa por el punto $(0,1)$; es decir, corta el eje vertical en 1; y
6. se acerca a 0 si x es positivo y grande; es decir, el eje horizontal es una asíntota de la gráfica de g.

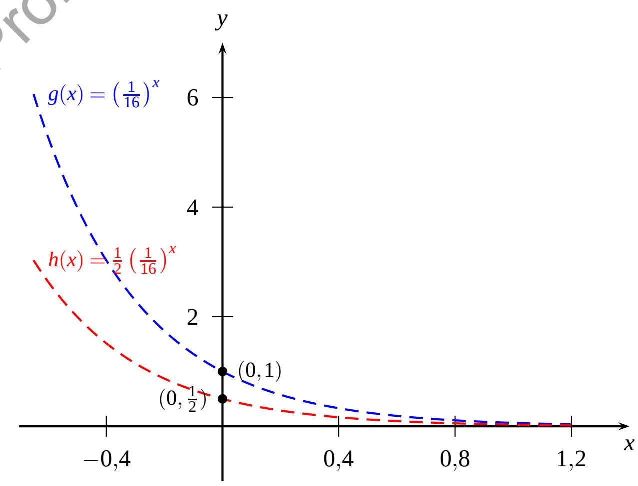
Con esta información, se puede esbozar el siguiente dibujo:



A continuación, vamos a graficar la función h definida por

$$h(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^x = \frac{1}{2}g(x).$$

La gráfica de h es una contracción (a la mitad) de la de g; esto significa que las características de h son las mismas que las de g, salvo que no pasa por el punto $(0,1)$, sino por el punto $(0,\frac{1}{2})$. En otras palabras, el dominio de h es $\mathbb{R}$, su recorrido, $\mathbb{R}^+$, es una función decreciente, crece ilimitadamente a valores positivos si x es negativo y grande, etcétera. Los estudiantes pueden esbozar, a mano alzada, la gráfica de h a partir de la de g:

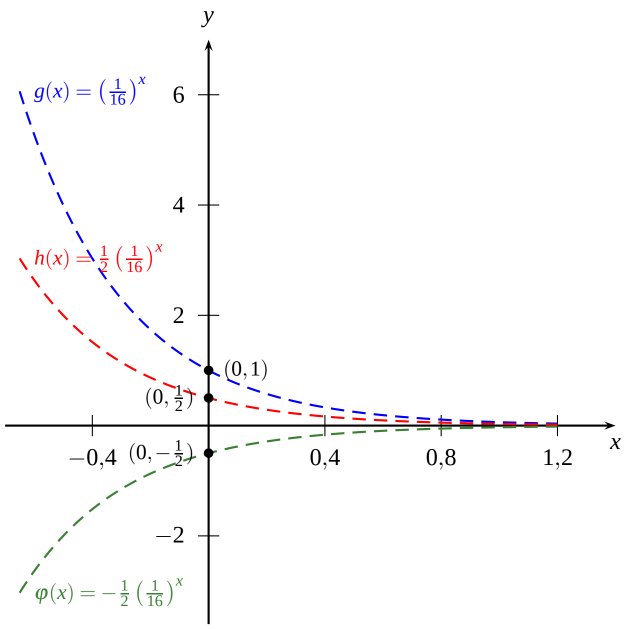


El siguiente paso es dibujar la gráfica de la función φ definida por

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^x = -h(x) = -\frac{1}{2}g(x).$$

La gráfica de φ es el reflejo de la de h respecto al eje horizontal. De allí podemos colegir las propiedades de φ: igual dominio que h; el recorrido es ahora $\mathbb{R}^-$; es una función creciente; crece ilimitadamente a valores negativos cuando x es negativo y grande; pasa por el punto $(0,-\frac{1}{2})$; etcétera.

Una vez más, los estudiantes pueden dibujar la gráfica de φ sin recurrir a la tecnología:



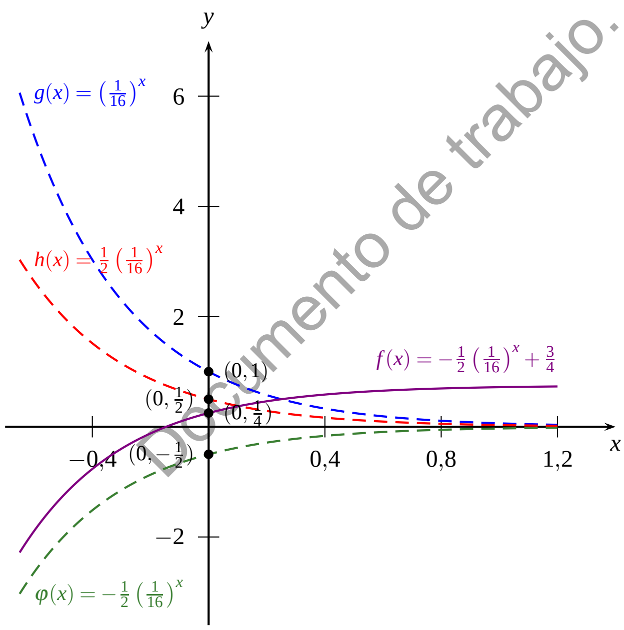
Finalmente, ya podemos obtener la gráfica de f y sus características a partir de las de la función φ, pues

$$f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16}\right)^x + \frac{3}{4} = \varphi(x) + \frac{3}{4}.$$

La gráfica de f será la traslación vertical hacia arriba de la gráfica de φ en $\frac{3}{4}$. De aquí se obtienen las características de f:

- el dominio es $\mathbb{R}$;
- el recorrido es $]-\infty, \frac{1}{4}[$;
- la recta $y = \frac{1}{4}$ es una asíntota horizontal;

y otras más.



El docente debe resumir el proceso de elaboración del gráfico de f a partir del de g mediante la homotecia, reflexión y traslación vertical; las siguientes igualdades sintetizan el proceso:

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{3}{4} = -h(x) + \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}g(x) + \frac{3}{4}.$$

También debe utilizar estos ejercicios para **generalizar** y dar significado a cada uno de los parámetros que aparecen en

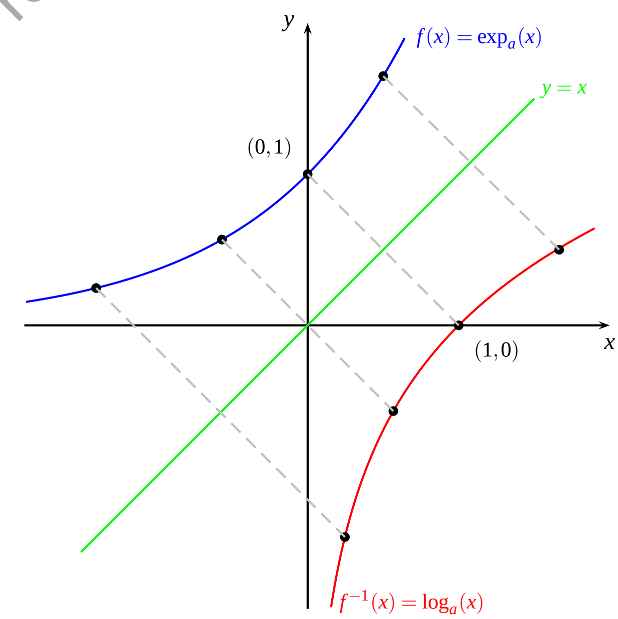
$$x \mapsto ka^{\lambda x + \mu} + m;$$

por ejemplo, k contrae o dilata a la gráfica (homotecia), m traslada verticalmente, etcétera.

Hay otros problemas que pueden utilizarse para ser modelados mediante funciones exponenciales, y que permiten mostrar la relación de la Matemática con otras ciencias. Por ejemplo, con la ecología, la sociología y la economía, el problema de crecimiento poblacional (modelos de Malthus y de Verhulst); con la física, la ley de enfriamiento de Newton; con la farmacología, la ley de Fick que trata sobre cómo cambia la concentración de una droga en un cuerpo; otra vez la ecología, con el estudio de los niveles de ruido, lo que da paso a tratar el tema de la contaminación por ruido.

Logarítmicas. Aunque históricamente los logaritmos no surgieron como el problema inverso de la función exponencial, en la actualidad, la función logaritmo se puede definir como la función inversa de la función exponencial. En el año anterior, los estudiantes aprendieron la inversión de funciones para definir las funciones trigonométricas inversas. Con la oportunidad de definir la función logaritmo, y estudiar sus propiedades, se debe enfatizar nuevamente en el concepto de función inversa y las condiciones que una función debe satisfacer para ser inversible. También hay que trabajar en las propiedades que hereda una función inversa de la función original, pues, de este modo, se obtienen de una manera sencilla las propiedades de la función logaritmo a partir de las propiedades de la función exponencial. Veamos un ejemplo.

Del curso anterior, se sabe que la gráfica de la función inversa se obtiene por una reflexión de la gráfica de la función en la recta de ecuación $y = x$. De manera más precisa, si f es la función en cuestión y f^{-1} su inversa, entonces, el simétrico de cada punto de la gráfica de f^{-1} es un punto en la gráfica de f. Así, la simétrica de la gráfica de a^x es la gráfica de $\log_a x$, como se muestra a continuación para el caso en que $a > 1$:



Se puede obtener, entonces, de manera similar la gráfica de $\log_a x$ cuando $0 < a < 1$.

En el establecimiento de las propiedades de las funciones logarítmicas, el docente tiene una gran oportunidad de trabajar el tema de la **deducción**. En efecto, a partir de las propiedades de las funciones exponenciales, y de la definición de inversa, se pueden deducir de un modo sencillo las propiedades de las funciones logarítmicas. Por ejemplo, puesto que $a^0 = 1$, y de la relación

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y,$$

obtenemos que $\log_a 1 = 0$; de $a^{x+y} = a^x a^y$, la igualdad $\log_a uv = \log_a u + \log_a v$, etcétera. La relación entre la función exponencial y la logarítmica permite un aprendizaje deductivo y no memorístico; además, así se estimula también el calculo mental sin uso de calculadoras.

El docente debe dedicar atención especial a tratar sobre el número e, la base de los logaritmos naturales. Una definición en el sentido estricto no es posible a este nivel, por lo que conviene recurrir a la historia para hablar de él. Por otro lado, en el estudio de las sucesiones, mediante la calculadora, se puede ilustrar que el número e es el límite de la sucesión de término general

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Es altamente recomendable que se ubique históricamente el papel de los logaritmos, su origen y la prostaféresis[1]. En este punto el docente tiene mucho material que liga la matemática con la Astronomía, y también integra dos temas de la matemática; la historia se ve, una vez, relacionada con las matemáticas (o la revés).

Los problemas modelados para la función exponencial también sirven para la función logaritmo, porque muchos de los cálculos en estos problemas se podrán realizar únicamente a través de la función logaritmo. El tema de la escala logarítmica es muy apropiado para ver la utilidad de la matemática.

Sucesiones. Los problemas de la Matemática Financiera proveen situaciones adecuadas para introducir el estudio de las progresiones aritméticas y geométricas, casos particulares de las sucesiones.

Aproveche este tema para trabajar la **generalización**. En efecto, a partir de las situaciones que ofrece la Matemática Financiera, se llegan fácilmente a resolver diversos problemas. De estos hay que **conjeturar** y obtener fórmulas generales, que no podrán ser **demostradas** en este nivel, pues la mayoría de las veces, el método adecuado para realizar estas demostraciones es la inducción matemática, método que se estudia en el curso de Matemáticas Superiores; sin embargo, el docente deberá insistir en el hecho de que la verdad de una proposición no se prueba a partir de un ejemplo.

Para la introducción de las funciones recursivas, se puede utilizar la sucesión de Fibonacci, sucesión estudiada por el matemático italiano del siglo XIII Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci, y famoso por ser quien difundió el sistema de numeración arábiga en Europa. La sucesión en cuestión surge del siguiente problema publicado en su libro *Liber Abaci (Libro del ábaco)*:

> *En una granja hay, al principio del año, una pareja de conejos que acaban de nacer. Al cabo de dos meses, esta pareja está preparada para reproducirse. Produce cada mes una pareja de conejos que, al cabo de dos meses, está a su vez preparada para empezar a reproducirse, dando otra pareja cada mes. ¿Cuál es el número de parejas de conejos en la granja el día quince de cada mes del año?*

El docente pide a los estudiantes que calculen el número de parejas de conejos cada vez y elaboren una tabla con los resultados. Los guía a establecer que el número de parejas en un mes, a partir del tercero, siempre es la suma del número de parejas de los dos meses inmediatamente anteriores. Pasa luego a introducir la notación correspondiente y a formular la igualdad

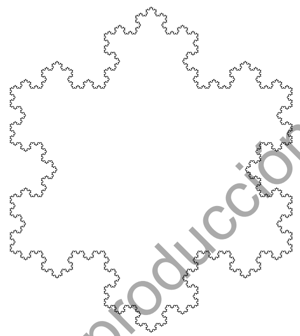
$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2}, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 1.$$

Es importante que el docente recalque que en una definición recursiva intervienen dos elementos: la base de la recursión y el paso recursivo.

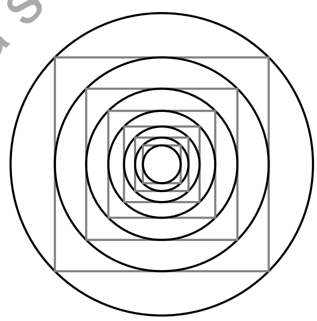
Nótese como en el último ejemplo están presentes varios de los ejes del aprendizaje: **abstracción**, **generalización**, etcétera. Y aún puede servir para mostrar los elementos culturales y sociales de la Matemática.

En efecto, la introducción del sistema arábigo en Europa modifica el modo de llevar la contabilidad comercial, de calcular los intereses, de convertir los pesos y las medidas, cambiar unas moneda por otra, etcétera.

Las definiciones recursivas pueden ser utilizadas para resolver problemas como el cálculo del perímetro del copo de nieve de Koch



y otros de carácter geométrico como calcular la suma de las áreas de los primeros 20 cuadrados en la figura



2.2 Bloque de Álgebra y Geometría

Para este año, el único tema de estudio en este bloque es el de las cónicas. Hay varias maneras de presentar su estudio, pero se recomienda que se lo inicie con una presentación de carácter puramente geométrico, y luego se complemente desde el punto de vista algebraico de la geometría analítica, que es, quizás, el que mayor utilidad tendrá en la formación de los estudiantes.

Geométricamente hay, a su vez, dos posibilidades para presentar las cónicas. La primera, e históricamente la primera debida a Menecmo y a Apolonio, es ver a las cónicas como secciones de un cono circular recto (doble para la hipérbola) , es decir, las curvas producidas al cortar con un plano un cono circular recto. Esta presentación ofrece algunas actividades para la clase: elaborar conos con cartulina (o el material adecuado que facilite los cortes y dobleces) y cortarlos para obtener las cónicas, utilizar software para realizar lo mismo que se hizo manualmente. Se recomienda empezar el tema con esta presentación.

A continuación, se puede presentar el segundo punto de vista geométrico[2]. Los estudiantes ya conocen el círculo: saben que esta figura geométrica está constituida por todos los puntos que equidistan de un punto fijo dado. De hecho, no necesitan ningún dispositivo especial como un compás para dibujar uno; les bastará con disponer de una piola, un hilo o una cuerda, y de dos lápices.

[1] Método para facilitar los cálculos aproximados de multiplicaciones o divisiones de números, que utiliza las propiedades de las razones trigonométricas. Fue utilizado entre los siglos XVI y VII, antes de la introducción del logaritmo en 1614.

[2] Una de las razones para una segunda presentación es que la definición de Apolonio no es fácil de aplicar.

Se recomienda que e incorpore esta actividad en la clase: dibujar un círculo con un cordón de zapatos y dos lápices.

De esta práctica no resulta extraño pasar a la noción de lugar geométrico: es decir, una figura geométrica constituida por todos los puntos que satisfacen una cierta propiedad o condición. Así se pueden introducir las otras tres cónicas. Se puede iniciar con la elipse: el lugar geométrico de los puntos del plano para los cuales la suma de las distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante. Una vez más, una cuerda y tres lápices nos permiten dibujar elipses sin recurrir a ningún otro tipo de dispositivo; se recomienda también incorporar esta actividad en la clase.

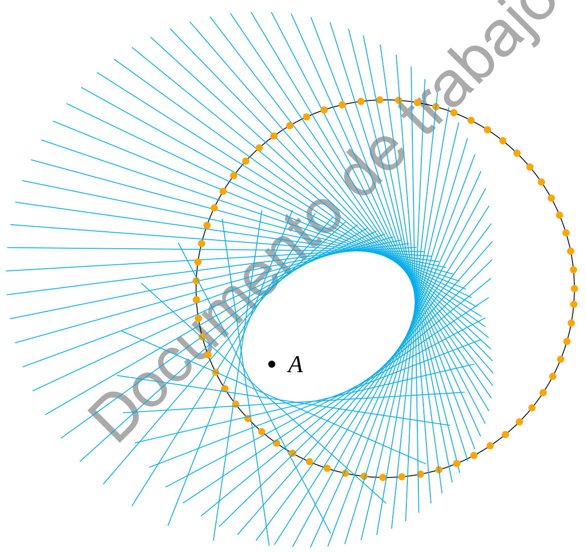
De manera similar, se introducen la parábola y la hipérbola como lugares geométricos.

Se pueden realizar otras actividades de tipo "manual" para dibujar u obtener algunas cónicas. Por ejemplo, utilizando la papiroflexia, se puede obtener una elipse a partir de un círculo y un punto interior a él, dibujando todas las mediatrices a los segmentos cuyos extremos son el punto interior y puntos del círculo, como se muestra más adelante. También se puede utilizar software que permiten realizar este tipo de construcciones.

También se puede dibujar una parábola utilizando únicamente su definición: dada una recta (*directriz*) y un punto (*foco*) en el mismo plano, es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de la recta y del punto dados. Para construir a mano una parábola, se puede seguir el siguiente procedimiento:

1. Se toma un punto cualquiera en la directriz: A.
2. Se traza la mediatriz del segmento que une el foco con A.
3. El punto P, intersección de la mediatriz trazada y la perpendicular a la directriz levantada en A, pertenece a la parábola.
4. Se repite el proceso con más puntos en la directriz; por ejemplo, se pueden colocar puntos a cada centímetro.

Este proceso puede ser realizado también mediando el plegado de papel.



No desestime el valor que tiene la elaboración de los gráficos a mano, sin perjuicio de utilizar también cualquier tecnología de la que disponga para obtener los mismos.

Una vez introducidas las cónicas desde los puntos de vista geométrico, a partir del círculo, el docente puede introducir la versión algebraica de las cónicas. En efecto, si se dibuja un círculo en un sistema de coordenadas, centrado en el origen, mediante el teorema de Pitágoras, es fácil determinar la ecuación algebraica de segundo grado que satisfacen todos los puntos del círculo. Apoyado en esta ecuación, el docente puede hacer ver a los estudiantes las ventajas de trabajar con las ecuaciones.

A continuación se deben presentar las versiones algebraicas de las otras cónicas, aunque se recomienda omitir su deducción. No debe olvidar el relacionar la versión actual de la parábola con la que el estudiante ya estudio en el primer año de bachillerato.

Alrededor de las cónicas, hay varios problemas que ayudan, por un lado, a la comprensión misma del concepto, y por otro, a relacionar este tema, y la Matemática en general, con otros campos del conocimiento.

Con la Astronomía y la Física: los planetas describen órbitas elípticas. Con la tecnología de comunicaciones: el uso de las antenas parabólicas; en este ejemplo, es sencillo, aprovechando lo estudiado en el primero de bachillerato sobre el vértice de la parábola, que todos los rayos que inciden paralelamente en una superficie parabólica (en su parte interna) se reflejan hacia el foco de la misma, propiedad por la cual se utiliza este tipo de antenas. Por la misma propiedad, se utilizan superficies parabólicas para plantas de energía solar y faros de automóviles.

Con el tema de las órbitas de los planetas, se puede vincular la Matemática con la apasionante historia de la conformación occidental del modelo del universo, y contraponer con la diferente cosmovisión del mundo andino.

2.3 Bloque de Matemáticas Discretas

El ejemplo con el que se inició la sección de precisiones para la enseñanza y el aprendizaje de tercer año de Bachillerato puede ser utilizado para iniciar el estudio de este bloque. Como se vio, el contenido matemático no es más que la aritmética modular, la misma que no requiere sino el uso de los conocimientos estudiados ya en la Educación General Básica.

Siguiendo con la línea de las aplicaciones a la información, los siguientes problemas son sencillos de abordar, incluso más que el que ya se presentó. Los *números para identificación* que se utilizan en cheques, tarjetas de crédito, tarjetas de identificación, la cédula de ciudadanía, etcétera, permiten identificar completa y rápidamente al dueño de la tarjeta o al emisor de la misma. Estos números contienen además información adicional para poder verificar que la identificación misma es válida. Por ejemplo, en el número de cédula de ciudadanía, el último dígito permite saber si los nueve números anteriores corresponden a un número válido para ser la identificación de una cédula. Otro ejemplo es el código de barras.

Para estudiar estos problemas, se utilizan sencillos algoritmos que involucran, a lo más, las cuatro operaciones básicas entre números naturales.

El docente debe aprovechar estos ejemplos que, aunque la matemática involucrada es básica, muestra a la Matemática en un contexto real.

2.4 Bloque de Probabilidades y Estadística

En este bloque, se estudiarán las distribuciones binomial y normal, y la regresión lineal.

Distribuciones. Para la introducción de la distribución binomial hay una gran variedad de ejemplos clásicos como el del lanzamiento de una moneda. Sin embargo, hay otras posibilidades, como se apuntó ya en el mismo bloque del segundo de bachillerato.

El docente plantea la siguiente pregunta a la clase:

> *¿Cuál es la proporción de estudiantes del colegio que son zurdos?*

Para responder la pregunta, el docente hace notar que podría realizarse un censo, y con ello se obtendría la proporción exacta buscada. Sin embargo, hace notar también, que podría llevar mucho tiempo hacerlo, mientras que existen maneras de obtener un valor bastante aproximado al real con menos esfuerzo. También hará notar que no siempre será posible realizar un censo, y que la técnica aprendida servirá igual en el caso del colegio como en otro que involucre un país entero.

Proponga, entonces, tomar una muestra de alumnos de todo el colegio (se deberá hacer, entonces, un repaso de los contenidos sobre muestras estudiado en el curso anterior). A cada persona de la muestra, se le deberá preguntar si es zurdo o no. Hay que contar, entonces, cuántas personas respondieron que sí. Ahora bien, la proporción encontrada no contesta la pregunta; enfatice en que probablemente si se tomara otra muestra, la proporción obtenida podría ser diferente. ¿Cómo saber qué tan veraz es la proporción obtenida con la muestra elegida?

El problema planteado nos sirve para presentar las nociones de *variable aleatoria discreta*, *distribución de la variable aleatoria*, *gráfica de la distribución binomial* (como una extensión del histograma ya conocido por los estudiantes) y, finalmente, de *parámetros de la distribución binomial*. Además, deberá introducir las nociones de variables aleatorias *continua* y la *distribución normal*; esta última se presentará en referencia a la estadística estudiada en los cursos anteriores.

Hacia el final, podría ilustrarse el hecho de que una variable aleatoria es una función cuyo dominio es el espacio muestral y el conjunto de llegada es un conjunto de números reales.

Si el tiempo lo permite, se pueden utilizar las tablas y gráficas de distribución binomial y normal para responder preguntas sencillas de probabilidades, habiendo estandarizado los datos. Por ejemplo, si la distribución de notas de una clase es normal con media 86 (sobre 100) y desviación estándar 2, ¿cuál es la probabilidad de que un estudiante saque una nota mayor que 90?

Regresión Lineal. Todas las ciencias experimentales (Física, Química, Biología, etcétera) y varias de las ciencias sociales (Sicología, Sociología, Administración, etcétera) requieren de la toma de datos que relacionan variables. Por ejemplo, la velocidad de un objeto en el tiempo t, el volumen de un gas a una temperatura T, el número de bacterias en un cultivo luego de t horas, etcétera. Los resultados experimentales con frecuencia se grafican y se busca una recta que aproxime lo mejor posible a esos datos.

El profesor puede presentar un grupo de datos de cualquier experimento que sus estudiantes posiblemente hayan hecho en el laboratorio de física, química o biología (si el tiempo lo permite, podrían realizar una toma de datos en la clase) y utilizarlo para proponer la búsqueda de una recta que se aproxime de mejor manera a los datos. Aunque no se recomienda deducir las fórmulas de la regresión lineal en este tema, el docente debe aprovechar para enfatizar en la diferencia entre los modelos de tipo determinista y probabilista (aleatorios o estocásticos). En el primer caso, la recta de regresión lineal es simplemente $y = b_0 + b_1x$; en el segundo, tiene la forma $y = \beta_0 + \beta_1 x + e$, donde e es la componente aleatoria del error. El carácter aleatorio del modelo de regresión lineal se refleja en el hecho de cómo contestar a la pregunta: "¿Qué tan bien se ajusta la recta a los datos?"

La respuesta a esa pregunta consiste en determinar intervalos de confianza para los coeficientes β_0 y β_1, en estimar el valor esperado de y para un valor dado de x, en predecir un valor particular de y para un valor dado de x.

Todos los procedimientos y fórmulas a utilizarse para responder a las preguntas anteriores no podrán ser deducidos en este nivel, por lo que el docente deberá hacer énfasis en el significado de estos y en su utilización para resolver problemas bastante cercanos a los que aparecen en la realidad.

Bajo la misma línea de trabajo de los dos temas de este bloque, podría incluirse el tratamiento de las pruebas de hipótesis, lo que daría un valor más práctico a la resolución de los problemas.