Ministerio de Educación

PRECISIONES CURRICULARES
PARA EL BACHILLERATO GENERAL UNIFICADO

ÁREA DE MATEMATICA

MATEMATICA SUPERIOR

(OPTATIVA)

TERCER CURSO

Precisiones para la enseñanza y el aprendizaje

1 Precisiones generales

El eje curricular integrador del área propone la elaboración de modelos como el mecanismo para resolver problemas. En un desarrollo gradual, que durará los tres años del bachillerato, los estudiantes deberán comprender que la solución de aquellos que se estudian con la matemática pasan por un proceso que se inicia con una representación de los elementos del *problema original* mediante conceptos y lenguaje matemático, que continúa con la formulación de un *problema matemático*, de cuyos análisis y resolución, tras la interpretación respectiva, esperamos encontrar una solución al *problema original*.

Una manera de lograr esta comprensión gradual consiste en que, desde el inicio del bachillerato, los estudiante se enfrenten con la tarea de elaborar modelos y, a través de ellos, resuelvan problemas, por más simples que estos sean. Esta labor puede ser desarrollada por el docente en algunas fases.

1. **El problema.** En cada bloque, para introducir los temas principales, el docente propondrá a la clase uno o varios problemas o situaciones cuya representación matemática utilizará los conceptos matemáticos principales que se quieran estudiar en dicho tema.
2. **Experimentación.** El docente propondrá diversas actividades a los estudiantes para que se familiaricen con el problema o la situación. Estas actividades podrán consistir, entre otras, en experimentar con los elementos del problema, lo que les permitirá tomar datos, que serán presentados mediante tablas o gráficos. A partir de estas representaciones, los estudiantes podrán conjeturar soluciones o descubrir algunas “no soluciones”. El docente, en cambio, contará con el material y el vocabulario suficientes para introducir los conceptos objetos de estudio, y que serán indispensables para resolver el problema o explicar la situación.
3. **Modelar.** De los datos pasamos a una representación de los elementos del problema y de las relaciones existentes entre ellos mediante conceptos matemáticos; en otras palabras, *elaboramos un modelo* del problema, con lo cual obtenemos, a su vez, un *problema matemático*. En la medida en que se utilizarán funciones para este proceso, se hará necesaria la identificación de *variables* y las *relaciones de dependencia* entre ellas; esto dará lugar a etiquetar a algunas variables como *independientes* y otras como *dependientes*, y a identificar algunas relaciones como *funciones*. Acompañando a este proceso, estará siempre el uso explícito por parte del estudiante de los símbolos (letras) que utilice para representar las variables y las funciones. El docente deberá insistir en el uso consistente de esos símbolos, y del uso correcto del lenguaje para la descripción de dichas representaciones.
4. **Interpretación y Generalización.** Una vez obtenido el modelo, se resuelve el *problema matemático*, se interpreta la solución matemática para dar solución al *problema original*. A continuación, debemos enfatizar en que la solución matemática encontrada permite obtener métodos generales que pueden resolver una variedad de problemas “del mismo tipo”, o pueden guiarnos a dar solución a problemas nuevos más complejos, pero, para ello, es necesario estudiar, con mayor profundidad, los conceptos que surgieron como abstracciones de los elementos que intervinieron en la elaboración del modelo.

   En esta fase, también se pueden estudiar varios de los conceptos únicamente con motivaciones matemáticas como las de demostrar un teorema mediante dos métodos diferentes; Por ejemplo, la fórmula para calcular la suma de los primeros n números de una progresión aritmética suele ser demostrada mediante inducción matemática; sin embargo, mediante argumentos geométricos —que incluyen la fórmula del área de un rectángulo, condiciones suficientes para la congruencia de triángulos, entre otros— también se obtiene una demostración de la mencionada fórmula.

En cada una de estas fases, el docente debe insistir en el uso correcto del lenguaje por parte de los estudiantes, tanto escrito como oral, en la formulación e identificación de los diversos elementos que aparecen en el proceso de la elaboración del modelo.

A continuación, vemos los ejes de aprendizaje que aparecen en cada una de las fases.

1. En la del problema, el estudiante debe **leer** un texto que, en la mayoría de las ocasiones, se refieren a temas no matemáticos. También debe **expresarse oralmente** para hablar sobre el problema, para averiguar sobre él, etcétera. Sin las destrezas necesarias de la **lengua en forma escrita y oral**, no comprenderá lo que el problema le plantea.

   Dado que los problemas que se utilicen deben ser, preferentemente, no matemáticos, en esta fase se **integran diferentes conocimientos adquiridos**; por ejemplo, con la economía y las finanzas, la biología, la física y la química, etcétera.
2. En la fase de experimentación, se tiene una oportunidad valiosa para hacer uso de las **tecnologías de la información**, mediante la toma de datos, la elaboración de tablas, de gráficos, etcétera. También se **integran conocimientos adquiridos**, pues en esta fase casi siempre se recurre a conocimientos matemáticos que los estudiantes ya conocen; por ejemplo, elaborar gráficas, realizar ciertos cálculos, tanto “a mano” como a través de “tecnologías”.

   Otro elemento presente en esta fase es la **conjetura**, cuando se procesan e interpretan los datos obtenidos, y se proponen soluciones, o caminos a seguir para resolver el problema.

   Finalmente, el uso correcto de la **lengua** se evidencia a través de la presentación de los datos recogidos, de las síntesis que de ellos se hagan.
3. En la fase de modelar, la **abstracción** es una de las principales herramientas con la que los estudiantes deben contar, pues es la que les permite identificar las variables y las relaciones entre las variables. El **uso correcto de la lengua** les permite elegir, adecuadamente, los símbolos, que representan los elementos del problema, para su manipulación posterior.
4. En la fase de los conceptos, una vez más la **abstracción**, la **generalización**, el **uso correcto de la lengua**, las **tecnologías** estarán presentes.

   La manera de saber que algo es una solución es “probar”, **justificar**, que lo hallado es una solución; parte del desarrollo de los conceptos está encaminado, precisamente, a ese fin.

En el perfil de salida del BGU, se propone que el egresado resuelva problemas que la vida cotidiana le plantea. Es de esperar que los problemas que se proponen en el bachillerato, tanto para introducir los conceptos, objetos de estudio, como los que tienen que resolver como parte de su formación, sean de la vida cotidiana. Sin embargo, muchos de los problemas de la vida real no pueden ser resueltos con los conocimientos matemáticos adquiridos en el bachillerato y, en varias ocasiones, ni siquiera con los que se adquirirán en la universidad, a nivel de la licenciatura (ingeniería); serán necesarios estudios especializados de maestría y/o doctorado.

A pesar de esta situación, siempre es posible adaptar los problemas reales y conformar al menos dos tipos de problemas que podrán ser utilizados en el aula:

1. **Problemas reales**, en los que se requiere de matemática para resolverlos; pueden simplificarse para que los conocimientos necesarios sean los que los estudiantes poseen o pueden poseer en el nivel en el que se encuentran. En estos problemas, los conceptos matemáticos adquieren sentido.
2. **Problemas ilustrativos**, cuyo único objetivo es ejemplificar conceptos, términos y teoremas.

Hay una gran variedad de problemas reales que pueden ser simplificados, sin que por ello se pierda la posibilidad de utilizarlos como buenos prototipos de lo que con la matemática puede hacerse en la vida cotidiana. En las últimas décadas, un buen número de esos problemas han sido modelados con herramientas matemáticas relativamente sencillas de comprender; algunos ejemplos se encuentran propuestos en el bloque de “Matemáticas discretas”.

2 Matemática Superior

Este curso contiene únicamente los bloques de “Números y Funciones” y “Álgebra y Geometría”. El primero organiza sus contenidos en tres temas: *Inducción matemática*, *Números complejos* y *Cálculo diferencial*. El bloque de “Algebra y Geometría” trabaja solamente un tema: *Vectores en el espacio*, lo que incluye las versiones vectoriales de rectas y planos.

El mayor peso para este curso está en el Cálculo diferencial; representa la mitad de los contenidos a estudiarse, y de los diversos aspectos que pueden ser trabajados, hay que destacar dos que el docente deberá enfatizar.

El primer aspecto tiene que ver con la *aproximación lineal* de funciones. Los problemas más sencillos matemáticamente son aquellos que tienen que ver con modelos lineales. Históricamente, la necesidad de calcular numéricamente expresiones funcionales llevo a determinar métodos de cálculo sencillos como, por ejemplo, la *interpolación lineal*. El problema principal del cálculo diferencial es el de encontrar una recta tangente a una curva en un punto dado. Este problema corresponde, desde el punto de vista funcional, a determinar una función lineal que aproxime a la función no lineal dada. La ventaja de la función lineal es su sencillez. Las computadoras y calculadoras utilizan una extensión de este procedimiento: para hallar el valor de una función no polinomial, utilizan una aproximación polinomial; por ejemplo, en lugar de evaluar e^x, evalúan el polinomio de Taylor

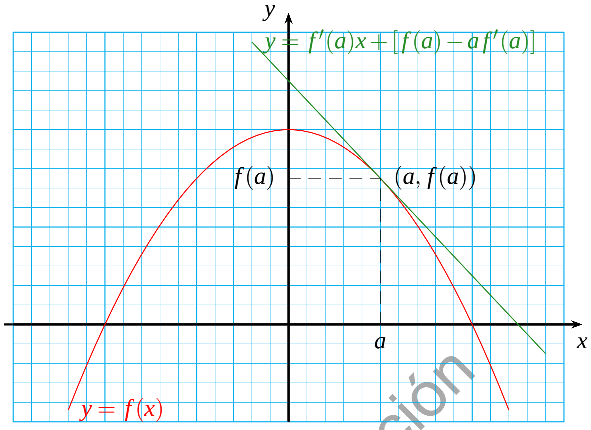
$$1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

Para un valor de x que está cerca de 0.

El concepto de derivada es una herramienta que sirve para aproximar una función linealmente. De manera más precisa, si f es una función derivable en el punto a y $f'(a)$ es la derivada de f en a, entonces $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$; más aún, la ecuación de esa recta tangente es

$$y = f'(a)x + [f(a) - af'(a)].$$

En el siguiente dibujo, se ilustra la situación.

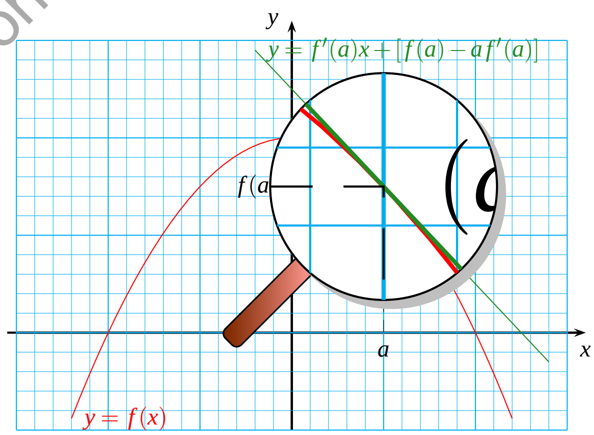


La propiedad más importante de esta recta es que *aproxima linealmente* a la función f para valores cercanos al punto a. De manera más precisa, si h es un número pequeño, el número $a+h$ es un valor cercano al número a; entonces, para cada valor de $h \approx 0$,

$$f'(a)(a+h) + [f(a) - af'(a)] = f(a) + f'(a)h$$

es una *aproximación lineal* de $f(a+h)$.

En el dibujo que se muestra a continuación, se ha ampliado la imagen en cuatro veces alrededor del punto de coordenadas $(a, f(a))$. Se puede observar lo cerca que están entre sí la tangente y la curva.



El otro aspecto que el docente deberá enfatizar es que una de las principales aplicaciones de la derivada consiste en utilizarla para resolver problemas de optimización. En esta introducción a las precisiones de este año, vamos a presentar una sugerencia de cómo puede ser presentada el tema de la aproximación lineal de funciones y, al mismo tiempo, el concepto de derivada; en las precisiones del bloque de “Número y funciones”, presentaremos algunas sugerencias para el tratamiento de la optimización.

El concepto de derivada y su definición formal son altamente abstractos, razón por la cual el profesor debe planificar algunas sesiones para estudiarlo y cimentar su entendimiento. El énfasis en este concepto debe estar en su interpretación como:

- *Pendiente de la recta tangente a una curva*: El docente debe presentar varios gráficos de funciones y rectas tangentes en diferentes puntos de las gráficas. De manera que se visualice claramente la diferencia entre recta tangente y secante. Debe, además, asegurarse de que sus estudiantes recuerden que para obtener la ecuación de la recta, se requieren o dos puntos, o la pendiente y un punto.

- *Tasa o razón instantánea de cambio de la función respecto a la variable*: El docente debe dar ejemplos de tasas instantáneas de cambio. Entre otros, los siguientes son importantes ejemplos, pues se presentan en aplicaciones en otras áreas del conocimiento: *la velocidad* es la razón de cambio instantánea con respecto al tiempo de la posición de un objeto que se mueve en linea recta; la *tasa de natalidad* (o *mortalidad*) es la razón de cambio de la población con respecto al tiempo; la *ganancia marginal* es la razón de cambio de la ganancia respecto al precio, etcétera.

* * *

Una de las posibilidades para motivar el estudio del concepto de derivada es el plantear el problema de encontrar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto dado de esa curva. Los estudiantes aprendieron en años anteriores a dibujar la tangente a una circunferencia. Ahora **generalizamos** el problema: en el caso de una curva cualquiera, ¿cómo obtener la recta tangente en cualquiera de sus puntos?

Pasos metodológicos recomendados para presentar el concepto de derivada de una función f en el punto $x = a$.

1. Con una función de segundo grado, obtener las ecuaciones de algunas rectas secantes con uno de sus puntos el de coordenadas $(a, f(a))$.
2. Conjeturar la ecuación general de la recta secante que pase por los puntos $(x, f(x))$ y $(a, f(a))$ donde x es valor genérico del dominio de f.
3. Realizar una conjetura sobre la pendiente de la recta tangente.
4. Revisar el problema realizado numéricamente y abstraerlo para obtener una fórmula para la razón promedio de cambio (o para la pendiente de la recta secante) pero para una función cualquiera.
5. Introducir la noción de "x arbitrariamente cercano al número a" y la notación de límite $x \to a$.
6. Utilizar las gráficas de las rectas tangentes en valores de x cercanos al número a para conjeturar que la pendiente de la recta secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$.
7. Introducir la definición formal de derivada a través de la fórmula:
$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$
El *número derivada* $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a f en el punto $(a, f(a))$.
8. Con la misma función del ejemplo, realizar un trabajo similar al primer paso, pero expresando x como $a + h$ con $h \approx 0$ cuando x está cerca de a. Realizar una tabla de valores para encontrar la ecuación de la recta secante que pase por los puntos $(a + h, f(a + h))$ y $(a, f(a))$ con algunos valores pequeños de h.
9. Generalizar la fórmula obtenida para el caso general en donde h es arbitrario, y conjeturar que el valor de la pendiente de la recta tangente debe darse cuando $h = 0$.
10. Presentar la siguiente igualdad como una definición equivalente a la anterior:
$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

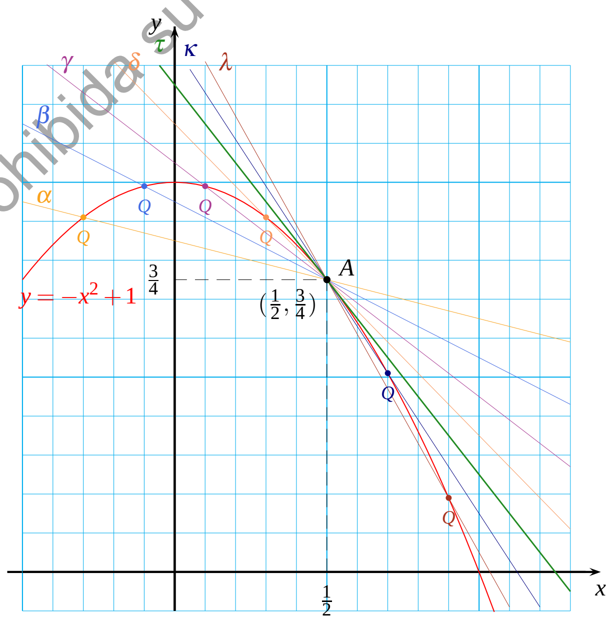
En el problema 1, se ejemplifican estos pasos.

Problema 1 (La tangente a una parábola)**.** *Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la parábola de ecuación*
$$y = -x^2 + 1$$
en el punto $(0{,}5,\ 0{,}75)$.

Proponga a los estudiantes que grafiquen la parábola y que identifiquen el punto de coordenadas $(0{,}5,\ 0{,}75)$. Según las necesidades del grupo, el dibujo de la parábola podrá ser hecho "a mano" o mediante tecnología; por ejemplo, se procedería como el primer caso si se detectaran deficiencias para la realización de la gráfica a partir de los parámetros que definen la parábola. Tome en cuenta que esta actividad es una oportunidad de relacionar unos conocimientos con otros.

A continuación, el profesor pedirá a los estudiantes que dibujen y obtengan las ecuaciones de varias rectas *secantes* a la parábola; uno de los puntos de intersección de estas rectas con la parábola deberá ser el de coordenadas $A = (0{,}5,\ 0{,}75)$ y otro punto Q, para cada recta, uno cada vez "más cercano" al punto A. La idea que el docente propondrá a los estudiantes es la de determinar la pendiente de las rectas secantes a medida que el punto Q se "mueve" hacia el punto A, pues así se obtiene que las rectas secantes se "muevan" hacia la recta tangente.

La actividad busca obtener dibujos como los del siguiente ejemplo:



Para obtener este dibujo, el docente facilitará a los estudiantes una tabla en la que registrarán los resultados de obtener las ecuaciones de las rectas secantes (el dibujo de la tangente será solo aproximado, pues los estudiantes aún no conocen la ecuación de esta recta):

x	Q	Secante	Pendiente
$-0{,}3$	$(-0{,}3, 0{,}91)$	$\alpha: y = -0{,}2x + 0{,}85$	$-0{,}2$
$-0{,}1$	$(-0{,}1, 0{,}99)$	$\beta: y = -0{,}4x + 0{,}95$	$-0{,}4$
$0{,}1$	$(0{,}1, 0{,}99)$	$\gamma: y = -0{,}6x + 1{,}05$	$-0{,}6$
$0{,}3$	$(0{,}1, 0{,}91)$	$\delta: y = -0{,}8x + 1{,}15$	$-0{,}8$
…	…	…	…
…	…	…	…
$0{,}6$	$(0{,}6, 0{,}64)$	$y = -1{,}1x + 1{,}45$	$-1{,}1$
$0{,}7$	$(0{,}7, 0{,}51)$	$\lambda: y = -1{,}2x + 1{,}35$	$-1{,}2$
$0{,}8$	$(0{,}8, 0{,}36)$	$y = -1{,}3x + 1{,}4$	$-1{,}3$
$0{,}9$	$(0{,}9, 0{,}19)$	$\lambda: y = -1{,}4x + 1{,}45$	$-1{,}4$

Como se puede observar, los puntos Q elegidos son tales que se "acercan" al punto A tanto desde la izquierda como de la derecha.

Con ayuda de una calculadora común, esta tabla puede ser ampliada con el cálculo de la pendiente de otras rectas secantes que pasen por un punto Q cuya abscisa esté más cerca de 0,5; por ejemplo, podría obtenerse valores para la pendiente con $x = 0{,}4$, $x = 0{,}45$, $x = 0{,}475$, $x = 0{,}55$, $x = 0{,}575$, etcétera. Esta tarea tiene una ventaja adicional. Los estudiantes deben obtener una fórmula general para la pendiente de cualquier secante que pase por el punto A, que es conocido, y un punto cualquiera de la parábola, que tiene la forma $(x, -x^2+1)$. Llegarán, entonces, a la conclusión de que esa pendiente es:

$$-\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

Como resultado de estos últimos cálculos y la obtención de los dibujos, el docente guía a los estudiantes a que **conjeturen** que la pendiente de la recta tangente sea igual a -1.

El docente entonces propone abstraer lo realizado hasta este punto. Obtiene así una fórmula para la *razón promedio de cambio* (o para la *pendiente de la recta secante*), pero para una función cualquiera φ:

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a},$$

e introduce la noción de "x arbitrariamente cercano al punto a" y la notación de límite $x \to a$. Con la ayuda de las gráficas de la rectas secantes en puntos x cercanos al punto a, guíe a que los estudiantes conjeturen que la pendiente de la recta secante se "aproxima" a la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$, y propone[1] la definición formal de derivada de f en a, notada por $f'(a)$, y que será, justamente, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$, mediante la fórmula:

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

En el caso particular, de la función $f(x) = x^2$, la pendiente de la recta tangente a la parábola en el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ será

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{2}\right) &= \lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(-x^2+1)-(-\frac{1}{4}-1)}{x-\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{x\to\frac{1}{2}} -\left(x+\frac{1}{2}\right) = -1. \end{aligned}$$

A continuación, proponga la siguiente actividad a los alumnos.

1. Llenen la siguiente tabla notando que la última columna corresponde a la pendiente de la recta secante:

h	$f\left(\frac{1}{2}+h\right)$	$\frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{h}$
$-0{,}1$	0,84	$-0{,}9$
$-0{,}01$	0,7599	$-0{,}99$
0,1	0,64	$-1{,}1$
0,01	0,7399	$-1{,}01$
0,001	0,748999	$-1{,}001$

2. Tomen un punto Q cuya abscisa esté a una distancia h a la izquierda de la abscisa del punto A; les pide que obtengan las coordenadas de Q:
$$\left(\frac{1}{2}-h, -\left(\frac{1}{2}-h\right)^2+1\right) = \left(\frac{1}{2}-h, \frac{3}{4}+h-h^2\right).$$
3. Calculen la pendiente de la recta secante que pasa por Q y A:
$$\frac{\frac{3}{4}+h-h^2-\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}-h-\frac{1}{2}} = \frac{h-h^2}{-h} = -1+h. \tag{1}$$
4. Guíe a los estudiantes para que concluyan que el "movimiento" de Q hacia A equivale a que h se haga un número cada vez más cercano a 0; y que si Q llegará a A, lo que se obtendría es la recta tangente y que su pendiente se calcularía a partir de (1) cuando $h = 0$:
$$-1+h = -1-0 = -1.$$

El siguiente paso consiste en **generalizar** este procedimiento para el caso de una función cualquiera f, hasta llegar a que la pendiente de una recta secante que pase por el punto $A = (a, f(a))$ —por el cual pasa la tangente buscada— y un punto cuya abscisa está a una distancia h, a la izquierda o a la derecha, de la abscisa de A, es decir, de a, se obtiene a través del cociente

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

y, por lo tanto, la pendiente de la recta tangente se obtendrá como el límite de este cociente cuando $h \to 0$. De esta manera, se establece que una manera alternativa de calcular el número $f'(a)$ es a través de la fórmula

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Se recomienda utilizar solamente una noción intuitiva de límite, que hacia el final del curso, será precisada un poco más. Se dice "un poco más", pues el concepto de límite, aunque tiene una interpretación geométrica bastante sencilla, su formulación teórica es altamente compleja, razón por la cual en modo alguno deberá ser tratada formalmente en el Bachillerato. En el bloque de "Números y funciones", se harán mayores precisiones de cómo trabajar la noción de límite, las derivadas y sus aplicaciones.

2.1 Bloque Números y funciones

Como se indicó en la introducción, en este bloque se estudian tres temas: *Inducción matemática*, *Números complejos* y *Cálculo diferencial*. Empezaremos las precisiones y recomendaciones con este último tema.

Cálculo diferencial. La introducción de la derivada, como se ha visto, no necesita más que de una noción intuitiva (geométrica y numérica) de límite. Una vez presentado el concepto de derivada, se pueden calcular mediante la definición las derivadas de funciones polinómicas y racionales; por ejemplo, la función $v\colon [0,10] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por

$$v(x) = x^3 - 25x^2 + 150x.$$

Esta función modela el volumen de una caja obtenida al recortar cuadrados de las cuatro esquinas de una pieza de cartón de forma rectangular. Otro ejemplo es la función $f\colon \mathbb{R}-\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{1-x}.$$

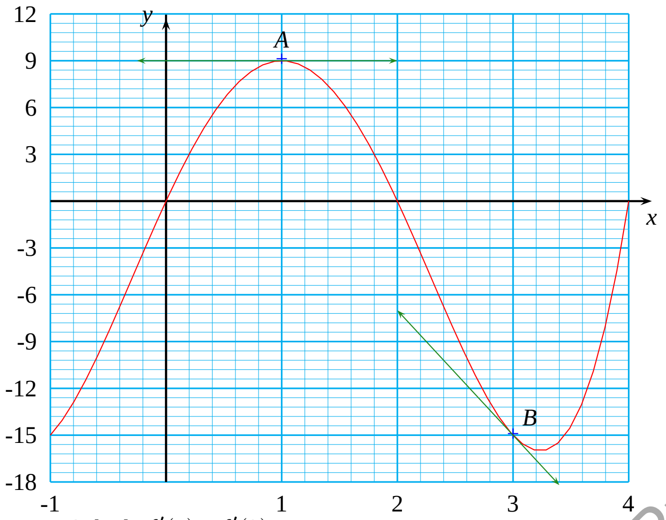
[1] En sentido estricto, debería demostrarse que la conjetura es correcta. Dicho de otro modo —y es algo que no se hará en la clase— debería demostrarse que la recta con pendiente $f'(a)$ y que pasa por el punto $(a, f(a))$ es, efectivamente, la tangente a la parábola; es decir, se debería probar que la recta no tiene ningún otro punto en común con la parábola y que todos los puntos de la parábola están en un mismo lado de la recta. En lugar de eso, lo que se hace es generalizar al definir la recta tangente como aquella que tiene como pendiente, precisamente, $f'(a)$ y que pasa por $(a, f(a))$. El docente juzgará si el nivel e interés de sus estudiantes es adecuado para hablar del hecho de que la conjetura no ha sido ni aceptada ni rechazada.

Es importante que antes de pedirles a los estudiantes que realicen el cálculo de $f'(x)$ para cualquier x en el dominio de f, se les haga calcular el número $f'(a)$ con valores concretos para a; por ejemplo, $f'(0)$, $f'(3)$, etcétera.

Por otro lado, hay que evitar el centrar este tema en el cálculo de la derivada utilizando su definición a través del límite de la razón de cambio y, más bien, dirigir la atención de los estudiantes al significado geométrico (pendiente de la tangente) y numérico (aproximación lineal).

Para trabajar el *significado geométrico*, entre otros, puede proponer a los estudiantes problemas como el siguiente.

Problema 2 (Lectura gráfica de la derivada)**.** *La curva de ecuación $y = f(x)$ es el gráfico de la función f. En los puntos A y B se han dibujado las tangentes a la curva.*



Calcule $f'(1)$ y $f'(3)$.

Como dijimos al inicio, uno de los motivos para estudiar la derivada es la *aproximación lineal*; para trabajar este tema, entre otros, proponga un problema como el que sigue.

Problema 3 (Aproximación lineal)**.** *Determine la aproximación lineal de $\sqrt{9+h}$ para $h \approx 0$ y calcule un valor aproximado para $\sqrt{8{,}4}$ y $\sqrt{9{,}6}$. Compare estos resultados con los obtenidos mediante una calculadora.*

Entre los motivos de estudiar el concepto de derivada está el de poder determinar las siguientes características de una función: monotonía, extremos y concavidad. Tanto con ayuda de calculadoras gráficas como de la misma definición de derivada, es fácil establecer los criterios necesarios y suficientes para que una función sea creciente o decreciente dependiendo del signo de la derivada.

Antes de emprender con el estudio de las aplicaciones de la derivada, se recomiendan presentar las reglas de las derivadas de funciones elementales. Se recomienda que en aquellas, como en las trigonométricas, se utilice la definición para obtener las fórmulas correspondientes. También deben desarrollarse de una vez las reglas para la derivada de la suma, producto, cociente y composición de funciones. Para las cuatro primeras, las demostraciones de estas fórmulas son sencillas, por lo que se debe aprovechar para trabajar los ejes **deducción** y **lenguaje**.

Una vez más, se recomienda no concentrar demasiado tiempo ni esfuerzo en el aspecto operativo del cálculo de las derivadas, y dirigir siempre la atención al significado geométrico y la utilización de la misma en la solución de problemas.

Sin el estudio de los límites infinitos y al infinito, no es posible trabajar con asíntotas, así que la elaboración de gráficas con comportamientos asintóticos tendrá que posponerse hasta el final de este tema.

Una de las aplicaciones más significativas de la derivada es la de ser una herramienta adecuada para la elaboración de modelos en problemas de optimización. Hay una gran variedad de ellos con temas que pasan por la Física, la Economía, dentro de la misma matemática, en la Geometría. Como siempre, en este tema, uno de los elementos más importantes es el proceso de elaboración del modelo, en el cual se deberá enfatizar la necesidad de comprender los conceptos y saber utilizarlos adecuadamente para lograr obtener el modelo, y luego resolver el problema modelado.

Finalmente, este tema terminará con el estudio de la noción de límite. Como se mencionó, se recomienda no pasar a una definición formal, sino mantenerse en el manejo intuitivo, apoyándose con el software adecuado para ilustrar el concepto. En el tratamiento de los límites infinitos y al infinito, se trabajará el concepto de asíntota, y ya se podrán dibujar funciones con comportamientos asintóticos.

Inducción matemática. En el bloque de "Números y funciones" del tercer año de Bachillerato, se realiza una breve introducción a las sucesiones y las funciones recursivas. Sin embargo, allí se obtienen generalizaciones que no se pueden probar porque la prueba requiere de la inducción matemática. En este tema, se presentará el método de demostración, y podrá ser utilizado para la demostración de fórmulas que son obtenidas en los problemas que se resuelven en el bloque correspondiente del tercer año de bachillerato.

En este bloque se aprovechará también para estudiar el binomio de Newton. La propia fórmula como el concepto de coeficiente binomial son adecuados para trabajar la definición por recurrencia como el método de inducción.

Números complejos. Su introducción puede ser motivada por la imposibilidad de resolver la ecuación

$$x^2 + 1 = 0$$

en el conjunto de los números reales; es decir, la no existencia de un número real x que satisface esta igualdad.

Esta es una buena oportunidad para hacer un recorrido del proceso de ampliación de los conjuntos de números a través de la imposibilidad de resolver una ecuación (aunque históricamente no se haya dado así exactamente). Así, empezando con la existencia únicamente de los números naturales, la imposibilidad de resolver en dicho conjunto la ecuación

$$x + 1 = 0$$

conduce a la introducción de un nuevo conjunto de número: los enteros. La imposibilidad de resolver en los racionales la ecuación

$$2x + 1 = 0$$

motiva el aparecimiento de los racionales. El paso a los números reales es más complejo, pero se puede utilizar la ecuación

$$x^2 - 2 = 0.$$

Para justificar el paso a un nuevo conjunto de números, es necesario saber por qué $\sqrt{2}$ no es un número racional. Su demostración es un excelente ejercicio de razonamiento, a la vez que se repasan las propiedades de los números pares e impares y de la divisibilidad.

Una vez que se ha introducido el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ y que se conozcan ya sus operaciones, se estudiará la representación geométrica, lo que no ofrecerá ninguna dificultad, puesto que los estudiantes, en este año, conocen de sobra los vectores en el plano.

A continuación se trabajará la representación polar o trigonométrica, mostrando las bondades de dicha representación. Se llegará hasta el teorema de Moivre y la radicación. Esta última se utiliza para calcular las raíces de la unidad. Este punto debe ser aprovechado para hablar del teorema fundamental de la Aritmética. En este tema se utiliza ampliamente la trigonometría, de lo que el docente debe valerse para que dicho tema se consolide.

Entre las aplicaciones de los números complejos a la Geometría, el estudio de la "inversión" —transformación del plano en el plano— que preserva rectas y circunferencias.

2.2 Bloque Geometría

En primer lugar, en este bloque se estudiarán los vectores en el espacio. De manera similar a cómo se procedió en el segundo año del Bachillerato, se inicia con el estudio de los vectores representados geométricamente y luego se los identifica con $\mathbb{R}^3$. En general, hay que aprovechar todo lo realizado en $\mathbb{R}^2$ y el plano para extender a $\mathbb{R}^3$ y el espacio.