Recomendaciones didácticas generales

El texto de Matemática, para primer año de Bachillerato General Unificado, ha sido concebido sobre la base de la experiencia e investigación de docentes nacionales y de alrededor del mundo de las últimas tres décadas. El resultado ha dado un grupo de principios que nos sirven de guía en el proceso de enseñanza–aprendizaje, y en los cuales se sustenta el contenido de este libro. En síntesis son los siguientes:

Fundamentos pedagógicos del libro

- El proceso de aprendizaje es continuo y ocurre en un ámbito social dentro y fuera de las aulas.
- El proceso de enseñanza debe partir del conocimiento presente del estudiante e incorporar lo aprendido con anterioridad como base para el futuro aprendizaje. Por ello, el proceso es particular de cada estudiante.
- El aprendizaje tiene que ser relevante para el estudiante, de manera que éste se convierta en un agente activo de dicho aprendizaje. En particular, la Matemática tiene que relacionarse con la vida cotidiana del estudiante y con el medio social en el cual está inmerso.
- El proceso de aprendizaje va de lo concreto a lo abstracto. El proceso de enseñanza de la Matemática debe incorporar suficientes etapas que conduzcan a que su característica simbólica sea aprendida de modo gradual.
- El proceso de enseñanza debe ser gradual; es decir, un proceso que introduce escenarios con bajas demandas cognitivas (por ejemplo: pocos símbolos, uso únicamente de conocimientos cimentados, pocos pasos de tipo calculativo, etcétera).
- El proceso de enseñanza debe ser recursivo. Entendemos por proceso recursivo a aquel que introduce un paso sencillo y luego, en el futuro del proceso de enseñanza, utiliza ese paso para introducir otro más elaborado. Por ejemplo: en tercer año de EGB, se estudia una introducción a las rectas; en primero año de Bachillerato, se estudiará las rectas desde un punto de vista funcional; y en primer año de la universidad, estudiarán rectas como una parte integral de sus estudios de Cálculo.
- El proceso de enseñanza-aprendizaje requiere de la comunicación verbal. Los estudiantes aprenden hablando y escribiendo las ideas. El docente debe enunciar y escribir mediante frases completas y lenguaje preciso las ideas fundamentales en cada problema matemático. De la misma manera, debe ayudar a sus estudiantes a ejercer y desarrollar tal destreza.

- Los conceptos matemáticos se aprenden, primeramente, mediante representaciones y luego mediante definiciones formales. Por ejemplo: definiremos qué es una función cuadrática y, al mismo tiempo, desarrollaremos gráficas, tablas, símbolos y dibujos que la representen.

- El aprendizaje de conceptos se fundamenta en ejemplos y contraejemplos. Un concepto matemático crea una categoría de objetos. Este concepto debe ser *concretizado* a través de ejemplos de aquellos objetos que pertenecen a tal categoría y con objetos que no pertenecen a esa categoría. Por ejemplo: si introducimos la categoría de *parábola*, esta debe ser contrastada con el de la *recta*.

- El aprendizaje basado en la solución de problemas debe ser parte integral del proceso de enseñanza-aprendizaje. Un problema presenta una situación estimulante y requiere de etapas cognitivas y procedimentales que son, en sí mismas, objetivo de aprendizaje.

- El uso de tecnología suele ser necesario, pues coadyuva y facilita el aprendizaje. En particular, en primer año de Bachillerato la introducción de funciones se simplifica al visualizar múltiples gráficas.

- El proceso de enseñanza-aprendizaje se enriquece cuando se lleva a cabo en comunidad. Los estudiantes con frecuencia pueden aprender más de sus compañeros que del docente. El profesor debe utilizar este recurso valioso y administrar el tiempo de manera que favorezca el aprendizaje en comunidad.

Sugerencias metodológicas

El texto de Matemática para primer año de Bachillerato se divide en cuatro bloques curriculares, según los lineamientos curriculares (2011) para el Bachillerato, publicados por el Ministerio de Educación del Ecuador.

Cada bloque está presentado en varios capítulos. Cada capítulo del libro contiene los siguientes elementos que han sido concebidos tomando en cuenta los fundamentos pedagógicos generales expuestos en los párrafos anteriores.

Motivación

Este componente tiene como objetivo que el estudiante reconozca elementos matemáticos que están presentes en su vida cotidiana: escenarios sociales, de medioambiente, de tecnología, etcétera. El componente debe despertar el interés por conocer más sobre el tema relatado, además de reconocer la necesidad de aprender la matemática necesaria para entender con mayor profundidad tal tema.

Sugerencias

- Utilice 15 minutos de un período de clase para que sus estudiantes lean este componente y lo discutan en grupo.

- Inspire confianza para que los estudiantes conversen de manera informal, y respondan las preguntas planteadas solamente partiendo de lo que ellos conocen.

- No espere respuestas técnicas o con precisión matemática.

- Estimule a que sus estudiantes formulen otras preguntas, aunque no tengan relación directa con el contenido matemático que se estudiará.

Repaso e introducción

Este componente tiene como objetivo recalcar el conocimiento aprendido, y evaluar el estado de conocimiento y preparación que los estudiantes tienen.

Sugerencias

- Utilice al menos un período de clase para permitir a sus estudiantes que realicen su trabajo en grupos pequeños de dos o tres.
- Pida a sus estudiantes que realicen dos ejercicios de cada tema. Solo cuando hayan agotado todos los temas, pídales que regresen a realizar más ejercicios de cada tema.
- Identifique a aquellos estudiantes que ya dominan el material para que sean tutores de otros estudiantes.
- Focalice la discusión de la clase en los temas que se hayan presentado como problemáticos para todo el grupo.
- Según sea el caso, dedique una segunda hora de clase para terminar el proceso de preparación.

Experimentación

Este módulo está diseñado para que los estudiantes descubran patrones y exploren nociones iniciales. Un aspecto importante que facilita este módulo es la preparación del estudiante para resolver problemas paso a paso. Se espera que el estudiante desarrolle confianza y aprenda a vincular conocimientos prácticos con conocimientos teóricos.

Sugerencias

- Utilice un período de clase para desarrollar esta actividad.
- Prepare el material que considere necesario y téngalo a mano para distribuirlo entre los estudiantes.
- Forme grupos de cuatro estudiantes para que trabajen el problema.
- Pida a los estudiantes que preparen un reporte de lo que encontraron.
- Permita que sus estudiantes experimenten con el problema.
- Escoja dos o tres grupos (no necesariamente los que tengan todo correcto) para discutir los resultados encontrados.
- Sintetice lo aprendido al final de la clase.

Ejemplos introductorios, definiciones, principios o axiomas, derivación de fórmulas genéricas

Este componente está diseñado para construir, de manera gradual y con un principio inductivo, nociones que serán generalizadas y formalizadas posteriormente.

Las definiciones formales y fórmulas son presentadas junto con ejemplos y representaciones. Se espera que el estudiante aprenda progresivamente la aplicación deductiva.

Cada capítulo está divido en secciones claramente marcadas, y se ha diseñado de tal forma que el texto se adapte a la planificación y elaboración de lecciones.

Sugerencias

- Dedique una o dos clases a cada sección del capítulo.
- Presente los objetivos de aprendizaje al inicio de cada clase. Por ejemplo: "Hoy aprenderemos a encontrar los cortes de una parábola con el eje horizontal".
- No utilice más de veinte minutos de su clase en presentaciones de pizarra.
- Explique procedimientos, resultados genéricos y definiciones varias veces y con distinto lenguaje cada vez.
- Guíe a sus estudiantes para que aprendan a leer el texto. Pida a sus estudiantes que lean un ejemplo y que pregunten en el caso de que no comprendan algún paso en particular.
- Estimule a sus estudiantes a evaluar su propio aprendizaje; es decir, a identificar elementos que no comprenden.
- Sintetice lo aprendido al final del período; resalte una definición o una fórmula aprendida.

Ejercicios de práctica pausados y graduales

Este componente le permite al estudiante evaluar su propio aprendizaje. Estos son ejercicios generalmente procedimentales, que pueden ser realizados en el aula o enviados de deber para la casa.

Sugerencias

- Utilice unos minutos antes de la finalización de su clase para que los estudiantes comiencen su autoevaluación.
- Identifique los conocimientos que causan dificultades para comenzar su siguiente clase con este tema.
- Pida a sus estudiantes que completen estos ejercicios en la casa y complementen el deber con ejercicios planteados al final del capítulo.

Ejercicios del capítulo

Este componente presenta ejercicios para ser desarrollados en la clase o en la casa; los ejercicios están organizados según el requerimiento cognitivo y no en el orden de presentación del capítulo. Este componente ha sido diseñado conforme a la siguiente clasificación:

- *Conceptuales*: ejercicios que permiten desarrollar la capacidad para comprender conceptos.
- *Procedimentales*: ejercicios que favorecen la práctica de procedimientos.
- *Pensamiento crítico*: ejercicios que fomentan la capacidad de combinar varios de los conocimientos adquiridos.
- *Modelos y experimentación*: ejercicios que permiten relacionar el conocimiento matemático aprendido con otras áreas del conocimiento y con el medio social del estudiante.
- *Uso de tecnología*: ejercicios que requieren calculadora gráfica, *software* de computadora o aplicaciones en línea.

Sugerencias

- Antes de asignar un ejercicio para el deber, tenga presente el requerimiento cognitivo de éste; asegúrese de que sus estudiantes cuenten con los conocimientos que se necesita para el desarrollo del ejercicio.
- Discuta en clase los ejercicios que hayan presentado dificultad al grupo.

Recomendación

Se le recomienda al docente la lectura atenta del documento de Actualización y Fortalecimiento Curricular de la Educación General Básica. Además, al final del libro encontrará lecturas adicionales y bibliografía.

Recomendaciones para el docente sobre “Funciones”

Para “Introducción”

Esta sección tiene como objetivo desarrollar el concepto de función a partir de las nociones y conocimientos previos que nuestros estudiantes tienen. Dependiendo del medio en el que viven los estudiantes, estas nociones pueden variar. Algunos ejemplos de estas nociones pueden ser:

- **Cantidades interdependientes**:
  - precio unitario - costo total;
  - distancia - tiempo - velocidad;
  - valor de un objeto - tiempo de uso;
  - cantidad de conocimientos - edad de la persona;
  - horas de estudio - calificación;
  - uso de la TV - consumo de luz.
- **Materia prima - Producto elaborado**:
  - número de libras de harina - cantidad de pan que se produce;
  - número de quintales de cemento - tamaño de una construcción;
  - cantidad de tela - número de pantalones que se pueden cortar y coser;
  - cantidad de cabezas de banano - número de fundas de chifles.
- **Procedimiento algorítmico**:
  - Una receta de cocina requiere seguir pasos en secuencia.
  - Una persona realiza habitualmente una rutina cada mañana.
  - En la agricultura se siguen varias actividades en distintos momentos del año.

Sugerencias metodológicas

- Dedique 10 minutos a esta actividad.
- Pida a uno de sus estudiantes que lea la introducción al capítulo.
- Plantee preguntas a toda la clase que lleven a resaltar las nociones sugeridas.

Los estudiantes también parten de un conocimiento previo de la noción de variable, operaciones con variables y expresiones algebraicas lineales. La sección **Preparación y repaso** tiene como propósito traer al presente estos conocimientos y darle al docente una pauta del punto de partida de sus estudiantes. Este capítulo es introductorio. Las notaciones, definiciones y conceptos planteados en este capítulo serán desarrollados de manera gradual en los capítulos sobre funciones lineales y cuadráticas.

Para “Preparación y repaso”

Sugerencias metodológicas

- Dedique una hora de clase para determinar el nivel de preparación que tienen sus estudiantes.
- Pida a sus estudiantes que resuelvan los ejercicios 1a, 2a, 3a, 4a y 5a. Luego, retome el resto de los ejercicios planteados.
- Discuta con el grupo los ejercicios 1, 2 y 5, pues estos son base importante para este capítulo y el siguiente.
- Si encuentra que la preparación de sus estudiantes es deficiente en el problema 4, recuerde que estos conocimientos pueden retomarse en algunos capítulos subsiguientes. Por ejemplo: en el capítulo “Funciones cuadráticas”, sus estudiantes tendrán la oportunidad de aprender nuevamente sobre la descomposición en factores.
- Asigne como deber los ejercicios que están al final del capítulo, los cuales están diseñados para recordar o aprender según el grado de conocimientos fundamentales de sus estudiantes. Discuta la solución de estos ejercicios en el inicio de la siguiente clase.

Para “Investigación”

Esta sección da a sus estudiantes la oportunidad de explorar, mediante una actividad lúdica, un patrón que conduce a un modelo exponencial: el número de rectángulos en el papel es 2^n, donde n es el número de dobleces.

Sugerencias metodológicas

- Dedique media hora para esta actividad.
- Permita que sus estudiantes discutan sin apresurar una “solución”.
- Asegúrese que sus estudiantes trabajen esta actividad de manera colaborativa.
- Asegúrese de que cada grupo tenga distintos tamaños de papel.

Para “Noción de función”

El concepto de función debe ser desarrollado de manera conceptual, procedimental y en contexto. Esta sección sustenta el desarrollo conceptual en las siguientes nociones y conceptos:

- Una función es una máquina que toma un valor y lo transforma en otro; toma un elemento de entrada y entrega uno de salida.
- Una función es una relación entre variables que puede estar representada mediante una ecuación.
- Una función puede ser representada mediante una gráfica en el plano.
- Una función puede ser definida mediante una tabla de valores.
- Una función puede ser descrita verbalmente.

El desarrollo procedimental se afinca en los siguientes contenidos:

- Evaluar la función; es decir, calcular la imagen de un elemento del dominio respecto de la función.
- Construir una tabla para una función.
- Leer la gráfica de una función.
- Determinar el dominio de una función en casos sencillos.

Para "Evaluación de una función"

Los conceptos matemáticos se aprenden, primeramente, mediante representaciones y luego mediante definiciones formales. Los estudiantes deben recibir, gradualmente, la definición formal de función. Esta sección, además, introduce nuevos términos: *imagen*, *preimagen*, *valor de entrada*, *valor de salida*, *dominio*.

Evaluar una función es una de las destrezas procedimentales que se desarrolla en este capítulo. En la sección se presentan ejemplos sencillos conducentes a la definición de dominio de una función.

Sugerencias metodológicas

- Utilice una hora de clase para esta sección.
- Use los ejemplos de la actividad introductoria para presentar las nociones de entrada y salida de una función.
- Realice con toda la clase los ejemplos 1 y 2 de esta sección.
- Los estudiantes conocen expresiones como $2x+1$; al incorporar $f(x)=2x+1$, insista, progresivamente, en el uso de x como el valor de entrada y $2x+1$, como el valor de salida.
- Exponga, gradualmente, el uso adecuado de la notación $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$.
- Insista, progresivamente, en el uso adecuado de la notación $f(x)$ como imagen del valor x y no como la función misma.
- Pida a sus estudiantes que verbalicen "f de x" al escribir $f(x)$, pero también como "la imagen de x respecto de f".
- Presente en la pizarra una función sencilla y evalúela en números positivos, negativos, enteros, racionales, en notación racional y en notación decimal.
- Conforme introduzca nuevas notaciones y definiciones, expóngalas de manera permanente en el aula; por ejemplo: en una cartulina o una cartelera.

Para "Representaciones de una función"

Los estudiantes aprenden de manera diversa por medio de representaciones gráficas, expresiones verbales, algebraicas y numéricas (mediante tablas). En esta sección, se presentan múltiples oportunidades de aprendizaje a través de ejemplos con diversas representaciones de una función.

Sugerencias metodológicas

- Dedique una hora de clase a esta sección.
- Comience su clase con la actividad "Flujo de tráfico en Quito".
- Pida a sus estudiantes que estudien la gráfica y, por turnos, que respondan las preguntas planteadas.
- Escriba en la pizarra la definición de gráfica de una función y expóngala de manera permanente en el aula.
- Presente a sus estudiantes gráficas que les permitan visualizar propiedades de funciones, a este nivel, incluso de manera informal: *simetría*, *monotonía*, *cortes con los ejes*, etcétera.
- Presente a sus estudiantes gráficas que les permitan visualmente identificar cuando una gráfica corresponde a una función o no. Apele a la noción intuitiva de máquina para recalcar el hecho de que dado un valor x solo hay una imagen $f(x)$.

El concepto de función en contexto se forma al expresar de manera matemática situaciones de la vida cotidiana o de otras áreas de estudio. En este capítulo se presentan varios "modelos".

Capítulo 1

Funciones

Vivimos en un mundo lleno de fenómenos que revelan su naturaleza matemática, y en los que encontramos cantidades que se relacionan entre sí. Por ejemplo: en la biología, la cantidad de bacterias que crecen en un cultivo depende de la cantidad de alimento que haya en el medio en el que se encuentra el cultivo; en la economía, la demanda y el precio están relacionados; en la geometría, el área de un círculo depende del radio de este. En nuestra vida cotidiana, podemos observar situaciones sencillas:

1. la altura de una persona depende de su edad;
2. mi peso cambia de acuerdo al número de calorías que consumo; y,
3. en un paseo de la Sierra a la Costa, notamos que la temperatura del aire cambia conforme disminuye la altura a la cual nos encontramos respecto del nivel del mar.

Preparación y repaso

1. Ubicación de parejas ordenadas en el plano.

   (a) Grafica en un plano de coordenadas los puntos que corresponden a las siguientes parejas ordenadas: $(0,2)$, $(-1,3)$, $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$, $(-1,0)$.

   (b) Determina en qué cuadrante están los puntos que corresponden a las parejas: $(\pi,-\pi)$, $(3\sqrt{2},-\sqrt{3})$, $(a^2,3a^2)$.

2. Evaluación de expresiones aritméticas con números reales.

   (a) Evalúa $3^2 - 4\ \ 3^3 + 1$.

   (b) Evalúa $\left(\dfrac{64}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$.

   (c) Evalúa $(0{,}4)^2 \times 5^2$.

3. Operaciones con expresiones algebraicas.

   (a) Simplifica:

      i. $x^2 + x - 2x^2 - (x+4)$.
      ii. $3t - 2(6+2t)$.
      iii. $\dfrac{1}{y}\left(4y^2 - \dfrac{y}{2}\right)$.

   (b) Determina si es verdadera o falsa cada una de las igualdades siguientes:

      i. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.
      ii. $\dfrac{1}{a+b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

4. Operaciones con polinomios.

   (a) Simplifica:

      i. $(3x-1)(2x+4)$.
      ii. $\dfrac{4x^2 - x}{x}$.
      iii. $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$.
      iv. $\dfrac{x^2 - 7x + 10}{x-5}$.

5. Resolución de ecuaciones lineales.

   (a) Encuentra el valor de x para que cada una de las siguientes igualdades sea verdadera.

      i. $3x + 6 = 4$.
      ii. $\dfrac{1}{2} + 1 = -x$.
      iii. $\dfrac{5}{2}a + \dfrac{3}{4} = 2a + \dfrac{1}{5}$.

6. Representación de subconjuntos de números reales mediante intervalos.

   (a) Expresa el siguiente conjunto con la notación de intervalos: $\{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 3\}$.

   (b) Expresa el siguiente conjunto con la notación de intervalos: $\left\{x \in \mathbb{R} : x \geq \sqrt{2}\right\}$.

Investigación

¿Intentaste doblar un papel muchas veces alguna vez? ¿Cuántas veces lo puedes doblar sucesivamente en mitades? Algunos libros de "curiosidades matemáticas" mencionan el hecho de que un papel solo puede ser doblado siete veces en secuencia, sin importar qué tan grande sea éste. ¿Es esto cierto? ¡Investígalo! Escoge varios tamaños de papel y dobla sietes veces en la mitad cada uno sucesivamente. ¿Llegaste a alguna conclusión? Esta investigación te ayudará a encontrar la respuesta y una posible explicación.

1. ¿Cuántas hojas se producen con cada doblez?
2. Organiza la información en una tabla como la siguiente:

número de dobleces	número de hojas
0	1
1	2
2	4
3	
4	

3. ¿Puedes encontrar una relación entre el número de dobleces y el número de hojas obtenidas? ¿Observas algún patrón entre esas dos cantidades? Si nombras con la letra n el número de dobleces y con h el número de hojas, ¿puedes escribir una fórmula o una ecuación que relacione n con h? ¿Son importantes en sí mismas las letras que utilizamos para representar a cada cantidad?
4. Si haces 10 dobleces, ¿cuántas hojas obtienes? ¿Cuántos dobleces se necesitan para tener 256 hojas?
5. Grafica las parejas ordenadas de la tabla en un plano cartesiano, y trata de dibujar una línea curva que pase por todos los puntos. ¿Cómo se ve el dibujo obtenido?
6. ¿Es importante el tamaño de la hoja inicial?
7. Compara tus respuestas con las de tus compañeros.

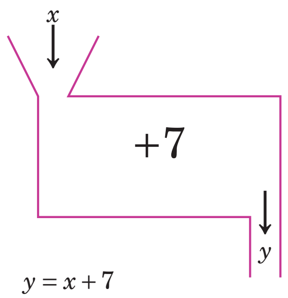
Regresa a la pregunta original: trata de encontrar razones por las cuales la respuesta puede ser afirmativa.

1. ¿Qué pasa si doblas el papel en tres, en lugar de doblarlo en dos?
   (a) Encuentra una ecuación que relacione el número de hojas h después de n dobleces.
   (b) Determina el número de hojas que salen cuando se hacen 5 dobleces.
   (c) Calcula cuántos dobleces hacen falta para tener 81 hojas.
2. Encuentra una ecuación que relacione el número de hojas que se pueden obtener cuando doblas el papel en a partes después de n dobleces.

Noción de función

En la investigación de esta unidad, encontraste una ecuación que relaciona dos cantidades: el *número de dobleces* y el *número de hojas obtenidas*. Descubriste también que si la segunda cantidad *cambia* o *varía*, la otra también lo hace. Cuando esto ocurre, en Matemática decimos que el número de hojas es una *función* del número de dobleces. A ambas cantidades que varían se las denomina *variables*. Sin embargo, como la variable *número de hojas obtenidas* cambia cuando cambia la variable *número de dobleces*, a la primera se la denomina *variable dependiente* y a la segunda, *independiente*.

En esta sección comprenderemos la noción de función de varias maneras.



$y = x + 7$

1. Una función puede ser entendida como una *máquina* a la cual se la alimenta con un objeto x, y la máquina produce un *solo* resultado y.

   Por ejemplo: una máquina que duplica la cantidad de objetos que se le den. Esta máquina puede representarse por medio de la fórmula $y = 2x$. Otro ejemplo: una máquina que añade 7:

   (a) Si el valor de entrada fuera 4, entonces el valor de salida será 11.

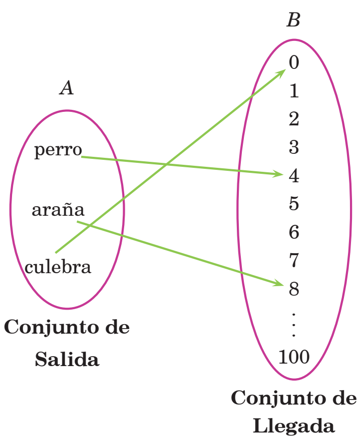
   (b) Si el valor de entrada fuera -1, el valor de salida será 6.

   (c) Si el valor de entrada fuera u, el valor de salida será $u + 7$.

   (d) ¿Cuál será el valor de salida si el de entrada es -7?

   (e) ¿Cuál será el valor de entrada si el de salida es 3?

Para cada valor de entrada, hay un solo valor de salida. En lenguaje matemático, decimos que y es la *imagen* de x.



2. Una función puede ser comprendida como una *regla de asignación*: a cada elemento de un conjunto se le asigna un *único* elemento de otro conjunto. Por ejemplo: a un animal se le asigna el número de sus patas. Una regla de asignación se puede representar mediante flechas.

   (a) ¿Conoces algún animal al que le corresponda el número 6? ¿El 5?

   (b) Hay algunos números del conjunto de los números de patas que no le corresponden a ningún animal.

   (c) Hay algunos elementos del conjunto de números de patas (como el 4) que corresponden a varios animales.

   Al conjunto de animales suele llamársele *conjunto de salida*; al conjunto de los números de patas, *conjunto de llegada*.

   ¿Es posible que para algún animal la regla le asigne más de un número? ¡No! Por ello, esta *relación* es una *función*. Para una función, cada elemento del conjunto de salida está en relación con un solo elemento del conjunto de llegada.

3. En la vida cotidiana, existen ejemplos de cantidades que se relacionan. Una función puede ser entendida como una *relación* entre dos cantidades. Por ejemplo:

   (a) El *pago de impuestos* está relacionado con el *ingreso que tiene una persona*.

   (b) La *distancia* que recorre un automóvil desde un cierto momento está relacionada con el *tiempo* en que éste se encuentra en movimiento desde dicho momento.

   Los dos ejemplos comparten una característica común: cada valor dado de la segunda cantidad se relaciona con un único valor de la primera. Por ejemplo: dado el ingreso de una persona, hay un único valor para el impuesto que esta persona debe pagar. Lo mismo ocurre en el segundo ejemplo: dado que un automóvil recorre con una cierta velocidad en un cierto intervalo de tiempo, solo puede recorrer una única distancia.

Considera ahora la siguiente relación: un *animal* está relacionado con su *número de patas*. En este caso, dado un número de patas posible, pueden haber varios animales con ese mismo número; por ejemplo: dado el 4, un perro, un gato, un caballo son animales que están relacionados con el número 4.

El ejemplo anterior nos muestra que no toda relación es una función.

- Una ***función de un conjunto A en un conjunto B*** es una relación en la que a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B.
- El conjunto A es denominado ***conjunto de salida***; el conjunto B, en cambio, ***conjunto de llegada***.

Si utilizas la letra f para representar una función de un conjunto A en un conjunto B, escribirás

$$f : A \longrightarrow B$$

Si $x \in A$, utilizarás el símbolo $f(x)$ para representar la imagen de x, y escribirás

$$x \longmapsto f(x)$$

Ejemplo 1

- La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x^3 - x + 1$ también podemos describirla mediante la ecuación
$$y = 2x^3 - x + 1.$$
- La función que a cada real asigna su cuadrado puede ser descrita como $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$.

Evaluación de una función

Evaluar una función es encontrar el valor de salida teniendo el valor de entrada. También podemos decir que evaluar una función es encontrar la imagen de un valor x.

Por ejemplo: dada la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cuya ley de asignación es $f(x) = -x^3 - x + 1$, evaluemos f en 0. Para ello, debes sustituir el valor 0 por la x que aparece en

$$f(x) = -x^3 - x + 1;$$

así:

$$f(0) = -0^3 - 0 + 1 = 1;$$

en otras palabras, la imagen de 0 es 1.

De manera similar, puedes evaluar f en 1, en -1, h y en $\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$; es decir, puedes calcular los valores

$$f(1), \quad f(-1), \quad f(h), \quad f\left(\frac{1}{x}\right).$$

- $f(1) = -1^3 - 1 + 1 = -1.$
- $f(-1) = -(-1)^3 - (-1) + 1 = 3.$
- $f(h) = -h^3 - h + 1.$
- $f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + 1 = \frac{-1 - x^2 + x^3}{x^3}.$

Ejemplo 2

Para la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5$, tienes que $f(1) = 5$, $f(-3) = 5$, $f(2/3) = 5$. Esta función es un ejemplo de una función *constante*. ¿Por qué crees que se la denomina así?

Ejemplo 3

Dada la función g tal que $x \longmapsto 1/x$, encuentra las imágenes de 2, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$ y -3.

Solución. Lo que debes hacer es determinar los valores $f(2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(\sqrt{2})$ y $f(0)$:

- $f(2) = \dfrac{1}{2}$.
- $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.
- $f(\sqrt{2}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
- $f(-3) = \dfrac{1}{-3} = -\dfrac{1}{3}$.

¿Cuál es la imagen de 0? Para calcularla, deberías poder calcular $f(0)$:

$$f(0) = \frac{1}{0};$$

sin embargo, esta división no existe; por tanto, f no se puede evaluar en 0, y 0 no tiene una imagen respecto de la función f.

En el ejemplo 3, decimos que el número 0 no está en el *dominio* de la función f. En general, cuando un número real a no tiene imagen respecto de una función f, decimos que a no está en el *dominio* de la función, y que $f(a)$ no existe.

El conjunto de todos los valores del conjunto de salida que tienen una imagen en el conjunto de llegada de la función se llama ***dominio*** de la función f, y se representa así: $\operatorname{dom} f$.

Ejemplo 4

Encuentra el dominio de la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -\dfrac{1}{(3-x)^2}$.

Solución. Observa que el denominador es cero cuando $x = 3$. En $x = 3$, la operación

$$-\frac{1}{(3-x)^2}$$

no existe. Por tanto, el dominio de la función f es $]-\infty, 3[\, \cup\,]3, +\infty[$.

En el ejemplo 3, observa que el número 0 no tiene preimagen, pues no existe un valor x de manera que $\frac{1}{x} = 0$. En este caso, decimos que 0 no está en el *recorrido* de la función f.

El conjunto de todas las imágenes de una función f se llama *recorrido* de f, y se representa con $\operatorname{rec} f$.

Ejemplo 5

Encuentra el recorrido de la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -\dfrac{1}{(3-x)^2}$.

Solución. Para determinar el recorrido, podemos observar que cualquier valor de salida tiene la forma de una división, donde el numerador es siempre negativo y el denominador es siempre positivo, sin importar el valor de x. El resultado de la división será siempre un valor negativo. Simbólicamente:

$$(3-x)^2 > 0$$

para todo $x \in]-\infty,3[\cup]3,+\infty[$. Además,

$$-1<0 \Rightarrow -\frac{1}{(3-x)^2}<0$$

para todo $x \in]-\infty,3[\cup]3,+\infty[$; es decir:

$$f(x)=-\frac{1}{(3-x)^2}<0;$$

por tanto, el recorrido de la función f es el conjunto $]-\infty,0[$.

Ejemplo 6

Determina el dominio y el recorrido de la función $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *tal que* $h(x)=\frac{2}{3-x}$.

Solución. Puedes evaluar $h(x)$ en cualquier valor de x, excepto en el caso cuando $x=3$. ¿Por qué? (Observa que el denominador de la fracción $\frac{2}{3-x}$ es 0 cuando $x=3$, y que no podemos dividir por 0). Por tanto, el $\operatorname{dom} f$ es el conjunto constituido por todos los números reales excepto el 3. Podemos representar el dominio de esta función de formas diversas:

$$\operatorname{dom} f=\{x\in\mathbb{R}: x\neq 3\}=\mathbb{R}-\{3\}=]-\infty,3[\,\cup\,]3,+\infty[.$$

La determinación del recorrido es más difícil que la del dominio. En el ejemplo que te ocupa, puedes hacerte una idea de cuál es el recorrido de la siguiente manera.

Recuerda que el recorrido es el conjunto de todos los números $y=f(x)$; entonces, estos números y cumplen con la igualdad:

$$y=\frac{2}{3-x}$$

siempre que $x\neq 3$. Ahora despeja x de esta igualdad; vas a obtener que

$$x=3-\frac{2}{y}.$$

El número representado por la expresión de la derecha de la igualdad existe para todos los valores de y, excepto cuando $y=0$ (¿por qué?). Entonces, el recorrido de f serán todos los números reales distintos de 0. Esto lo puedes representar también de maneras diversas:

$$\operatorname{rec} f=\{y\in\mathbb{R}: y\neq 0\}=\mathbb{R}-\{0\}=]-\infty,0[\,\cup\,]0,+\infty[.$$

Ejemplo 7

Encuentra el dominio de la función $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *definida por* $g(x)=\frac{2}{3}x$.

Solución. Podemos observar que la operación $\frac{2}{3}x$ siempre se puede realizar con cualquier número real x; por lo tanto, el dominio de la función g es el conjunto $\mathbb{R}$.

Representaciones de una función

Las funciones pueden representarse de varias maneras; las más importantes son:

- Numéricamente a través de una *tabla*.
- Visualmente mediante una *gráfica*.
- Simbólicamente por una *ecuación*.

- Verbalmente con una descripción mediante *palabras*.

Representación mediante *tablas*

Dada la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2x - 1,$$

puedes construir la siguiente tabla al evaluar la función f en los valores dados para x. Encuentra los valores faltantes.

x	$y = f(x)$
-2	-5
-1	-3
0	-1
1	1
2	3
3	
4	

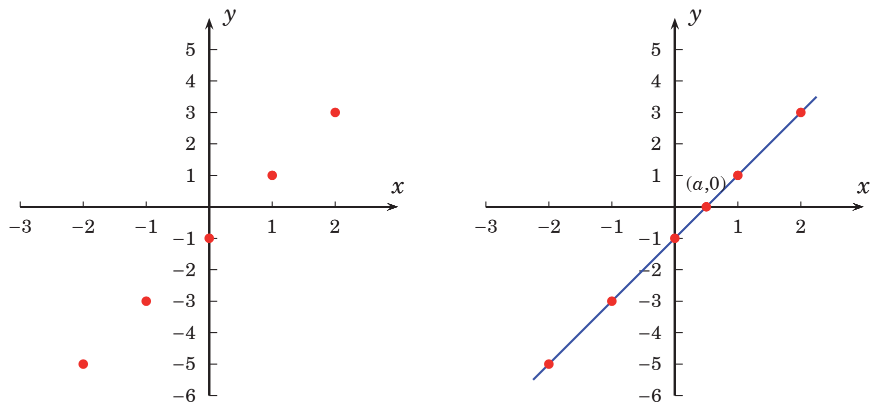
En sentido estricto, esta tabla no representa la función de una manera total, pues la tabla no contiene las imágenes de todos los elementos del dominio de f. El rol de la tabla es recoger de manera explícita las imágenes de algunos de los elementos del dominio. A veces, la información de esta tabla es suficiente para conocer la función representada.

Representación mediante *gráficas*

Dada la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2x - 1,$$

puedes obtener un dibujo aproximado de la función f si graficas los pares de puntos (x, y) en el plano cartesiano que obtuviste en la tabla anterior, y si colocas una regla sobre todos los puntos de color rojo, te darás cuenta de que una recta pasa por todos ellos, como lo puedes ver:



Mira la gráfica: podemos leer algunos pares ordenados que corresponden a la tabla anterior. ¿Cuál es la preimagen de 2? ¿Cuál es el valor de a?

Representación mediante *ecuaciones*

La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{2}{3}x - 1$$

también se puede representar como la ecuación

$$y = \frac{2}{3}x - 1.$$

Si a x damos el valor 0, podemos calcular el valor de y. ¿Cómo se relaciona esta petición con la petición de calcular la imagen de 0? ¿Cuál es el valor de x cuando $y = 0$? ¿Cómo se relaciona esta última pregunta con encontrar la preimagen de 0?

Representación *verbal*

La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{2}{3}x - 1$$

puede ser descrita de la siguiente manera:

> A cada número real dado le corresponde una unidad menos de los dos tercios del número real dado.

Ejemplo 8

Un vehículo se mueve en línea recta con una cierta velocidad. Experimentalmente se ha determinado que la velocidad es una función del tiempo (medida en metros por segundo) y dada por la ecuación

$$V(t) = 20 + 5t.$$

Así, en el tiempo inicial $t = 0$, la velocidad del vehículo es $20 + 5\ \ 0 = 20$ metros por segundo, y 3 segundos después, su velocidad será $20 + 5\ \ 3 = 35$ metros por segundo.

En la tabla se expresan algunos valores de la velocidad para diferentes tiempos:

tiempo en s	0	1	2	3	4	5
velocidad en m/s	20	25	30	35	40	45

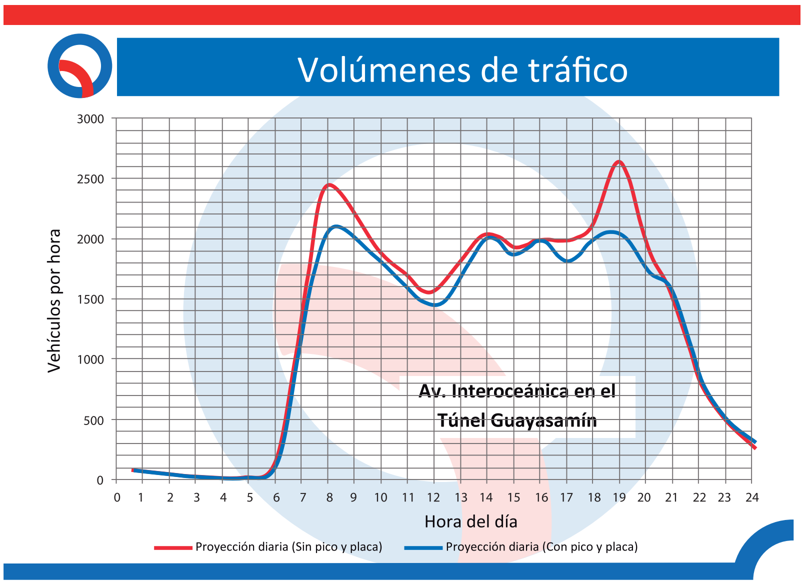
Gráficas

Así como de la tabla del ejemplo 8 puedes obtener información sobre la función velocidad del vehículo sin conocer necesariamente la ley de asignación de la función, a partir de un gráfico que represente a una función también puedes obtener información. Por ejemplo: que transcurridos tres segundos, la velocidad del vehículo es de 35 m/s aproximadamente, entre otras cosas.

Actividad para el aula: flujo de tráfico en Quito

Debido a la congestión vehicular en la ciudad de Quito, el Municipio ha puesto en marcha una estrategia denominada *pico y placa*, que consiste en restringir la circulación de vehículos según el último dígito del número de placa, en los horarios de 07h00 a 09h30 en la mañana y de 16h00 a 19h30 en la tarde:

Día	Último dígito de la placa
Lunes	1 y 2
Martes	3 y 4
Miércoles	5 y 6
Jueves	7 y 8
Viernes	0 y 9



Observa el siguiente gráfico y responde las preguntas que vienen a continuación.

(a) ¿Qué información contiene?

(b) ¿Qué variables están relacionadas?

(c) ¿Cuál es la variable dependiente e independiente?

(d) Según este gráfico, ¿es el volumen promedio del tráfico *sin* pico y placa una función de la hora del día?

(e) Según este gráfico, ¿es el volumen promedio del tráfico *con* pico y placa una función de la hora del día?

(f) ¿Cuál es el volumen promedio de tráfico a las 6 de la mañana sin pico y placa? ¿Con pico y placa?

(g) ¿Cuál es el volumen promedio de tráfico a las 4 de la tarde sin pico y placa? ¿Con pico y placa?

(h) ¿A qué horas el volumen de tráfico es aproximadamente 1 500 sin pico y placa? ¿Con pico y placa?

(i) ¿Cuál es la hora pico y el valor máximo del promedio de tráfico sin pico y placa? ¿Con pico y placa?

(j) Describe cómo varía el tráfico durante el día sin pico y placa y luego, con pico y placa.

(k) ¿Cómo usarías la información de la gráfica a fin de planificar la hora más conveniente para transportarse en la ciudad? (Por ejemplo: para ir a un supermercado).

Aunque no tengamos la función descrita de manera simbólica, la gráfica puede darnos información valiosa.

La ***gráfica*** de una función f es la colección de todas las parejas ordenadas de la forma $(x, f(x))$.

Ejemplo 9

Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que a cada número mayor que o igual a 0 le corresponde el número 1, y a cada número menor que 0, el número −1. Determina la ley de asignación de f y representa la función mediante una tabla y mediante una ecuación.

Solución. Si x es un número mayor que o igual a 0; es decir, si $x \geq 0$, entonces

$$x \mapsto 1;$$

en cambio, si $x < 0$, tenemos que

$$x \mapsto -1.$$

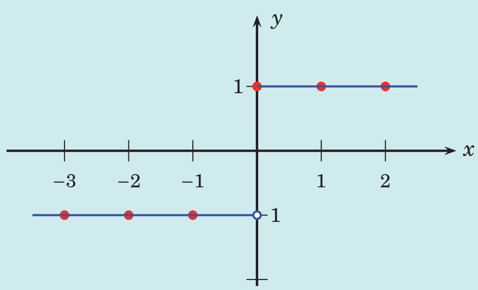
Por lo tanto, la ley de asignación de f está definida por partes:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Una tabla de valores para f es:

x	y
−3	−1
−2	−1
−1	−1
0	1
1	1
2	1

Si ubicas los pares ordenados obtenidos de la tabla en el plano cartesiano, y luego unes los puntos obtenidos mediante una recta, obtendrás la gráfica de la función, similar a la que se muestra a continuación:



En este caso, hay dos ecuaciones que determinan la función:

$$y = 1 \text{ si } x \geq 0 \quad \text{y} \quad y = -1 \text{ si } x < 0.$$

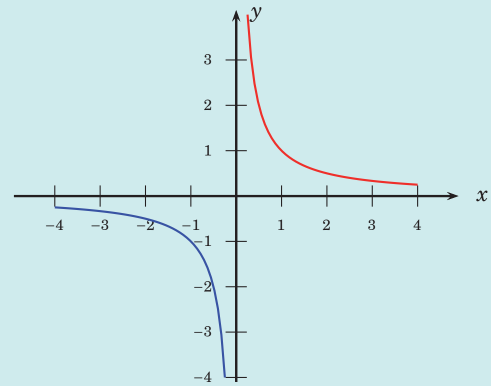
Ejemplo 10

La gráfica de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ se muestra al final del recuadro. Es la colección de puntos $(x, 1/x)$. Algunos puntos que pertenecen a la gráfica son:

$$(1,1), \quad \left(2, \frac{1}{2}\right), \quad (-1,-1).$$

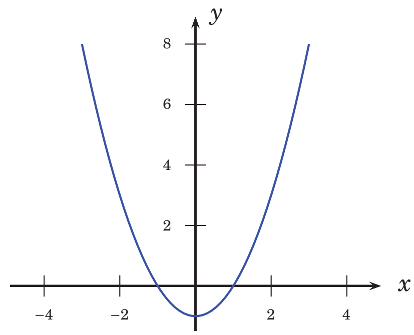
El punto de coordenadas $(3,4)$ no pertenece a la gráfica, pues la imagen de 3 no es 4, sino $\frac{1}{3}$.

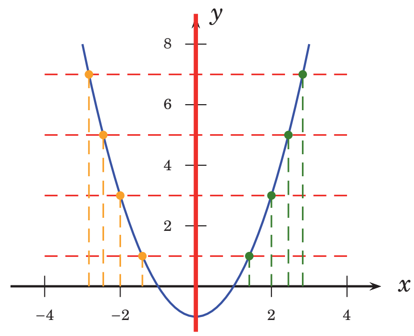
¿Hay alguna pareja que tenga como primera coordenada el 0? ¿Hay alguna pareja de la forma $(0, y)$? ¡No! Puesto que 0 no pertenece al dominio de la función, no hay ninguna pareja ordenada con 0 en su primera coordenada.



Simetría y paridad

En ambos dibujos:





está la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 1$; en el de la derecha, están, además, resaltada una recta que pasa por el eje vertical y, y varias líneas paralelas al eje horizontal que cortan al gráfico de la función.

Como puedes observar, todos los puntos de corte con la gráfica que están sobre el "eje horizontal negativo" se encuentran a la misma distancia que los correspondientes puntos de corte con la gráfica que están sobre el "eje horizontal positivo". Más aún, si pudieras doblar el dibujo en la línea de color rojo, la parte del eje horizontal positivo coincidiría completamente con la parte de la gráfica del eje horizontal negativo. Una gráfica con esta propiedad se dice *simétrica con respecto al eje* y.

Esta característica de la curva se ve reflejada en los valores que toma la función de la siguiente manera. Observamos que las parejas:

$$(1,0) \quad \text{y} \quad (-1,0), \quad (2,3) \quad \text{y} \quad (-2,3), \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right) \quad \text{y} \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$$

son puntos de la gráfica.

En general, para cada punto $(x, x^2 - 1)$, el punto $(-x, (-x)^2 - 1)$ está en la gráfica, y observa que

$$x^2 - 1 = (-x)^2 - 1;$$

por ello:

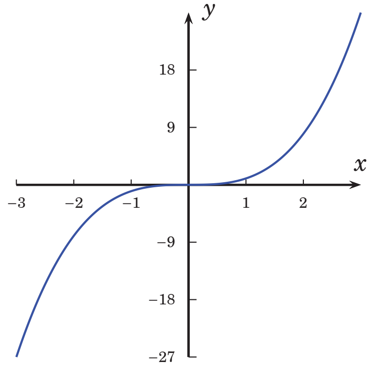
$$f(-x) = f(x).$$

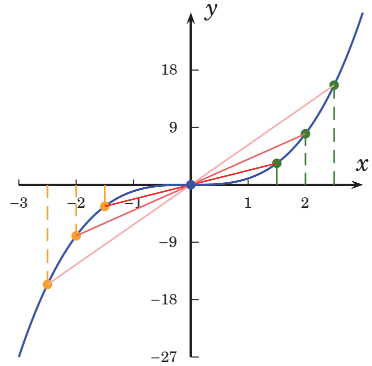
Se dice que una función f que cumple con la igualdad

$$f(-x) = f(x)$$

para todos los valores x de su dominio ***es una función par***.

Ahora mira los dos dibujos de la función f definida por $f(x) = x^3$:





En el de la derecha:

1. En el eje horizontal, se han tomado tres valores en la parte “positiva” y los correspondientes valores en la parte “negativa”; es decir, los puntos de la derecha están a la misma distancia que los correspondientes de la izquierda respecto del origen.

2. Los puntos correspondientes a estos valores de x están resaltados sobre la gráfica de la función.

Observemos un par de puntos; por ejemplo: los que corresponden a $x = 2$ y a $x = -2$. La distancia de los correspondientes puntos de la curva están a la misma distancia que del origen; lo mismo ocurre con los otros pares de puntos. Una gráfica con esta propiedad se dice *simétrica con respecto al origen*.

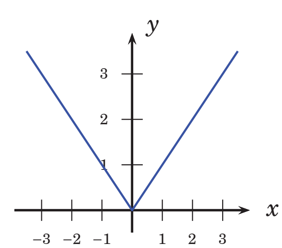
Vemos, entonces, que la gráfica es simétrica con respecto al origen. En términos de los valores de la función, observamos que las parejas: $(1,1)$ y $(-1,-1)$, $(2,8)$ y $(-2,-8)$, $(3,27)$ y $(-3,-27)$ son puntos de la gráfica. En general, para cada punto de coordenadas (x, x^3), el punto $(-x, (-x)^3)$ está en la gráfica. Observa que $(-x)^3 = -x^3$; por ello:

$$f(-x) = -f(x).$$

Se dice que una función f que cumple con la igualdad

$$f(-x) = -f(x)$$

para todos los valores x de su dominio ***es una función impar***.



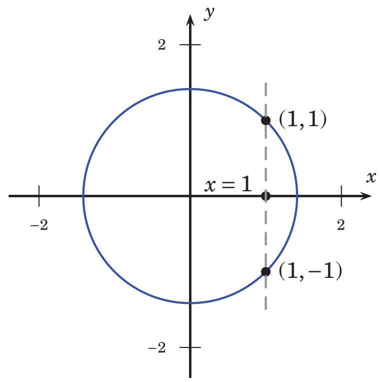
$x \longmapsto |x|$

La gráfica de una función nos da información de cómo varía la función. Mira el siguiente ejemplo.

Ejemplo 11

La gráfica de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$ es la que se muestra en el margen. Cuando x es menor que cero, y recorremos el eje horizontal de izquierda a derecha, los valores y decrecen; es decir, la función desciende. Si x es mayor que cero, y recorremos de izquierda a derecha el eje horizontal, los valores y crecen: la función asciende.

¡No toda gráfica representa una función! En efecto, la gráfica de una circunferencia no lo hace. ¿Por qué?



Recuerda que, en una función, cada elemento x del conjunto de salida está relacionado solo con un elemento y del conjunto de llegada. En este círculo, podemos ver que $x = 1$ está relacionado tanto con $y = 1$ como con $y = -1$, pues ambos puntos de coordenadas $(1,1)$ y $(1,-1)$ pertenecen al círculo.

Ejercicios

Preparación y repaso

En primer lugar, recuerda los diferentes tipos de intervalo:

i. $[a,b] = \{x : a \leq x \leq b\}$.

ii. $]a,b[= \{x : a < x < b\}$.

iii. $[a,b[= \{x : a \leq x < b\}$.

iv. $]a,b] = \{x : a < x \leq b\}$.

v. $[a,+\infty[= \{x : x \geq a\}$.

vi. $]a,+\infty[= \{x : x > a\}$.

vii. $]-\infty,b] = \{x : x \leq b\}$.

viii. $]-\infty,b[= \{x : x < b\}$.

1. Expresa los siguientes conjuntos de números reales como intervalos:

   (a) $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} \leq x \leq 5\right\}$.

   (b) $\{x \in \mathbb{R} : x < 0,33\}$.

   (c) $\{x \in \mathbb{R} : x < 1 \text{ y } x > -2\}$.

2. En un sistema de ejes coordenados, ubica el punto asociado con cada uno de los pares ordenados:

$$\begin{array}{ccc} (2,1), & (4,3), & (-7,2), \\ (-3,-2), & (11/5,-1), & \left(\sqrt{6},-7\right), \\ (-3,5;-4,7), & (2;5,5), & (0,3), \\ \left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right), & \left(2\sqrt{3},-\sqrt{5}\right), & \left(0,\sqrt{6}\right). \end{array}$$

3. En cada caso, une los puntos con segmentos de recta para trazar la figura geométrica cuyos vértices son:

   (a) $(-4,0)$, $(2,0)$ y $(0,-3)$.

   (b) $(-4,2)$, $(2,2)$, $(-4,-3)$ y $(2,-3)$.

   (c) $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ y $(0,1)$.

4. Sean los puntos $(-3,2)$, $(-3,-4)$; halla dos puntos de tal manera que formen un cuadrado con los puntos dados.

Conceptos

1. En cada caso, f una función. Contesta si es verdadero o falso y justifica tu respuesta.

   (a) $f(1) = 5$ significa que la imagen de 5 por f es 1.

(b) $f(0) = -6$ significa que 0 es una preimagen de -6 por f.

(c) $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ significa que $\sqrt{2}$ es una preimagen de $\sqrt{2}$.

2. Sean los conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$. En los diagramas que se dan a continuación, indica cuáles representan funciones de A en B. Si la respuesta es negativa, explica por qué no es una función.

$$
\begin{array}{ccc}
A & \longrightarrow & B \\
a & \mapsto & 1 \\
b & \mapsto & 2 \\
c & \mapsto & 3 \\
\mathrm{d} & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
A & \longrightarrow & B \\
a & & 1 \\
b & \mapsto & 2 \\
c & \mapsto & 3 \\
d & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
A & \longrightarrow & B \\
a & \mapsto & 1 \\
b & \mapsto & 2 \\
c & & 3 \\
d & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
A & \longrightarrow & B \\
a & \mapsto & 1 \\
b & & 2 \\
c & & 3 \\
d & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
A & \longrightarrow & B \\
a & \mapsto & 1 \\
b & \mapsto & 2 \\
c & & 3 \\
d & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
A & \longrightarrow & B \\
a & \mapsto & 1 \\
b & & 2 \\
c & & 3 \\
d & &
\end{array}
$$

(a) Los diagramas anteriores definen correspondencias entre los elementos de A y los de B. Si $C = \{a, b, c\}$ y $D = \{1, 3\}$, ¿cuáles de dichas correspondencias definen funciones de C en D?, ¿de C en B? y ¿de A en D?

(b) Para cada una de las funciones encontradas en la parte (a), determina la o las preimágenes de 1, de 2 y de 3.

(c) Determina todas las funciones que se pueden establecer de A en D y de D en D.

3. Para cada una de las descripciones verbales de función dadas, elabora una representación algebraica, una gráfica y una tabular de la función descrita.

(a) Para evaluar $f(x)$, a x se le multiplica por 3 y al resultado se le suma 4.

(b) Para evaluar $f(x)$, a x se le suma 4 y al resultado se lo multiplica por 3.

(c) El volumen de un cubo es función del lado del cubo. ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál es la variable dependiente?

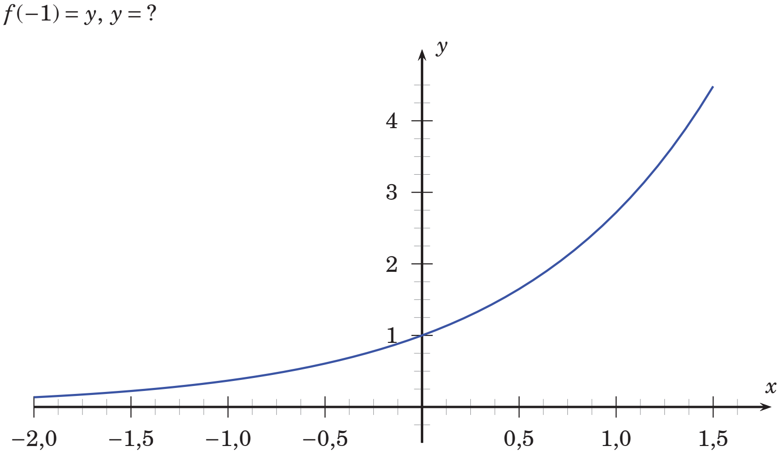
(d) El costo total de una carrera en un taxi es de 50 centavos por la parada y de 25 centavos por cada kilómetro recorrido. ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál es la variable dependiente?

4. Dada la gráfica de la función, encuentra el valor pedido:

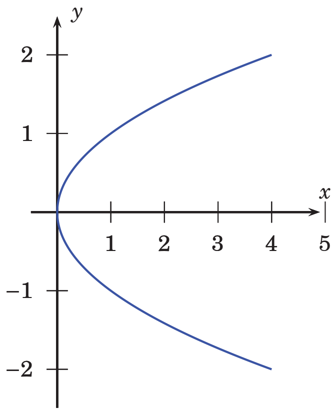
(a) $f(0) = b$, $b = ?$

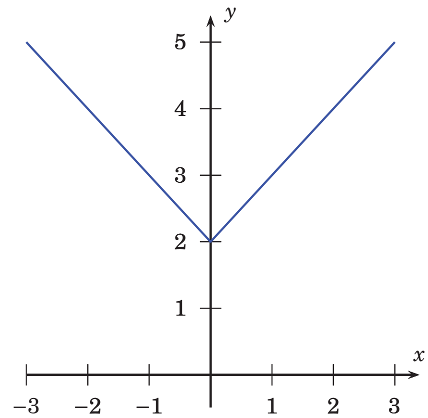
(b) $f(x) = 2$, $x = ?$

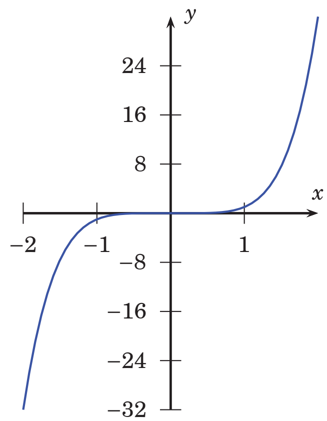
(c) $f(-1) = y$, $y = ?$

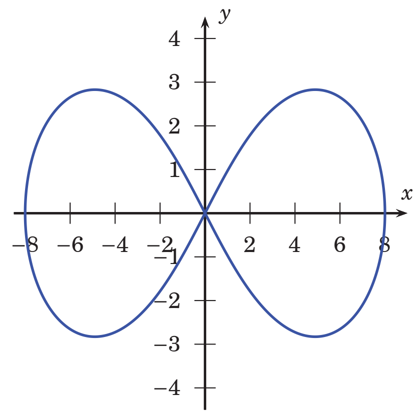


5. En cada caso, ¿qué gráfica representa una función? Si la gráfica es una función, determina si es una función par o impar.









Procedimientos

1. Sean $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x)=x^2-\frac{1}{x} \quad \text{y} \quad g(x)=2x-7$$

para todo $x\in\mathbb{R}$. Calcula:

(a) $f(-3)$, $f(1{,}4)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)$, $f(a)$, si $a\in\mathbb{R}$.

(b) $g(100)$, $g\left(\sqrt{5}\right)$, $g(0{,}01)$, $g\left(1+\frac{2}{3}\right)$.

(c) $f(1)+g(-1)$, $f(-1)g(5)$, $\dfrac{g(2)}{f(-2)}$.

2. Para las siguientes funciones, encuentra el dominio de la función:

(a) $f(x)=3x^2-5x+8$.

(b) $f(x)=\frac{x+2}{x^2-1}$.

(c) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{x}$.

(d) $f(x)=\sqrt{1-3x}$.

3. Las ecuaciones siguientes definen y como función de x: $y=f(x)$. En cada caso calcula $f(x)$.

(a) $x+3y-3=0$.

(b) $(x-5)(y-x)=1$.

(c) $\frac{2y+x}{3x-5}=2$.

(d) $x^2+3=xy$.

4. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=2-5x$. Demuestra que el recorrido de f son todos los números reales.

5. Sea f una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. En cada uno de los siguientes casos, simplifica la escritura de $f(x)$ y calcula $f(-1)$ y $f(2)$.

(a) $f(x)=(3-4x)(4x+3)+4(x+1)^2-13$.

(b) $f(x)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}\right)^3-\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}x-\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)^3$.

(c) $f(x)=\left(\sqrt{3}x-\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}x+\sqrt{2}\right)^2$.

(d) $f(x)=(2x+5)^4-(5-2x)^3$.

6. En cada caso, completa la tabla.

(a) La función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=2(x-3)^2$:

x	y
-2	
-1	
0	
1	

(b) La función $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $g(x)=|x-2|$:

x	y
1	
1,6	
2	
2,5	
3	

(c) La función $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $h(x)=\sqrt{x-1}$:

x	$h(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

(d) La función $k:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $k(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$:

x	$k(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	

7. Para cada caso, evalúa la función definida por partes en los siguientes elementos del dominio: -3, -2, $-1{,}5$, -1, 0, 0,5, 1, 2, 3,5.

   (a) Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por
   $$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x>1,\\ -x+2 & \text{si } x\le 1.\end{cases}$$

   (b) Sea $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por
   $$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}+1 & \text{si } x<0,\\ 1 & \text{si } x=0,\\ x-1 & \text{si } x>0.\end{cases}$$

   (c) Sea $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por
   $$h(x)=\begin{cases} x^3+1 & \text{si } x\ge 0,\\ -x^2 & \text{si } x<0.\end{cases}$$

   (d) Sea $k:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por
   $$k(x)=\begin{cases} |1-x^2| & \text{si } x<-1,\\ x & \text{si } -1\le x\le 1,\\ -\frac{1}{x-1} & \text{si } x>1.\end{cases}$$

8. Para la función $f(x)=2-x^2$, calcula:

   (a) $f(2)+3f(-2)$.

   (b) $f(-1)+6f(1)$.

   (c) ¿Verdadero o falso: $f(a)=f(-a)$?

   (d) ¿Verdadero o falso: $f(a)=-f(-a)$?

9. Para la función $f(x)=2x-x^3$, calcula:

   (a) $f(2)+3f(-2)$.

   (b) $5f(-1)+6f(1)$.

   (c) ¿Verdadero o falso: $f(a)=f(-a)$?

   (d) ¿Verdadero o falso: $f(a)=-f(-a)$?

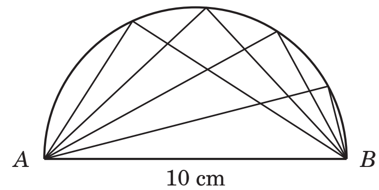
Aplicaciones (modelos)

1. Dos niñas, Margarita y Susana, salen de sus casas para encontrarse en el parque. Margarita camina a una velocidad de 3 km/h y Susana, de 4 km/h. Determina dos funciones m y s que describan la distancia que cada una de ellas recorre en función del tiempo. En otras palabras, las expresiones $m(t)$ y $s(t)$ expresan la distancia recorrida por Margarita y Susana, respectivamente, luego de t minutos de haber salido cada una de su casa.

2. Un rectángulo tiene una base de 2 cm. Encuentra una función $P(a)$ que dé el valor del perímetro del rectángulo como función de la altura a del rectángulo. Haz una tabla con valores de a y $P(a)$.

3. Un rectángulo tiene una base de 3 cm. Determina una función $A(l)$ que dé el valor del área del rectángulo como función de la altura l del rectángulo. Haz una tabla con valores de l y $A(l)$. Grafica la función.

4. El costo por minuto de llamada en un celular es de 0,12 centavos. El costo de conexión es de 50 centavos. Escribe una función que dé el costo $C(n)$ de una llamada de n minutos. Haz una tabla con varios valores de n y $C(n)$. Grafica la función. Describe sus variaciones.
5. El perímetro de un triángulo equilátero es p cm. Escribe una ecuación que dé la medida del lado $L(p)$. Haz una tabla con valores de p y $L(p)$. Grafica la función. Describe sus variaciones.
6. El impuesto de valor agregado (IVA) consiste en pagar 12% del precio de ciertos artículos. Si el precio de un artículo es p dólares, determina el costo total después del IVA como una función de p. Haz una tabla de valores y grafica la función. Describe su variación.
7. En uno de los últimos estudios sobre tránsito en la cuidad de Quito, se menciona que la tasa de ocupación vehicular es de 1,72 pasajeros por automóvil. Esto significa que, en su mayoría, los vehículos de la ciudad llevan solamente un conductor y ningún pasajero. La tasa de ocupación se calcula dividiendo el total de personas para el número de vehículos en tránsito. Escribe una función que determine el número de vehículos $V(n)$ en términos del número de n de personas que transitan en la ciudad en vehículos privados. Si asumimos que aproximadamente 100 000 vehículos transitan en Quito cada día, ¿cuántas personas utilizan vehículos privados?
8. Sabemos de la Geometría que cuando inscribimos un triángulo en un semicírculo, este siempre es un triángulo rectángulo. Describe el área del triángulo en función de x, donde x es uno de los lados del triángulo rectángulo inscrito en el semicírculo:



9. El costo de bodegaje en una cierta empresa depende del número x de paquetes que se colocan por estantería. No se pueden colocar más de 100 paquetes por estantería. Los costos en dólares se descomponen como sigue: 1,5 por paquete; 800 por el salario de la persona que se encarga de la estantería y 9 600 por gasto que se reparten en forma equitativa entre los x paquetes.
   (a) Calcula el costo de bodegaje por estantería para 40 paquetes y para 100 paquetes.
   (b) Establece una función que represente el costo total del bodegaje por estantería en función del número x de paquetes.
   (c) Calcula el costo para x paquetes si x está entre 10 y 90, con un paso igual a 10.
   (d) ¿Para qué número de paquetes se obtiene el costo mínimo?

Pensamiento crítico

Ejercicios matemáticos de mayor profundidad.

1. José dice que para calcular $f(x+5)$ se debe calcular $f(x)$, luego $f(5)$ y luego sumar esos dos números. ¿Está José en lo cierto?
2. Encuentra una función para la cual $f(x+y) = f(x)+f(y)$.
3. Encuentra una función para la cual $f(x+y)$ no es igual a $f(x)+f(y)$.
4. ¿Es cierto que la función f definida por $f(x) = \sqrt{x^2}$ es la misma función g definida por $g(x) = x$?
5. ¿Es la función $g(x) = x+1$ la misma que la función $g(x) = \dfrac{x^2+x}{x}$?
6. Encuentra una representación de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ en términos de una función definida por partes.

Uso de tecnologías

1. Utilizando una calculadora gráfica o aplicación computacional, para la función f definida por

$$f(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}2x + 1,$$

realiza una tabla para f con una diversidad de valores (enteros positivos, negativos, valores decimales pequeños y grandes).

2. Con una calculadora gráfica o aplicación computacional, realiza una tabla de valores para la f, definida por $f(x) = 2/(4 - x)$, con una diversidad de valores (enteros positivos, negativos, valores decimales pequeños y grades).

3. Con ayuda de una calculadora gráfica o una aplicación computacional, grafica la función $f(x) = -x^3 + 2x^5$. Observa la gráfica y decide si la función es par o impar.

4. Con ayuda de una calculadora gráfica o una aplicación computacional, grafica la función $f(x) = 3x^2 + x^4$. Observa la gráfica y decide si la función es par o impar.