Recomendaciones para el docente sobre “Funciones Cuadráticas I”

Función cuadrática y ecuación cuadrática

La noción de función cuadrática y el estudio de ecuación cuadrática se exponen en los capítulos 3 y 4. En el capítulo 3, la función cuadrática se presenta desde un punto de vista algebraico. La representación gráfica de esta función, la parábola, se construye por medio de la siguiente secuencia de pasos:

1. Primero se grafica la función $x \longmapsto x^2$.
2. A partir de esta parábola “madre", utilizando traslaciones verticales, horizontales y homotecias, se construye la gráfica de la función cuadrática general
$$x \longmapsto a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right).$$
3. Se analiza el cambio de posición del vértice desde el origen, el punto de coordenadas $(0,0)$ —que es el vértice de la parábola de ecuación $y=x^2$— hasta la posición general, el punto de coordenadas
$$\left(-\frac{b}{2a},\ c-\frac{b^2}{4a}\right).$$
4. El vértice de la parábola se identifica como el valor mínimo o el valor máximo de la función.

Este proceso requiere de la completación del cuadrado de un trinomio.

En este capítulo, la necesidad de encontrar los ceros de la función o cortes con el eje horizontal de la gráfica de la función (la parábola correspondiente) conducen a resolver ecuaciones cuadráticas. La ecuación cuadrática se estudia en etapas de complejidad y técnica de solución, comenzando con la ecuación $x^2-c=0$, luego con $(x-b)^2-c=0$, seguida de la ecuación de la forma
$$ax^2+bx+c=0,$$
la que se resuelve mediante la completación del cuadrado.

Finalmente, la fórmula cuadrática se deduce de manera general y, al estudiar la función
$$x \longmapsto (x-a)(x-b),$$

la técnica de resolución de una ecuación cuadrática mediante factores es presentada. Para terminar el capítulo, se analiza la existencia de las soluciones de una ecuación cuadrática.

El capítulo 4 completa el capítulo 3 con las propiedades de la función cuadrática como: paridad, simetría, variación y modelos cuadráticos.

Para “Introducción”

Esta sección tiene como objetivo mostrar un modelo cuadrático de la relación entre la velocidad de un automóvil y la cantidad de gasolina por kilómetro que consume. Los estudiantes pueden interesarse en la preservación del medioambiente, el ahorro de dinero, y en la eficiencia de máquinas. Las preguntas planteadas en la introducción son conductivas a mostrar la utilidad de la Matemática que estudiarán en temas que son relevantes.

Sugerencias metodológicas

- Dedique 10 minutos de una clase a esta actividad.
- Pida a un estudiante que lea la introducción en voz alta.
- Solicite a un estudiante que lea el gráfico. Por ejemplo: pregunte cuántos galones por kilómetro gasta un automóvil si su velocidad es de 25 kilómetros por hora.
- Indique a sus estudiantes que se refieran al gráfico para responder: ¿a qué velocidad debe ir un automóvil para rendir 40 kilómetros por galón?
- Pregunte a la clase cuál debe ser la velocidad óptima; es decir, pregunte a qué velocidad debe ir un automóvil para rendir el máximo número de kilómetros por galón.
- Incentive a sus estudiantes a que aporten ideas y opinen libremente sobre las preguntas planteadas.

Para “Preparación y repaso”

Los estudiantes del primer año del bachillerato deben tener una sólida noción del conjunto de números racionales y del conjunto de números enteros, considerado éste como un subconjunto de los racionales. Además, los estudiantes deben ser capaces de expresar un número racional en forma decimal. Los estudiantes suelen tener experiencia manejando expresiones polinomiales, sus cuatro operaciones y técnicas básicas de descomposición en factores; también conocen la operación inversa a elevar el cuadrado: la radicación. Las destrezas anteriormente adquiridas deben ser aclaradas y reforzadas antes del tratamiento de funciones cuadráticas. Es recomendable que, de manera informal, los estudiantes conozcan que los números que provienen de raíces cuadradas de números primos no son números racionales.

Sugerencias metodológicas

- Dedique una o dos clases para sustentar sólidamente el próximo aprendizaje.
- Empiece por preguntar, aclarar y recordar a sus estudiantes las operaciones y notaciones de la potenciación y de la raíz cuadrada.

- Haga que los estudiantes noten que

$$2, \quad \frac{2}{1} \quad \text{y} \quad \sqrt{4}$$

son distintas representaciones de un mismo número. Aclare con varios ejemplos que la raíz cuadrada de un número es siempre un número positivo; por ejemplo:

$$\sqrt{4} = 2$$

pero no es igual a -2.

- Logre que los estudiantes comprendan que

$$1{,}5, \quad \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad \sqrt{\frac{9}{4}}$$

son expresiones de un mismo número racional.

- Si dispone de recursos tecnológicos en el aula, pida a sus estudiantes que encuentren la expresión decimal de $\sqrt{2}$. Explique que el número de cifras decimales de este número es infinito y que, además, no tiene ningún patrón; este número es un número irracional.

- Pregunte a sus estudiantes si es posible obtener la raíz cuadrada de -1. Hágales notar que, aunque podemos escribir $\sqrt{-1}$, esto no representa ningún número real.

- Como

$$2^2 = (-2)^2 = 4,$$

enfatice que las soluciones de la ecuación cuadrática

$$x^2 - 4 = 0$$

son $x = 2$ y $x = -2$.

- Pida a sus estudiantes que resuelvan individualmente los primeros dos ítems de cada ejercicio durante la clase. Monitoree el estado de conocimiento y rapidez de cálculo. Discuta los ejercicios que causaron dificultad a todo el grupo. Utilice estas observaciones para decidir la extensión de esta actividad; envíe como deber parte de ella y programe una segunda clase si fuera necesario.

Para “Diseño del área para la feria de ciencias”

El objetivo de esta actividad es introducir la noción de optimización de una función, para lo cual se presenta un problema que se puede dar en la vida cotidiana del estudiante: el cercar un área para una feria de ciencias, de manera que esta área sea la más grande posible. En esta actividad, se guía a los estudiantes para que encuentren la función cuadrática del área y proceden a determinar el máximo de la función de un modo experimental, mediante una tabla y un gráfico.

Sugerencias metodológicas

- Dedique una hora de clase a esta actividad.

- Haga grupos de tres o cuatro estudiantes.

- Asegúrese que los estudiantes tengan el texto o copias de las instrucciones y las tablas que se dan en la actividad.
- Si los estudiantes encuentran dificultad en el dibujo y planteamiento del problema, puede detener la actividad y recordarles el concepto de área y perímetro de una figura rectangular. Pídales que dibujen varios rectángulos con las dos divisiones pedidas y que "repartan" la longitud de la cerca, de manera que el total de la misma sea igual a 300. Solicíteles que calculen el área del rectángulo que dibujaron.
- Permita o sugiera a los estudiantes que dibujen varios posibles escenarios hasta que entiendan correctamente las variables involucradas (la longitud de los lados y el área del rectángulo) así como la constancia del perímetro.
- Al final de la actividad, pida a uno o dos grupos que presenten sus resultados. Deje constancia de los resultados en la pizarra para empezar la siguiente clase desde este conocimiento.

Para "Función cuadrática y gráfica de una parábola"

La definición de función cuadrática que se presenta es algebraica; su gráfica se elabora de manera heurística a partir de la gráfica de la parábola de ecuación $y = x^2$. Luego, mediante traslaciones (verticales u horizontales) y homotecias, se construyen parábolas que se corresponden a funciones cuadráticas más complicadas. Para el caso general, se utiliza la completación del cuadrado. En el proceso de obtener la gráfica de la parábola, se enfatiza la localización del vértice y su interpretación como punto máximo o mínimo de la función cuadrática correspondiente.

Sugerencias metodológicas

- Dedique una clase para presentar esta primera sección; ofrezca varios ejemplos con funciones cuadráticas expresadas de manera algebraica con expresiones equivalentes. Por ejemplo:

$$x \longmapsto (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 \quad \text{y} \quad x \longmapsto (x-3)(x+1) = x^2 - 2x - 3.$$

- Realice los ejercicios paso a paso para graficar las parábolas, de manera similar a como han sido presentados en el texto. La secuencia en la graficación es necesaria. Los estudiantes desarrollarán varias destrezas; entre las más importantes: la visualización de una traslación y una homotecia, y la manipulación algebraica.
- Si se dispone de tecnología, úsela para presentar la mayor cantidad de ejemplos de traslaciones y homotecias de la función "madre": $x \longmapsto x^2$.
- Tenga cuidado en presentar los ejemplos gráficos acompañándolos con su forma

$$x \longmapsto a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right),$$

  y no en la forma

$$x \longmapsto ax^2 + bx + c,$$

  pues la primera nos proporciona la información del vértice.

- Utilice una segunda clase para afianzar el conocimiento. Permita que sus estudiantes trabajen individualmente algunos ejercicios de la sección de práctica.
- Use una clase adicional para presentar la forma general de la función cuadrática y la fórmula general para el vértice. Pida a sus estudiantes que resuelvan los ejercicios de la sección de práctica utilizando la fórmula general. Vigile que todos sus estudiantes identifiquen correctamente los parámetros a, b y c. Para ello, muestre varias funciones con expresiones escritas de varias maneras en las que los parámetros tengan valores diferentes; en particular, con 0, y luego pídales que identifiquen los parámetros en voz alta. Por ejemplo:

$$x \longmapsto -x^2+1, \quad x \longmapsto -x^2-x, \quad x \longmapsto \pi x^2+2\pi x, \quad x \longmapsto x^2+2x \quad \text{y} \quad x \longmapsto \frac{-x^2+1}{2}.$$

- Cuando presente los ejemplos, emplee simultáneamente el lenguaje geométrico “vértice” de la parábola y el de extremo de la función.

Para “Ceros de la función cuadrática”, “ecuación cuadrática” y “cortes de la parábola con el eje horizontal”

Esta sección tiene el mismo carácter progresivo de la anterior, comenzando con el caso sencillo de determinar los ceros de la función

$$x \longmapsto ax^2+c$$

y finalizando con los ceros de la función cuadrática general

$$x \longmapsto a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{a}\right).$$

Los estudiantes estudiarán, progresivamente, a través de ejemplos más generales la solución de ecuaciones cuadráticas y su relación con los ceros de una función cuadrática y con los cortes de una parábola y el eje horizontal.

La fórmula cuadrática se presentará como un algoritmo general que se deduce completando el cuadrado. El caso particular

$$x \longmapsto (x-a)(x-b)$$

se presentará a continuación. El método para resolver una ecuación por factores es una alternativa más sencilla, en el caso de que los factores sean identificables fácilmente.

Sugerencias metodológicas

- Dedique una clase para presentar los ejercicios de manera progresiva, como están planteados en el texto.
- En esta clase los estudiantes tendrán la oportunidad de practicar la completación del cuadrado y resolver la ecuación cuadrática despejando el cuadrado.
- Dedique una segunda clase a la presentación y práctica de la fórmula cuadrática. Despliegue en el aula, de manera permanente, la fórmula cuadrática.

- Dedique una tercera clase a la presentación y práctica del caso cuando la función es factorable.
- Enfatice en la relación directa que existe entre el problema de encontrar los ceros de la función, hallar la solución de la ecuación cuadrática y encontrar los cortes con el eje horizontal y la parábola.
- Resalte la relación que existe entre el problema de resolver una desigualdad cuadrática y el encontrar los ceros de la función. Muestre gráficamente en cualquiera de los ejemplos presentados en el libro, para el caso de que la función dada sea mayor que cero, y luego para el caso en el que es menor que cero.
- Al final de este proceso, la clase estará lista para analizar problemas relacionados con la ecuación cuadrática y la función cuadrática. Se presentarán algunos ejemplos de solución de desigualdades cuadráticas.

Para “Existencia de ceros de la función cuadrática”

Como toda ecuación, una cuadrática podría tener solo una solución, no tener soluciones o podría tener un número infinito. El discriminante de la fórmula para las raíces de la ecuación cuadrática contiene esta información. En concreto, los estudiantes utilizarán el discriminante para determinar si una ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales y si estas soluciones son iguales o no. Los estudiantes deberán conectar el valor del discriminante y los cortes de la parábola con el eje horizontal.

Sugerencias metodológicas

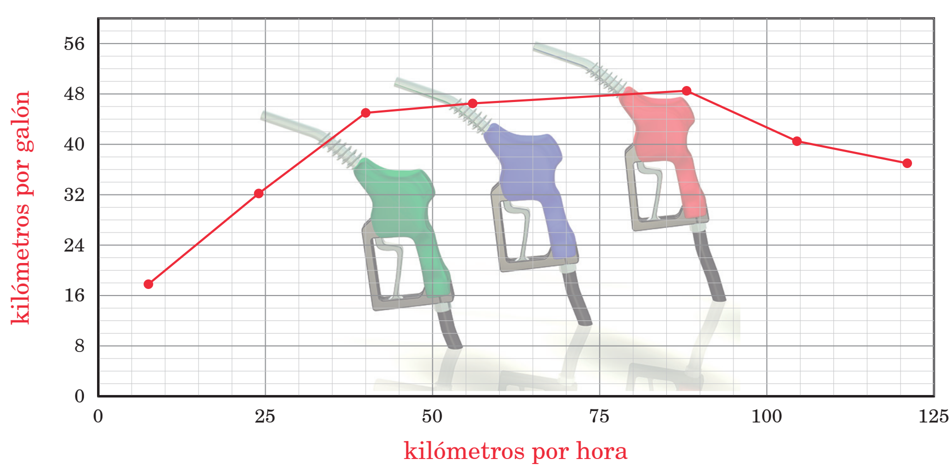
- Dedique una clase para esta sección.
- En primer lugar, presente tres ejemplos sencillos en los cuales los cortes o su ausencia sean fáciles de identificar gráficamente. Aplique la fórmula general para determinar las raíces de la ecuación correspondiente.
- Haga notar que la fórmula general nos dará las raíces solo si se puede calcular la raíz de b^2-4ac. Conduzca a sus estudiantes a concluir que esto sucede solamente si el discriminante es mayor o igual a cero.

Capítulo 3

Funciones cuadráticas I

Eficiencia en el uso de combustible

Posiblemente has escuchado y discutido sobre el *calentamiento global*. Este es un fenómeno observable que nos indica que la temperatura promedio de la tierra está aumentando. Muchos científicos, políticos y personas interesadas en la preservación del medioambiente discuten acerca del impacto del uso de los vehículos a gasolina en el calentamiento global. La conservación del medioambiente es una de las razones por las cuales la eficiencia en el uso de combustibles es importante. El gráfico siguiente muestra la efectividad de un automóvil que viaja en una carretera (medido en kilómetros por galón de gasolina).



FUENTE: Agencia de Energía de los Estados Unidos de Norte América.

Si tú fueras una persona interesada en conservar el medioambiente, ¿a qué velocidad recomendarías ir para que el uso de la gasolina sea el más eficiente? ¿Se puede aplicar de manera realista este gráfico al tipo de carreteras en nuestro país?

Piensa en qué información deberías tener en el caso de nuestro país para poder tomar decisiones que optimicen el uso del combustible. ¿Crees que se pueden implementar regulaciones que nos permitan preservar de mejor manera el medioambiente y un recurso tan valioso como el combustible a nivel mundial?

En este capítulo veremos la matemática que nos puede ayudar a describir la eficiencia como una función de la velocidad del automóvil y a responder algunas de estas preguntas.

Preparación y repaso

1. Determina el valor numérico:
   (a) $\sqrt{4}$.
   (b) $\sqrt{25}$.
   (c) $-\sqrt{25}$.
   (d) $\sqrt{25}-\sqrt{36}$.
   (e) $\sqrt{16/25}-\sqrt{25/16}$.
2. Evalúa la expresión en $x=0$, $x=-1$, $x=1$, $x=2$, $x=-2$, $x=a$ y $x=-1$.
   (a) x^2+2.
   (b) x^2+2x.
   (c) $-x^2+2x$.
   (d) $-x^2-2$
   (e) $-x^2-2x+1$.
3. Multiplica.
   (a) $(x+1)(x-1)$.
   (b) $(x+1)(x+1)$.
   (c) $(x-3)(x-2)$.
   (d) $(x+3)(x-2)$.
   (e) $(x-3)(x+2)$.
   (f) $(x+3)(x+2)$.
4. Encuentra los factores de cada una de las expresiones siguientes:
   (a) x^2-x-12.
   (b) x^2+x-12.
   (c) $x^2-7x+12$.
   (d) $x^2+7x+12$.
   (e) $-x^2+x+12$.
   (f) $-x^2-x+12$.
   (g) x^2-25.
5. Verifica que la igualdad es verdadera para los valores de x dados.
   (a) $x^2=4$, $x=2$ y $x=-2$.
   (b) $x^2=25$, $x=5$ y $x=-5$.
   (c) $x^2=16$, $x=4$ y $x=-4$.
   (d) $x^2=2$, $x=\sqrt{2}$ y $x=-\sqrt{2}$.
   (e) $x^2=7$, $x=\sqrt{7}$ y $x=-\sqrt{7}$.
   (f) ¿Hay algún valor de x para el cual $x^2=-1$? ¿Por qué?
6. Expresa en una fórmula.
   (a) El área de un rectángulo con base x y altura veinte unidades más que la base.
   (b) El perímetro de un rectángulo con base x y altura veinte unidades más que la base.

(c) El área de un rectángulo con base 3 unidades más que x y con altura 3 unidades menos que x.

(d) El área de un círculo con radio x.

(e) El área de un triángulo con base x y altura $x+2$.

7. Razona si las siguientes igualdades son identidades.

(a) $(-x)^2 = x^2$.

(b) $-x^2 = x^2$.

(c) $(x+y)^2 = x^2 + y^2$.

Una identidad algebraica es una igualdad que es verdadera para cualquier valor de la variable.

8. Resuelve la ecuación; es decir, encuentra los valores de x para los cuales la igualdad es verdadera. Si no existe tal valor, explica por qué.

(a) $x^2 = 1$.

(b) $x^2 = 4$

(c) $x^2 = 9$.

(d) $x^2 = 16$.

(e) $x^2 = -25$.

(f) $x^2 = 25$.

(g) $x^2 = 36$.

(h) $x^2 = 3$.

(i) $x^2 = 2$.

(j) $x^2 = -1$.

9. En cada caso, completa el cuadrado.

(a) $x^2 - 4x + \square = (x - \square)^2$.

(b) $x^2 + 4x + \square = (x + \square)^2$.

(c) $x^2 - x + \square = (x - \square)^2$.

(d) $x^2 - 10x + \square = (x - \square)^2$.

(e) $x^2 - \dfrac{3}{2}x + \square = (x - \square)^2$.

(f) $4x^2 + 4x + \square = (\square + \square)^2$.

Investigación: diseño del área para la feria de ciencias

Tu curso está encargado de la organización de una feria de ciencias para tu colegio. En la feria se expondrán trabajos en tres campos: física, química y matemática. El colegio ha destinado una cancha de cemento muy grande para que allí sea instalada la feria.

Tu curso quiere recolectar dinero para comprar libros de ciencia y donarlos al colegio. Para ello se cobrará una entrada a los asistentes, pero también se cobrarán 10 dólares a cada uno de los equipos expositores.

El colegio tiene 300 paneles plegables de un metro de longitud cada uno, con los cuales se puede cercar y dividir la cancha en las tres áreas requeridas.

El objetivo de tu curso es diseñar una área rectangular con dos divisiones interiores para crear tres áreas rectangulares contiguas. El diseño debe ser de tal manera que el área sea máxima para aprovechar todo el espacio posible.

1. Discute con un grupo de compañeros sobre este problema. Dibuja un esquema tentativo de cómo se vería el área rectangular con las tres divisiones interiores.

2. Experimenta con varios valores en las longitudes de los dos lados del área rectangular. Llena la siguiente tabla:

Lado 1	Lado 2	Longitud de cada división interior	Área total	Perímetro más longitud de divisiones
10				300
15				300
20				
25				
30				
35				
40				
45				
50				
55				
60				

3. ¿Qué puedes observar sobre la longitud total de la cerca?

4. ¿Qué puedes observar sobre el área? ¿De qué depende el tamaño del área?

5. ¿Qué puedes observar sobre uno de los lados, cuando el otro lado del rectángulo crece?

6. En un papel cuadriculado, realiza una gráfica de los puntos de la tabla anterior. Para ello, representa con la variable x (la abscisa) y con la variable y (la ordenada) el área del rectángulo.

7. ¿Puedes predecir el valor de y cuando x es 65?

8. La forma de la gráfica que los puntos determinan se llama *parábola*. El punto donde y adquiere el valor más grande se llama *vértice*.

9. ¿Puedes determinar el valor de x para el cual el valor de la variable y es máxima?

10. Si se quiere otorgar 2 metros cuadrados para cada experimento, ¿cuántos expositores entrarán?

11. ¿Cuánto dinero logrará recaudar el curso contando solamente el ingreso por participación?

12. Escribe una expresión para el área A en términos del lado x.

La función cuadrática

Las funciones que has observado tanto en la introducción como en la investigación son ejemplos de funciones cuadráticas.

La función

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax^2+bx+c, \end{aligned}$$

donde a, b y c son constantes, se llama *función cuadrática*. Entonces

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

para todo número real x.

Ejemplo 1

Evalúa la función cuadrática

$$\begin{aligned} f:\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

en los puntos $x=0$, $x=1$, $x=-1$, $x=2$, $x=-2$.

Solución. Nota que f es una función cuadrática, donde $a=1$, $b=0$ y $c=0$ en nuestra definición.

De la definición de f, tenemos que

$$f(x)=x^2$$

para todo número real x. Entonces:

$$f(0)=0^2=0 \quad \text{y} \quad f(1)=1^2=1.$$

Para el siguiente cálculo, recuerda que $(-1)^2=1$:

$$f(-1)=(-1)^2=1, \quad f(2)=(2)^2=4 \quad \text{y} \quad f(-2)=(-2)^2=4.$$

Ejemplo 2

Evalúa la función cuadrática definida por

$$f(x)=x^2+3x+4,$$

en los puntos $x=0$, $x=1$, *y* $x=-2$.

Solución. En este caso, $a=1$, $b=3$ y $c=4$. Entonces

$$f(0)=0^2+3(0)+4=4, \quad f(1)=1^2+3(1)+4=1+3+4=8$$

Recuerda que $(-2)^2=(2)^2=4$. Por lo tanto:

$$f(-2)=(-2)^2+3(-2)+4=4-6+4=2.$$

Ejemplo 3

Considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x)=(x-3)(x+2).$$

¿Es la función f *una función cuadrática? ¿Por qué? Evalúa la función en* $x=3$ *y* $x=-2$.

Solución. Observa que

$$(x-3)(x+2) = x^2 - x - 6.$$

Es decir, f sí es una función cuadrática.

Para evaluar la función f, utiliza la expresión algebraica de $f(x)$, dada originalmente:

$$f(3) = (3-3)(3+2) = (0)(5) = 0 \quad \text{y} \quad f(-2) = (-2-3)(-2+2) = -(5)(0) = 0.$$

Observa que tanto $f(3) = 0$ como $f(-2) = 0$. Es decir, los números 3 y -2 son ceros de la función f.

Puesto que podemos evaluar una función cuadrática en cualquier valor real, tenemos que

El dominio de una función cuadrática es $\mathbb{R}$.

¡A practicar!

En cada caso, evalúa la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en los puntos dados. Utiliza la definición de función cuadrática para escribir una frase en la que expliques por qué la función dada f es cuadrática.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 5$, $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$, $x = -2$.
2. $f(x) = x^2 - 3x - 5$, $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$,$x = -5$.
3. $f(x) = -x^2 + 3x + 5$, $x = 0$, $x = -1$, $x = 2$, $x = -2$.
4. $f(x) = -x^2 + 3x + 4$, $x = 0$, $x = -a$, $x = a$.
5. $f(x) = (x+5)^2$, $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$, $x = -2$.
6. $f(x) = (x-1)(x+8)$, $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$, $x = -2$.
7. $f(x) = (x+1)(x-5)$, $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$, $x = -2$.
8. $f(x) = (x+5)^2 - 2$, $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$, $x = -2$.

Representación gráfica de una función cuadrática

Construyamos la gráfica de la función cuadrática $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ defnda por $f(x) = x^2$. Para ello, primero realicemos una tabla de valores de la función f:

x	$f(x)$
0	0
-1	1
1	1
-2	4
2	4
-3	9
3	9

Observa con atención la tabla; ¿qué puedes notar sobre $f(-1)$ y $f(1)$, a $f(-2)$ y $f(2)$? ¿Qué puedes afirmar sobre $f(-4)$ y $f(4)$?

Sabiendo que

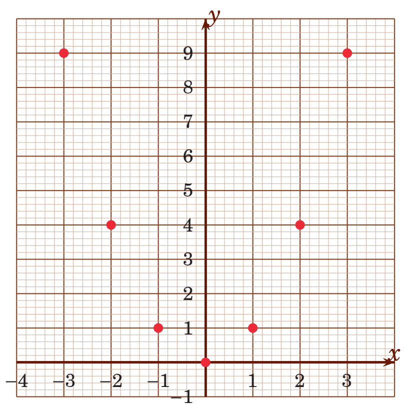
$$(-x)^2 = x^2$$

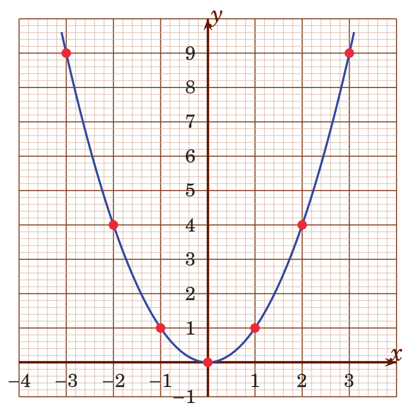
para cualquier valor de x, entonces podemos afirmar que:

$$f(-x) = f(x).$$

Esta es una propiedad de las funciones importante que se denomina "paridad". Como hemos visto, la función f, definida por $f(x) = x^2$, es una *función par*.

Ahora realizamos la gráfica:





La gráfica de esta función se llama *parábola*.

Responde las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es el corte de la gráfica con el eje horizontal?
2. ¿Cuál es el corte de la gráfica con el eje vertical?
3. ¿Cuál es el punto donde el valor de y es el más pequeño de todas las parejas (x, y) de la gráfica de f; es decir, tales que $y = f(x)$?

¡A practicar!

Construye una tabla de valores para la función f dada y realiza la gráfica de manera aproximada. ¿Qué forma tiene la gráfica?

1. $f(x) = x^2 + 1$.
2. $f(x) = x^2 - 3$.
3. $f(x) = -x^2$.
4. $f(x) = -x^2 + 2$.
5. $f(x) = (x - 1)^2$.
6. $f(x) = 4x^2$.
7. $f(x) = 2x - 1$.
8. $f(x) = -x + 2$.

Traslaciones y homotecias de la función $x \longmapsto x^2$

En el problema de investigación de este capítulo, viste la importancia que tiene el encontrar un valor máximo de una función cuadrática (correspondiente al vértice de la parábola). En ese problema, hallaste el valor más grande de un área. Ahora vamos a investigar cómo encontrar este valor en cualquier función cuadrática.

Para ello, vamos a empezar con las traslaciones y homotecias de la función cuadrática $x \longmapsto x^2$.

En la gráfica de la función cuadrática f definida por $f(x) = x^2$, observamos que:

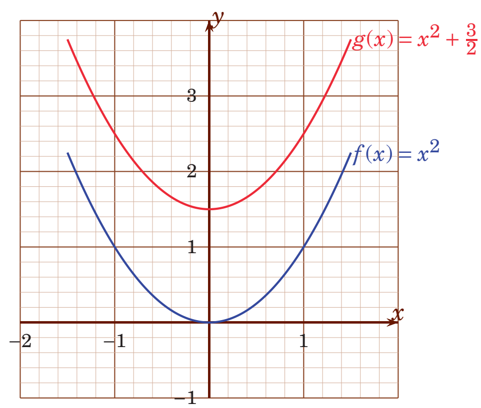
1. El corte de la gráfica con el eje horizontal es el punto de coordenadas $(0,0)$.
2. El corte de la gráfica con el eje vertical es el punto de coordenadas $(0,0)$.
3. El punto donde el valor de y es el más pequeño de todas las parejas (x,y), donde $y = f(x)$ es el punto de coordenadas $(0,0)$. Decimos también que en $x = 0$ la función f *alcanza el mínimo*, y que ese *mínimo* es 0. Vamos a llamar a este punto el *vértice* de la parábola.

En lo que sigue, vamos a observar dónde está localizado el vértice de la parábola para otras funciones cuadráticas.

Traslación vertical

Observa cuidadosamente las gráficas de las funciones cuadráticas f y g, y la relación con su expresión algebraica, donde:

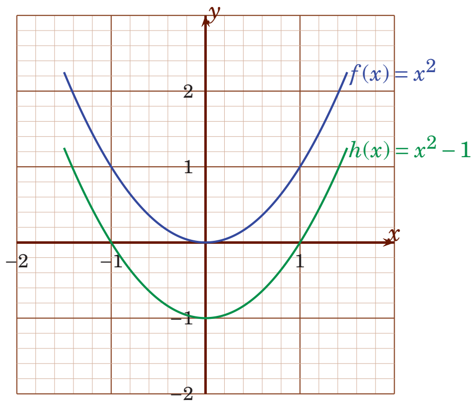
$$x \longmapsto f(x) = x^2, \quad \text{y} \quad x \longmapsto g(x) = x^2 + \frac{3}{2}.$$



1. En palabras, describe cómo cambió la expresión algebraica de la función original f.
2. ¿Cuál es el punto de coordenadas (x,y) de la gráfica de g donde el valor de y es el más pequeño?

Ahora observa las gráficas de las funciones cuadráticas f y h, y la relación con su expresión algebraica, donde:

$$x \longmapsto f(x) = x^2, \quad \text{y} \quad x \longmapsto h(x) = x^2 - 1.$$



1. En palabras, describe cómo cambió la expresión algebraica de la función original f.

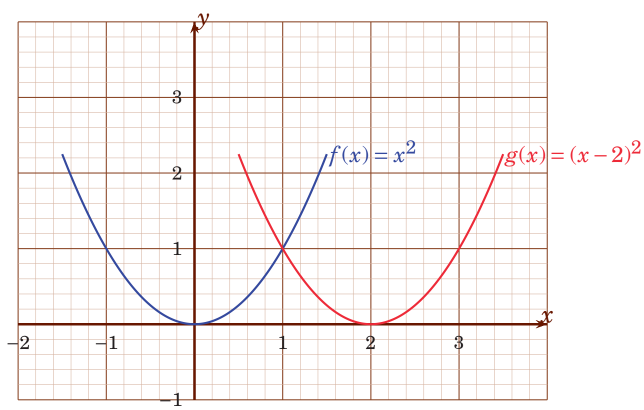
2. ¿Cuál es el punto de coordenadas (x, y) de la gráfica de h donde el valor de y es el más pequeño?

Vemos que las gráficas de las funciones g y h son *traslaciones verticales* de la gráfica de la función f. Nota, además, que la forma de la gráfica de g y h con respecto a f no ha cambiado, sigue siendo la de una parábola, solo ha cambiado su localización. El vértice también se traslada.

Traslación horizontal

Observa cuidadosamente las gráficas de las funciones cuadráticas f y g, y la relación con su expresión algebraica, donde:

$$x \longmapsto f(x) = x^2, \quad \text{y} \quad x \longmapsto g(x) = (x-2)^2.$$

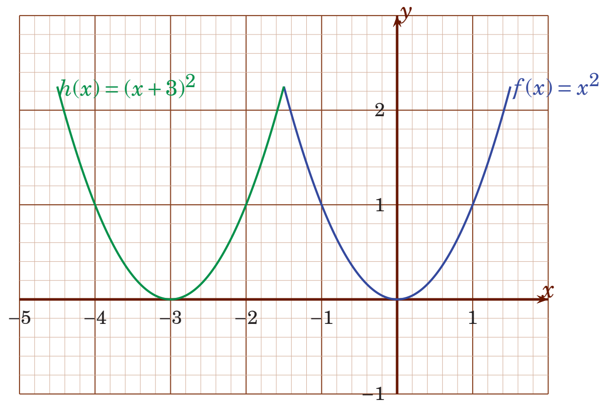


1. En palabras, describe cómo cambió la expresión algebraica de la función original f.

2. ¿Cuál es el punto de coordenadas (x, y) de la gráfica de g donde el valor de y es el más pequeño?

Ahora observa las gráficas de las funciones cuadráticas f y h, y la relación con su expresión algebraica, donde:

$$x \longmapsto f(x) = x^2, \quad \text{y} \quad x \longmapsto h(x) = (x+3)^2.$$



1. En palabras, describe cómo cambió la expresión algebraica de la función original f.

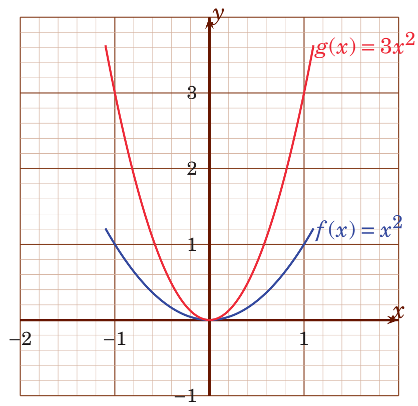
2. ¿Cuál es el punto de coordenadas (x, y) de la gráfica de h donde el valor de y es el más pequeño?

Vemos que las gráficas de las dos funciones g y h son *traslaciones horizontales* de la grafica de f. Nota, además, que la forma de la gráfica no ha cambiado, sigue siendo una parábola, solo ha cambiado su localización. Observa que el vértice también se ha trasladado.

Homotecias (contracción y dilatación)

Observa cuidadosamente las gráficas de las funciones cuadráticas f y g, y la relación con su expresión algebraica, donde:

$$x \longmapsto f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad x \longmapsto g(x) = 3x^2.$$

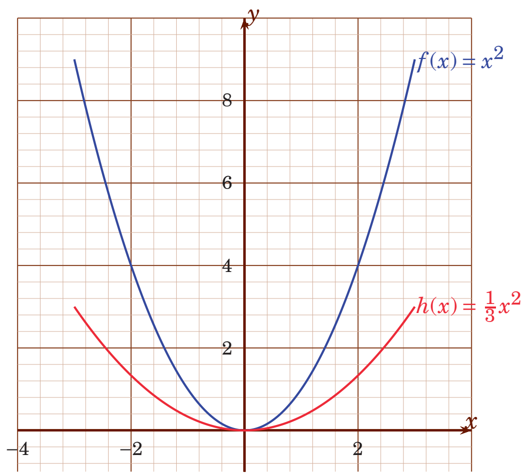


1. En palabras, describe cómo cambió la expresión algebraica que representa la función original f.

2. ¿Cuál es el punto de coordenadas (x, y) de la gráfica de g donde el valor de y es el más pequeño?

Ahora observa las gráficas de las funciones cuadráticas f y h, y la relación con su expresión algebraica, donde:

$$x \longmapsto f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad x \longmapsto h(x) = \frac{1}{3}x^2.$$



1. En palabras, describe cómo cambió la expresión algebraica de la función original f.

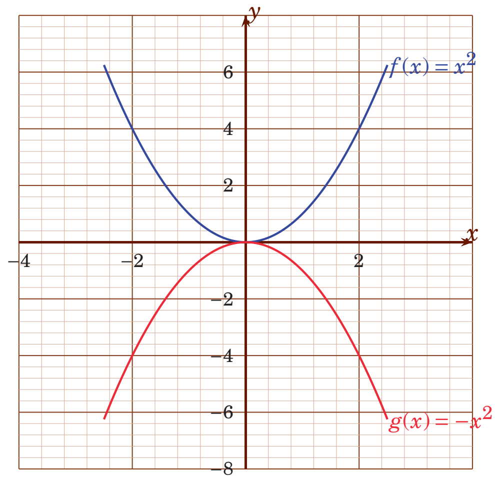
2. ¿Cuál es el punto de coordenadas (x, y) de la gráfica de h donde el valor de y es el más pequeño?

Vemos que las gráficas de las dos funciones g y h son *homotecias* de la gráfica de f. La primera es una *dilatación* y la segunda, una *contracción*. Los valores de y han sido dilatados o contraídos, respectivamente. Nota, además, que la forma sigue siendo una parábola y el vértice no ha cambiado su posición.

Reflexión respecto del eje horizontal

Observa las gráficas de las funciones cuadráticas f y g, y la relación con su expresión algebraica, donde:

$$x \longmapsto f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad x \longmapsto g(x) = -x^2.$$



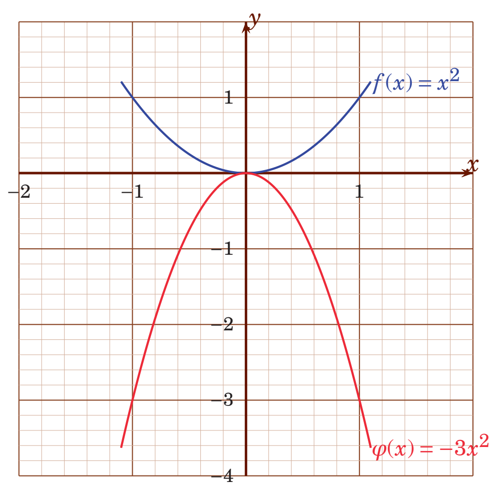
1. En palabras, describe cómo cambió la expresión algebraica de la función original f.

2. ¿Cuál es el punto de coordenadas (x, y) de la gráfica de g donde el valor de y es el más grande?

Vemos que la gráfica de la función g es una *reflexión respecto del eje horizontal* de la gráfica de la función f. La parábola se abre hacia abajo, por lo que la ordenada del vértice es el valor más grande de todos los posibles valores y; este es el máximo de la función g.

Ahora observa las gráficas de las funciones cuadráticas f y φ, y la relación con su expresión algebraica, donde:

$$x \longmapsto f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad x \longmapsto \varphi(x) = -3x^2.$$



1. En palabras, describe cómo cambió la expresión algebraica de la función original f.

2. ¿Cuál es el punto de coordenadas (x, y) de la gráfica de φ donde el valor de y es el más grande?

Esta es una homotecia con *coeficiente* negativo; tiene un doble efecto: dilatar y reflejar respecto del eje horizontal. Nota, además, que la forma sigue siendo una parábola, que se abre hacia abajo, por lo que la coordenada y del vértice es el valor más grande de todos los valores y. Este es el valor máximo de la función φ.

Ejemplo 4

Considera la función cuadrática g definida por

$$g(x) = 3(x-1)^2 + 2.$$

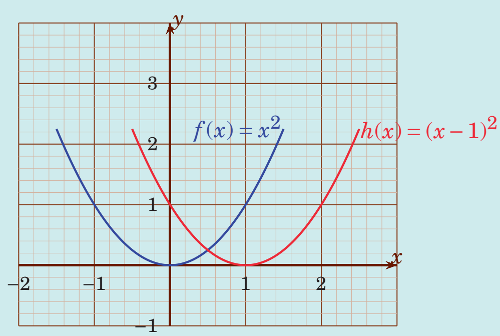
Expresa g como el resultado de traslaciones y homotecias de la función f definida por

$$f(x) = x^2.$$

Además, determina dónde se encuentra el vértice de la gráfica de la función g.

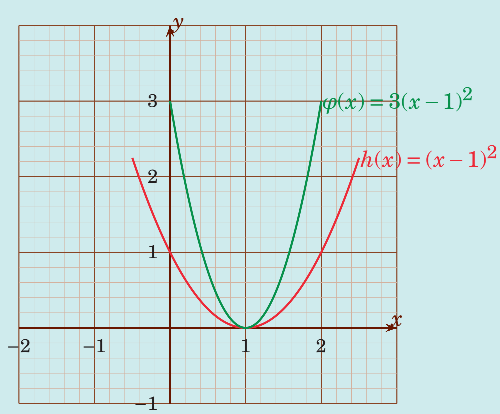
Solución. Vamos a construir la función g aplicando una secuencia de transformaciones de la función f.

1. Traslademos la función f horizontalmente a la derecha 1 unidad; obtenemos la función h definida por $x \longmapsto (x-1)^2$:



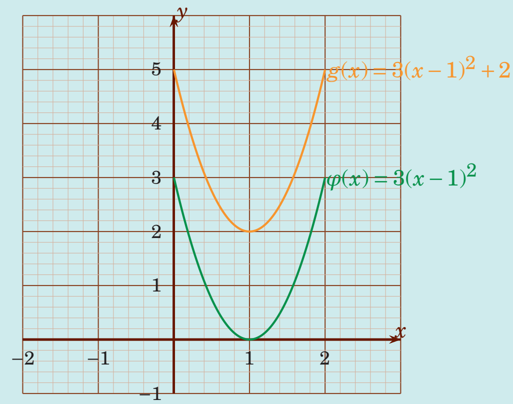
El vértice se traslada al punto de coordenadas $(1,0)$.

2. Ahora, a la función h le realizamos una dilatación de coeficiente 3; obtenemos la función φ definida por $x \longmapsto 3(x-1)^2$:

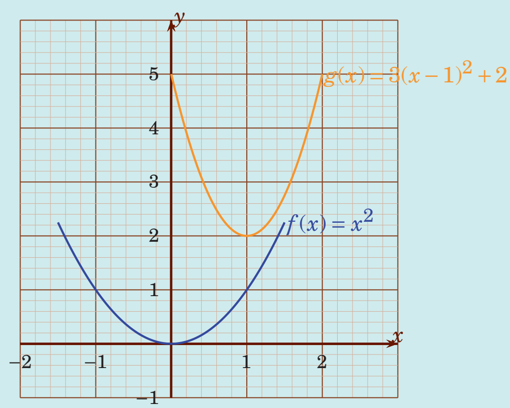


El vértice no cambia; sigue siendo el punto de coordenadas $(1,0)$.

3. Finalmente, realizamos una traslación vertical hacia arriba de dos unidades; obtenemos la función $g\colon x \longmapsto 3(x-1)^2 + 2$:



En resumen, g se obtuvo a partir de f:



La última gráfica corresponde a la función g. Decimos que $x = 1$ es el punto donde la función g alcanza su valor mínimo $y = 2$.

Ejemplo 5

Considera la función cuadrática g definida por

$$g(x) = -3(x+1)^2 - 2.$$

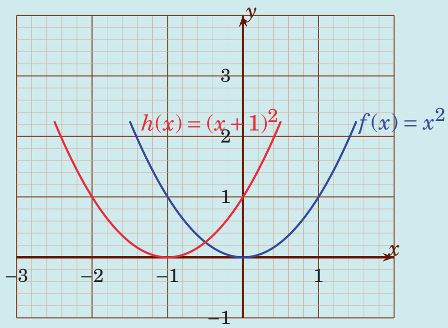
Expresa la función g como el resultado de traslaciones y homotecias de la función f, definida por

$$f(x) = x^2.$$

Además, determina dónde se encuentra el vértice de la gráfica de la función g.

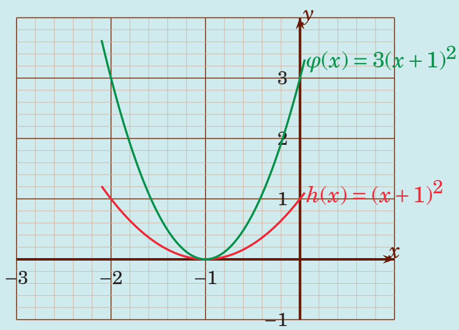
Solución. Vamos a construir la función g aplicando una secuencia de transformaciones de la función f.

1. Traslademos la función f horizontalmente a la izquierda 1 unidad; obtenemos la función h definida por $x \longmapsto (x+1)^2$:



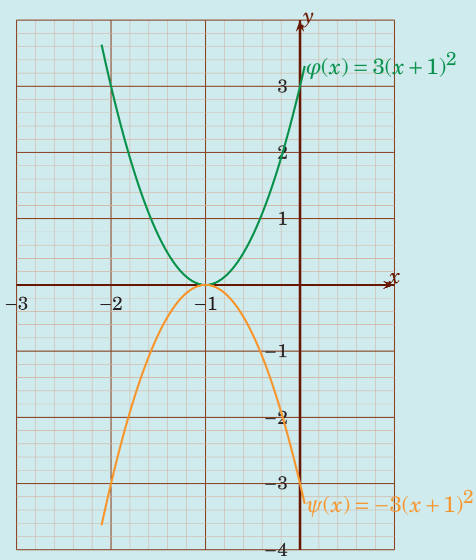
El vértice se traslada al punto de coordenadas $(-1,0)$.

2. Ahora, a la función h le realizamos una dilatación de coeficiente 3; obtenemos la función φ, definida por $x \longmapsto 3(x+1)^2$:



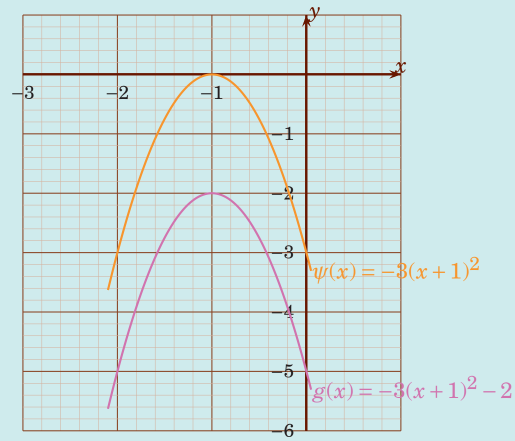
El vértice no cambia; sigue siendo el punto de coordenadas $(-1,0)$.

3. Ahora, a la función φ la reflejamos con respecto al eje horizontal; obtenemos la función ψ, definida por $x \longmapsto -3(x+1)^2$:

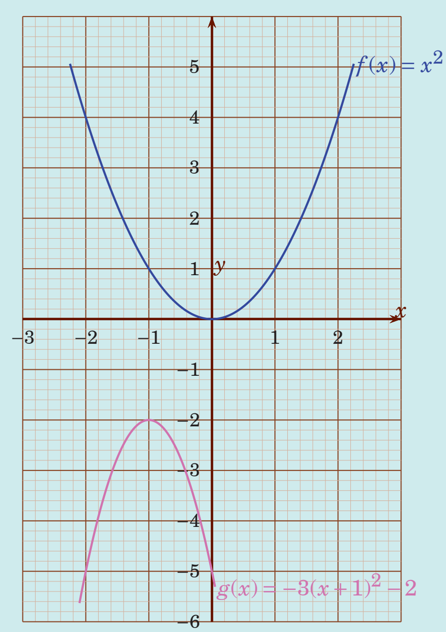


La parábola se abre hacia abajo y el vértice no cambia; y la ordenada del vértice es el punto máximo de esta función.

4. Finalmente, a la función ψ la trasladamos verticalmente en -2 unidades; obtenemos la función g, definida por $x \longmapsto -3(x+1)^2 - 2$.



En resumen, g se obtuvo de f:



La última gráfica corresponde a la gráfica de g. El vértice se encuentra en el punto de coordenadas $(-1, -2)$. Decimos que $x = -1$ es el punto dónde la función g alcanza su valor máximo $y = -2$.

Ejemplo 6

Sin realizar la gráfica de la función h, definida por

$$h(x) = -4(x-5)^2 + 8,$$

determina dónde se encuentra el vértice de la parábola correspondiente.

Solución. Vemos que la función h se obtiene a partir de la función definida por $x \longmapsto x^2$ luego de que se apliquen sucesivamente:

1. una traslación horizontal a la derecha en 5 unidades; ahora el vértice está en el punto de coordenadas $(5,0)$; la ordenada del vértice es el valor mínimo de h;
2. una dilatación de coeficiente 4; el vértice está en el mismo punto $(5,0)$;
3. una reflexión respecto del eje horizontal; el vértice no se mueve; y la ordenada del vértice es el valor máximo de la función reflejada; y
4. una traslación vertical en 8 unidades.

De allí que el vértice de la parábola resultante está localizado en el punto de coordenadas $(5,8)$. Además, la ordenada del vértice es el valor máximo de la función h.

Ejemplo 7

Considera la función g definida por $g(x) = x^2 + 4x - 5$.

1. *Expresa la función g como resultado de traslaciones y homotecias de la función f definida por $f(x) = x^2$.*
2. *Sin realizar la gráfica de g, determina dónde se encuentra el vértice de la gráfica de la función g.*

Solución. En primer lugar, vamos a reexpresar $g(x)$ mediante la completación del polinomio $x^2 + 4x - 5$:

$$x^2 + 4x - 5 = x^2 + 4x + 4 - 4 - 5 = (x^2 + 4x + 4) - 9 = (x + 2)^2 - 9.$$

Por lo tanto:

$$g(x) = x^2 + 4x - 5 = (x + 2)^2 - 9.$$

Ahora es fácil ver que la función g puede ser obtenida a partir de la función f por medio de:

1. Una traslación horizontal de -2; y
2. y una traslación vertical de -9 unidades.

De allí se deduce que el vértice está localizado en el punto de coordenadas $(-2, -9)$. También podemos decir que $x = -2$ es el punto donde la función g adquiere su valor mínimo: -9.

Las siguientes definiciones nos ayudan a precisar el significado de máximo o mínimo de una función.

El número a se llama *mínimo* de una función f cuando

$$f(x) \geq f(a)$$

para cualquier x.
Y el punto a se llama *máximo* de la función f cuando

$$f(x) \leq f(a)$$

para cualquier x.

¡A practicar!

Ahora es tu turno.

1. Para cada caso, expresa g mediante traslaciones y homotecias de la función f

definida por $f(x) = x^2$. Luego determina dónde se encuentra el vértice de la gráfica de la función g.

(a) $g(x) = 4(x-1)^2 + 7$.

(b) $g(x) = 5(x+3)^2 + 2$.

(c) $g(x) = -2(x-4)^2 + 1$.

2. Considera la función . Para cada caso, expresa la función g mediante traslaciones y homotecias de la función f, definida por $f(x) = x^2$. Luego, **sin realizar la gráfica de** g, determina dónde se encuentra el vértice de la parábola correspondiente. Decide si la ordenada del vértice es el máximo o el mínimo de la función g.

(a) $g(x) = x^2 + 6x - 2$.

(b) $g(x) = -x^2 + 4x - 1$.

(c) $g(x) = -x^2 + 3x - 5$.

Máximo o mínimo de una función cuadrática. Vértice de una parábola

Veamos ahora cómo encontrar el vértice de una parábola para el caso general, sin realizar la gráfica de la correspondiente función cuadrática. Para ello, primero estudiemos un ejemplo.

Ejemplo 8

Considera la función g, definida por $g(x) = 2x^2 + 2x + 1$. Expresa g mediante traslaciones y homotecias de la función f, definida por $f(x) = x^2$. Luego, sin encontrar la gráfica, determina dónde se halla el vértice de la parábola correspondiente.

Solución. En primer lugar, completemos el cuadrado del polinomio $2x^2 + 2x + 1$:

$$\begin{aligned} 2\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) &= 2\left(x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} \\ &= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Así que

$$g(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}.$$

La función g es una traslación horizontal de $-1/2$, una homotecia de coeficiente 2 y una traslación vertical de $1/2$ unidades de la función f. Se deduce de esto que el vértice está localizado en el punto de coordenadas $(-1/2, 1/2)$. También podemos decir que $x = -1/2$ es el punto dónde la función g alcanza su valor mínimo $1/2$.

A continuación, vamos a generalizar el proceso realizado en el ejemplo. Para ello, consideremos la función g, definida por

$$g(x) = ax^2 + bx + c,$$

con $a \neq 0$.

Queremos expresar g mediante traslaciones y homotecias de la función f, definida por $f(x) = x^2$. Luego determinaremos dónde se encuentra el vértice de la gráfica de la funcón g. Para esto, en primer lugar, *completemos el cuadrado* en $g(x)$:

$$\begin{aligned} g(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \left[\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]\right) \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + a\left[\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a\left[\frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right). \end{aligned}$$

Así vemos que:

$$g(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Es decir, la función g se obtiene a partir de f por la aplicación consecutiva de:

1. una traslación horizontal de $-\frac{b}{2a}$;
2. una homotecia de coeficiente a; y
3. una traslación vertical de $c - \frac{b^2}{4a}$.

En general, podemos afirmar que:

Dada la función cuadrática

$$x \longmapsto ax^2 + bx + c,$$

con $a \neq 0$, se tiene que:

- El vértice de la parábola correspondiente a esta función está localizado en el punto de coordenadas $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$.
- Si $a > 0$, en el punto $x = -\frac{b}{2a}$ se alcanza el punto mínimo de la función dada y su valor mínimo es $c - \frac{b^2}{4a}$.
- Si $a < 0$, en el punto $x = -\frac{b}{2a}$ se alcanza el punto máximo de la función y su valor máximo es $c - \frac{b^2}{4a}$.

Piensa en la validez de las siguientes aseveraciones para la función f, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$:

1. Si $a > 0$, $f(x) \geq c - \frac{b^2}{4a}$ para todos los números reales x. Por ello, el recorrido de la función f es el intervalo $\left(c - \frac{b^2}{4a}, +\infty\right)$.
2. Si $a < 0$, $f(x) \leq c - \frac{b^2}{4a}$ para todos los números reales x. Por ello, el recorrido de la función f es el intervalo $\left(-\infty, c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

Ejemplo 9

Considera la función g, definida por

$$g(x) = x^2 + 5.$$

Calcula el vértice de la gráfica de la función, mediante las fórmulas que determinan el vértice.

Solución. En este caso:

$$a = 1, \qquad b = 0, \qquad c = 5.$$

Entonces, el vértice de la parábola se encuentra en el punto de coordenadas $(0, 5)$. Además, este es el punto mínimo de la función. Por ello, todos los valores de la función son mayores que 5. Esto quiere decir que la función g no tiene ceros; en otras palabras, la parábola no corta el eje horizontal.

Ejemplo 10

Considera la función g, definida por

$$g(x) = 3x^2 + 6x - 1.$$

Encuentra el vértice de la gráfica de la función g; para ello, utiliza las fórmulas que determinan el vértice.

Solución. En primer lugar, identifica los valores de a, b y c. Puedes ver que

$$a = 3, \qquad b = 6, \qquad c = -1.$$

Sabemos que la abscisa del vértice está dada por:

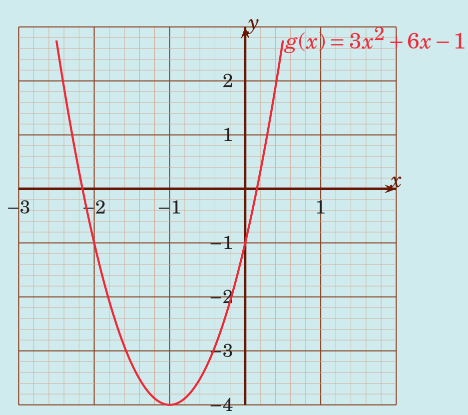
$$-\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \times 3} = -\frac{6}{6} = -1.$$

La ordenada del vértice está dada por:

$$c - \frac{b^2}{4a} = -1 - \frac{36}{4 \times 3} = -1 - 3 = -4.$$

Así vemos que el vértice es el punto de coordenadas $(-1, -4)$.

Verifiquemos los resultados obtenidos, mirando la gráfica de la función:



Ejemplo 11

Considera la función g, definida por

$$g(x) = -2x^2 + 10x - 5.$$

Determina dónde se encuentra el vértice de la gráfica de la función; para ello, utiliza las fórmulas que determinan el vértice.

Solución. Primero identificamos

$$a = -2, \qquad b = 10, \qquad c = -5.$$

Sabemos que la abscisa del vértice está dada por:

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{10}{2 \times (-2)} = \frac{5}{2}.$$

La ordenada del vértice está dada por:

$$c - \frac{b^2}{4a} = -5 - \frac{100}{4 \times (-2)} = -5 + \frac{25}{2} = \frac{15}{2}.$$

Así vemos que el vértice es el punto de coordenadas $\left(\frac{5}{2}, \frac{15}{2}\right)$.

El punto dónde la función adquiere su valor máximo es $\frac{5}{2}$ y el valor máximo de la función es $\frac{15}{2}$.

¡A practicar!

Para cada función g dada a continuación, determina los valores de a, b y c. Luego utiliza la fórmula del vértice para encontrar su localización.

1. $g(x) = 3x^2 - 6x + 8$.
2. $g(x) = 3x^2 - 4x + 5$.
3. $g(x) = -2x^2 + 5x$.
4. $g(x) = -x^2 + 6$.
5. $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{1}{2}$.

Ceros de la función cuadrática. Ecuación cuadrática

Otra característica importante de la parábola es la localización de sus cortes con el eje horizontal. Una vez conocidos los cortes y el vértice de una parábola, podremos realizar una mejor gráfica de la misma sin la ayuda de la tecnología.

Ejemplo 12

Encuentra los ceros de la función f, definida por

$$x \longmapsto x^2 - 1.$$

Los ceros de la función corresponden a los cortes de la parábola con el eje horizontal.

Solución. Sabemos que los ceros de la función son los valores x tales que $f(x) = 0$. En este caso, los ceros de f satisfacen la siguiente ecuación:

$$f(x) = x^2 - 1 = 0.$$

Esta ecuación se llama *ecuación cuadrática*. Para encontrar x, despejamos el término x^2 de la ecuación; obtenemos:

$$x^2 = 1$$

Los valores que hacen verdadera esta igualdad son $x = -1$ y $x = 1$.

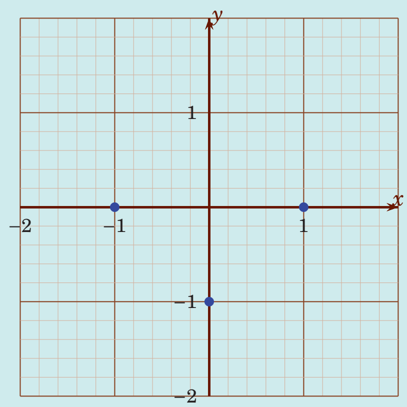
En efecto, podemos verificarlo:

$$f(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \quad \text{y} \quad f(1) = (1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

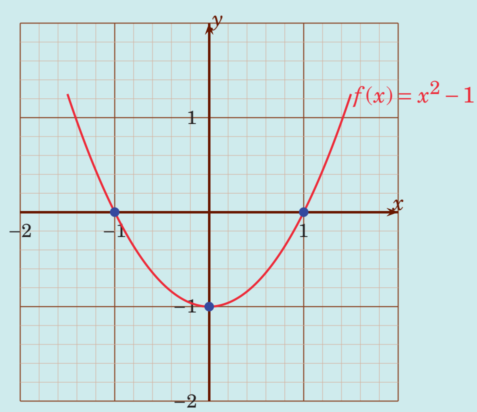
Es decir, los números 1 y -1 son los ceros de la función, o dicho de otro modo, la parábola y el eje horizontal se encuentran en los puntos de coordenadas $(-1,0)$ y $(1,0)$.

Como la función f es una traslación vertical en -1 de la función $x \longmapsto x^2$, el vértice de la parábola está en el punto de coordenadas $(0,-1)$.

Ahora, podemos realizar la gráfica de la función f, para lo cual, en primer lugar, localizamos los tres puntos (los dos cortes con el eje horizontal y el vértice) en el plano cartesiano:



Finalmente, para dibujar la parábola con vértice en el punto $(0,-1)$ y con cortes con el eje horizontal en los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$, realizamos un trazo curvo (y no con segmentos de rectas), como se muestra a continuación:



Para encontrar los ceros de una función cuadrática, deberemos resolver una ecuación cuadrática. En el ejemplo anterior, resolvimos la ecuación

$$x^2 - 1 = 0.$$

A diferencia de la ecuación lineal, la cuadrática contiene un término de la variable elevado al cuadrado. Otros ejemplos de ecuaciones cuadráticas son:

$$x^2+3x-1=0, \quad -x^2+2x=0, \quad x^2+5=0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{3}x^2+\frac{3}{2}x+4=0.$$

En esta sección vamos a investigar cómo resolver estas ecuaciones cuadráticas.

Ejemplo 13

Determina los ceros de la función g, definida por

$$x \longmapsto (x+2)^2-9.$$

¿Cuáles son los cortes de la parábola de ecuación $y=(x+2)^2-9$?

Solución. Para encontrar el corte de la parábola o los ceros de la función, debemos resolver la ecuación cuadrática:

$$g(x)=(x+2)^2-9=0;$$

es decir, se debe resolver la ecuación

$$(x+2)^2-9=0.$$

Esta es una ecuación cuadrática, y para resolverla, vamos a despejar el término elevado al cuadrado; obtenemos:

$$(x+2)^2=9.$$

Como los cuadrados de 3 y -3 son, ambos, iguales a 9, tenemos, entonces, dos opciones:

$$x+2=3 \quad \text{o} \quad x+2=-3,$$

de donde $x=-1$ o $x=-5$.

Por lo tanto, los cortes de la parábola con el eje horizontal son -1 y -5.

Ejemplo 14

Determina los ceros de la función g, definida por

$$g(x)=x^2-4x-21.$$

Calcula los cortes de la parábola de ecuación $y=x^2-4x-21$ con el eje horizontal.

Solución. Para encontrar el corte de la parábola con el eje horizontal o los ceros de la función, debemos resolver la ecuación $g(x)=0$; es decir, la ecuación

$$x^2-4x-21=0.$$

Esta es una ecuación cuadrática.

En los ejemplos anteriores, hemos podido despejar el término cuadrático, pero en este caso, no podemos hacerlo, pues, la ecuación contiene, además del cuadrático, el término lineal $2x$. Para lograr realizar el despeje, antes vamos a completar el cuadrado del lado izquierdo de la ecuación:

$$\begin{aligned} x^2-4x-21 &= (x^2-4x+4)-4-21 \\ &= (x-2)^2-4-21 \\ &= (x-2)^2-25. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación

$$x^2 - 2x - 21 = 0$$

es equivalente a la ecuación

$$(x-2)^2 - 25 = 0.$$

Y ahora sí podemos despejar el término elevado al cuadrado:

$$(x-2)^2 = 25.$$

Entonces, sabemos que:

$$x - 2 = 5 \quad \text{o} \quad x - 2 = -5,$$

De donde $x = 7$ o $x = -3$.

Por lo tanto, la parábola correspondiente a g corta el eje horizontal en 7 y -3.

¡A practicar!

Para cada función g, encuentra sus ceros, los cortes de la parábola correspondiente a la gráfica de la función dada con el eje horizontal. Si es necesario, completa el cuadrado.

1. $g(x) = 4x^2 - 16.$
2. $g(x) = 4(x-3)^2 - 16.$
3. $g(x) = 5(x+1)^2 - 125.$
4. $g(x) = x^2 - 2x - 12.$

Ahora vamos a determinar los ceros de una función cuadrática de manera general. En este proceso encontramos, entonces, los cortes de la parábola con el eje horizontal. Para ello, vamos a hallar una fórmula general para resolver una ecuación cuadrática.

Empecemos considerando la función cuadrática general g, definida por

$$g(x) = ax^2 + bx + c,$$

con a diferente de cero.

De manera similar a como lo hicimos en la sección anterior, en primer lugar completamos el cuadrado de $ax^2 + bx + c$, de la siguiente manera:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Por lo tanto, la ecuación

$$g(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

es equivalente a la ecuación

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) = 0.$$

De esta última ecuación, despejemos el término cuadrático; obtenemos:

$$\begin{aligned} a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= -\left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \\ &= \frac{b^2 - 4ac}{4a}; \end{aligned}$$

es decir:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Entonces, tenemos dos opciones:

$$x+\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{o} \quad x+\frac{b}{2a}=-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Si ahora despejamos x en ambas igualdades, obtenemos:

$$x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{o} \quad x=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

La fórmula general que resuelve la ecuación cuadrática

$$ax^2+bx+c=0$$

es:

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

que simplificada se escribe de la manera siguiente:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Ejemplo 15

Determina los ceros de la función g, definida por

$$g(x)=x^2-2x-80.$$

Solución. Para encontrar los ceros de la función g, debemos hallar los números x que satisfacen la igualdad:

$$g(x)=x^2-2x-80=0.$$

Para aplicar la fórmula, identificamos a, b y c. En este caso, $a=1$, $b=-2$ y $c=-80$. Entonces:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-2)\pm\sqrt{4-4(1)(-80)}}{2\times 1} \\ &= \frac{-(-2)\pm\sqrt{324}}{2} \\ &= \frac{2\pm 18}{2}. \end{aligned}$$

Concluimos que los dos números

$$x=10 \quad \text{y} \quad x=\frac{2-18}{2}=-8$$

son las soluciones de la ecuación cuadrática y los ceros de la función g, definida por

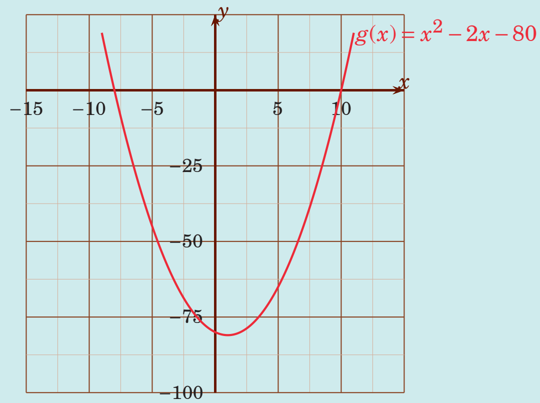
$$g(x)=x^2-2x-80.$$

Además, estos números corresponden a las abscisas de los puntos de corte de la parábola de ecuación

$$y=x^2-2x-80$$

con el eje horizontal.

En la gráfica de g podemos verificar que la parábola corta con el eje horizontal en los puntos $x = 10$ y $x = -8$.



Una propiedad de los números reales establece que si

$$ab = 0,$$

entonces

$$a = 0 \quad \text{o} \quad b = 0.$$

Ejemplo 16

Encuentra los ceros de la función g, definida por

$$g(x) = (x-2)(x+5).$$

Solución. La función g es un cuadrática, pues al realizar el producto

$$(x-2)(x+5)$$

resulta en un polinomio cuadrático. En este caso, no conviene utilizar la fórmula general para encontrar los ceros de la función.

En efecto, recordemos que si el producto de dos números es igual a cero, entonces uno de ellos o ambos deben ser iguales a cero; por lo tanto: Si

$$(x-2)(x+5) = 0,$$

entonces

$$(x-2) = 0 \quad \text{o} \quad (x+5) = 0.$$

De esto se obtiene que $x = 2$ o $x = -5$ son las soluciones de la ecuación, y por tanto son los ceros de la función g.

Ceros del producto de dos funciones lineales

Si

$$f(x) = (x-a)(x-b),$$

los ceros de f son a y b.

Sea g una función definida por

$$g(x) = (x-a)(x-b),$$

entonces g es una función cuadrática. En efecto:

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 - bx - ax + ab \\ &= x^2 - (a+b)x + ab. \end{aligned}$$

En resumen, g es una función cuadrática que se expresa como el producto de dos funciones lineales.

Ahora bien, podemos encontrar los ceros de la función cuadrática g, hallando los ceros de las correspondientes funciones lineales, pues la igualdad

$$g(x) = (x - a)(x - b) = 0,$$

entonces

$$x - a = 0 \quad \text{o} \quad x - b = 0,$$

de donde los ceros de la función g son $x = a$ y $x = b$.

Ejemplo 17

Encuentra los ceros de la función g, definida por:

$$g(x) = x^2 + 5x + 6.$$

Solución. Para encontrar los ceros de g, debemos resolver la ecuación cuadrática:

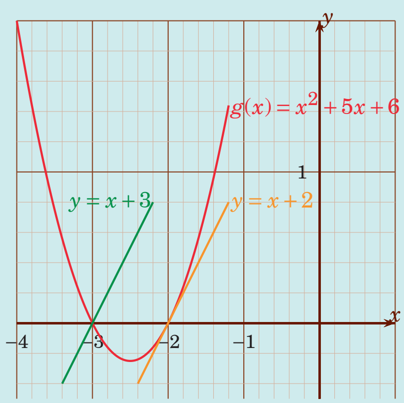
$$x^2 + 5x + 6 = 0.$$

El lado izquierdo de esta igualdad se puede "factorar" (descomponer en factores) fácilmente:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2).$$

Por lo tanto, los ceros de g son $x = -3$ y $x = -2$.

Mira la gráfica de g y de las ecuaciones lineales $x \longmapsto x + 3$ y $x \longmapsto x + 2$:



Nota que los ceros de las funciones lineales corresponden también a los ceros de la función cuadrática g.

¡A practicar!

Encuentra:

1. los ceros de la función g en cada caso;
2. los cortes de la gráfica de g con el eje horizontal.

Utiliza la fórmula cuadrática únicamente cuando no sea fácil factorar la expresión cuadrática.

1. $g(x) = (x - 5)(x + 2)$.

2. $g(x) = x^2 - 3x - 40$.

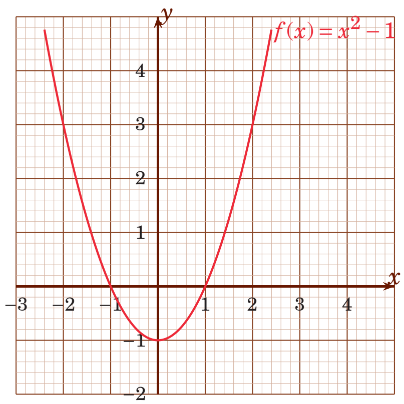
3. $g(x) = 2x^2 + 9x + 4$.

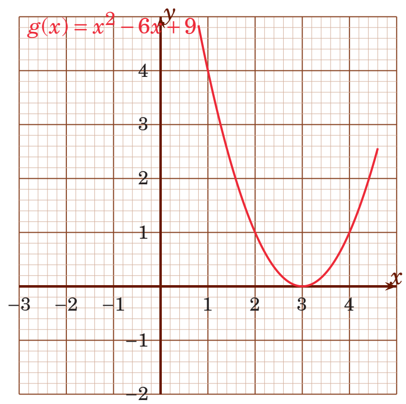
4. $g(x) = x^2 + 5x - 7$.

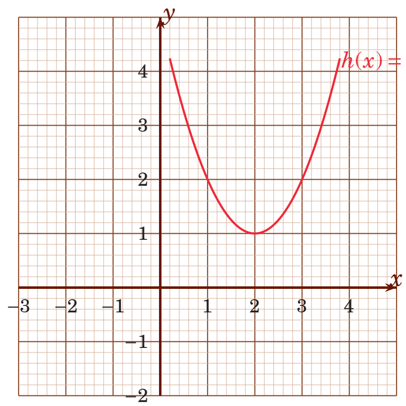
Ecuación cuadrática: existencia de soluciones

En esta sección vamos a explorar los ceros de una función cuadrática a través de: los correspondientes cortes de la parábola y el eje horizontal y las soluciones de una ecuación cuadrática.

En primer lugar, observemos las siguientes tres gráficas de funciones cuadráticas:







Miremos que la función cuadrática f, definida por

$$f(x) = x^2 - 1,$$

tiene dos ceros: $x = -1$ y $x = 1$, la parábola correspondiente de ecuación

$$y = x^2 - 1$$

corta el eje horizontal en $x = -1$ y $x = 1$ y la ecuación cuadrática correspondiente

$$x^2 - 1 = 0,$$

tiene dos soluciones: $x = -1$ y $x = 1$.

En cambio, la función cuadrática g, definida por

$$g(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2,$$

tiene un solo cero, $x = -3$, la parábola correspondiente corta el eje horizontal únicamente en $x = -3$ y la ecuación cuadrática tiene una solución $x = 3$.

Finalmente, la función cuadrática h, definida por

$$h(x) = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1,$$

no tiene ceros, la parábola correspondiente no corta el eje horizontal y la ecuación cuadrática no tiene soluciones reales.

No solo el gráfico de la función cuadrática nos es de ayuda para determinar el número de ceros de la función o el número de cortes de la parábola correspondiente; podemos obtener la misma información si examinamos la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Como se puede ver, en la expresión de la derecha, hay una raíz cuadrada.

Por otra parte, recordemos que no siempre la raíz cuadrada de un número real es un número real; por ejemplo: $\sqrt{-1}$ no es un número real, pues el cuadrado de ningún número real es un número negativo. Por ello, para determinar los ceros de una función cuadrática, debemos examinar el argumento de la raíz cuadrada en la fórmula de la ecuación cuadrática, argumento que es denominado *discriminante*.

1. Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces hay dos posibles raíces cuadradas de este número y, por lo tanto, hay dos soluciones para la ecuación cuadrática correspondiente:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2. Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces la raíz cuadrada es también igual a cero y, por lo tanto, hay una sola solución de la ecuación cuadrática correspondiente:

$$x = \frac{-b}{2a}.$$

3. Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces la raíz cuadrada no existe y, por lo tanto, la ecuación cuadrática correspondiente no tiene solución real.

Ejemplo 18

Determina cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones cuadráticas, mediante el análisis del discriminante correspondiente.

1. $x^2 - 6x - 5 = 0$,
2. $x^2 + 10x + 25 = 0$, *y*
3. $2x^2 + x + 1 = 0$.

Solución. El discriminante de la ecuación

$$x^2 - 6x - 5 = 0$$

es

$$(-6)^2 - 4(1)(-5) = 56 > 0.$$

Se concluye, entonces, que la ecuación tiene dos soluciones.

El discriminante de la ecuación

$$x^2 + 10x + 25 = 0$$

es

$$(10)^2 - 4(1)(25) = 0.$$

De allí se sabe que la ecuación tiene una sola solución.

Finalmente, el discriminante de la ecuación

$$2x^2 + x + 1 = 0$$

es

$$(1)^2 - 4(2)(1) = -7 < 0.$$

Se concluye, entonces, que la ecuación no tiene soluciones.

Ejemplo 19

Utiliza el análisis del discriminante para determinar cuántos ceros tiene la función g, definida por

$$g(x) = -x^2 + x + 1.$$

Solución. Para encontrar los ceros de la función g, debemos resolver la ecuación cuadrática correspondiente:

$$-x^2 + x + 1 = 0.$$

El discriminante de esta ecuación es

$$(1)^2 - 4(-1)(1) = 5 > 0.$$

Entonces, la ecuación tiene dos soluciones y, por lo tanto, la función g tiene dos ceros.

Ejemplo 20

Utiliza el análisis del discriminante para determinar cuántos cortes con el eje horizontal tiene la parábola de ecuación $y = -x^2 - 5$.

Solución. El discriminante de la ecuación cuadrática correspondiente

$$y = -x^2 - 5 = 0$$

es

$$(0)^2 - 4(-1)(-5) = -20 < 0.$$

Se concluye, entonces, que la ecuación no tiene soluciones, de manera que la parábola no corta el eje horizontal.

¡A practicar!

1. Utiliza el discriminante para determinar el número de soluciones de cada una de las ecuaciones cuadráticas dadas.

   (a) $x^2 - 7x + 5 = 0.$

(b) $x^2 - x + 5 = 0$.

(c) $x^2 - x - \frac{1}{4} = 0$.

2. Emplea el discriminante para determinar el número de cortes de la gráfica de la función f con el eje horizontal. Calcula los ceros de la función f.

   (a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

   (b) $f(x) = x^2 - x + 5$.

   (c) $f(x) = -x^2 + 5x + 6$.

Ejercicios

Conceptos

1. Determina si la función dada es lineal o es cuadrática. Utiliza la definición de función cuadrática para explicar tu respuesta.

   (a) $f(x) = -2x + x^2$.

   (b) $f(x) = -2x + 4^2$.

   (c) $g(z) = -2z + z^2$.

   (d) $h(t) = -2t + 3t^2$.

   (e) $m(s) = 5s - 7s^2$.

   (f) $r(t) = 3t + a^2$.

2. Para cada una de las funciones de la pregunta anterior, indica si la gráfica de la función es una recta o una parábola.

3. Empareja la función con la gráfica.

   (a) $f(x) = x^2 + 2$.

   (b) $f(x) = x^2 - 2$.

   (c) $f(x) = -x^2 + 2$.

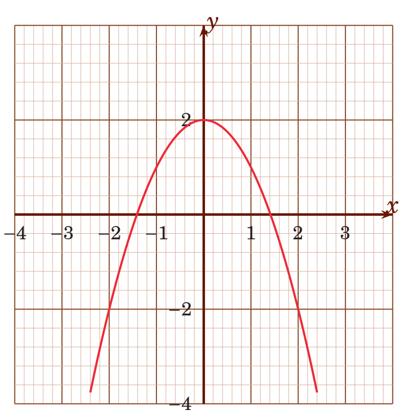
   (d) $f(x) = -x^2 - 2$.

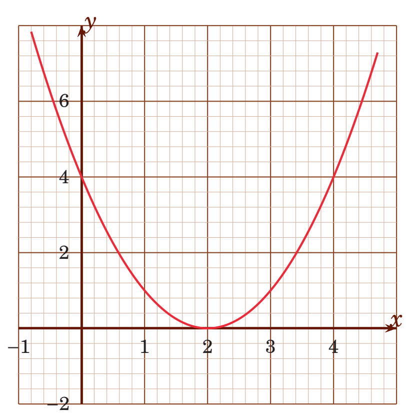
   (e) $f(x) = (x+2)^2$.

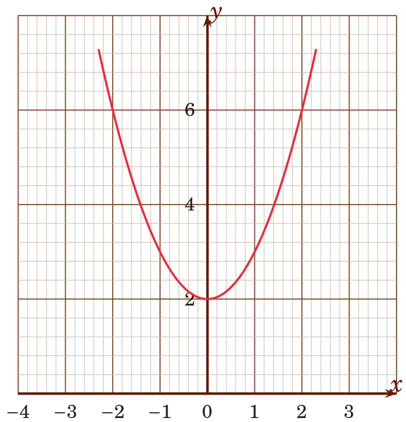
   (f) $f(x) = (x-2)^2$.

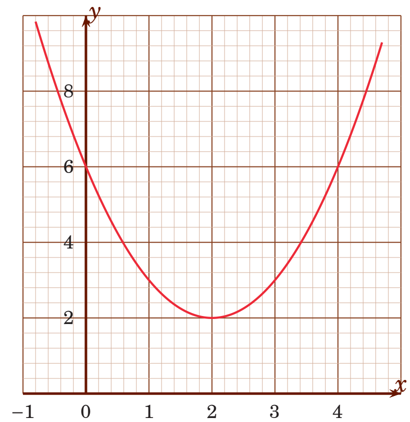
   (g) $f(x) = (x-2)^2 + 2$.

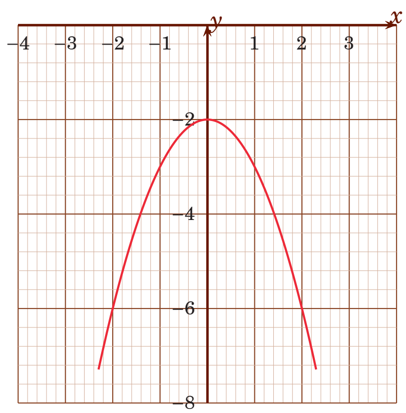
   (h) $f(x) = (x+2)^2 - 2$.

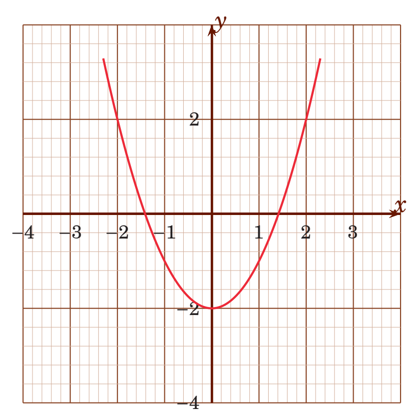


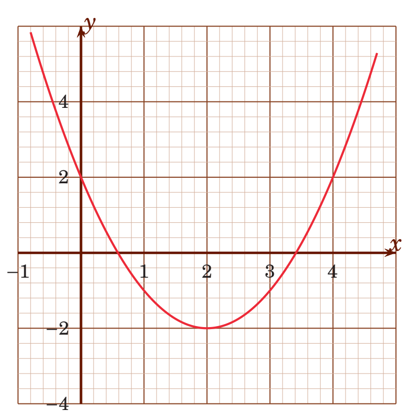


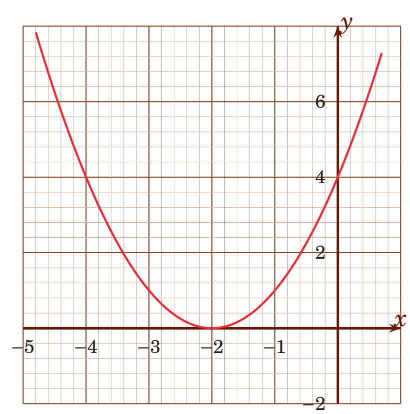












4. Completa las frases:

   (a) El vértice de la parábola de ecuación $y = (x-3)^2 + 5$ es el punto de coordenadas $(3,5)$. El punto x donde la función f, definida por $f(x) = (x-3)^2 + 5$, toma el valor mínimo es __________ y el valor mínimo de la función es __________.

   (b) El punto máximo de la función f, definida por $f(x) = -x^2 + 2x$, es $x = 1$; el vértice de la parábola de ecuación $y = -x^2 + 2x$ está localizado en el punto de coordenadas __________.

(c) La función f, definida por $f(x) = -x^2 + 7x$, tiene valor ____________ (máximo o mínimo).

(d) La función f, definida por $f(x) = 0{,}75x^2 + 0{,}1x$, tiene valor ____________ (máximo o mínimo).

(e) Si $f(x) \geq 3$ para cualquier valor de x y $f(2) = 3$, entonces el punto donde f adquiere el valor ____________ (máximo o mínimo) es ____________.

(f) Si $f(x) \leq 0$ para cualquier valor de x y $f(1) = 0$, entonces el punto donde f adquiere un valor ____________ (máximo o mínimo) es ____________.

5. Completa las frases:

(a) Los cortes de la parábola de ecuación $y = (x-1)^2 - 4$ son $x = 3$ y $x = -1$. Los ceros de la función cuadrática f, definida por $f(x) = (x-1)^2 - 4$, que corresponde a la parábola son ____________.

(b) Los ceros de la función f, definida por $f(x) = -x^2 + 2x$, son $x = 0$ y $x = 2$; los cortes de la parábola $y = -x^2 + 2x$ son ____________.

(c) Los ceros de la función f, definida por $f(x) = (x+3)^2$, son ____________.

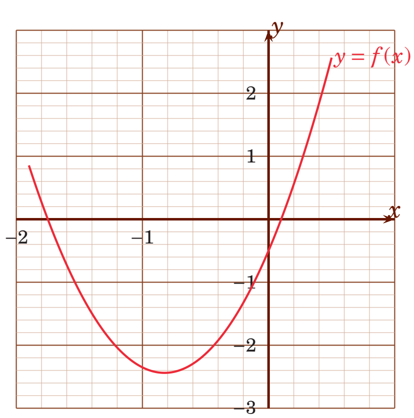
(d) Para encontrar los ceros de la función f, definida por $f(x) = x^2 - 2x - 5$, debemos resolver la ecuación cuadrática ____________.

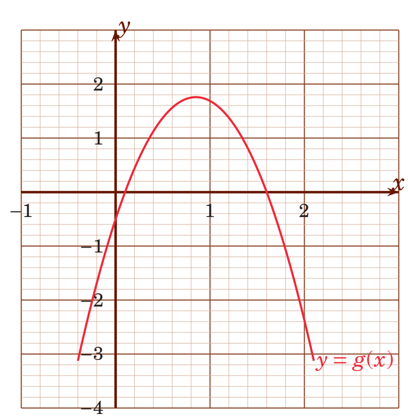
(e) El discriminante de la ecuación $x^2 + 3x - 8 = 0$ es 41, entonces la ecuación tiene ____________ (una, dos o ninguna) solución (es).

(f) El discriminante de la ecuación $x^2 + 3x + 8 = 0$ es -23, entonces la ecuación tiene ____________ (una, dos o ninguna) solución (es).

(g) El discriminante de la ecuación $x^2 + 3x + 8 = 0$ es -23, entonces la función f, definida por $f(x) = x^2 + 3x + 8$, tiene ____________ (uno, dos o ningún) cero (s).

6. Cada una de las siguientes gráficas representa una función cuadrática; la de la izquierda la nombramos con f; la de la derecha, con g.





(a) Determina, aproximadamente, los ceros de las funciones f y g, y sus valores mínimo o máximo.

(b) Utiliza la gráfica para obtener, aproximadamente, dos valores de x para los cuales $f(x) = -1$.

(c) ¿Hay un valor de x para el cual $f(x) = -5$? ¿Por qué?

(d) ¿Existe x tal que $g(x) = 7$? ¿Por qué?

(e) Utiliza la gráfica para determinar, aproximadamente, dos valores de x para los cuales $g(x) = -0{,}5$.

Procedimientos

1. En cada caso, grafica de manera aproximada la función f, definida por:

   (a) $f(x) = x^2 + 4$.

   (b) $f(x) = 2x^2 + 4$.

   (c) $f(x) = -x^2 + 4$.

   (d) $f(x) = -2x^2 + 3$.

   (e) $f(x) = (x-5)^2 + 6$.

   (f) $f(x) = (x+5)^2 - 6$.

   (g) $f(x) = 3(x+5)^2 - 6$.

   (h) $f(x) = -3(x+5)^2 - 6$.

   (i) $f(x) = -(x+1/3)^2 + 1/2$.

2. En cada caso, calcula el vértice de la parábola de ecuación dada. Completa el cuadrado cuando sea necesario.

   (a) $y = -2(x+1)^2 - 9$.

   (b) $y = 8(x-1)^2 + 9$.

   (c) $y = -3/2(x-1)^2 + 4/3$.

   (d) $y = -6(x+1/3)^2 + 1/2$.

   (e) $y = x^2 - 2x + 1$.

   (f) $y = x^2 - 4x + 1$.

   (g) $y = x^2 - 8x + 3$.

   (h) $y = 5x^2 - 2x + 4$.

3. En cada caso, calcula el vértice de la parábola de ecuación dada, mediante la fórmula general para el vértice.

   (a) $y = x^2 - 9x + 3$.

   (b) $y = 8x - x^2$.

   (c) $y = -3/2x^2 + 4/3x$.

   (d) $y = 0{,}1x^2 - 0{,}2x + 1$.

4. Encuentra el valor mínimo o máximo de las funciones cuadráticas correspondientes a las parábolas dadas en el ejercicio anterior.

5. Halla los cortes de las parábolas del ejercicio 2.

6. Encuentra los ceros de las funciones dadas en el ejercicio 1.

7. Resuelve las ecuaciones cuadráticas utilizando la fórmula cuadrática solo cuando no sea posible factorar fácilmente.

   (a) $x^2 - 6x + 9 = 0$.

   (b) $x^2 + 20x + 100 = 0$.

(c) $x^2+12x+20=0$.

(d) $x^2+7x-2=0$.

(e) $3x^2+4x-2=0$.

(f) $x^2+7x+35=0$.

(g) $x^2+7x=0$.

(h) $2x^2-7x=0$.

(i) $10x^2+x-0{,}3=0$.

8. Usa el discriminante para determinar cuántas soluciones tiene cada ecuación cuadrática del problema anterior.

9. Considera la función f, definida por $f(x)=5x^2-x+1$. Encuentra el valor de x para el cual $f(x)=10$.

10. La función f está definida por $f(x)=5x^2-x+1$. Determina si hay un valor x para el cual $f(x)=-10$.

11. Si se define la función f por $f(x)=-x^2-x+3$. Encuentra el valor de x para el cual $f(x)=-5$.

12. Considera la función f, definida por $f(x)=-x^2-x+3$. Determina si hay un valor x para el cual $f(x)=8$.

Pensamiento crítico

1. Resuelve la ecuación mediante dos métodos diferentes: uno algebraico, el otro gráfico: $x^2=x$.

2. Resuelve la ecuación con dos métodos diferentes: uno algebraico, el otro gráfico: $-x^2+1=x^2-1$.

3. La función cuadrática f, definida por $f(x)=x^2+2x+c$, tiene un solo cero. Encuentra el valor de c.

4. La función cuadrática f, definida por $f(x)=x^2+2x+c$, no tiene ceros. Encuentra los valores de c.

5. La función cuadrática f, definida por $f(x)=ax^2+x-1$, es tal que $f(-2)=0$. Determina el valor de a.

6. Escribe una función cuadrática cuyos ceros sean -3 y 7.

7. ¿Cuántos posibles puntos de intersección hay entre dos parábolas? Justifica tu respuesta con dos argumentos: uno geométrico, el otro algebraico.

8. La gráfica de la ecuación $y=5x^2+bx$ tiene el vértice localizado en $x=2/5$; calcula el valor de b.

9. Si una función cuadrática f cumple con $f(2)=0$, $f(5)=0$ y $f(0)=-1$, encuentra la función f. ¿Es esta la única función cuadrática que cumple con esas condiciones?

10. Si una función g cumple con $f(2)=0$, $f(5)=0$ y f tiene un mínimo, halla una función cuadrática que las cumpla. ¿Es esta la única función cuadrática que cumple con esas condiciones?

11. Encuentra condiciones para a, b y c para decidir cuándo es posible factorar el polinomio cuadrático ax^2+bx+c en dos factores lineales con coeficientes reales.

Modelos

1. El perímetro de un rectángulo de base x es 100. ¿Cuál es el valor de x si sabemos que el rectángulo tiene un área máxima?

2. El perímetro de un rectángulo de base x es 200. ¿Cuál es el valor de x si sabemos que el rectángulo tiene un área máxima?

3. Un círculo tiene un área de 100 centímetros cuadrados. Determina su radio.

4. Un círculo tiene un área de 10 metros cuadrados. Calcula su radio.

5. Un rectángulo ha sido dividido en dos áreas iguales. Determina el valor de x, de la base del rectángulo dado (mira la figura), si queremos que su área sea máxima y sabemos que el perímetro externo de la figura es 150 centímetros.

6. Un rectángulo ha sido dividido en tres áreas iguales. Determina el valor de x de la base del rectángulo dado (mira la figura), si queremos que su área sea máxima y sabemos que el perímetro externo de la figura es 200 centímetros.

Uso de tecnología

Si cuentas con una calculadora gráfica, o una computadora con una aplicación que te permita graficar, o puedes acceder a una aplicación en el Internet, realiza los siguientes ejercicios.

1. Determina el rango de valores de x y de y para los cuales puedas ver tanto el vértice como los cortes con el eje horizontal de la parábola correspondiente a la función f, definida por $f(x) = x^2 + 55x + 500$. Luego, realiza la gráfica.

2. Calcula el rango de valores de x y de y para los cuales puedas ver tanto el vértice como los cortes con el eje horizontal de la gráfica de la función f, definida por $f(x) = -2x^2 + 30x + 25$. Luego, haz la gráfica.

3. Uno de tus compañeros realiza la gráfica de la función f, definida por

$$f(x) = -1/2x^2 + 7x - 1$$

en el intervalo $[-4, 4]$, y dice que es una recta. ¿Está tu compañero en lo correcto? Si no fuera así, ¿qué le dirías para explicarle su equivocación?

4. Encuentra de manera aproximada las soluciones de las ecuaciones utilizando la gráfica de una función:

   (a) $-1/2x^2 + 7x - 1 = 0$.

   (b) $1/3x^2 + 5x - 1/2 = 0$.