Ministerio de Educación

PRECISIONES CURRICULARES
PARA EL BACHILLERATO GENERAL UNIFICADO

ÁREA DE MATEMATICA

PRIMER CURSO

Precisiones para la enseñanza y el aprendizaje

1 Precisiones generales

El eje curricular integrador del área propone la elaboración de modelos como el mecanismo para resolver problemas. En un desarrollo gradual, que durará los tres años del bachillerato, los estudiantes deberán comprender que la solución de aquellos que se estudian con la matemática pasan por un proceso que se inicia con una representación de los elementos del *problema original* mediante conceptos y lenguaje matemático, que continúa con la formulación de un *problema matemático*, de cuyos análisis y resolución, tras la interpretación respectiva, esperamos encontrar una solución al *problema original*.

Una manera de lograr esta comprensión gradual consiste en que, desde el inicio del bachillerato, los estudiante se enfrenten con la tarea de elaborar modelos y, a través de ellos, resuelvan problemas, por más simples que estos sean. Esta labor puede ser desarrollada por el docente en algunas fases.

1. **El problema.** En cada bloque, para introducir los temas principales, el docente propondrá a la clase uno o varios problemas o situaciones cuya representación matemática utilizará los conceptos matemáticos principales que se quieran estudiar en dicho tema.
2. **Experimentación.** El docente propondrá diversas actividades a los estudiantes para que se familiaricen con el problema o la situación. Estas actividades podrán consistir, entre otras, en experimentar con los elementos del problema, lo que les permitirá tomar datos, que serán presentados mediante tablas o gráficos. A partir de estas representaciones, los estudiantes podrán conjeturar soluciones o descubrir algunas “no soluciones”. El docente, en cambio, contará con el material y el vocabulario suficientes para introducir los conceptos objetos de estudio, y que serán indispensables para resolver el problema o explicar la situación.
3. **Modelar.** De los datos pasamos a una representación de los elementos del problema y de las relaciones existentes entre ellos mediante conceptos matemáticos; en otras palabras, *elaboramos un modelo* del problema, con lo cual obtenemos, a su vez, un *problema matemático*. En la medida en que se utilizarán funciones para este proceso, se hará necesaria la identificación de *variables* y las *relaciones de dependencia* entre ellas; esto dará lugar a etiquetar a algunas variables como *independientes* y otras como *dependientes*, y a identificar algunas relaciones como *funciones*. Acompañando a este proceso, estará siempre el uso explícito por parte del estudiante de los símbolos (letras) que utilice para representar las variables y las funciones. El docente deberá insistir en el uso consistente de esos símbolos, y del uso correcto del lenguaje para la descripción de dichas representaciones.
4. **Interpretación y Generalización.** Una vez obtenido el modelo, se resuelve el *problema matemático*, se interpreta la solución matemática para dar solución al *problema original*. A continuación, debemos enfatizar en que la solución matemática encontrada permite obtener métodos generales que pueden resolver una variedad de problemas “del mismo tipo”, o pueden guiarnos a dar solución a problemas nuevos más complejos, pero, para ello, es necesario estudiar, con mayor profundidad, los conceptos que surgieron como abstracciones de los elementos que intervinieron en la elaboración del modelo.

   En esta fase, también se pueden estudiar varios de los conceptos únicamente con motivaciones matemáticas como las de demostrar un teorema mediante dos métodos diferentes; Por ejemplo, la fórmula para calcular la suma de los primeros n números de una progresión aritmética suele ser demostrada mediante inducción matemática; sin embargo, mediante argumentos geométricos —que incluyen la fórmula del área de un rectángulo, condiciones suficientes para la congruencia de triángulos, entre otros— también se obtiene una demostración de la mencionada fórmula.

En cada una de estas fases, el docente debe insistir en el uso correcto del lenguaje por parte de los estudiantes, tanto escrito como oral, en la formulación e identificación de los diversos elementos que aparecen en el proceso de la elaboración del modelo.

A continuación, vemos los ejes de aprendizaje que aparecen en cada una de las fases.

1. En la del problema, el estudiante debe **leer** un texto que, en la mayoría de las ocasiones, se refieren a temas no matemáticos. También debe **expresarse oralmente** para hablar sobre el problema, para averiguar sobre él, etcétera. Sin las destrezas necesarias de la **lengua en forma escrita y oral**, no comprenderá lo que el problema le plantea.

   Dado que los problemas que se utilicen deben ser, preferentemente, no matemáticos, en esta fase se **integran diferentes conocimientos adquiridos**; por ejemplo, con la economía y las finanzas, la biología, la física y la química, etcétera.
2. En la fase de experimentación, se tiene una oportunidad valiosa para hacer uso de las **tecnologías de la información**, mediante la toma de datos, la elaboración de tablas, de gráficos, etcétera. También se **integran conocimientos adquiridos**, pues en esta fase casi siempre se recurre a conocimientos matemáticos que los estudiantes ya conocen; por ejemplo, elaborar gráficas, realizar ciertos cálculos, tanto “a mano” como a través de “tecnologías”.

   Otro elemento presente en esta fase es la **conjetura**, cuando se procesan e interpretan los datos obtenidos, y se proponen soluciones, o caminos a seguir para resolver el problema.

   Finalmente, el uso correcto de la **lengua** se evidencia a través de la presentación de los datos recogidos, de las síntesis que de ellos se hagan.
3. En la fase de modelar, la **abstracción** es una de las principales herramientas con la que los estudiantes deben contar, pues es la que les permite identificar las variables y las relaciones entre las variables. El **uso correcto de la lengua** les permite elegir, adecuadamente, los símbolos, que representan los elementos del problema, para su manipulación posterior.
4. En la fase de los conceptos, una vez más la **abstracción**, la **generalización**, el **uso correcto de la lengua**, las **tecnologías** estarán presentes.

   La manera de saber que algo es una solución es “probar”, **justificar**, que lo hallado es una solución; parte del desarrollo de los conceptos está encaminado, precisamente, a ese fin.

En el perfil de salida del BGU, se propone que el egresado resuelva problemas que la vida cotidiana le plantea. Es de esperar que los problemas que se proponen en el bachillerato, tanto para introducir los conceptos, objetos de estudio, como los que tienen que resolver como parte de su formación, sean de la vida cotidiana. Sin embargo, muchos de los problemas de la vida real no pueden ser resueltos con los conocimientos matemáticos adquiridos en el bachillerato y, en varias ocasiones, ni siquiera con los que se adquirirán en la universidad, a nivel de la licenciatura (ingeniería); serán necesarios estudios especializados de maestría y/o doctorado.

A pesar de esta situación, siempre es posible adaptar los problemas reales y conformar al menos dos tipos de problemas que podrán ser utilizados en el aula:

1. **Problemas reales**, en los que se requiere de matemática para resolverlos; pueden simplificarse para que los conocimientos necesarios sean los que los estudiantes poseen o pueden poseer en el nivel en el que se encuentran. En estos problemas, los conceptos matemáticos adquieren sentido.
2. **Problemas ilustrativos**, cuyo único objetivo es ejemplificar conceptos, términos y teoremas.

Hay una gran variedad de problemas reales que pueden ser simplificados, sin que por ello se pierda la posibilidad de utilizarlos como buenos prototipos de lo que con la matemática puede hacerse en la vida cotidiana. En las últimas décadas, un buen número de esos problemas han sido modelados con herramientas matemáticas relativamente sencillas de comprender; algunos ejemplos se encuentran propuestos en el bloque de "Matemáticas discretas".

2 Primero de bachillerato

A partir del eje curricular integrador del área, el docente debe fundamentar su práctica docente en la comprensión y el uso de la matemática como un instrumento para el análisis y la resolución de problemas. El bloque de "Número y funciones" en el primer curso del bachillerato es un terreno fértil donde se puede concretar el elemento central del aprendizaje mediante el énfasis que el docente haga en los siguientes aspectos:

- Muchas situaciones de la vida encierran relaciones cuantitativas.
- Las funciones nos permiten representar o modelar relaciones entre cantidades que surgen de estas situaciones.
- El comportamiento de una función nos informa sobre la situación modelada. Nos permite responder preguntas sobre la realidad o describir elementos de ella (por ejemplo, pronosticar valores, optimizar, entre otras).

El proceso que se sigue para la elaboración de un modelo matemático requiere de todos los ejes de aprendizaje establecidos en este documento. A través del siguiente ejemplo, se ofrecen directrices generales que enfatizan en cada eje de aprendizaje y de cómo utilizar la elaboración de modelos, tanto para que los estudiantes comprendan nuevos conceptos matemáticos como para que los utilicen en la resolución de un problema. En *cursiva*, aparecerán los conceptos (o nociones) matemáticos que se presentarán a los estudiantes; en **negrita**, los ejes de aprendizaje que se trabajan.

El docente plantea el siguiente problema a la clase.

Problema 1 (La cartelera de la clase). *Queremos una cartelera rectangular de corcho para el aula, en la que podamos colocar anuncios, fotografías, mensajes, etcétera. Disponemos de algunas piezas de corcho de forma cuadrada; cada lado mide* 10 cm*; también disponemos de una tira de madera de* 180 cm *para el marco. ¿Cuántas piezas de corcho necesitaremos para que la cartelera sea la más grande que pueda ser enmarcada con la tira de madera?*

Conduzca, en primer lugar, a los estudiantes a que precisen el significado de "más grande" como la cartelera "de mayor área posible"; en segundo lugar, a que comprendan que el problema de hallar el número de piezas es equivalente a determinar las dimensiones de la cartelera buscada.

En el aula, los estudiantes conforman grupos para trabajar de manera cooperativa. Inician la actividad realizando bosquejos de posibles carteleras haciendo variar las dimensiones. Facilite un formato, como el que se muestra a continuación, para que los estudiantes registren y organicen sus datos:

Ancho (cm)	Largo (cm)	Perímetro (cm)	Área (cm^2)
10	80	180	800
20	70	180	1 400

Guíe a los estudiantes en una discusión sobre *variables independientes* y *dependientes*, mediante el reconocimiento de la dependencia que existe entre las variables. El grupo podrá llegar a la conclusión de que hay tres variables, "ancho", "largo" y "área", y de que existen, por lo menos, dos dependencias: una entre el "ancho" y el "largo", y otra entre una de las otras dos y el "área". El "ancho" puede ser considerado como variable independiente y el largo, como dependiente (o viceversa); esto da cuenta de la primera dependencia. Si el "ancho" es la variable independiente, entonces el "área" es una variable dependiente de éste, lo que da cuenta de la segunda dependencia.

Pida a los estudiantes que grafiquen los pares ordenados correspondientes a $(x = \text{ancho},\ y = \text{área})$ y que luego tracen una curva que pase por los puntos dibujados. El profesor comparte la solución tanto de la tabla como del gráfico con la clase e introduce más lenguaje: la curva tiene el nombre de *parábola*. Aproveche la oportunidad para hacer notar cualidades importantes de la parábola: la *simetría*, el valor *extremo*, la *monotonía*, haciendo, en cada caso, la interpretación respectiva con el problema original. Por ejemplo, la simetría corresponde al hecho de que el rectángulo tiene la misma área si intercambiamos las dimensiones del largo y del ancho, entre sí.

Indique que se realice una gráfica con los pares ordenados $(x = \text{ancho},\ y = \text{largo})$. Los estudiantes deben reconocer esta gráfica como una recta distinta a la parábola. La comparación de los dos gráficos indica la existencia de una relación *no lineal* entre las variables (el ancho y el área).

En este punto, es posible responder la pregunta inicial: ¿con cuántas piezas de corcho se construye la cartelera de mayor área? Se requieren 20 piezas, colocadas en un rectángulo de cuarenta por cincuenta centímetros.

Ahora proponga **generalizar** el problema; es decir, proponga un nuevo problema: ¿cómo se puede encontrar el extremo de cualquier parábola? Para ello, los estudiantes deben determinar la función que describe el área de la cartelera en términos de uno de los lados, para lo cual deben **integrar** su conocimiento de geometría y álgebra. Conduzca a una discusión sobre cómo **abstraer** lo que han encontrado.

En esta discusión, el docente recalca el uso de símbolos para representar tanto los diversos elementos involucrados en el problema como las relaciones existentes entre ellos. Por ejemplo, se sabe que en cualquier rectángulo se verifica

$$\text{Perímetro} = 2\text{ancho} + 2\text{largo}.$$

En el caso de la situación dada, se tiene

$$180 = 2\text{ancho} + 2\text{largo},$$

de donde

$$\text{largo} = 90 - \text{ancho}.$$

Si el ancho es representado por x, entonces el largo será representado por $90 - x$.

Finalmente, sabemos que

$$\text{Área} = \text{ancho} \times \text{largo}.$$

Entonces

$$A = x(90 - x),$$

de donde

$$A = -x^2 + 90x.$$

La discusión debe ser conducida a enfatizar que el área es una *función* del ancho, de allí la inclusión de (x) después de A:

$$A(x) = -x^2 + 90x.$$

Si se dispone de **tecnología**, se puede graficar esta función, determinar algunos valores que no se encuentran en la tabla (por ejemplo, la ubicación precisa del vértice). También se puede extender o **generalizar** el problema dando otros valores al perímetro, determinando un *patrón* para la fórmula de $A(x)$ en función del perímetro y la ubicación del vértice.

Una vez introducida la función cuadrática, es importante iniciar un estudio sistemático comenzando con $y = x^2$, y variando esta función “madre” mediante homotecias, reflexiones y traslaciones hasta llegar a la forma general $y = ax^2 + bx + c$. Por ejemplo, se pueden estudiar los siguientes casos:

$$y = x^2, \quad y = -x^2, \quad y = (x+1)^2, \quad y = -(x+1)^2, \ldots$$

En cada uno debemos observar el cambio en la monotonía, concavidad, el vértice y los cortes con los ejes.

Por ejemplo, ¿qué propiedades tiene $y = -5(x+1)^2 + 6$? Empecemos con $y = x^2$. La parábola representada por esta ecuación tiene el vértice en $(0,0)$ y su concavidad es hacia arriba. Entonces la parábola representada por $y = -x^2$ tiene la concavidad hacia abajo, pero el mismo vértice. Al multiplicar por 5, la parábola representada por $y = -5x^2$ tiene una abertura menor, pero no cambia la concavidad ni el vértice. A continuación, realizamos una traslación horizontal: $y = -5(x+1)^2$; ahora el vértice se traslada a $(-1,0)$, pero las otras propiedades no cambian. Finalmente, al realizar la traslación vertical, la parábola representada por $y = -5(x+1)^2 + 6$, su vértice se mueve a $(-1,6)$, pero la concavidad y la apertura se mantienen.

La *fórmula del vértice* puede ser obtenida generalizando el ejemplo anterior: de la forma $y = a(x-h)^2 + k$, el vértice se encuentra en el punto (h,k). Se debe notar que el valor $y = k$ es el más grande (o más pequeño) si el signo de a es positivo (o negativo, respectivamente).

Mediante un ejemplo podemos establecer la relación entre la función cuadrática f de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ y la forma anterior. En esta situación, se requiere completar el cuadrado por lo que es necesario utilizar un ejemplo sencillo donde el procedimiento sea fácil y no se convierta en un obstáculo técnico para el estudio de la parábola. Mediante observación y generalización de varios ejemplos sencillos, se puede establecer la fórmula del vértice

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right).$$

Un reto para los estudiantes más avanzados es el completar el cuadrado de manera general y establecer la fórmula del vértice:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Es fundamental que los estudiantes desarrollen un sentido geométrico-algebraico. El problema de determinar los cortes de la parábola con los ejes provee de un tema donde tal destreza puede ser desarrollada: los cortes de la parábola corresponden a los ceros de la función; en otras palabras, resolver una ecuación cuadrática es equivalente a determinar los cortes de una parábola con el eje horizontal, es decir, encontrar los ceros de una función. Es importante empezar este tema con un repaso de las destrezas necesarias (factorización de trinomios y uso de la fórmula cuadrática):

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

El número de cortes depende de la expresión del interior del radical, el *discriminante*: si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, se tienen dos raíces reales. En este caso se debe notar que la parábola corta en dos puntos distintos el eje horizontal. Si $\Delta < 0$, no hay solución para la ecuación y, por tanto, no hay cortes: la parábola está localizada enteramente por encima o debajo del eje horizontal; si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una solución en el conjunto de los números reales; es decir, la parábola toca el eje x en un solo punto que corresponde al vértice.

* * *

¿Qué ejes se han trabajado? Hemos visto que los estudiantes deben **abstraer** para realizar una **conjetura** sobre la relación entre variables, **deducen** una fórmula utilizando relaciones geométricas conocidas, es decir, relacionando otros conocimientos entre sí (**integración de conocimientos**).

Hemos observado también que los estudiantes deben **generalizar** lo encontrado en el problema para realizar una conjetura sobre la ubicación del *máximo de la función* como el *punto vértice de la parábola*. Si los estudiantes o el profesor disponen de la tecnología adecuada (calculadora gráfica, aplicaciones en el internet o software de computadora), el proceso de realizar una gráfica puede ser más rápido, facilitando de esta manera la determinación del vértice.

El proceso de enseñanza aprendizaje requiere de **comunicación verbal y escrita** de ideas matemáticas. Es así que se incorpora el **lenguaje escrito** para la presentación del problema, la designación de los símbolos que representan los elementos del problema con los que se trabaja. Respecto del **lenguaje oral**, el docente debe promover en los estudiantes la formulación correcta de las respuestas que ellos ofrezcan en los procesos interactivos en los que se identifican variables y sus relaciones mutuas.

2.1 Bloque de números y funciones

La introducción de noción de función debe ser gradual, y deben incluirse, al menos, las siguientes nociones.

- Partiendo del conocimiento previo que tienen los estudiantes, la función puede ser vista como una ecuación algebraica. Por ejemplo, de la ecuación $y = 2x + 3$, se puede conducir a una reflexión sobre la dependencia de la variable y con respecto a la variable x. El uso de una tabla con valores de x y de y refuerza esta situación. De ahí que tiene sentido escribir $y = f(x)$.
- La función puede ser vista como una máquina que realiza una operación a un objeto de “entrada” y da como resultado un objeto de “salida”. Por ejemplo: traducir “mi máquina toma un número, lo triplica y al resultado suma 1” como “$f(x) = 3x + 1$”, y viceversa.

- La función puede ser vista como una regla de asignación entre dos variables. Por ejemplo: el profesor pide a cada estudiante de su clase que digan el nombre de un animal, la clase responde: “gato”; en la pizarra, el profesor anota “gato” y a su lado, el número “4”; a continuación, pide el nombre de otro animal, la clase responde: “culebra”; el profesor la anota, pero también escribe el número “0” a su lado. Luego de repetir este ejercicio varias veces, el profesor pregunta: “¿cuál es la regla de asignación?”.

  A esta noción también se la puede entender como una relación entre dos conjuntos: a cada elemento del primero le corresponde un único elemento en el segundo. En nuestro ejemplo, entre el conjunto de animales y un subconjunto de los números naturales: a cada animal le corresponde un número natural: el número de patas que tiene ese animal.

El profesor debe utilizar simultáneamente varias representaciones de una función:

- Tablas de valores.
- Gráfica en el plano cartesiano.
- Una regla de asignación $x \mapsto f(x)$.
- Una ecuación algebraica.
- Un conjunto de pares ordenados.

Es necesario proponer situaciones a través de una de las representaciones y pedir a los estudiantes que obtengan las otras. Por ejemplo, el problema de obtener la ecuación de una recta dados dos puntos que pertenecen a la recta corresponde a esta perspectiva. De la ecuación algebraica de la recta a su representación gráfica es otro ejemplo. Es igualmente recomendable presentar situaciones en donde no sea posible obtener la regla de asignación, y solamente se deba utilizar la información que da la gráfica o la tabla. Por ejemplo, si se tiene la gráfica de una función, y no su regla de asignación, peticiones como “encontrar el valor de $f(5)$” o “encontrar x de manera que $f(x) = 2$” obligan al estudiante a utilizar la información que proporciona la gráfica o la tabla.

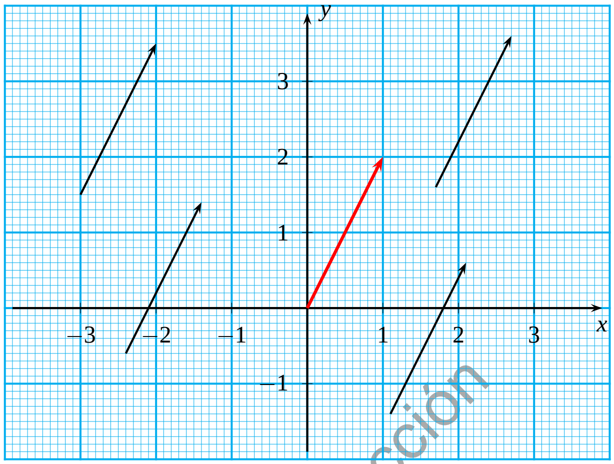
Un aspecto importante del bloque es el interrelacionar el lenguaje algebraico con el lenguaje funcional. Por ejemplo, el problema algebraico de encontrar la solución de la ecuación $x+1 = x^2-2$ se debe presentar también como el problema de encontrar la intersección entre las gráficas de las funciones f y g definidas por $f(x) = x+1$ y $g(x) = x^2-2$.

2.2 El bloque de algebra y geometría

La historia de la matemática nos devela el hecho de que los vectores fueron desarrollados para expresar posición y movimiento de objetos en el plano y el espacio. Es recomendable mantener esta relación para comprender los vectores geométricos y su relación con los vectores algebraicos.

Los estudiantes están familiarizados con el plano cartesiano desde sus estudios de EGB. El maestro debe partir de este conocimiento para presentar de manera simultánea el espacio $\mathbb{R}^2$ y la equivalencia entre *parejas ordenadas*, *puntos* y *vectores*.

Para presentar el concepto de vectores, se puede recurrir a una variedad de actividades lúdicas. Por ejemplo, el profesor puede trazar un plano cuadriculado simulando el plano cartesiano en el piso de la clase o en el patio del colegio. Luego pide a sus estudiantes que paren en los puntos de coordenadas enteras y pide que, simultáneamente, se muevan una unidad a la derecha y dos unidades hacia arriba. El profesor pide que cada estudiante trace con una tiza un segmento de recta que una el punto de origen y punto final de su movimiento, usando una flecha para indicar la dirección del movimiento. A cada estudiante le corresponde un vector distinto sin embargo todos obedecieron la misma instrucción. Esta actividad debe servir para presentar la noción de *vector*, y su *notación*, las definiciones de *vectores equivalentes*, y la *forma estándar* de un vector. En el pizarrón, el profesor resume en un gráfico en el plano lo que sus estudiantes realizaron.



Todos los vectores son equivalentes al vector cuyo punto inicial es el origen de coordenadas y cuyo punto final es el punto de coordenadas $(1,2)$. Para expresar el movimiento, podemos indicar que, para llegar a $(1,2)$ desde $(0,0)$, damos un (1) paso en la dirección hacia el punto de coordenadas $(1,0)$ y dos (2) pasos en la dirección del punto de coordenadas $(0,1)$. Se indica, entonces, que los dos vectores con el mismo punto inicial, el de coordenadas $(0,0)$, pero con puntos finales los de coordenadas $(1,0)$ y $(0,1)$, respectivamente, son especiales, pues nos pueden servir para describir cualquier movimiento. El profesor indica que se los representa mediante $\vec{i}$ y $\vec{j}$, y al vector con punto inicial el origen de coordenadas y con punto el de coordenadas $(1,2)$ como $\vec{i}+2\vec{j}$. El profesor conduce a sus estudiantes a las siguientes conclusiones:

- A cada punto de coordenadas (a,b) en el plano, *le corresponde* el vector $a\vec{i}+b\vec{j}$.
- Un vector cuyos puntos inicial y final tienen las coordenadas (c,d) y e, f, respectivamente, es *equivalente* al vector $a\vec{i}+b\vec{j}$ si y solo si

$$e-c = a \quad \text{y} \quad f-d = b.$$

En el espacio $\mathbb{R}^2 = \{(a,b) : a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\}$, se definen dos *operaciones*. Una es entre dos parejas ordenadas, y se la denomina *suma*; la otra, llamada *producto por un escalar*, entre una pareja ordenada y un número real (escalar). La suma y multiplicación por un escalar son, desde el punto de vista algebraico, sencillas de operar.

Estas operaciones deben ser presentadas de manera conjunta con su representación vectorial que puede ser más difícil de entender:

1. La *suma entre pares ordenados* se realiza sumando las coordenadas respectivas entre sí.
2. La *suma entre vectores* se realiza *algebraicamente* sumando los términos “semejantes” en $\vec{i}$ entre sí y los términos semejantes en $\vec{j}$ entre sí, separadamente.
3. La *suma de vectores* se realiza *geométricamente* con la traslación de uno de los vectores, o la ley del paralelogramo como una alternativa a la traslación.

Por ejemplo:

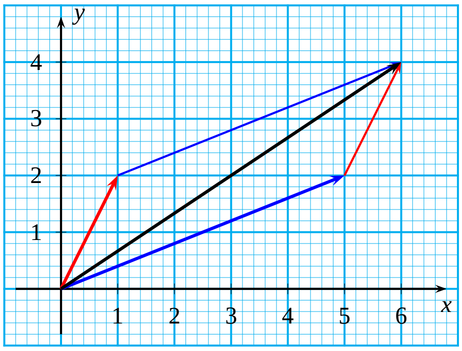
Suma en $\mathbb{R}^2$:

$$(5,2)+(1,2) = (6,4).$$

Suma algebraica de vectores:

$$(5\vec{i}+2\vec{j})+(\vec{i}+2\vec{j}) = 6\vec{i}+4\vec{j}.$$

Suma geométrica de vectores:



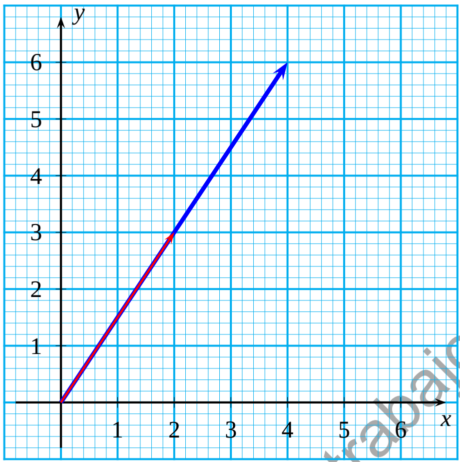
Producto por un escalar en $\mathbb{R}^2$:

$$2(2,3) = (4,6).$$

Producto por un escalar algebraicamente:

$$2(2\vec{i}+3\vec{j}) = 4\vec{i}+6\vec{j}.$$

Producto por un escalar geométricamente:



El profesor puede utilizar las representaciones geométricas de la suma y del producto por un escalar para verificar las propiedades que que hacen que $\mathbb{R}^2$ sea un espacio vectorial: la *asociatividad*, la *conmutatividad*, la existencia del *elemento neutro* (el *vector "cero"*), la existencia del *inverso aditivo*, la *distributividad*, etcétera.

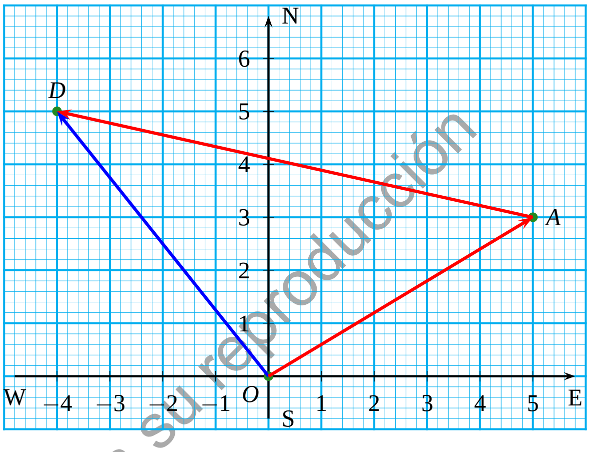
Haga notar casos importantes para la suma y el producto por escalar. Por ejemplo:

- El efecto de multiplicar un vector por un escalar menor que 1 y mayor que cero es el de contraer o "encoger" al vector.
- El efecto de multiplicar un vector por un escalar menor que cero es que este apunta en dirección opuesta.
- Al multiplicar un vector por -1, se obtiene el *vector inverso*.
- Si tomamos varios puntos sobre una recta y les sumamos un mismo vector, los puntos resultantes estarán también en una recta.

Las primeras dos observaciones pueden conducir a la presentación de las nociones de *longitud* y de *dirección* de un vector (ángulo que forma con el eje x). La fórmula de longitud de un vector debe salir de la relación pitagórica. Problemas prácticos de ubicación y posición final de objetos que se trasladan deben dar paso a entender con mayor profundidad estos conceptos. Considere utilizar problemas parecidos al siguiente:

Problema 2. *Una persona que viaja en automóvil parte de una ciudad; recorre tres kilómetros hacia el Norte y luego, cinco hacia el Este, y se detiene a almorzar. Si el lugar de destino se encuentra a cuatro kilómetros hacia el Oeste y a cinco kilómetros hacia el Norte de la ciudad de origen, ¿cuál debe ser la dirección y longitud de recorrido desde el lugar de la parada al lugar del destino? Si realizara el viaje en línea recta desde la ciudad de origen hasta el lugar de destino, ¿cuál seria la longitud de su recorrido?*

Es recomendable que el profesor insista en que los estudiante realicen el gráfico de la situación y, paralelamente, la representación del problema en forma vectorial:



Si el vector que describe el movimiento desde el lugar en que la persona se detuvo para almorzar hasta el lugar de destino se representa por $a\vec{i}+b\vec{j}$, entonces se verifica la igualdad siguiente:

$$(5\vec{i}+3\vec{j})+(a\vec{i}+b\vec{j}) = -4\vec{i}+5\vec{j}$$

implica que $a=-9$ y $b=2$. Por lo tanto, el movimiento de la parada al destino final se describe mediante el vector $-9\vec{i}+2\vec{j}$ y la distancia entre las dos ciudades es

$$|-9\vec{i}+2\vec{j}| = \sqrt{81+4} = \sqrt{85} \approx 9{,}2$$

kilómetros.

Finalmente, hay una variedad de recursos en línea que realizan la suma de vectores[1]. Si la clase dispone de tecnología, deberá utilizar estas herramientas para realizar ejercicios para comprobar propiedades, realizar suma de varios vectores, que realizados a mano, tomaría mucho tiempo, etcétera.

2.3 El bloque de matemáticas discretas

Aquí se presentan algunas formas de modelar situaciones utilizando herramientas matemáticas diversas: grafos, algoritmos, funciones recursivas, entre otras. En el primer año del bachillerato, el bloque incluye programación lineal.

La programación lineal es una aplicación de varios conocimientos previos que serán integrados en un algoritmo sencillo y extremadamente útil. El siguiente ejemplo muestra un problema y la elaboración de un modelo que lo represente. Se recalca las oportunidades de enseñanza con atención a los ejes de aprendizaje del área.

Problema 3 (Ganancia máxima de una mezcla)**.** *La clase quiere reunir fondos para el paseo de fin de año, para lo cual se organizan para vender bebidas. Deciden ofrecer jugos cítricos de dos tipos: "ácido" y "super ácido". Para elaborar un litro de jugo super ácido, se requiere el zumo de dos naranjas y cuatro limones; para un litro del jugo ácido, el zumo de una naranja y cuatro limones. Un vaso de jugo ácido será vendido en* 50 *centavos y uno de*

[1] http://www.unalmed.edu.co/~daristiz/preuniversitario/unidades/generalidades/applets/AppletSumaPoligJar/SumaPolig.htm

jugo super ácido, en 75 centavos. Gracias a una donación, la clase consigue 20 naranjas y 60 limones. Se quiere elaborar un total de al menos 10 litros entre ambos jugos. Se utilizarán vasos cuya capacidad es la cuarta parte de un litro. Entonces, ¿cuántos litros de cada jugo deberá la clase elaborar de modo que la ganancia sea la máxima?

Divida la clase en grupos y facilite una tabla en la que los estudiantes registren los resultados de experimentar con varias combinaciones de las variables:

Número de litros de jugo ácido	Número de litros de jugo super ácido	Total de naranjas	Total de limones	Ganancia
13	2	17	60	32
4	10	24	56	36
9	1	11	40	21
10,5	4,5	19,5	60	34,5

Invite a sus estudiantes a llenar la tabla con valores tanto enteros como no enteros. Luego, realice preguntas que inviten a la reflexión sobre cómo se escogen los valores para cada tipo de jugo. Particularmente, el valor que es necesario para que se cumplan las restricciones. Por ejemplo, en la tabla anterior, la segunda opción no cumple con la restricción de que solo hay 20 naranjas. Es conveniente introducir un nombre para aquellos pares de valores:

(número de litros de "ja", número de litros de "jsa"),

que cumplen con las restricciones; el conjunto de estos puntos se denomina *conjunto factible*.

El profesor invita a sus estudiantes a escribir inecuaciones que representen el problema, comenzando con dar nombre a las dos cantidades variables. Por ejemplo, con la letra x, nombramos el número de litros de jugo ácido y con la letra y, el número de litros de jugo super ácido:

x: *número de litros de jugo ácido,*
y: *número de litros de jugo super ácido.*

Discuta la mejor manera de escribir las condiciones para x y y en forma de *inecuaciones*. Luego de llegar a un consenso sobre las inecuaciones, introduzca el término *restricciones del problema*; indique que, en este caso, las restricciones son:

$$x+2y \leq 20, \quad 4x+4y \leq 60, \quad x+y \geq 10, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

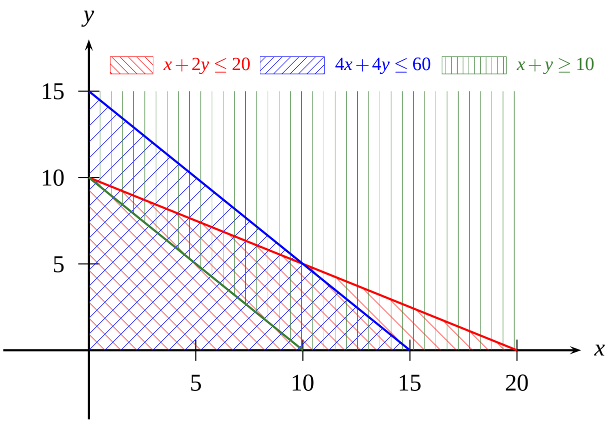
El docente deberá enfatizar en el significado de cada una de esas inecuaciones. Por ejemplo, la primera nos dice que el número de naranjas que se utilicen no puede sobrepasar de 20; la segunda, que el número de limones utilizados no excederá de 60; etcétera.

Se procede luego a escribir una expresión algebraica que represente la ganancia obtenida por la venta de los jugos; a esta expresión se la denomina *la función objetivo*. El docente deberá recalcar en el uso de la palabra *función*: la ganancia varía cuando varían el número de litros de los jugos que se elaboren. En este caso, como cada litro contiene cuatro vasos, $4x$ y $4y$ representarán el total de vasos que serán elaborados de cada tipo de jugo; cada una de estas cantidades multiplicada por el precio de venta de un litro de cada tipo de jugo, respectivamente, nos proporciona la ganancia; luego, la función objetivo será:

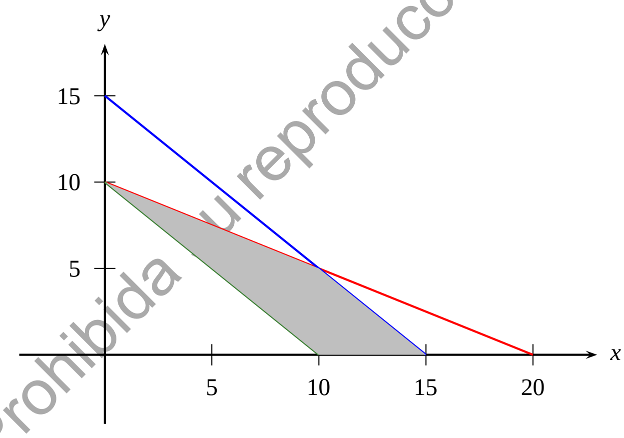
$$G(x,y) = 0{,}5(4x) + 0{,}75(4y) = 2x + 3y.$$

Es decir, por un litro de jugo ácido la ganancia es de 2 dólares; de 3, por un litro super ácido.

En vista de que la tabla es una manera ineficiente de encontrar todas las parejas posibles, el profesor pide a sus estudiantes que grafiquen, en un mismo plano cartesiano, cada inecuación (restricción):



Debe llamar la atención de los estudiantes hacia la región que es común a todas las restricciones (región denominada *conjunto factible*):



Dado que el objetivo de aprendizaje no es el realizar gráficas de inecuaciones, este proceso no debe convertirse en un obstáculo en la presentación del problema; por ello, si la clase lo necesita, es recomendable utilizar una calculadora gráfica en lugar de determinar a mano el conjunto factible. En la web podemos encontrar muchas aplicaciones de software libre que grafican el conjunto factible[2]. En ejercicios subsiguientes, el profesor podrá, si los estudiantes lo necesitan, proponer ejercicios para representar gráficamente inecuaciones a mano.

Es importante organizar la información de manera clara resumiendo el problema de la siguiente manera:

$$\max G(x) = 2x + 3y$$

$$\text{sujeto a:} \begin{cases} x+2y \leq 20, \\ 4x+4y \leq 60, \\ x+y \geq 10, \\ x \geq 0,\ y \geq 0. \end{cases}$$

El algoritmo de solución de la programación lineal indica que, para hallar la solución, la función objetivo sea evaluada en los vértices de la región factible. Podemos dar sentido a este algoritmo indicando que si la función objetivo toma distintos valores, las gráficas que se obtienen son rectas paralelas entre sí. En efecto, si la ganancia fuera de 32 dólares, entonces los valores de x y de y que producen esta ganancia, cumplirían la siguiente igualdad:

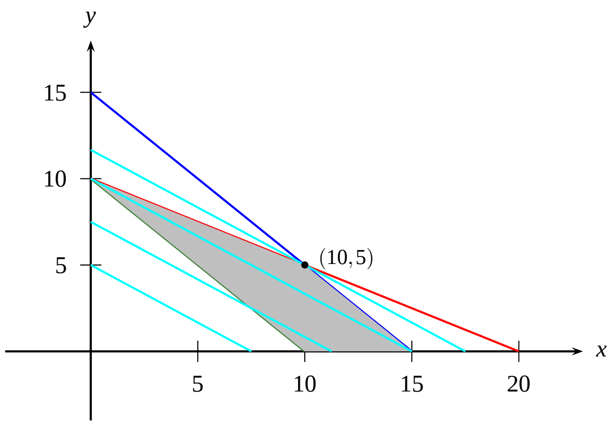
$$2x + 3y = 32.$$

Entonces, la gráfica de todos estos puntos (x,y) sería una recta. Si la ganancia fuera de 21 dólares, la recta correspondiente sería

$$2x + 3y = 21.$$

[2] Por ejemplo, en `http://www.ronblond.com/M1/Linprog/index.html`.

En el siguiente dibujo, se muestran algunas rectas obtenidas para distintos valores de la función objetivo:



El valor de la función objetivo en este caso crece conforme la recta se mueve hacia la derecha. Claramente vemos que el valor máximo de la función objetivo debe obtenerse en uno de los vértices de la región factible.

Para este problema, el vértice correspondiente a la intersección de las rectas de ecuaciones $x+y=15$ y $x+2y=20$, corresponde al máximo que buscamos. Las coordenadas del punto de intersección es $(10,5)$; es decir, $x=10$, $y=5$ y la ganancia es

$$2x+3y=20+15=35$$

dólares.

Es importante que el docente pida a los estudiantes que calculen el valor de la función objetivo en los otros vértices del conjunto factible y comparen la ganancia obtenida con la óptima.

Un aspecto de extrema importancia es interpretar los resultados que el procedimiento matemático nos provee. Por ello, el profesor debe enfatizar en que los estudiantes escriban la solución utilizando frases completas como “El valor máximo de la ganancia se obtiene elaborando 10 litros de jugo ácido y 5 litros de jugo super ácido”. Además, los estudiantes pueden extender el problema, plantear **hipótesis** y **conjeturas** como las siguientes: “si variáramos el precio de cada vaso de jugo super ácido de 75 centavos a 85 centavos, ¿como cambiaría la solución?”, “parece que la solución siempre se dará en la esquina superior y no inferior”, etcétera.

Como una **extensión** a esta actividad, se puede pedir a cada estudiante que escriba su propio problema de programación lineal, similar al ya propuesto. Esto estimula su imaginación y creatividad, obliga a pensar en cantidades que están relacionadas linealmente, ayuda al estudiante a diferenciar entre las restricciones y la función objetivo.

Vemos que varios ejes de aprendizaje se manifiestan en esta actividad: la representación de relaciones cuantitativas requiere un nivel de **abstracción**, el uso de **tecnología** para facilitar la solución del problema, la **comunicación oral**, la **generalización** del tipo de problema que se presenta (problema de mezclas).

2.4 El bloque de estadística y probabilidad

Este bloque parte del conocimiento adquirido sobre estadística descriptiva en años anteriores. Una actividad estimulante es pedir a los estudiante que se planteen una pregunta que se pueda responder mediante una encuesta. La encuesta debe incluir preguntas que representen variables numéricas y categóricas. Luego de procesar los resultados de la encuesta, estos deben ser representados en forma gráfica mediante, gráficos de círculo, de barras, histogramas, etcétera.

El resumen de resultados también debe incluir un reporte de tendencia central y variación de cada variable. Los estudiantes pueden preparar un cartel con sus resultados y exponerlos a sus compañeros. Preguntas relevantes para su edad pueden ser:

- ¿Qué tipo de comida prefiere?
- ¿Cuánto tiempo de mirar televisión es bueno?
- ¿Necesitamos otras materias de estudio?

La encuesta debe incluir preguntas demográficas para realizar comparaciones interesantes: sexo, edad, lugar de origen, etcétera.

Todos tenemos nociones básicas de probabilidad que provienen del uso del lenguaje común :

- ¿Qué tan probable es que gane mi equipo favorito?
- ¿Cuál es la probabilidad de que llueva el día de hoy?

El maestro puede dar ejemplos de eventos que podamos catalogar en una recta de probabilidad. Marcando en la recta 0 como imposible y 1 como totalmente cierto, se pide a los estudiantes que den ejemplos de eventos que estén en el uno o en el otro extremo y luego eventos que estén entre los dos extremos pidiendo que se los ubique según sea su criterio.

Los experimentos de probabilidad binomial son igualmente recomendados en este nivel: lanzar una o dos monedas, responder preguntas que tengan respuesta verdadero o falso, escribir el sexo de una persona, etcétera. El concepto de *variable aleatoria* y *espacio muestral o de eventos* debe surgir de estos experimentos. A continuación los estudiantes realizan experimentos con dados, cartas, etcétera, con el fin de generalizar estos conceptos.

La *probabilidad* se define en estos experimentos como el número de eventos favorables sobre el número de eventos en el espacio muestral. A medida que el experimento probabilístico se hace más complicado, es necesario desarrollar técnicas de conteo, lo que nos conduce a encontrar el número de combinaciones con o sin repetición y el número de permutaciones de los elementos de un conjunto. Es recomendable introducir el *factorial* como una herramienta para calcular el número de permutaciones de un conjunto finito de objetos. Por ejemplo, ¿cuántas placas de carros se pueden hacer si tenemos 6 dígitos y no queremos que un dígito aparezca más de una vez?

Es importante mostrar otras representaciones de probabilidad. Por ejemplo, la probabilidad geométrica: dado un círculo partido en varias regiones, ¿cuál es la probabilidad de lanzar un dardo en una región dada?

Este bloque incluye el cálculo de probabilidades de eventos simples y de eventos que resulten de la unión disjunta de eventos simples. Por ejemplo, la probabilidad de que salga un “dos” o un “tres” en el experimento de lanzar un dado corresponde a la unión de dos eventos simples disjuntos. En el segundo de bachillerato, se estudiará la probabilidad de eventos resultantes de uniones no disjuntas y de intersecciones.