Recomendaciones para el docente sobre “Vectores”

Los estudiantes de primer año del BGU conocen el plano cartesiano, puntos en el plano y rectas. Este capítulo supone este conocimiento y la noción intuitiva de movimiento horizontal y vertical en el plano para definir vectores. A partir de vectores equivalentes, se define la representación estándar de un vector. Finalmente, para cada cada vector en forma estándar se le asocia un punto y, por ende, una pareja ordenada. La colección de parejas ordenadas se denomina por $\mathbb{R}^2$. Paralelamente, se definen *suma* y multiplicación por un escalar, tanto para vectores geométricos como para los elementos del conjunto $\mathbb{R}^2$.

Para la “Introducción”

La “Introducción” tiene por objetivo el que los estudiantes se sitúen imaginariamente en un contexto, donde un objeto se mueva en línea recta en diferentes tramos de su trayectoria. La noción de vector que se presenta en el capítulo utiliza activamente la destreza mental de posicionar un objeto y moverlo entre dos puntos.

Sugerencias Metodológicos

- En la clase realice preguntas a sus estudiantes sobre el comportamiento de las hormigas. ¿Cómo pueden las hormigas saber el camino de ida y el de regreso al hormiguero?
- Pida a sus estudiantes que imaginen el piso (o terreno) por donde caminan las hormigas como un plano (el punto de origen es su casa), que observen el gráfico imaginando que las fleches azules son el camino de ida hasta la fuente de comida localizada en el punto E, y las flechas rojas es el camino de regreso a la casa.
- Mostrando el gráfico en la pizarra, ejemplifique el primer movimiento desde el origen hasta el punto A describiendo verbalmente “*la hormiga se mueve horizontalmente una unidad a la derecha y dos unidades verticalmente hacia arriba*”.
- Pregunte:
  - “*Cómo se mueve la hormiga desde el punto A hasta el punto B?*”.
  - “*¿Desde el punto C hasta el punto D?*".
  - “*¿Desde el punto D hasta el punto E?*”.
  - “*Si fuera directamente desde su casa hasta el punto E, ¿cómo se mueve?*”.
  - “*¿Cómo se mueve de regreso?*”.

Para “Actividad en el aula: el mapa del tesoro”

El objetivo de esta actividad es desarrollar la capacidad de ubicación espacial de los estudiantes en relación a un sistema de coordenadas. Sabemos que el cerebro operara tanto a nivel lógico como a nivel visual. Esta actividad involucra ambas capacidades; por un lado, requiere el uso de la relación entre visión y ubicación espacial, con una representación interna del mundo físico que debe transferirse a una representación en el plano cartesiano.

Sugerencias metodológicas

- Dedique media hora a esta actividad.
- Asegúrese que los estudiantes tengan el plano cartesiano desplegado en la pizarra.
- Puede realizar las primeras dos instrucciones de manera conjunta con el grupo.
- Realice preguntas al grupo respecto a la ubicación de varios objetos o personas de la clase. Por ejemplo: ¿cuáles son las coordenadas para la posición donde “yo” me encuentro?
- Asegúrese de que sus estudiantes tengan o dibujen su propio plano cartesiano para contestar la tercera y cuarta pregunta.

Para “Vectores y Espacio $\mathbb{R}^2$”

Los ejemplos 1, 2 y 3 llevan al estudiante progresivamente, a partir de su conocimiento intuitivo de movimiento, a describir de manera geométrica el movimiento en términos de segmentos de recta, de un punto de inicio y de un punto final. La noción de *equivalencia* de vectores está basada en este proceso. Uno de entre todos los vectores equivalentes se denomina el vector estándar.

Sugerencias metodológicas

- Dedique media hora de una clase a desarrollar el tema de vectores equivalentes.
- Plantee más ejercicios similares al ejemplo 2 y al ejemplo 3, de manera que los estudiantes tengan suficiente práctica con vectores de distintas longitudes y direcciones.
- Despliegue en su aula de manera permanente un ejemplo de un vector, su correspondiente vector estándar y la notación que le asigna una pareja ordenada como lo indica el ejemplo 4.

Para “Operaciones entre vectores”

En esta sección se desarrollan de manera paralela la suma algebraica y la suma geométrica. De la misma manera, la multiplicación por un número real de manera algebraica y de manera geométrica.

Las propiedades de *conmutatividad*, *asociatividad*, *neutro* y *opuesto*, y tres propiedades de la multiplicación por escalar, *asociatividad de escalares*, *multiplicación por* 1, y *distributividad*.

Un *espacio* con suma y multiplicación por escalar que cumple estas propiedades se llama *espacio vectorial*. $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ son espacios vectoriales.

Sugerencias metodológicas

- Dedique al menos una clase para desarrollar el tema de operaciones entre vectores.
- Dé oportunidad a sus estudiantes para que dibujen con precisión la suma de vectores y comprueben que el vector geométrico que produce la suma es igual al vector algebraico que corresponde a la suma algebraica de los vectores.
- Permita a sus estudiantes que dibujen $v = (a, b)$ y $-v = (-a, -b)$ y que comprueben que $-v$ corresponde geométricamente al vector algebraico $(-a, -b)$.
- Haga que sus estudiantes practiquen sumar tres o más vectores.
- Presente un dibujo de dos vectores en posición no estándar y pida a sus estudiantes que sumen estos vectores.
- Proponga un dibujo de dos vectores en posición no estándar (sin darles un plano coordenado) y pida a sus estudiantes que sumen estos vectores.
- Haga un dibujo de un vector v en posición no estándar (sin darles un plano coordenado) y pida que dibujen los vectores $2v$, $-2v$, $\frac{1}{2}v$, $\frac{1}{3}v$, $-\frac{1}{2}v$, $-\frac{1}{3}v$, etcétera.
- Presente un dibujo de un vector que represente $5v$ y pida a los estudiantes que dibujen el vector v.
- Proponga un dibujo de dos vectores en posición no estándar (sin darles un plano coordenado) y pida a sus estudiantes que realicen las combinaciones

$$2u + 2v, \quad 2(u + v) \quad \text{y} \quad 2v + 2u.$$

- Enfatice la utilidad de las propiedades de vectores y su equivalencia con las propiedades correspondientes en números reales que nos permiten resolver ecuaciones vectoriales.

Para "Paralelismo y dependencia lineal"

Sugerencias metodológicas

- Pida a sus estudiantes que dibujen dos rectas paralelas, luego dos vectores paralelos. Muy posiblemente no dibujarán dos vectores colineales. Los estudiantes de Educación Básica tienen la noción de *paralelismo* asociada a dos rectas paralelas. Es natural, por lo tanto, que les sorprenda que a dos vectores colineales los llamemos vectores paralelos. Aclare que dos rectas coincidentes también son paralelas.
- Enfatice en la forma geométrica y la relación algebraica de dos vectores paralelos o linealmente dependientes; por ejemplo: $v = 2u$ o también en la ecuación

$$v - 2u = 0$$

o también

$$u = 1/2v.$$

Capítulo 6

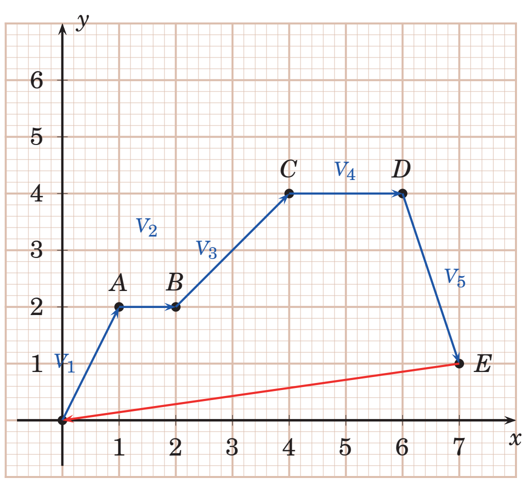
Vectores

En nuestra amazonía está el Parque Nacional Yasuní, que es uno de los lugares con mayor diversidad del planeta. Tiene 500 especies de aves, 173 de mamíferos, 100 000 especies de insectos y ¡6 trillones de individuos por hectárea!

Lee más sobre el Parque Nacional Yasuní en:

http://www.orellana.gov.ec/turismo/campana-yasuni/79-parque-nacional-yasuni.html

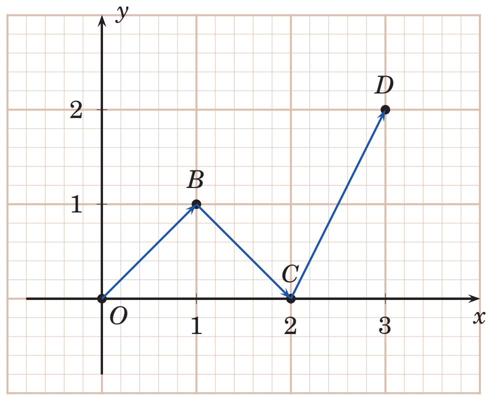
Si caminas por nuestra selva amazónica, verás hormigas transportando hojas. Las hormigas siguen un camino zigzagueante, pero siempre encuentran el lugar dónde deben regresar con su carga. Con la ayuda de vectores de posición, podemos comprender cómo se puede guardar la información de la distancia y de la longitud respecto a un punto de origen. Para ejemplificar, mira el siguiente diagrama:



En azul está representado el movimiento de una hormiga desde el origen hasta el punto E. Si tú fueras un biólogo, ¿qué te interesaría investigar sobre el trayecto o camino que sigue una colonia de hormigas?

Actividad para el aula: el mapa del tesoro

Para esta actividad, trabajarás con un compañero o compañera de tu clase. Utilizarás el piso de tu aula como un plano coordenado. De cara al pizarrón principal, como el origen del plano coordenadas, toma la esquina izquierda del piso, en el fondo del aula. Un metro representará una unidad.



1. Mira la figura dada, encuentra el objeto en la clase que está en el punto D.
2. A partir del dibujo, escribe instrucciones para una persona que no puede ver el mapa, pero que debe seguir el camino señalado desde O hasta D. Para ello, utiliza la distancia y el ángulo que forma cada segmento con la horizontal.

   Por ejemplo, la primera instrucción dirá: "Ubicado en el origen y mirando hacia el eje vertical, en la dirección positiva, gira 45 grados hacia la derecha, camina 1,41 metros aproximadamente (1,41 es el valor aproximado de la raíz cuadrada de 2)". Para medir los ángulos, debes utilizar un graduador.
3. Elige un objeto de tu clase para que sea "el tesoro". Haz un mapa con un camino zigzagueante de cuatro segmentos. Dale el mapa a tu compañero y pídele que encuentre "el tesoro".
4. Haz una lista de instrucciones correspondiente al mapa que realizaste.

Vectores y el espacio $\mathbb{R}^2$

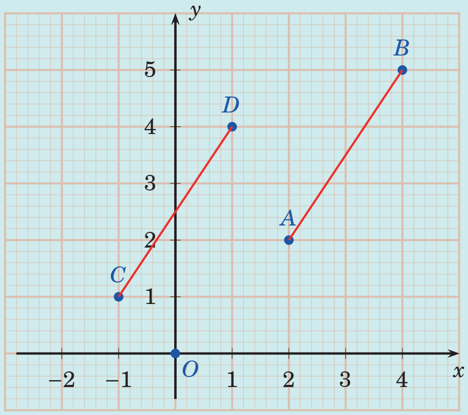
En este texto y en tus estudios de matemática de años anteriores, has empleado la representación de puntos del plano mediante parejas ordenadas. También sabes que si en el plano colocamos un eje de coordenadas cartesianas, a cada punto del plano le corresponde una única pareja ordenada de números reales (a,b). Los números a y b se denominan las coordenadas del punto.

Ejemplo 1

En el plano cartesiano, ubica los puntos:

1. $A=(2,2)$ *y* $B=(4,5)$. *Traza un segmento de recta que una los puntos A y B.*
2. $C=(-1,1)$ *y* $D=(1,4)$. *Traza un segmento de recta que una los puntos C y D.*

Solución.

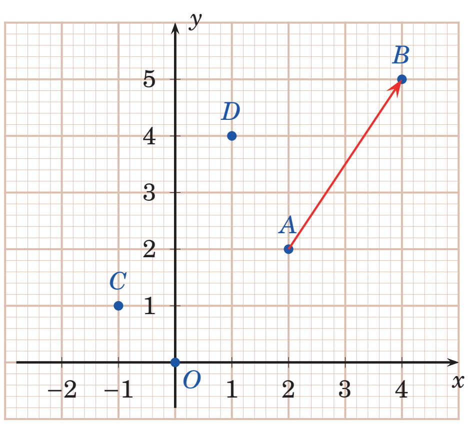


Según la gráfica del ejemplo, imagina que te encuentras en el punto $A = (2, 2)$. Desde allí, te diriges al punto $B = (4, 5)$. De manera similar, si estuvieras en el punto C y a partir de allí, te dirigieras al punto D, ¿qué instrucciones seguirías?

Una forma de explicar el movimiento desde A hasta B es la siguiente:

1. Te mueves dos pasos a la derecha; y
2. te mueves tres pasos hacia arriba.

Para representar este movimiento, se usa una flecha desde A hasta B con su punto en B:

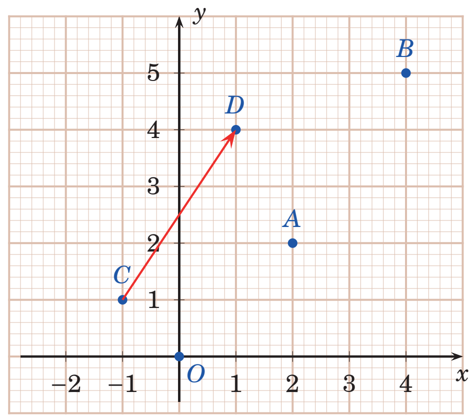


El movimiento desde C hasta D también puede ser explicado de manera similar:

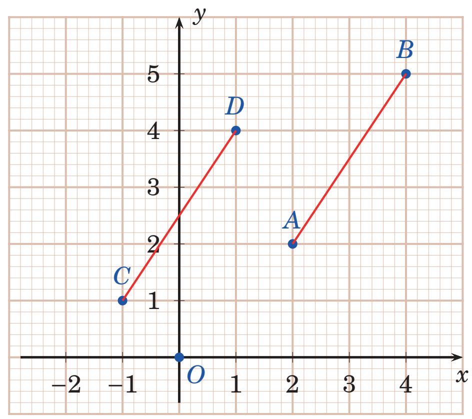
1. Te mueves dos pasos a la derecha; y
2. te mueves tres pasos hacia arriba.

Es decir, las instrucciones para ambos movimientos son las mismas.

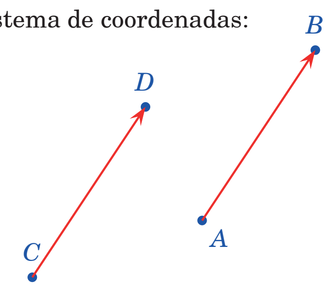
También podemos utilizar una flecha desde C hasta D con su punto en D para representar el segundo movimiento:



Ahora mira los dos vectores juntos:



Por otro lado, en la siguiente gráfica, vemos los mismos vectores, pero sin la referencia del plano con el sistema de coordenadas:



¿Qué relación puedes observar entre los dos vectores? Los vectores no son los mismos, pero el movimiento para ir desde A hasta B es el mismo para ir desde C hasta D. En este caso, se dice que los vectores son *equivalentes*.

Las últimas gráficas corresponden a segmentos *con orientación*, a los que se les llama *vectores*.

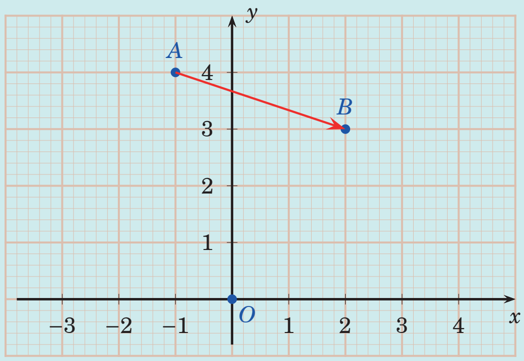
El punto A se denomina *punto inicial* del vector $\overrightarrow{AB}$ y el punto B, *punto final* del vector $\overrightarrow{AB}$.

Ejemplo 2

Dibuja tres vectores que sean equivalentes al vector $\overrightarrow{AB}$ si las coordenadas del punto A son $(-1,4)$ y las del punto B son $(2,3)$.

Solución. Para encontrar vectores equivalentes a $\overrightarrow{AB}$, veamos las instrucciones que podríamos seguir para ir desde A hasta B.

Para ello, en primer lugar, dibuja el vector $\overrightarrow{AB}$:



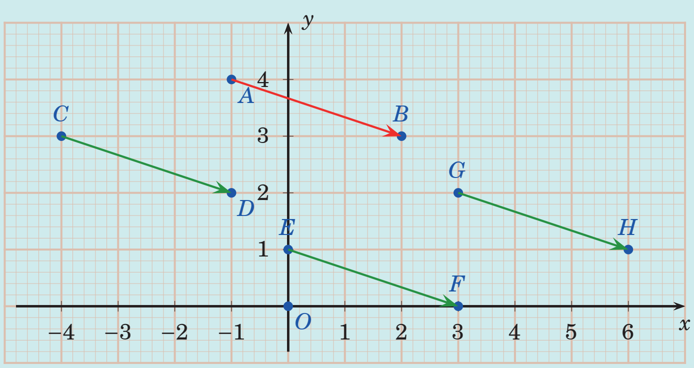
Como puedes ver, para ir desde A hasta B, se dan

1. tres pasos a la derecha; y
2. un paso hacia abajo.

Ahora basta que elijamos tres puntos distintos como puntos iniciales de los vectores buscados y sigamos estas instrucciones. Por ejemplo: elijamos los puntos C de coordenadas $(-4,3)$, E de coordenadas $(0,1)$ y G de coordenadas $(3,2)$. Si en cada caso nos desplazamos un paso hacia abajo y tres a la derecha, obtendremos, respectivamente, los puntos de coordenadas:

$$D=(-1,2), \quad F=(3,0) \quad \text{y} \quad H=(6,1)$$

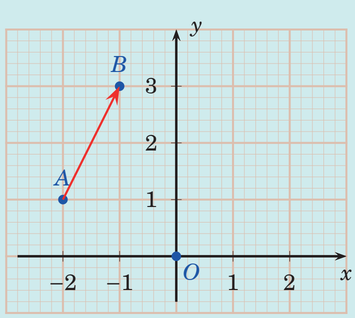
como puntos finales:



Entonces cada uno de los vectores $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{GH}$ es equivalente al vector $\overrightarrow{AB}$.

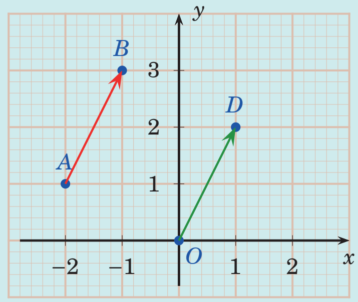
Ejemplo 3

El vector con punto inicial $O=(0,0)$ y punto final $D=(a,b)$ es equivalente al vector $\overrightarrow{AB}$:



Encuentra el punto D.

Solución. Para ir desde el punto A hasta el punto B, se debe recorrer una unidad en dirección horizonal a la derecha y dos unidades en dirección vertical hacia arriba. Por lo tanto, desde el punto $O = (0,0)$, para ir hasta D, se debe recorrer horizontalmente una unidad a la derecha y verticalmente dos hacia arriba. Entonces, el punto $D = (1,2)$.



Cuando un vector tiene el punto inicial $O = (0,0)$ se dice que el vector está en su *forma estándar*.

Ejemplo 4

Encuentra la forma estándar del vector $\overrightarrow{AB}$ *si* $A = (3,4)$ *y* $B = (5,1)$.

Solución. Para ir desde A hasta B, se necesitan recorrer dos unidades horizontalmente a la derecha y tres unidades verticalmente hacia abajo. Entonces, la forma estándar del vector $\overrightarrow{AB}$ es el vector $\overrightarrow{OC}$ con $C = (2,-3)$.

De aquí en adelante, dado un vector $\overrightarrow{OA}$, con O el punto origen de coordenadas, identificaremos el vector $\overrightarrow{OA}$ con el punto A.

Ejemplo 5

Si C *es el punto de coordenadas* $(-1,3)$, *encuentra tres vectores equivalentes a* $\overrightarrow{OC}$.

Solución.

- Fijamos un punto cualquiera como punto inicial del vector buscado; por ejemplo: el punto $A = (1,4)$. Para obtener el punto final de un vector equivalente a $\overrightarrow{OC}$, vemos que para ir desde O hasta C, nos movemos una unidad horizontalmente hacia la izquierda y tres unidades verticalmente hacia arriba.

  Entonces, si hacemos ese movimiento desde el punto A, obtenemos el punto

  $$B = (1-1, 4+3) = (0,7).$$

  Por lo tanto, el vector $\overrightarrow{AB}$ es equivalente al vector $\overrightarrow{OC}$.

- Si ahora fijamos como el punto de inicio a $A = (-1,2)$, el punto B será

  $$B = (-1-1, 2+3) = (-2,5).$$

  Luego el vector equivalente es $\overrightarrow{OC}$ que es el vector $\overrightarrow{AB}$.

- Finalmente, si $A=(-1,-4)$, entonces

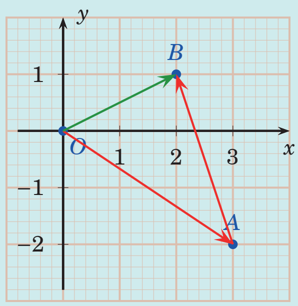
$$B=(-2,-1).$$

Entonces el vector $\overrightarrow{AB}$ es equivalente al vector $\overrightarrow{OC}$.

Ejemplo 6

Una hormiga parte del punto de origen O y se dirige al punto A con coordenadas $(3,-2)$ en línea recta. Luego hacia el punto B con coordenadas $(2,1)$, también en línea recta. Dibuja el vector que indique el resultado final de estos dos movimientos.

Solución. Vemos en la gráfica los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{AB}$.



El vector resultante de los dos movimientos es el vector $\overrightarrow{OB}$. Por ello, tiene sentido escribir

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}.$$

¡A practicar!

Si $A=(-1,2)$, $B=(1,0)$, $C=(5,7)$ y $D(0,-1)$:

1. Dibuja tres vectores equivalentes al vector $\overrightarrow{AB}$, tres vectores equivalentes al vector $\overrightarrow{CB}$ y tres vectores equivalentes al vector $\overrightarrow{DA}$.
2. Encuentra la forma estándar de cada uno de los vectores $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{BC}$.
3. Obtén un vector equivalente al vector $\overrightarrow{BC}$ con punto inicial A.
4. Dibuja un vector equivalente al vector $\overrightarrow{BC}$ con punto final D.

Definición de suma de vectores y suma de pares ordenados

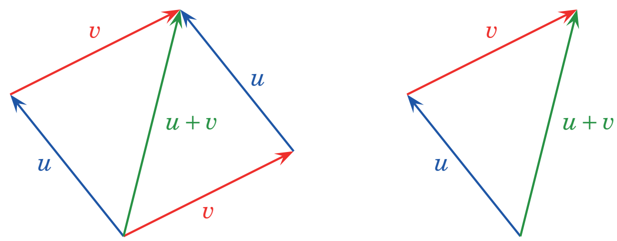
En el ejemplo anterior, viste que tiene sentido definir la suma de vectores. En esta sección vamos a definir la *suma de vectores* y, con ayuda de los vectores en forma estándar, también vamos a definir *la suma de pares ordenados*. Veremos, además, la operación de multiplicación por un número real y varias propiedades que estas dos operaciones satisfacen.

En lo que sigue, es importante que recuerdes que a cada vector le corresponde un vector en la forma estándar y a cada vector en esta forma le corresponde un punto (el final). Por esta razón, cuando hablemos de vectores, los representaremos como puntos (el final del punto en forma estándar equivalente al vector) y los denotaremos con letras minúsculas y en cursiva u, v, w, a menos que se diga lo contrario.

Ahora estamos listos para definir la *suma de vectores algebraicamente*.

Sean $v = (a, b)$ y $w = (c, d)$, entonces $u + v = (a + c, b + d)$.

Para *sumar geométricamente* el vector u y el vector v, dibujamos el vector v en el punto final del vector u como se muestra en la figura. También podemos usar un paralelogramo:



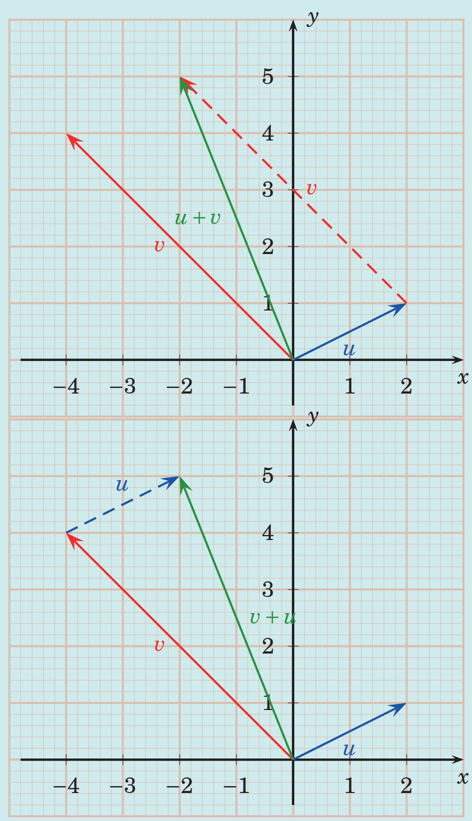
Ejemplo 7

Sean $u = (2,1)$, $v = (-4,4)$; calcula $u+v$ y $v+u$ algebraica y geométricamente. Comprueba que ambos formas son equivalentes.

Solución. Algebraicamente tenemos que:

$$u + v = (2,1) + (-4,4) = (-2,5) \quad \text{y} \quad v + u = (-4,4) + (2,1) = (-2,5).$$

Geométricamente:



Vemos en la gráfica que $u+v$ y $v+u$ son iguales y, efectivamente, corresponden a $(-2,5)$.

De los dos ejemplos anteriores, podemos comprobar que:

Propiedad conmutativa de la Suma

$$u + v = v + u.$$

La suma de vectores también tiene las siguientes propiedades:

Propiedad Asociativa

$$u + (v + z) = (u + v) + z.$$

Propiedad Elemento Neutro

Existe un elemento neutro $O = (0,0)$ de manera que

$$u + (0,0) = u.$$

Propiedad Elemento Inverso

Para cada vector $v = (a,b)$ existe un vector $-v = (-a,-b)$ de manera que

$$v + (-v) = O.$$

Ejemplo 8

Sean $u = (1,-1)$, $v = (2,-3)$. Encuentra el vector desconocido w, tanto algebraicamente como geométricamente, de manera que $u + w = v$.

Solución. Utilizando las propiedades de elemento neutro e inverso, de

$$u + w = v$$

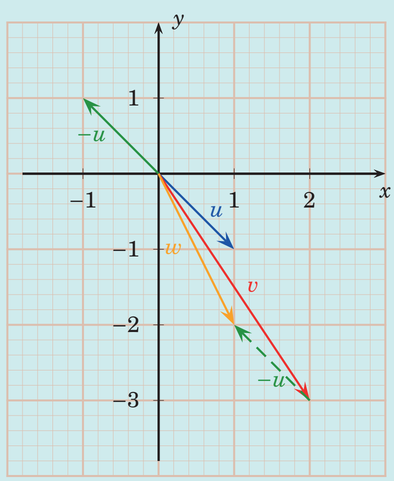
obtienes que

$$(u + w) + (-u) = v + (-u).$$

Y de esta igualdad, de la propiedad asociativa y del elemento neutro:

$$\begin{aligned} (w + u) + (-u) &= v + (-u) \\ w + [u + (-u)] &= v + (-u) \\ w + O &= v + (-u) \\ w &= v + (-u). \end{aligned}$$

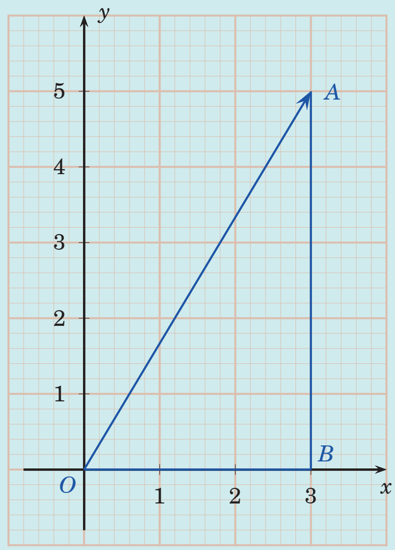
Por lo tanto: $w = (2,-3) + (-1,1) = (1,-2)$. Y, gráficamente:



Ejemplo 9

Encuentra la longitud del vector $(3,5)$.

Solución. Vemos en la gráfica el vector $(3,5)$:



El triángulo $\triangle OAB$ es rectángulo, su hipotenusa es la longitud del vector. Entonces, por el teorema de Pitágoras, obtenemos:

$$\text{longitud del vector } = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}.$$

La *longitud de un vector* $v=(a,b)$ es

$$\|v\| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Ejemplo 10

Encuentra la longitud del vector $v = \left(-3, \frac{1}{2}\right)$.

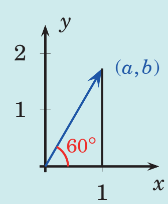
Solución.

$$\|v\| = \sqrt{(-3)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{9+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{37}{4}} = \frac{\sqrt{37}}{2}.$$

Ejemplo 11

La longitud de un vector es igual a 2 *unidades. El vector forma un ángulo de* 60 *grados con el eje horizontal. Dibuja el vector y encuentra sus coordenadas* $v=(a,b)$.

Solución.



Como observamos en el gráfico, podemos formar un triángulo rectángulo con ángulo de 60 grados entre la hipotenusa y la base del triángulo. Puesto que queremos encontrar las coordenadas del vector, debemos hallar el cateto opuesto b al ángulo de 60 grados y el cateto adyacente al mismo ángulo.

Recordemos que:

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{b}{\|v\|} \quad \text{y} \quad \cos 60^\circ = \frac{a}{\|v\|},$$

lo que permite deducir que

$$b = \|v\| \operatorname{sen} 60^\circ = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \quad \text{y} \quad a = \|v\| \cos 60^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

Por lo tanto:

$$v = \left(1,\ \sqrt{3}\right).$$

El ángulo que un vector forma con el eje horizontal positivo se llama *ángulo director*. Un vector con ángulo director igual a θ tiene por coordenadas

$$(\|v\| \cos\theta,\ \|v\| \operatorname{sen}\theta).$$

Ejemplo 12

Encuentra el vector cuyo ángulo director es 120 *grados y cuya longitud es igual a* 1.

Solución. Utilizando la fórmula del ángulo director, tenemos que

$$v = (1 \times \cos 120^\circ,\ 1 \times \operatorname{sen} 120^\circ) = \left(-\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right).$$

Multiplicación por un escalar

Sean $v = (a,b)$ y c es un número real, al que se lo llama "escalar", para diferenciarlo de las cantidades vectoriales. La multiplicación del vector v por el escalar c se define así:

$$cv = (ca, cb).$$

Ejemplo 13

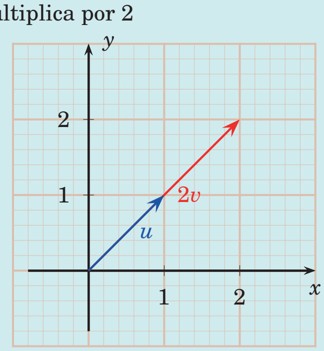
Multiplica el vector $v = (1,1)$ *por los siguientes escalares:* $c = 2, \frac{1}{2}, -1$.

Solución.

- **c = 2:**

$$2v = 2(1,1) = (2,2)$$

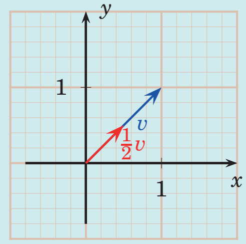
Geométricamente vemos que el vector $2v$ corresponde al vector v alargándolo 2 veces, es decir, su longitud se multiplica por 2



- **c = $\frac{1}{2}$:**

$$\frac{1}{2}v = \frac{1}{2}(1,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

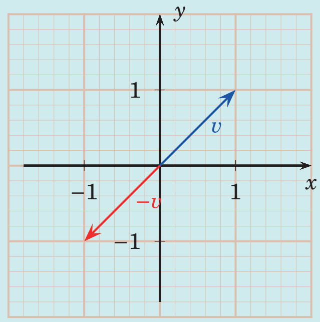
Geométricamente vemos que el vector $\frac{1}{2}v$ corresponde al vector v encogiéndolo en proporción $\frac{1}{2}$, es decir, su longitud es $\frac{1}{2}$ la longitud original.



- **c = −1:**

$$-1v = -1(1,1) = (-1,-1).$$

Geométricamente vemos que el vector $-v$ corresponde al vector v pero en orientación opuesta. Las longitudes de v y $-v$ son la misma.



El producto por escalar tiene las siguientes propiedades:

Propiedad asociativa de escalares

Si c y d son escalares, entonces

$$(cd)v = c(dv).$$

Propiedad de la unidad

$$1v = v.$$

Propiedades distributivas

$$c(u+v) = cu + cv$$

$$(c+d)v = cv + dv$$

Definición del espacio $\mathbb{R}^2$

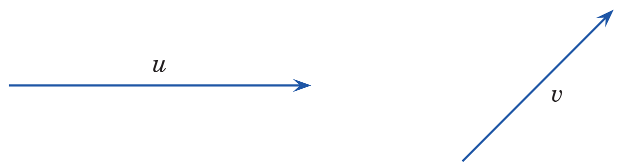
El conjunto de todos los pares ordenados $v = (a,b)$, con a y b números reales cualesquiera, conjuntamente con la suma y el producto por un escalar, se llama *espacio vectorial* $\mathbb{R}^2$.

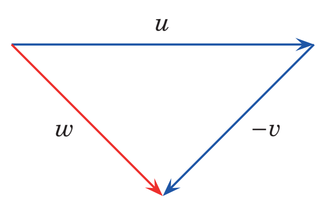
Resta de vectores

Para restar dos vectores, podemos observar que

$$w = u - v = u + (-v);$$

por lo tanto, restar un vector de otro es lo mismo que sumar al primero el vector opuesto del segundo. Gráficamente:





$$w = u - v = u + (-v)$$

Ejemplo 14

Encuentra la forma estándar del vector con punto inicial $A = (5, -2)$ y punto final $B = (-2, 4)$.

Solución. Puesto que

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB},$$

tenemos que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

Como hemos identificado el vector $\overrightarrow{OA}$ con el punto A y el $\overrightarrow{OB}$ con el punto B, entonces:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (5, -2) - (-2, 4) = (7, -6)$$

es el vector estándar buscado.

Paralelismo y vectores dependientes

Ejemplo 15

Si $u = (-3, 4)$ y $v = (2, 7)$, encuentra el vector x de manera que satisfaga con la siguiente ecuación:

$$3u - 2x = v.$$

Solución. Puesto que las operaciones de suma y multiplicación por un escalar cumplen con las propiedades de asociatividad, existencia del neutro, existencia del opuesto, podemos despejar el vector x en el lado izquierdo de la ecuación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} -3u + (3u - 2x) &= -3u + v \\ (-3u + 3u) - 2x &= -3u + v \\ 0 - 2x &= -3u + v \end{aligned}$$

$$-2x = -3u + v$$
$$\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x) = -\left(\frac{1}{2}\right)(-3u+v)$$
$$\left(-\frac{1}{2}\times(-2)\right)x = \frac{3}{2}u - \frac{1}{2}v$$
$$1x = \frac{3}{2}u - \frac{1}{2}v$$
$$x = \frac{3}{2}(-3,4) - \frac{1}{2}(2,7) = \left(-\frac{9}{2}, 6\right) - \left(1, \frac{7}{2}\right).$$

Por lo tanto:
$$x = \left(-\frac{11}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

Dos vectores u y v son *dependientes* si
$$v = cu$$
para algún escalar c. También se dice que los vectores son *paralelos*.

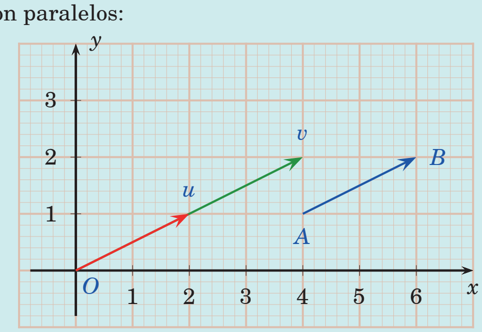
Ejemplo 16

Determinar si los siguientes vectores son dependientes:

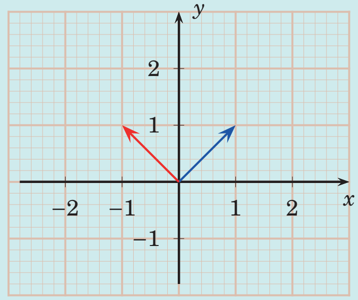
1. $(3,6)$ *y* $(1,2)$.
2. $(-1/2,-1)$ *y* $(2,4)$.
3. *Un vector con punto inicial* $(4,1)$ *y punto final* $(6,2)$ *con el vector* $v = (4,2)$.
4. $(1,1)$ *y* $(-1,1)$.

Solución.

1. Como $(3,6) = 3(1,2)$, entonces los vectores son dependientes y paralelos.
2. Ya que
$$\left(-\frac{1}{2}, -1\right) = -\frac{1}{4}(2,4),$$
los dos vectores son dependientes y paralelos.
3. La forma estándar del vector con punto inicial $A = (4,1)$ y punto final $(6,2)$ es
$$u = (6,2) - (4,1) = (2,1).$$
Entonces, como $v = (4,2)$, se tiene que
$$v = 2u,$$
por lo que los dos vectores son dependientes y paralelos. En la gráfica podemos ver que los vectores son paralelos:



4. Los vectores $(1,1)$ y $(-1,1)$ no son dependientes, puesto que no podemos escribir uno en término del otro. En la gráfica se ve que los dos vectores no son paralelos.



Combinaciones lineales

Una *combinación lineal* de dos vectores v y w es cualquier vector

$$av + bw,$$

con a y b escalares.

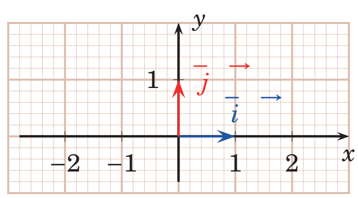
Ejemplo 17

Encuentra tres combinaciones lineales de $v = (1,2)$ *y* $w = (4,1)$.

Solución.

1. $-3v + 2w = -3(1,2) + 2(4,1) = (5,-4)$.
2. $v + w = (5,3)$.
3. $-v + w = -(1,2) + (4,1) = (3,-1)$.

Todo vector se puede escribir como una combinación lineal de dos vectores sencillos:



$$\vec{i} = (1,0) \quad \text{y} \quad \vec{j} = (0,1).$$

Estos vectores se llaman *vectores unitarios*, entre otras cosas, porque

$$\left\| \vec{i} \right\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 \quad \text{y} \quad \left\| \vec{j} \right\| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1.$$

Por ejemplo:

$$(3,4) = (3,0) + (0,4) = 3(1,0) + 4(0,1) = 3\vec{i} + 4\vec{j}.$$

Ejemplo 18

Si $v = 2\vec{i} - 6\vec{j}$ *y* $w = -\vec{i} + 4\vec{j}$, *realiza las operaciones dadas:*

1. $-v + 2w$.
2. $i - w$.

3. $3j+v-5w$.

Solución.

1. $-\vec{v}+2\vec{w}=-(2\vec{i}-6\vec{j})+2(-\vec{i}+4\vec{j})=-4\vec{i}+14\vec{j}$.
2. $\vec{i}-\vec{w}=\vec{i}-(-\vec{i}+4\vec{j})=2\vec{i}+4\vec{j}$.
3. $3\vec{j}+\vec{v}-5\vec{w}=3\vec{j}+(2\vec{i}-6\vec{j})-5(-\vec{i}+4\vec{j})=7\vec{i}-23\vec{j}$

Modelos

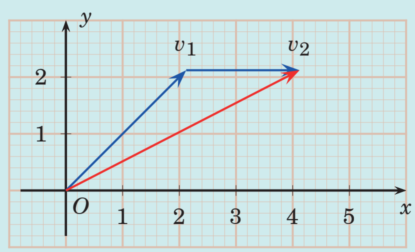
Los vectores son una herramienta muy útil para representar el movimiento de un objeto. En los siguientes ejemplos:

1. Realizaremos dibujos para representar los movimientos descritos.
2. Determinaremos vectores que representen el movimiento.
3. Usaremos operaciones entre vectores.
4. Encontraremos longitudes y ángulos directores.
5. Calcularemos coordenadas de vectores.

Ejemplo 19

Encuentra la posición final de un automóvil que, partiendo de un punto de origen, se dirige 30 *kilómetros por una carretera que forma* 45 *grados con la horizontal. Luego se desplaza* 20 *kilómetros por una carretera dirigiéndose hacia el Este.*

Solución. En primer lugar, dibuja un sistema de coordenadas; en el origen, ubicarás el punto de partida del automóvil:



La posición final del automóvil es el resultado de la suma de dos vectores que describen su movimiento:

$$v_1=(30\cos 45°,\ 30\operatorname{sen} 45°) \quad \text{y} \quad v_2=(20\cos 0°,\ 20\operatorname{sen} 0°).$$

Entonces

$$v_1=\left(30\frac{\sqrt{2}}{2},\ 30\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{y} \quad v_2=(20,0).$$

Luego:

$$v_1+v_2=\left(30\frac{\sqrt{2}}{2}+20,\ 30\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\approx(40{,}21;20{,}21).$$

Ejemplo 20

Mira el siguiente mapa del centro de Quito:

Un turista quiere caminar desde la parada del Trolebús hasta la Plaza Grande. Cada cuadra del mapa tiene cien metros de longitud aproximadamente. Encuentra la ruta más corta y su longitud. Guía al turista hasta su destino.

Solución. Tomando en cuenta que una línea recta es la distancia más corta entre dos puntos, proponemos esta ruta:

Para calcular la distancia, ponemos un plano coordenado con el origen en la intersección de las calles Mejía y Venezuela. Cada cuadra representa una unidad.

Con este eje de referencia, la parada del Trolebús en el Banco Central está en las coordenadas $(3,5)$; por tanto, el vector de desplazamiento desde la parada hasta la esquina de la Olmedo y Guayaquil es $v = (-2,-4)$.

La ruta sigue con el vector $w = (0,-2)$ y, finalmente, el último desplazamiento corresponde a $u = (-1,0)$. En total, la longitud de la ruta está dada por la suma de las longitudes de estos tres vectores:

$$\|v\| + \|w\| + \|u\| = \|(-2,-4)\| + \|(0,-2)\| + \|(-1,0)\| = \sqrt{20} + \sqrt{4} + 1 \approx 7{,}47.$$

Puesto que cada unidad representa 100 metros, el total es de 747 metros aproximadamente.

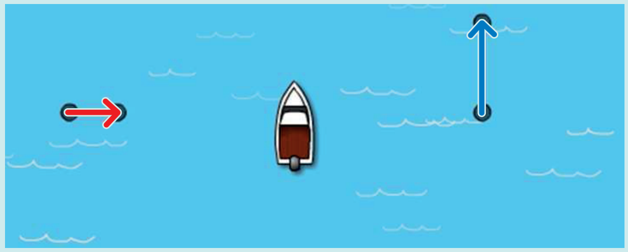
Si se pudiera ir en línea recta, la longitud sería:

$$\|v + w + u\| = \|(-2,-4) + (0,-2) + (-1,0)\| = \|(-3,-6)\| = \sqrt{9+36} = 6{,}71.$$

En línea recta, la distancia es de 671 metros.

Ejemplo 21

Un bote atraviesa un río con una rapidez constante de 10 kilómetros por hora. La rapidez de la corriente del agua es de 5 kilómetros por hora. Determina la velocidad resultante del bote.



Solución. La velocidad resultante del bote es la combinación lineal de los vectores

$$10\vec{j} \quad \text{y} \quad 5\vec{i}.$$

La velocidad del bote es $v = 5\vec{i} + 10\vec{j}$. Por lo tanto, su rapidez resultante:

$$\|v\| = \sqrt{25 + 100} = \sqrt{125} \approx 11{,}1$$

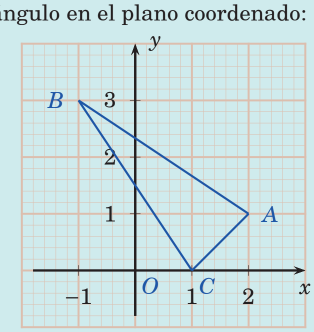
kilómetros por hora.

Los vectores también pueden utilizarse para resolver problemas de Geometría de manera sencilla.

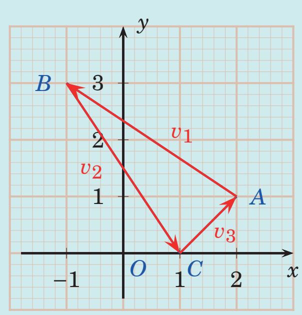
Ejemplo 22

Determina el perímetro del triángulo con vértices $(2,1)$, $(-1,3)$ *y* $(1,0)$.

Solución. Dibujamos el triángulo en el plano coordenado:



El perímetro es la suma de las longitudes de los lados del triángulo. Primero debemos encontrar la longitud de cada segmento o lado del triángulo. El triángulo también puede ser observado de manera vectorial. Para obtener la longitud de los lados, vamos a calcular la longitud de cada uno de los vectores. Para ello, primero determinamos cada uno de los vectores



$$v_1 = (-1,3)-(2,1) = (-3,2), \quad v_2 = (1,0)-(-1,3) = (2,-3) \quad \text{y} \quad v_3 = (2,1)-(1,0) = (1,1).$$

Entonces

$$\|v_1\| = \sqrt{(-3)^2+2^2} = \sqrt{13}, \quad \|v_2\| = \sqrt{(2)^2+(-3)^2} = \sqrt{13} \quad \text{y} \quad \|v_3\| = \sqrt{(1)^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

Por lo tanto:

$$\text{Perímetro del triángulo } = 2\sqrt{13}+\sqrt{2}.$$

Podemos observar también que este triángulo es isósceles.

Ejercicios del capítulo

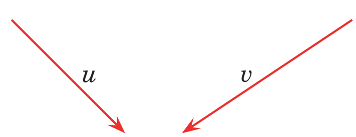
1. En cada caso, encuentra dos vectores equivalentes al vector $\overrightarrow{AB}$ dado.
   (a) $A = (2,2)$ y $B = (0,4)$.
   (b) $A = (-2,2)$ y $B = (4,0)$.
   (c) $A = (-1,0)$ y $B = (0,1)$.

2. En cada caso, calcula el vector con punto inicial C y equivalente al vector $\overrightarrow{AB}$ dado.
   (a) $A = (2,2)$, $B = (0,4)$ y $C = (0,0)$.
   (b) $A = (-2,2)$, $B = (4,0)$ y $C = (1,1)$.
   (c) $A = (-1,0)$, $B = (0,1)$ y $C = (-2,3)$.

3. En cada caso, determina el vector con punto final D y equivalente al vector $\overrightarrow{AB}$ dado.
   (a) $A = (2,2)$, $B = (0,4)$ y $D = (0,0)$.
   (b) $A = (-2,2)$, $B = (4,0)$ y $D = (1,1)$.
   (c) $A = (-1,0)$, $B = (0,1)$ y $D = (-2,3)$.

4. En cada caso, encuentra el vector en forma estándar al vector $\overrightarrow{AB}$ dado.
   (a) $A = (2,2)$ y $B = (0,4)$.
   (b) $A = (-2,2)$ y $B = (4,0)$.
   (c) $A = (-1,0)$ y $B = (0,1)$.

5. Realiza las operaciones pedidas gráficamente si los vectores u y v son los dados en el siguiente dibujo:



   (a) $u+v$.
   (b) $v-u$.
   (c) $u-v$.
   (d) $2u+v$.
   (e) $2u+3v$.
   (f) $2u-3v$.
   (g) $\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v$.

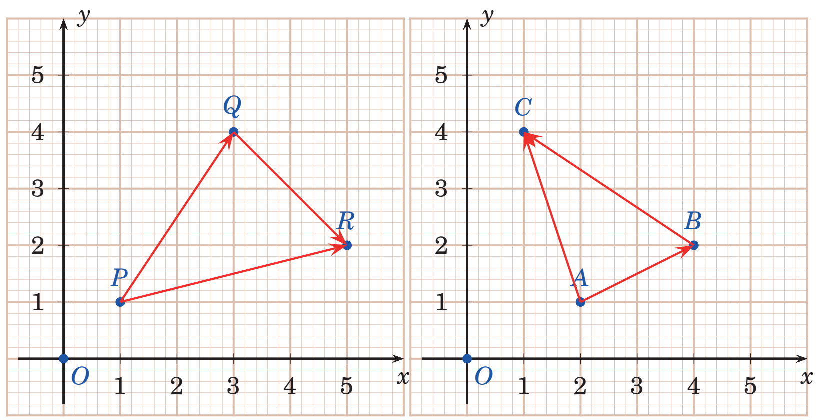
6. En cada caso, realiza las operaciones indicadas algebraicamente si $u = (-2,5)$, $v = (1,6)$ y $w = (-3,-5)$.

(a) $u + v$.
(b) $2u - v$.
(c) $v - u$.
(d) $u - 2v$.
(e) $w + 2u - v$.
(f) $3u - 2v + 5w$.

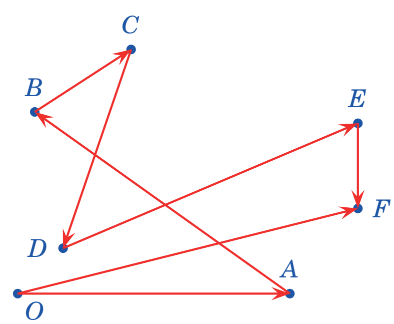
7. En cada caso, halla el vector desconocido en la ecuación si $u = (-10,5)$ y $v = (2,-8)$.

(a) $x + u = v$.
(b) $x + u = 0$.
(c) $2x + v = u$.
(d) $3x - 2u + 6v = 0$.

8. En cada caso, determina la forma estándar de cada uno de los vectores y encuentra una ecuación que describa la figura.



9. Escribe una ecuación que relacione los vectores de la siguiente figura:



10. Determina la longitud de cada vector:

(a) $(2,3)$.
(b) $(-2,5)$.
(c) $(-5,-5)$.
(d) $(-2,-2)$.
(e) Con punto inicial $(3,6)$ y punto final $(-2,7)$.
(f) Con punto inicial $(6,9)$ y punto final $(-4,7)$.

11. Decide si los vectores son dependientes o paralelos.

(a) $(-3,5)$ y $(-6,-10)$.

(b) $(-3,5)$ y $(6,10)$.

(c) $(1,1)$ y $(-2,2)$.

(d) $(1/3,1/6)$ y $(1,2)$.

(e) (2, 5; 5) y (7, 5; 15).

12. Halla un vector que cumpla con la restricción pedida.

(a) Un vector paralelo a $(1,1)$ que tenga longitud 1.

(b) Un vector paralelo a $(3,1)$ que tenga longitud 1.

(c) Un vector de longitud 2.

(d) Un vector de longitud 10.

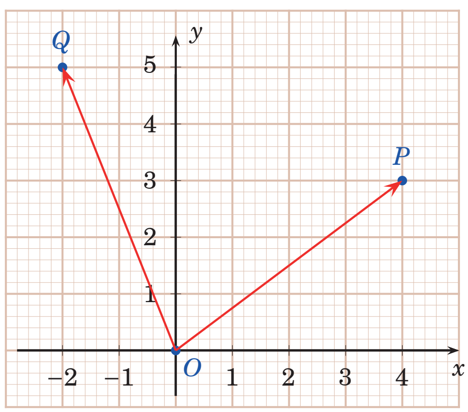
(e) Un vector de longitud 3.

(f) Un vector $(3,a)$ de manera que sea paralelo a $(b,8)$ y distintos.

(g) Un vector $(a,5)$ de manera que sea paralelo a $(1,b)$ y distintos.

13. Mari camina 500 metros en línea recta desde su casa en dirección Norte, luego 200 metros hacia el Este y, finalmente, 50 metros hacia el Sur. Realiza un gráfico del movimiento de Mari y represéntalo mediante una suma de vectores.

14. Juanita camina hacia el punto P mientras que su amiga Margarita lo hace hacia el punto Q. Una vez que Juanita ha llegado al punto P, se dirige a donde está su amiga. Determina un vector que dé la dirección que siguió.



15. Halla el cuarto vértice del paralelogramo con vertices $(0,0)$, $(4,3)$ y $(-2,5)$.

16. Encuentra el perímetro del paralelogramo con vértices en $(0,0)$, $(3,0)$, $(1,1)$ y $(4,1)$.

17. Encuentra el perímetro del rombo con vértices en $(0,0)$, $(-2,0)$, $(-1,2)$ y $(-1,-2)$.

18. Determina el perímetro de un triángulo con vértices $(2,2)$, $(0,0)$ y $(-3,-5)$.

19. Calcula el perímetro de un triángulo con vértices $(-2,2)$, $(1,0)$ y $(3,4)$.

20. Herón fue un geómetra griego; en su obra *Metrica*, demostró una fórmula muy útil para calcular el área de un triángulo sabiendo las longitudes de sus lados. La fórmula es:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

con s el semiperímetro del triángulo:

$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Esta fórmula para el cálculo del área de un triángulo es conocida como la *fórmula de Herón*.

Encuentra el área del triángulo descrito en el ejercicio 18.

21. Calcula el área del triángulo descrito en el ejercicio 19.

22. Describe vectorialmente un triángulo isósceles con vértices en los puntos $(0,0)$, $(6,0)$ y $(3,4)$.

23. Si $v = 3\vec{i} - 5\vec{j}$ y $w = -2\vec{i} + \vec{j}$, realiza las siguientes operaciones:

    (a) $-v + w$.

    (b) $\vec{i} - 2w$.

    (c) $4\vec{j} + \vec{i} - 5w$.

    (d) $8w + 10\vec{i} - \vec{j}$.

    Además, determina la longitud de los vectores v y w

Ejercicios de modelos

1. Encuentra la posición final de un automóvil, que partiendo desde un punto de origen se dirige 20 kilómetros por una carretera que forma 60 grados con la horizonal, luego se desplaza 40 kilómetros por una carretera dirigiéndose hacia el Oeste. Dibuja la trayectoria utilizando vectores.

2. Halla la posición final de un automóvil que, partiendo desde un punto de origen se dirige 20 kilómetros por una carretera hacia el Norte, luego 25 kilómetros por otra que forma 30 grados con la horizonal, luego se desplaza 10 kilómetros por una carretera dirigiéndose hacia el este. Dibuja la trayectoria utilizando vectores.

3. Una persona atraviesa un río con una rapidez de 2 kilómetros por hora; el río tiene una rapidez de 5 kilómetros por hora. ¿Cuál es la velocidad y la rapidez resultante de la persona?

Ejercicios de Pensamiento Crítico

1. Encuentra un vector unitario (con longitud 1) con ángulo director igual a 30 grados.

2. Halla un vector paralelo al vector $2\vec{i} + 3\vec{j}$ que tenga longitud 1.

3. ¿Es posible encontrar un valor b de manera que el vector $v = \vec{i} + b\vec{j}$ tenga longitud 1? ¿Por qué?

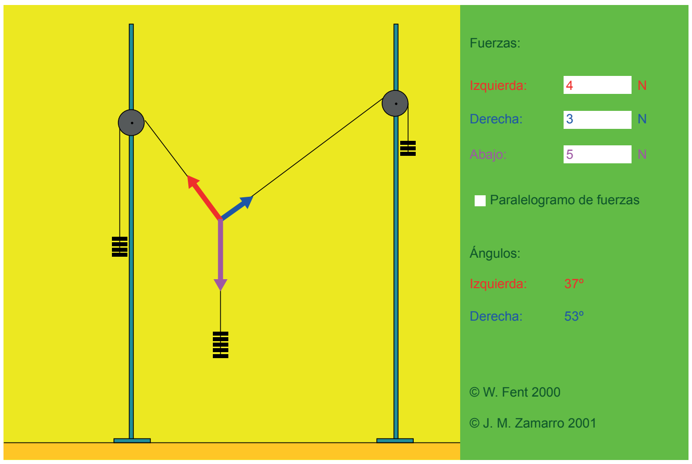
4. Calcula el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $(-1,3)$ y $(1,4)$.

Uso de tecnología

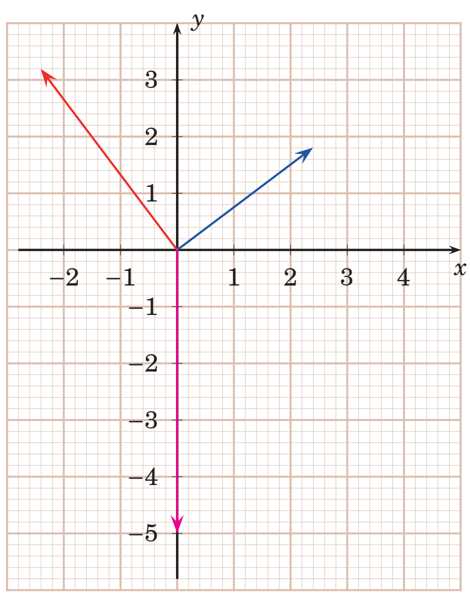
Para este ejercicio, se ha recurrido a un recurso educativo que está disponible en la siguiente dirección de Internet:

http://www.walter-fendt.de/ph14s/equilibrium_s.htm

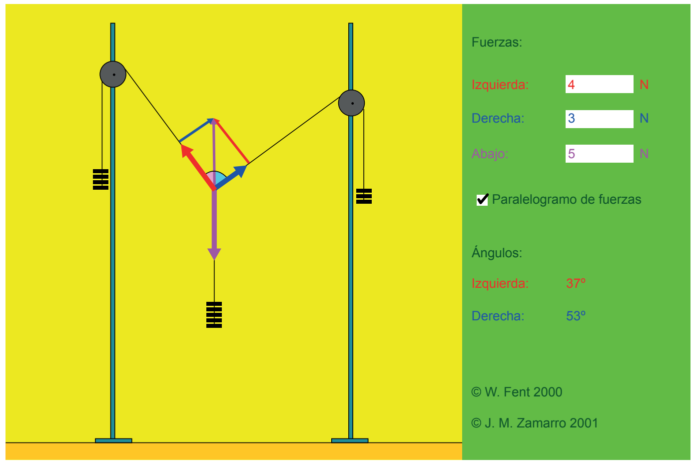
En el sistema de pesas y poleas que ves en el dibujo, ninguno de los componentes se mueve. Esto se debe a que las fuerzas involucradas están en equilibrio:



Para comprobar que las fuerzas están, efectivamente, en equilibrio, calcula los vectores que representan cada una de estas fuerzas y súmalos; deberás obtener 0:



En el siguiente dibujo, podrás observar la ilustración de que la suma de las tres fuerzas es igual a 0:



Dirígete a la página web indicada, cambia los valores de las fuerzas para responder las siguientes preguntas:

1. Comprueba que la suma de las fuerzas es cero cuando utilizas las magnitudes 2, 3 y 4, respectivamente.
2. ¿Puedes encontrar el valor de los ángulos sabiendo el valor de las magnitudes?
3. ¿Por qué es necesario el que la magnitud de cada fuerza sea menor que la suma de las otras dos?