MATEMÁTICA 10

De acuerdo al nuevo currículo de la Educación General Básica

GUÍA PARA DOCENTES

DISTRIBUCIÓN GRATUITA - PROHIBIDA LA VENTA

PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA
Rafael Correa Delgado

MINISTRO DE EDUCACIÓN
Augusto Espinosa Andrade

VICEMINISTRO DE EDUCACIÓN
Freddy Peñafiel Larrea

VICEMINISTRO DE GESTIÓN EDUCATIVA
Jaime Roca Gutiérrez

SUBSECRETARIA DE FUNDAMENTOS EDUCATIVOS
Paulina Dueñas Montero

DIRECTORA NACIONAL DE CURRÍCULO (E)
Isabel Ramos Castañeda

GRUPO EDEBÉ
Proyecto: Matemáticas 1,2,3 y 4
Educación Secundaria Obligatoria

DIRECCIÓN GENERAL
Antonio Garrido González

DIRECCIÓN EDITORIAL
José Luis Gómez Cutillas

DIRECCIÓN DE EDICIÓN
DE EDUCACIÓN SECUNDARIA
José Francisco Vílchez Román

DIRECCIÓN PEDAGÓGICA
Santiago Centelles Cervera

DIRECCIÓN DE PRODUCCIÓN
Juan López Navarro

EQUIPO DE EDICIÓN GRUPO EDEBÉ

Paseo San Juan Bosco, 62
08017 Barcelona
www.edebe.com

En alianza con
EDITORIAL DON BOSCO
OBRAS SALESIANAS DE COMUNICACIÓN

GERENTE GENERAL
Marcelo Mejía Morales

DIRECCIÓN EDITORIAL
María Alexandra Prócel Alarcón

ADAPTACIÓN Y EDICIÓN DE CONTENIDOS
Equipo Editorial Don Bosco
Humberto Buitrón A.

CREACIÓN DE CONTENIDOS NUEVOS
Marcia Peña Andrade
Saúl Serrano Aguirre
Lorena Valladares Perugachi

REVISIÓN DE ESTILO
Hernán Hermosa Mantilla
Isabel Luna Riofrío
Pablo Larreátegui Plaza

COORDINACIÓN GRÁFICA
Y REDIAGRAMACIÓN EDITORIAL
Pamela Cueva Villavicencio

DIAGRAMACIÓN DE PÁGINAS NUEVAS
Susana Zurita Becerra
Franklin Ramírez Torres
Patricio Llivicura Piedra
Freddy López Canelos
Erika Delgado Chávez
Sofía Vergara Anda

ILUSTRACIÓN DE PORTADA
Eduardo Delgado Padilla
Darwin Parra Ojeda

MINISTERIO DE EDUCACIÓN DEL ECUADOR
Primera edición, febrero 2011
Séptima reimpresión febrero 2014
Quito – Ecuador

Impreso por: **EL TELÉGRAFO.**

IMPORTANTE

El uso de un lenguaje que no discrimine ni reproduzca esquemas discriminatorios entre hombres y mujeres es una de las preocupaciones de nuestra Organización. Sin embargo, no hay acuerdo entre los lingüistas acerca de la manera de hacerlo en español.
En tal sentido y para evitar la sobre carga gráfica que supondría utilizar en español o/a; los/las y otras formas sensibles al género con el fin de marcar la presencia de ambos sexos, hemos optado por usar la forma masculina en su tradicional acepción genérica, en el entendido que es de utilidad para hacer referencia tanto hombres y mujeres sin evitar la potencial ambigüedad que se derivaría de la opción de usar cualesquiera de las formas de modo genérico.

Tomado de UNESCO, Situación educativa de América Latina y El Caribe: Garantizando a leducación de calidad para todos. UNESCO. Santiago de Chile, agosto 2008.

Presentación

Los textos **Matemática 8, 9 y 10** están orientados a trabajar, de manera progresiva, distintas destrezas con criterios de desempeño, a partir de situaciones de aprendizaje-enseñanza que exigen conocimientos, razonamientos y aplicaciones en la práctica.

La estructura metodológica se fundamenta en el aprendizaje significativo, siempre dentro de un enfoque globalizador e interdisciplinar, que permita a los y las estudiantes adoptar progresivamente métodos y estrategias matemáticos, a la par de valores como la equidad etaria, la democracia y el respeto a la naturaleza, al ser humano, a la sociedad y a las culturas.

Los textos buscan potenciar actitudes y hábitos de trabajo; desarrollar la autonomía personal para construir relaciones interpersonales dignas; afianzar un comportamiento participativo y de respeto a las diferencias, valorar la importancia de las herramientas tecnológicas y de la ciencia en la vida cotidiana y fomentar un espíritu crítico y reflexivo.

Persiguen un triple objetivo:

Formativo. Contribuir al desarrollo de las capacidades cognitivas abstractas y formales de razonamiento, deducción y análisis que permiten construir una visión alternativa de la realidad, a través del desarrollo de modelos matemáticos. Lo anterior se encamina a cubrir las macrodestrezas de comprensión de conceptos y comprensión de procesos.

Funcional. Desarrollar un conjunto de procedimientos, estrategias de resolución de problemas y técnicas de cálculo que permiten solucionar problemas de la vida cotidiana y sistematizar procesos de producción, es decir, se enfoca a la macrodestreza de aplicación de conocimientos.

Instrumental. Por una parte, interpretar hechos de la vida cotidiana y, por otra, expresar y comunicar los conocimientos matemáticos en otros ámbitos del aprendizaje. Se vincula con la macrodestreza de aprender a aprender.

Metodología

- De acuerdo con la propuesta para el área de Matemática del nuevo documento de Actualización y Fortalecimiento Curricular de la Educación General Básica, los textos de Matemática de 2.º a 10.º años trabajan los conocimientos en módulos, es decir, integrando los bloques curriculares matemáticos (Relaciones y Funciones, Estadística y Probabilidad, Numérico, Geométrico, de Medida) para comprender la fuerte relación que guardan entre sí. En este sentido, en cada módulo de los textos se relacionan, al menos, dos bloques curriculares matemáticos. Los procedimientos que se aprenden y se utilizan facilitan esta interrelación.

- El proceso de aprendizaje recurre inicialmente a métodos inductivos que parten siempre del entorno conocido por los estudiantes.

- La manipulación y la experimentación son instrumentos básicos para el conocimiento y dominio de conceptos y técnicas de trabajo necesarios en matemáticas.

- Los métodos deductivos y el uso de lenguajes abstractos se convierten en un punto de llegada y en la culminación del aprendizaje.

- **Actividad inicial**

  Plantea una actividad relacionada con la vida cotidiana, a través de la cual se pueden inferir los conocimientos que se trabajarán en el módulo. El estudiante intentará resolverla antes de comenzar con el aprendizaje, utilizando las estrategias que conozca hasta ese momento, ya que, esto le permitirá tener conciencia de sus capacidades y limitaciones. En este sentido, es un reto de motivación para los nuevos conocimientos.

- **Prerrequisitos**

  Activación de conocimientos previos, tanto de conceptos como de procedimientos para el estudio del módulo. Se sugieren actividades de evaluación diagnóstica.

- **Cómo resolver problemas**

  Esta sección es de gran ayuda para los docentes y para los estudiantes, ya que, fomenta el autoaprendizaje y permite adquirir herramientas para la resolución de problemas. Aunque se enfoca al ámbito matemático, la metodología puede ser aplicada en cualquier área o tipo de problema.

- **En resumen**

  Síntesis de los principales conocimientos de la unidad y un esquema gráfico que muestra la relación entre éstos.

- **Ejercicios y problemas integradores**

  Sección en la que se desarrolla un problema que integra los conocimientos que son parte de los bloques curriculares matemáticos trabajados en el módulo. Se sigue un método para la resolución de problemas, se sigue el proceso hasta llegar al resultado. Al finalizar, se plantea un problema de características similares que deberá ser resuelto en forma autónoma o en grupo por los estudiantes.

- **Ejercicios y problemas**

  Una vez finalizada la comprensión de conceptos y procesos, se presenta esta sección en la que se aplican los conocimientos. La resolución de ejercicios y problemas se convierte en un indicador para los docentes sobre el avance logrado o de la necesidad de refuerzo.

- **Demuestra tu ingenio**

  Plantea actividades donde los estudiantes ponen a prueba su razonamiento y lógica matemática y podrán aplicar diferentes procedimientos y estrategias para resolver acertijos, enigmas, juegos, problemas,…

- **Buen Vivir**

  Sección en la que se articulan los principios fundamentales del Buen Vivir con aspectos de la realidad de nuestro país. Busca motivar la reflexión, la toma de decisiones y posterior ejecución de acciones positivas a favor del ambiente, de la sociedad y de las relaciones democráticas y para la paz.

  Al inicio de cada módulo se muestra un artículo de la Constitución de la República del Ecuador relacionado con el eje elegido y al finalizar el módulo se desarrolla el tema con profundidad.

- **Autoevaluación y coevaluación**

  Permite comprobar el desarrollo de las destrezas con criterios de desempeño que están propuestas y trabajadas en cada uno de los módulos.

- **Sección de historia**
  Una reseña de la evolución histórica de los conocimientos que se aprenden en el módulo.

- **Crónica matemática**
  Conjunto de noticias, curiosidades, anécdotas relacionadas con los conocimientos del módulo.

- Adicionalmente, al interior de cada módulo, se utilizan estrategias relacionadas con el cálculo mental, el uso de la calculadora, el uso de las TIC, el trabajo grupal, entre otras.

Resultados esperados con el uso de los textos Matemática 8, 9 y 10

Se busca una formación integral de los estudiantes, mediante el desarrollo de:

- Destrezas matemáticas.
- Destrezas de comunicación.
- Destrezas de interacción interpersonales.
- Destrezas de interacción con el mundo físico.
- Destrezas para el tratamiento de la información.
- Destrezas para la comprensión del mundo digital.
- Valores sociales y ciudadanos.
- Valores culturales y artísticos.
- Autonomía e iniciativa personal.
- Autoevaluación y evaluación conjunta.
- Capacidad de aprender a aprender.

Estrategias motivacionales para la enseñanza de la matemática

Según Good y Brophy (1998), los docentes en el proceso de enseñanza deben lograr seis objetivos motivacionales:

1. Crear un ambiente de aprendizaje favorable en el aula para minimizar la ansiedad haciendo que los alumnos logren un mejor desempeño.

2. Los docentes necesitan estimular la motivación para lograr aprender en conexión con contenidos o actividades específicas proyectando entusiasmo, induciendo curiosidad, disonancia, formulando objetivos de aprendizaje y proporcionando retroalimentación informativa que ayude al alumno a aprender con conciencia, sensatez y eficacia.

3. El educador debe discutir con los alumnos la importancia e interés de los objetivos impartidos, relacionándolos con el quehacer diario, incentivándolos hacia la búsqueda de nuevas informaciones en libros, Internet, videos, programas de televisión en donde se traten temas actuales que se relacionen con la asignatura.

4. Explicar y sugerir al estudiante que se espera que cada uno de ellos disfrute el aprendizaje.

5. Ejecutar las evaluaciones, no como una forma de control, sino como medio de comprobar el progreso de cada alumno.

6. Ayudar al estudiante a adquirir una mayor conciencia de sus procesos y diferencias referente al aprendizaje, mediante actividades de reflexión, estimulando la conciencia metacognitiva de los alumnos.

En virtud de lo señalado, el docente puede alcanzar una enseñanza eficaz. Debe poner en práctica su creatividad para diversificar la enseñanza, con un poco de imaginación, los trabajos de pupitre rutinarios los puede transformar en actividades desafiantes para el alumno.

Módulo **1** **Bloques:** Numérico. Relaciones y funciones

Números reales
Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Objetivo del módulo

- Resolver operaciones combinadas con números reales mediante la aplicación de sus reglas, propiedades y leyes para relacionarlas con los polinomios y solucionar problemas con sistemas de ecuaciones.

DCD Destrezas con criterios de desempeño

- Resolver operaciones combinadas de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación con números reales.
- Racionalizar expresiones numéricas.
- Evaluar y simplificar potencias de números enteros con exponente fraccionario.
- Simplificar expresiones de números reales con exponentes fraccionarios con la aplicación de las reglas de potenciación y radicación.
- Utilizar las estrategias y las herramientas matemáticas adecuadas para resolver problemas y confiar en sus capacidades.
- Calcular el error cometido en operaciones con aproximaciones de números reales.
- Representar y resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, con gráficos y algebraicamente.

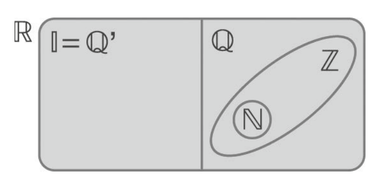
Estrategias metodológicas

Relacionada con la DCD: **Resolver operaciones combinadas de adición, sustracción, multiplicación, división con números reales.**

Para la activación de conocimientos previos

Antes de abordar los números reales, es necesario repasar todos los conjuntos de números que se han estudiado.

- Reales ($\mathbb{R}$)
  - Racionales ($\mathbb{Q}$)
    - Enteros ($\mathbb{Z}$)
      - Naturales ($\mathbb{N}$)
      - Enteros negativos
    - Fraccionarios
  - Irracionales ($\mathbb{I} = \mathbb{Q}'$)



Deben subrayarse las diferencias entre las propiedades de cada uno de ellos, de modo que los estudiantes sepan reconocerlas. Para ello, será muy útil recurrir a ejemplos (contar objetos para los naturales, las plantas de un edificio para los enteros, el reparto de un pastel para los fraccionarios).

Revise la sección de Prerrequisitos de la página 9 del libro del alumno. Verifique que sus estudiantes logren resolver con agilidad el segundo y cuarto ejercicio de la evaluación diagnóstica.

Realice un repaso de la obtención de la fracción generatriz.

Proponga ejemplos sencillos en los cuales se evidencie que se cumplen las propiedades de la suma y la potencia en el conjunto de los números reales.

Para la construcción del conocimiento

- Busque ejercicios que combinen las operaciones estudiadas en el módulo. Resuelva con los estudiantes uno de los ejercicios justificando cada paso. Por ejemplo, en el ejercicio deben evidenciarse las propiedades de las operaciones, la ley de los signos, las reglas para suprimir signos de agrupación, la racionalización y la conversión de un número decimal periódico a fraccionario.

  Puede utilizar ejercicios como los siguientes:

  a) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} =$

  b) $\left(7-\sqrt{15}\right)\cdot\left(7+\sqrt{15}\right)+\left(8-\sqrt{2}\right)\cdot\left(8+\sqrt{2}\right) =$

  c) $5\left(\sqrt{81}-4\cdot\sqrt{729}\right)-3\left(\sqrt{625}+4\cdot 144\right) =$

Para la aplicación del conocimiento

- Además de las actividades que constan en el libro del alumno, sugiera que los estudiantes resuelvan ejercicios como los siguientes.

  a) $2\sqrt{5}+\sqrt{45}+\sqrt{180}-\sqrt{80} =$

  b) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}}} =$

  c) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} =$

  d) $\left[2\cdot(-5)^2\cdot\dfrac{3}{5}\right]^{\frac{6}{7}} =$

Para la evaluación

- Forme grupos de trabajo.
- Solicite a los estudiantes que planteen un ejercicio en el cual se combinen varias de las operaciones estudiadas.
- Previa la evaluación usted debe planificar para cada grupo condiciones que deben tener los ejercicios que se plantearán así como la forma de evaluación.

  Ejemplo:

El ejercicio debe contener:	
Operaciones: suma, resta, multiplicación, división, potencia y radicación.	
Dos números irracionales y un decimal periódico.	
Paréntesis y corchetes.	
Evidenciar al menos una propiedad de la potenciación.	
Resolución del ejercicio argumentando los procesos.	

	Observaciones
Cumplen con todas las condiciones solicitadas.	
Aplican propiedades y leyes en la resolución del ejercicio	
Las justificaciones tienen relación con los conocimientos desarrollados.	

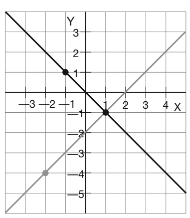
Relacionada con la DCD: **Representar y resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, con gráficos y algebraicamente.**

Para la activación de conocimientos previos

- Es imprescindible señalar que las dos ecuaciones que forman un sistema expresan dos condiciones que deben verificarse simultáneamente, para evitar que los alumnos consideren que las ecuaciones del sistema están desvinculadas entre sí.
- Una vez iniciado el estudio de los métodos algebraicos de resolución, debe recalcarse que el método elegido para resolver un sistema es, en principio, indiferente, puesto que las soluciones no dependerán del método utilizado.
- Sin embargo, la elección de un método determinado puede simplificar la resolución, dependiendo de las ecuaciones. Así pues, los alumnos deben estar dispuestos a invertir un cierto tiempo para decidir qué método de resolución resulta más apropiado en cada caso.

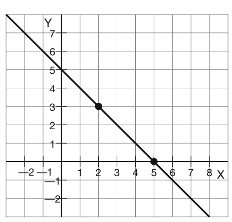
Para la construcción del conocimiento

- Recalque que las rectas se encuentran en el mismo plano ya que se trabaja en $\mathbb{R}^2$.
- Trabaje el concepto de sistema de ecuaciones a partir de una situación en la que deban verificarse simultáneamente dos ecuaciones. Si le es posible, pida ayuda al docente de Computación para presentar a sus estudiantes algunos videos colgados en páginas de internet sobre resolución de sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas.
- Al representar gráficamente los sistemas de ecuaciones tome en cuenta lo siguiente:



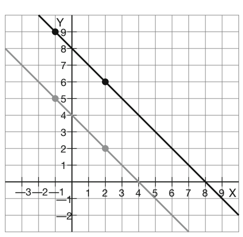
1. Si las rectas se cortan en un punto, el sistema tiene solución única. Decimos que es **compatible determinado o consistente determinado**.

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -x + y = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$



2. Si las dos rectas coinciden, esto es, son la misma, el sistema tiene infinitas soluciones. Es un sistema **compatible indeterminado** o **consistente indeterminado**.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases} \qquad \left\{ \begin{array}{r} -2x - 2y = 10 \\ \underline{2x + 2y = 10} \\ 0 = 0 \end{array} \right.$$



3. Si las rectas no se cortan, es decir, son paralelas, el sistema es **incompatible** o **inconsistente** no tiene solución.

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x + y = 4 \end{cases} \qquad \left\{ \begin{array}{r} x + y = 8 \\ \underline{-x - y = -4} \\ 0 = 4 \end{array} \right.$$

- Guie a los estudiantes que deduzcan cómo será la gráfica de un sistema de ecuaciones analizando los términos de cada uno de los miembros de las ecuaciones que conforman el sistema.

Para la aplicación del conocimiento

- Presente a los estudiantes varios sistemas representados gráficamente y los sistemas correspondientes, para que sus estudiantes realicen las asociaciones debidas.
- Proponga a sus estudiantes sistemas compatibles y solicite que planteen problemas.

Para la evaluación

- Plantee problemas en los que se evidencie como alternativa la resolución de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas y el sistema inicial que se plantee. Sugiera el uso de uno de los métodos estudiados. Ejemplos:

  1) El precio de las entradas de un circo es de \$ 8 para los adultos y \$ 5 para los niños. Si en el circo hay 600 personas y han recaudado \$ 4 500, ¿cuántos adultos y cuántos niños hay?

  2) Halla un número de tres cifras que cumpla todas las condiciones siguientes:

     — Está comprendido entre 300 y 350.
     — La suma de la cifra de las unidades con la de las decenas es 8.
     — La cifra de las unidades es el triple de la cifra de las decenas.

- Guíe a los estudiantes para que luego de obtener los datos y el planteo de las ecuaciones, seleccione el método más adecuado para el problema.

- Aplique una escala de evaluación, en la misma que puede considerar:

1) Identifica datos	(2)
2) Plantea un sistema de ecuaciones	(1)
3) Convierte un sistema en otro equivalente	(2)
4) Utiliza el método adecuado para la resolución del sistema	(3)

Recomendaciones para docentes

Sección para uso exclusivo del educador

Raíz cuadrada

Para el tratamiento de la raíz cuadrada es importante recalcar lo siguiente:

Sea b un número real positivo o cero, su raíz cuadrada real (si existe), es el número real positivo a o cero, tal que el cuadrado de a sea b. $\sqrt{b} = a$, si y solo si: $a^2 = b$; con $a, b \in \mathbb{R}^+$

a) $\sqrt{4} = 2$

b) $\sqrt{(2)^2} = \sqrt{4} = 2$

c) $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

d) $-\sqrt{4} = -2$

e) $\sqrt{-4}$, no tiene raíz cuadrada en los reales.

Recuerde que es un **error** afirmar que la $\sqrt{4}$ es 2 y –2.

Buen Vivir: Inclusión y equidad

Durante este módulo es posible que el profesor/a trabaje con sus estudiantes la importancia de crear hábitos incluyentes y equitativos. Para esto, inicie con el artículo de la Constitución de la República que se ofrece al comienzo del módulo y destaque el hecho de que estos valores son un derecho elemental de las personas, que debe ser garantizado y respetado. Luego de esto, reflexione acerca de diversas situaciones cotidianas en las que los alumnos/as perciban injusticia, desigualdad y exclusión. Este análisis debe servir como un punto de partida, nunca de llegada, ya que desde allí debe iniciarse la búsqueda de alternativas de cambios y mejoramiento para la sociedad. A lo largo del módulo, refuerce valores y actitudes adyacentes como el respeto, el diálogo, la fraternidad, entre otros.

En este sentido, se puede proponer la elaboración de una campaña escolar acerca de la inclusión y la igualdad. Cree grupos de trabajo para que puedan abarcar diversos aspectos: la inclusión étnica, laboral, de las personas con capacidades especiales, de migrantes y exiliados; la equidad en el acceso a los servicios de educación, salud, movilidad, seguro social, entre otros. Recuerde reforzar la idea de un enfoque propositivo, orientado a que los estudiantes se conviertan en actores activos del cambios, comprometidos con el desarrollo y el bienestar de su país. Motívelos para que creen un eslogan, consigan una imagen de campaña, desarrollen mensajes dirigidos a la comunidad para que puedan presentar este trabajo ante los estudiantes y padres de familia con ocasión de las fiestas patronales, pero, lo más importante, motívelos para que se comprometan a respetar y hacer respetar estos valores democráticos y a crear una cultura de paz.

Bibliografía

- http://www.mamutmatematicas.com
- RESS, Paul y SPARKS, Fred, *Álgebra elemental*, McGraw Hill Interamericana , México, 1999.

Refuerzo Potencia de exponente racional. Radicales. Operaciones con radicales

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

1. Recuerda que las potencias cuyo exponente es un número racional negativo pueden transformarse en potencias de exponente un número racional positivo.

— Observa y completa:

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{2}{5}} = \left(\frac{1}{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{2}{5}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{2}{5}};\quad \left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{\frac{.....}{.....}}\right)^{.....} = \left(\frac{.....}{.....}\right)^{.....};\quad \left(\frac{6}{4}\right)^{-\frac{2}{3}} = ...;\quad \left(\frac{-9}{5}\right)^{-\frac{3}{2}} = ...$$

2. Observa cómo se opera con potencias de exponente racional y completa los ejercicios propuestos.

Producto de potencias de igual base y exponente racional: se escribe la misma base y se suman los exponentes reduciéndolos a común denominador.

$$2^{\frac{3}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{-\frac{5}{2}} = 2^{\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{4}-\frac{5}{2}\right)} = 2^{\left(\frac{12}{20}+\frac{5}{20}-\frac{50}{20}\right)} = 2^{-\frac{33}{20}}$$

a) $(-5)^{\frac{1}{5}} \cdot (-5)^{\frac{1}{6}} = (-5)^{(.....+.....)} =$

b) $\left(\frac{6}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{6}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{6}{4}\right)^{\frac{5}{6}} =$

c) $\left(-\frac{7}{9}\right)^{\frac{7}{3}} \cdot \left(-\frac{7}{9}\right)^{-\frac{1}{5}} =$

Cociente de potencias de igual base y exponente racional: se escribe la misma base y se restan los exponentes reduciéndolos a común denominador.

$$7^{\frac{3}{4}} : 7^{\frac{3}{5}} = 7^{\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{5}\right)} = 7^{\left(\frac{15}{20}-\frac{12}{20}\right)} = 7^{-\frac{3}{20}}$$

d) $3^{\frac{5}{2}} : 3^{\frac{4}{3}} = 3^{(.....-.....)} = 3^{.....}$

e) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}} : \left(\frac{2}{5}\right)^{-\frac{3}{7}} =$

f) $(-2)^{\frac{9}{5}} : (-2)^{-\frac{7}{11}} =$

Potencia de una potencia de exponente racional: se escribe la misma base y se multiplican los exponentes.

$$\left[\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{1}{7}} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{7}} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{2}{21}}$$

g) $\left(9^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{6}} = 3^{.....\cdot.....} = 3^{.....}$

h) $\left[(-1)^{\frac{2}{7}}\right]^{-\frac{1}{10}} =$

Potencia racional de un producto: se eleva cada factor de la base al exponente de la potencia.

$$\left[\frac{1}{6}\cdot 5 \cdot (-3)\right]^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{2}{3}} \cdot (-3)^{\frac{2}{3}}$$

i) $\left[9 \cdot 4 \cdot (-6)\right]^{\frac{1}{6}} = 9^{.....} \cdot 4^{.....} \cdot (-6)^{.....}$

j) $\left[(-2)\cdot(-8)\cdot 4\right]^{-\frac{7}{5}} =$

3. Los siguientes radicales son *semejantes:* $3\sqrt{5}$; $8\sqrt{5}$; $-6\sqrt{5}$; $25\sqrt{5}$. Observa qué tienen en común y completa: los radicales semejantes tienen en común el .... y el ....

4. Resuelve ahora estas operaciones.

a) $\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = (.......+.......-.......)\cdot\sqrt{5} = ...\sqrt{5} =$

b) $2\sqrt{3} + \sqrt{7} - \sqrt{3} - 3\sqrt{7} = (.......-.......)\cdot\sqrt{3} + (.......-.......)\cdot\sqrt{7} =$

c) $\sqrt{7} + 4\sqrt{7} - \sqrt{7} =$

d) $-\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{2} =$

5. Completa siguiendo el modelo:

a) $\sqrt[3]{25} = 25^{\frac{1}{3}}$

b) $\sqrt[3]{22} = 22^{.....}$

c) $\sqrt[7]{9} = ...^{\frac{1}{7}}$

d) $\sqrt[5]{3^2} = ...$

Refuerzo

Representación de las soluciones de una ecuación con dos incógnitas

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

1. Expresa en lenguaje algebraico la siguiente frase: *El triple de un número más otro es igual a 4.*

   A continuación, construye una tabla de valores con las soluciones de la ecuación obtenida y represéntalas gráficamente.

   — Representamos el primer número por *x* y el segundo por *y* para obtener la ecuación.

   ..... x + ... y = ...

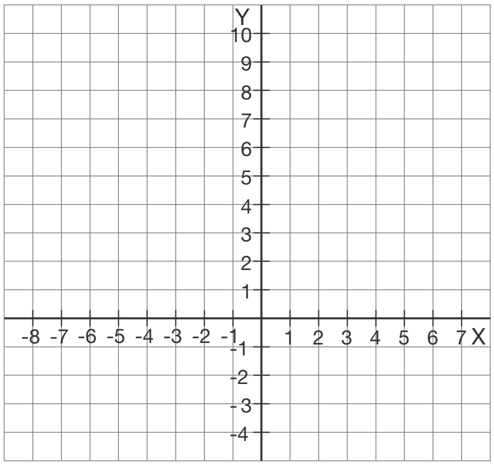
   — Despejamos una de las incógnitas de la ecuación.

   y = ... − x

   — Construimos la tabla de valores dando valores arbitrarios a *x* para calcular los correspondientes valores de *y.*

x	y = 4 − 3x
−2	y = 4 − 3 · (−2) = ...
−1	y = 4 − 3 ..... = ...
0	y = 4 − 3 ..... = ...
1	y = 4 − 3 ..... = ...
2	y = 4 − 3 ..... = ...

   — Representamos los pares de valores obtenidos en un sistema de coordenadas cartesianas. Unimos los puntos representados para obtener la recta correspondiente a las soluciones de la ecuación.



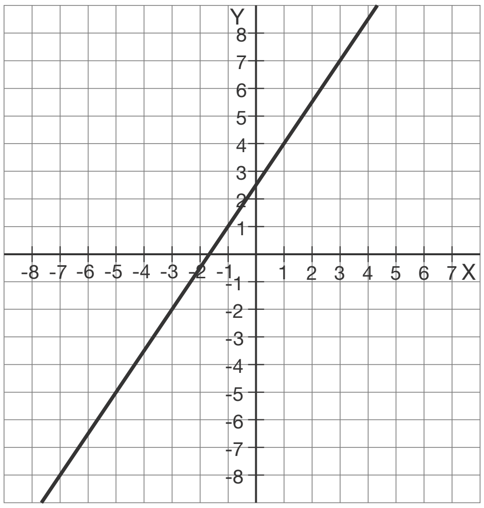
   Comprueba si los puntos *A*(3, −5), *B*(−3, 12) y *C*(4, −8) corresponden a soluciones de la ecuación.

2. La gráfica de la derecha corresponde a las soluciones de la siguiente ecuación.

   3x − 2y = −5

   — ¿Cómo comprobarías, a partir de la gráfica, si las coordenadas de un punto corresponden a una solución de la ecuación?

   — ¿Y a partir de la ecuación?



☑ Ficha de evaluación

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

1. Construye tres segmentos con las siguientes longitudes: $\sqrt{7}$, $\sqrt{13}$ y $\sqrt{21}$.

2. Representa sobre la recta los siguientes números reales: $-\sqrt{13}$; 1,5; $\sqrt{7}$, –3; $\sqrt{21}$; $0,\overline{6}$.
   — Escríbelos ordenados de menor a mayor.

3. Indica:
   a) Una aproximación por exceso de $\dfrac{23}{13}$ hasta las milésimas.
   b) Una aproximación por defecto de $\dfrac{11}{7}$ hasta las centésimas.
   c) El valor de $\sqrt{3}$ redondeado hasta las centésimas.

4. ¿Expresa en forma de potencia de base real y exponente racional:
   a) $\sqrt[5]{3}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{17}}$ c) $\sqrt[3]{\pi}$ d) $-\sqrt[4]{5}$

5. Expresa en forma de raíz las siguientes potencias y agrupa los radicales semejantes.
   a) $10^{\frac{1}{3}}$ b) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$ c) $7 \cdot 3^{\frac{1}{2}}$ d) $5 \cdot 10^{\frac{1}{3}}$

6. Efectúa las siguientes operaciones.
   a) $\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} =$
   b) $\sqrt{3} + 4\sqrt{7} - \sqrt{3} - 10\sqrt{7} =$
   c) $\dfrac{\sqrt{3}}{5\sqrt{8}} =$
   d) $\left(7 \cdot \sqrt{3}\right)^{5} =$
   e) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} =$
   f) $\sqrt{\sqrt{17}} =$

7. Descubre los errores que existen en las siguientes igualdades y corrígelos.
   a) $\dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}$ b) $\dfrac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{7}} = -\sqrt{7}$

8. Resuelve gráficamente el siguiente sistema de ecuaciones.
$$\left.\begin{aligned} 3x - y &= 4 \\ x + 2y &= -1 \end{aligned}\right\}$$

9. Resuelve algebraicamente estos sistemas de ecuaciones.
   a) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 6 \\ x - 2y &= 3 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 4x - 2y &= 8 \\ 3x + y &= -9 \end{aligned}\right\}$

10. Traduce al lenguaje algebraico el siguiente enunciado.
    Un padre tiene 29 años más que su hijo y dentro de 14 años le doblará la edad.

11. Se han envasado 200 litros de leche en 130 botellas de 2 litros y de 1 litro. ¿Cuántas botellas de cada tipo se han utilizado?

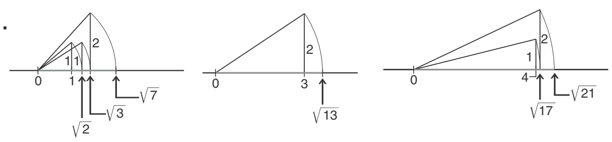
12. El perímetro de un rectángulo es de 390 m. Calcula sus dimensiones sabiendo que mide 51 m más de largo que de ancho.

13. El triple de un número más el doble de otro es 10 y el segundo más el cuádruple del primero es 15. ¿Cuáles son estos números?

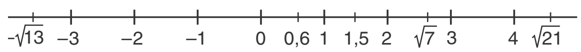
Ficha de evaluación

Solucionario

1.



2.



— $-\sqrt{13} < -3 < 0{,}6 < 1{,}5 < \sqrt{7} < \sqrt{21}$

3. a) $\dfrac{23}{13}$ 1,770; b) $\dfrac{11}{7}$ 1,57; c) $\sqrt{3}$ 1,73

4. $a)\, 3^{\frac{1}{5}};\, b)\left(\dfrac{1}{17}\right)^{\frac{1}{2}};\, c)\, \pi^{\frac{1}{3}};\, d) - 5^{\frac{1}{4}}$

5. $a)\sqrt[3]{10};\, b)\dfrac{1}{5}\sqrt{3};\, c)\, 7\sqrt{3};\, d)\, 5\sqrt[3]{10}$

Son radicales semejantes: *a)* y *d); b)* y *c).*

6. $a)\, 6\sqrt{2};\, b) - 6\sqrt{7};\, c)\dfrac{\sqrt{3}}{10\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{20};$

$d)\, 7^5 \cdot 3^2\ \sqrt{3};\, e)\sqrt{10};\, f)\sqrt[4]{17}$

7. a) $\dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}+2}{1-2} = -2-\sqrt{2}$

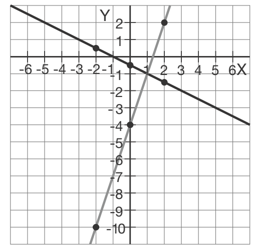
b) $\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \dfrac{3\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}{5-2} = \sqrt{5}-\sqrt{2}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$

8. Construimos las tablas de soluciones de cada una de las ecuaciones.

Primera ecuación		Segunda ecuación	
x	$y = 3x - 4$	x	$y = \dfrac{-x-1}{2}$
–2	–10	–2	0,5
0	–4	0	–0,5
2	2	2	–1,5

Representamos gráficamente las soluciones de las dos ecuaciones en un sistema de coordenadas cartesianas.



Las dos rectas se cortan en el punto (1, –1), así que la solución del sistema es $x = 1$, $y = -1$.

9. a) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 6 \\ x - 2y = 3 \end{array}\right\}$

La solución del sistema es $x = 3$, $y = 0$.

b) $\left.\begin{array}{r} 4x - 2y = 8 \\ 3x + y = -9 \end{array}\right\}$

La solución del sistema es $x = -1$, $y = -6$.

10. Las ecuaciones correspondientes al enunciado son: $x = 29 + y$

$x + 14 = 2\,(y + 14)$

11. A partir del enunciado, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 130 \\ 2x + y = 200 \end{array}\right\}$$

Cuya solución es $x = 70$, $y = 60$. Se han utilizado 70 botellas de 2 litros y 60 botellas de 1 litro.

12. Denominamos x a la altura del rectángulo e y a la base, y obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y = 390 \\ y = x + 51 \end{array}\right\}$$

Cuya solución es $x = 72$, $y = 123$. El rectángulo mide 123 m de base por 72 m de altura.

13. A partir del enunciado, se obtiene el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 10 \\ 4x + y = 15 \end{array}\right\}$$

Cuya solución es $x = 4$, $y = -1$.

Los números son 4 y –1.

Indicadores esenciales de evaluación

	Puede continuar	Necesita refuerzo
	% de alumnos/as	
• Opera con números reales.		
• Expresa en forma de intervalo un segmento de la recta real y representa intervalos sobre la recta real.		
• Efectúa aproximaciones de números reales por redondeo y por truncamiento.		
• Resuelve ecuaciones e inecuaciones de primer grado.		
• Resuelve un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por medio de gráficos y procesos algebraicos.		

Módulo 2 Bloques: Numérico. Relaciones y funciones

Notación científica
Función lineal
Función exponencial

Objetivos del módulo

- Representar cantidades grandes y pequeñas mediante notación científica para facilitar su lectura y comprensión.
- Reconocer una función lineal a través del análisis de su tabla de valores, gráfico o ecuación para comprender y predecir variaciones constantes en los problemas de la vida cotidiana.

DCD Destrezas con criterios de desempeño

- Transformar cantidades expresadas en notación decimal a notación científica con exponentes positivos y negativos.
- Construir patrones de crecimiento lineal en su ecuación generadora.
- Evaluar si una función lineal es creciente o decreciente en su tabla de valores, gráfico o ecuación.
- Determinar la ecuación de una función lineal si su tabla de valores, su gráfico o dos puntos de esta función son conocidos.
- Reconocer si una función exponencial es decreciente o creciente.

Estrategias metodológicas

Relacionada con la DCD: **Transformar cantidades expresadas en notación decimal a notación científica con exponentes positivos y negativos.**

Para la activación de conocimientos previos

- Repase las propiedades de la potenciación y algunas potencias de base diez. Ejemplos:

Lectura	Potencia de base diez		
milésima	10^{-3}	$\frac{1}{10^3} = \frac{1}{1\,000}$	0,001
centésima	10^{-2}	$\frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$	0,01
décima	10^{-1}	$\frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}$	0,1
diez	10^1	10	1
cien	10^2	100	10
mil	10^3	1 000	100

- Hay que insistir en el uso razonable de la calculadora, la cual ha de ser una herramienta utilizada solo cuando sea necesaria.

Para la construcción del conocimiento

- Presente información que contenga grandes cantidades como la velocidad de la luz (300 000 000 m/s) y pequeñas cantidades como la longitud de onda de los rayos cósmicos (0,000000000000001 m), para que los estudiantes analicen la necesidad de utilizar expresiones abreviadas.
- Solicite que expresen las cantidades indicadas como productos, recalque que uno de los factores debe ser una potencia de base diez y el otro un número decimal cualquiera.
- Discuta sobre la utilidad del conocimiento sobre la notación científica, mencione que una aplicación inmediata es optimizar cálculos en operaciones combinadas con números muy grandes o muy pequeños.
- Presente cantidades expresadas en notación científica y solicite que escriban el número correspondiente en forma decimal.
- Luego de un proceso lógico y razonado encamine a los estudiantes a concluir que:

1. Un número expresado en notación científica tiene tantas cifras significativas como cifras hay escritas.
2. Un número expresado en notación científica consta de un número decimal cuya parte entera tiene una sola cifra no nula, multiplicado por una potencia de diez de exponente entero.
3. El número decimal 0,000000000064321278 escrito en notación científica sería $6,4321278 \times 10^{-11}$ porque la coma recorre 11 espacios hacia la derecha para formar el número 6,432.
4. Por medio de la notación científica se concluye que un número menor a 1 se convierte en un producto de un decimal mayor que 1 y menor que 10 por una potencia de base diez, cuyo exponente es el opuesto al número de espacios que recorrió la coma a la derecha.
5. Si el número es mayor a 10, por medio de la notación científica, se escribirá como el producto del decimal (mayor que 1 y menor que 10) por una potencia de base diez, cuyo exponente es igual al número de espacios que recorrió la coma a la izquierda.

- Utilice la calculadora para expresar números en notación científica.

Para la aplicación del conocimiento

- Los estudiantes elaborarán un resumen sobre los principales aspectos de la notación científica.
- Respondiendo a interrogantes cómo, cuándo se utiliza, cómo se escribe. Ejemplos para indicar cuántos lugares se ha corrido la coma decimal. Las posibles formas de escribir.
- Indique a los alumnos los pasos a seguir para utilizar este conocimiento dentro de una hoja de cálculo cualquiera.

1. Seleccione las celdas a las que desea dar formato.
2. En el menú Formato, haga clic en Celdas y después en la ficha Número.
3. En la lista Categoría, haga clic en Científica. En el cuadro Posiciones decimales, escriba el número de posiciones decimales que desee mostrar.

- Recuerde que al trabajar en una hoja de cálculo los números en notación científica se escriben de diferente forma, ejemplo: El número $8,5 \times 10^{-7}$ se podría también escribir como 8,5 e-7.

Para la evaluación

- Se sugiere seleccionar actividades de la guía Algebra 1 Exercises in Spanish • Chapter 8 © McDougal Littell Inc. que podrá descargar de la dirección web www.fallbrookhs.org/ourpages/users/jtaglenava/.../8_4.pdf para realizar un trabajo grupal.
- Tome en cuenta los siguientes aspectos:

1. Que cada grupo valore el tanto por ciento de participación de sus integrantes.
2. Cómo se ha organizado la tarea y si se ha trabajado respetando las opiniones de todos sus miembros.
3. Si creen que el trabajo en grupo ha ayudado a resolver mejor los problemas o ha sido un obstáculo.

Relacionada con la DCD: **Reconocer si una función exponencial es decreciente o creciente.**

Para la activación de conocimientos previos

- Revise con los estudiantes la sección de prerrequisitos del libro, página 53.

  "La expresión algebraica de una función (su regla), $y = f(x)$, es la fórmula que nos indica las operaciones que debemos efectuar con cada valor de la variable x, para obtener el correspondiente valor de la variable y".

- Repase las definiciones de:

  1. La variable independiente "x" es aquella que toma cualquier valor del dominio de la función sin más requisito.

  2. Variable dependiente: el valor que toma "y" luego de aplicar en la regla de la función un valor de la variable independiente "x", se dice que "y" depende (es imagen) de "x".

  3. El conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente se denomina rango, recorrido o conjunto de imágenes.

Para la construcción del conocimiento

- Examine las características y la forma de la gráfica de la función exponencial, apóyese en los ejercicios de la página 78.
- Guie a que el estudiante reconozca el valor de la base en sus casos ($a > 1$ o $1 > a > 0$), luego de reconocerlo compare con las gráfica y concluya que un caso indica la monotonía creciente y el otro decreciente respectivamente.
- Procure que los estudiantes determinen la monotonía de la función exponencial sin que sea necesario trazar la gráfica.
- Comente y discuta que estos conceptos matemáticos tienen aplicaciones, por ejemplo en determinar la intensidad de un terremoto, la intensidad del sonido, el estudio del crecimiento de poblaciones entre otros.

Para la aplicación del conocimiento

- Proponga se construya la curva que indique la evolución de la población del Ecuador y que compare con las gráficas de la función exponencial, proponga la regla de una función que responda a ese crecimiento.

Año	Población
1950	3 202 000
1962	4 476 000
1974	6 521 700
1982	8 060 700
1990	9 648 200
2001	12 090 800
2010	14 306 876

- Encuentre la regla, pero debe aproximarse a $P = P_0 \times a^t$, por ejemplo:

  $P = 3\ 202\ 000 \times 1{,}027^t$, donde t es el número de años desde 1950.

- Resuelva justificando procesos el problema 81 de la página 85.
- La representación gráfica del problema 81 puede relizarla utilizando un programa de código abierto como Geogebra.

Para la evaluación

- Solicite resolver ejercicios como:

  1. Dadas las siguientes funciónes: $3x + y = -1$; $y = 3^x$; $y = 2{,}5^{-x}$

  a) Reconocer la ordenada al origen.

  b) Indicar si es creciente o decreciente. ¿Por qué?

- Entregue el problema 79 de la página 85 resuelto con una gráfica que no corresponda, solicite que los estudiantes verifiquen que el proceso es adecuado y que justifiquen si la gráfica es o no correcta.

Recomendaciones para docentes

Sección para uso exclusivo del educador

Monotonía

Sea f una función real (Para ser función real, su dominio A y su recorrido B son subconjunto de los reales), cuya regla es $y = f(x)$, dicha función es:

1. Creciente si para: $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$; entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$.

2. Decreciente si para: $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$; entonces $f(x_1) \geq f(x_2)$.

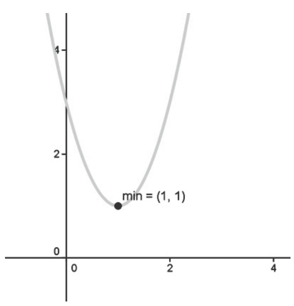
3. Estrictamente creciente si para: $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$; entonces $f(x_1) < f(x_2)$.

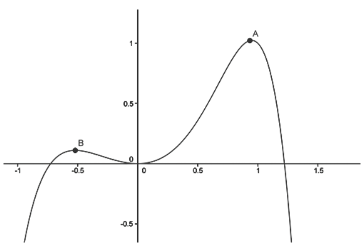
4. Estrictamente decreciente si para: $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$; entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

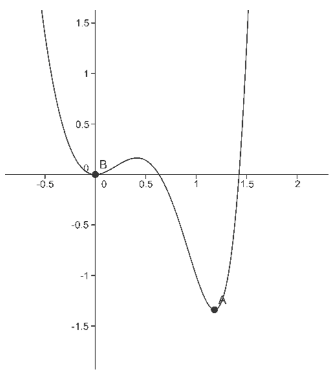
5. Monótona, si solo es creciente o solo es decreciente.

6. Estrictamente monótona, si solo es estrictamente creciente o solo es estrictamente decreciente.

Utilice ejemplos de gráficas en la que se evidencien los seis aspectos mencionados.







Buen Vivir: Ciencia, tecnología e innovación

Durante este módulo es posible que el profesor/a estimule el interés y las preocupaciones científicas de sus estudiantes, al descubrir como la tecnología, los procesos científicos y la innovación permiten ampliar el conocimiento de nuestro universo y de algunos procesos de la vida cotidiana.

Planifique una visita a las oficinas del Instituto Nacional de Estadística y Censos (INEC) o realice los trámites para que algún funcionario de esta oficina pública dicte una charla informativa sobre las acciones que lleva adelante.

Aproveche las actividades de este módulo para conversar acerca de las consecuencias positivas y negativas del uso de la tecnología. Motive para que el uso de estas no aísle a los jóvenes de sus familias, amigos y de la actividad al aire libre. También utilice las redes sociales e Internet para motivar la investigación matemática y crear foros o blogs interesantes con respecto a avances tecnológicos o descubrimientos científicos. Interactúe en dichos foros.

Bibliografía

- http://sectormatematica.cl
- ICM-ESPOL, *Fundamentos de Matemática para Bachillerato*, 2006.
- RESS, Paul y SPARKS, Fred, *Álgebra elemental*, McGraw Hill Interamericana , México, 1999.

Refuerzo Ecuación de una recta

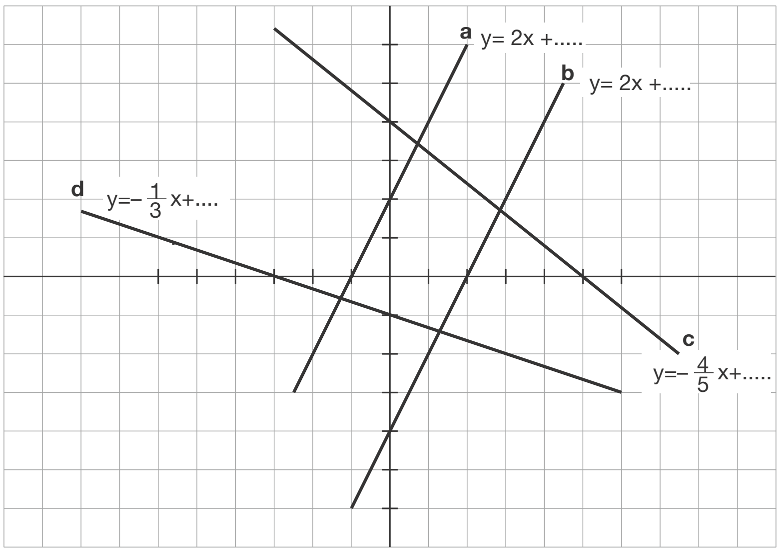
Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

1. Dibuja las rectas dadas por las siguientes ecuaciones.

   a) $y = x$ b) $y = x + 1$ c) $y = 3$ d) $x = 5$

   — Para poder dibujar una recta en un sistema de coordenadas, ¿de cuántos puntos, como mínimo, debemos calcular sus coordenadas?

2. Completa las ecuaciones de las rectas representadas en la siguiente figura.



   — ¿Cómo son las pendientes de las rectas *a* y *b?* .... ¿Son rectas paralelas? ....

   — Ordena las rectas de mayor a menor ordenada en el origen.

3. Obtén la ecuación de la recta de ordenada en el origen 4 y pendiente 5, siguiendo este razonamiento.

   Una recta cuya ecuación es $y = m\,x + b$ tiene por .... el valor m y por .... el valor b; por lo tanto, la ecuación de la recta que buscamos es $y =$ ...... $x +$ ....

   — Obtén la ecuación de la recta de ordenada en el origen –1 y pendiente –3.

4. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de coordenadas (2, 3) y es paralela a la recta de ecuación $y = x + 8$. Sigue estos pasos.

   • La pendiente de la recta de ecuación $y = x + 8$ es ....

   • Si la recta que buscamos ha de ser paralela a $y = x + 8$, tendrá por pendiente .... , luego la recta que buscamos será de la forma $y = x + b$.

   • Para hallar b, sustituimos el punto de coordenadas (2, 3). Recuerda que el primer valor del punto corresponde a x y el segundo, a y: ...... = ... + b

   • Despejamos b: $b =$ ...... – ...... ; $b =$ ......

   — Obtén la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, –3) y es paralela a la recta $y = 2x - 1$.

5. Calcula:

   a) La ordenada en el origen de la recta que pasa por el punto (2, 0) y cuya pendiente vale –1.

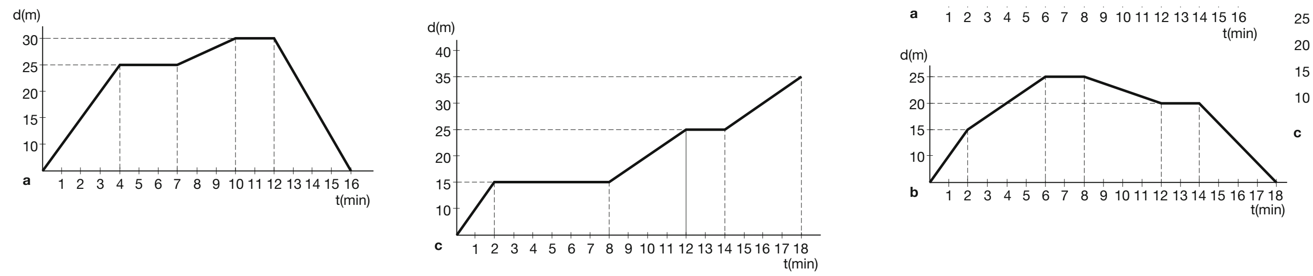
   b) La pendiente de la recta que pasa por los puntos (1, 5) y (2, 5). ¿Es paralela al eje de ordenadas?

Refuerzo Gráfica de una función y función de proporcionalidad inversa

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

1. Inti sale de su casa para ir al colegio y se detiene en una librería para comprar un esferográfico. Continúa su camino y se encuentra con Andrés. Los dos amigos se quedan un rato mirando los escaparates de una tienda de computadores. De repente, Inti se da cuenta de que se ha quedado su cuaderno de Matemáticas en casa y regresa a buscarlo.

— ¿Cuál de las siguientes gráficas describe la anterior situación?



— Observa la gráfica *a* de la figura y responde:

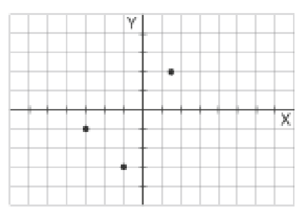
a) ¿A qué distancia se encuentra la librería de la casa de Inti?
b) ¿Cuánto tiempo pasa Inti comprando en la librería?
c) ¿Cuál es la distancia total recorrida por Inti hasta llegar a la tienda de computadores?
d) ¿Cuánto tiempo tarda Inti en volver a su casa desde la tienda de computadores?

2. Representa gráficamente la siguiente función de proporcionalidad inversa $y = \frac{3}{x}$.

Comprueba que el producto de cualquier par de valores correspondientes es constante y determina la constante de proporcionalidad inversa.

— Confeccionamos la tabla de valores y representamos gráficamente la función.

x	–3	–1,5	–1	1	1,5	3
y	–1	.....	–3	.....	2	.....



— (–3) (–1) = (–1,5) (.....) = (–1) (–3) = (1) (.....) = (1,5) (2) = (1) (.....) = ...

— Por tanto, la constante de proporcionalidad inversa es .....

3. Para cada una de las siguientes hipérbolas construye una tabla de valores, representa gráficamente y determina la constante de proporcionalidad inversa.

a) $y = -\frac{2}{x}$ b) x y = 4 c) x y = –3

4. Para adquirir una vivienda de protección oficial en un determinado municipio existe una subvención relacionada con el sueldo de los solicitantes. Esta información se recoge en la siguiente tabla.

Sueldo anual en dólares (x)	36 000	18 000	12 000
Subvención en dólares (y)	900	1 800	2 700

— Representa gráficamente esta función de proporcionalidad inversa.

— Determina la constante de proporcionalidad inversa.

☑ Ficha de evaluación

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

1. Queremos enmarcar varias ventanas cuadradas de diferentes dimensiones. El material para construir el marco cuesta $ 3/dm.

   a) ¿Cuánto costará enmarcar una ventana de 1 m de lado? ¿Y una ventana de 1,5 m de lado?

   b) ¿Existe alguna relación de dependencia entre la longitud del lado y el precio del marco? ¿Se trata de una función?

   c) Identifica las variables que aparecen en esta situación. ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y la dependiente?

   d) Si *x* es la longitud del lado de la ventana en metros e *y* el precio del marco, escribe la expresión algebraica que relaciona *x* e *y*.

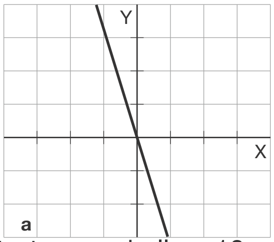
2. Al calentar un determinado líquido con una temperatura inicial de 0 °C, su temperatura aumenta 2 °C cada 3 s.

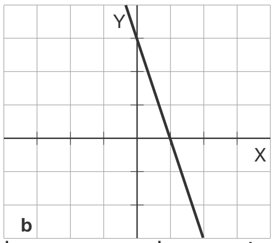
   a) Las magnitudes temperatura y tiempo, ¿siguen una relación de proporcionalidad directa? ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

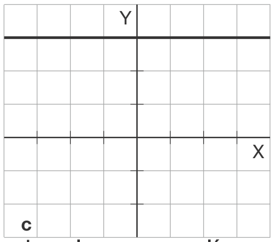
   b) Obtén la expresión algebraica de la función que hace corresponder a cada temperatura el tiempo invertido en alcanzarla. ¿Es una función de proporcionalidad directa?

   c) Dibuja la gráfica de esta función.

3. Obtén la expresión algebraica de las funciones expresadas mediante las siguientes gráficas.







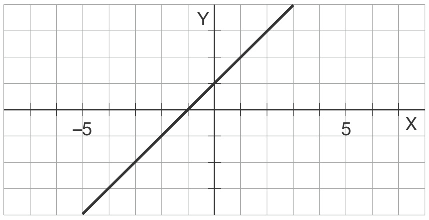
4. Una tortuga se halla a 10 m de una señal de un cruce de carreteras y empieza a desplazarse en línea recta, alejándose de la señal a una velocidad de 0,02 m/s.

   a) Construye una tabla de valores que relacione la distancia de la tortuga a la señal, medida en metros, respecto del tiempo transcurrido, medido en minutos.

   b) Representa gráficamente la función y obtén su expresión algebraica.

   c) ¿Al cabo de cuánto tiempo se hallará a 22 metros de la señal?

   d) ¿Qué espacio recorrerá en 5 minutos? ¿A qué distancia se hallará de la señal?



5. Represente gráficamente la función dada por la siguiente tabla de valores.

Volumen en litros (*x*)	15	25	50	75
Presión en atmósferas (*y*)	10	6	3	2

— Indica qué tipo de función has representado.

— Determina la constante de proporcionalidad.

Ficha de evaluación

Solucionario

1. a) $4 \cdot 1\text{ m} \cdot \$\ 30/\text{m} = \$\ 120$;

   $4 \cdot 1{,}5\text{ m} \cdot \$\ 30/\text{m} = \$\ 180$.

   b) Sí, pues a cada valor del lado del marco de una ventana cuadrada le corresponde un único precio del marco.

   c) *Variable independiente:* lado del marco de una ventana cuadrada.

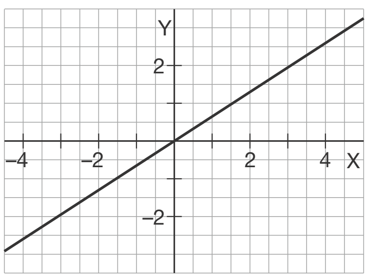
   Variable dependiente: precio del marco.

   d) $\$\ 3/\text{dm} = \$\ 30/\text{m}$; $y = 4x \cdot 30$

2. a) Sí, $k = \frac{2}{3}$; b) $y = \frac{2}{3}x$, sí.

   c)

x	y
0	0
1	$\frac{2}{3}$



3. a) $y = -3x$; b) $y = -3x + 3$; c) $y = 3$

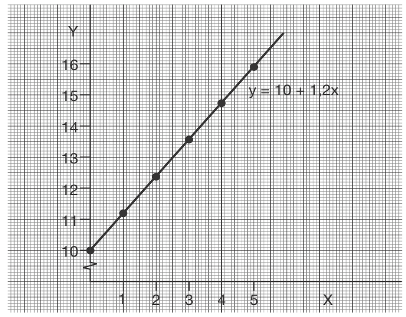
4. a) $0{,}02\text{ m/s} \cdot \dfrac{60\text{ s}}{1\text{min}} = 1{,}2\text{ m/min}$

   x → Tiempo transcurrido en minutos

   y → Distancia a la señal en metros

x	0	1	2	3	4	5
y	10	11,2	12,4	13,6	14,8	16

   b)



   c) $22 = 10 + 1{,}2x$

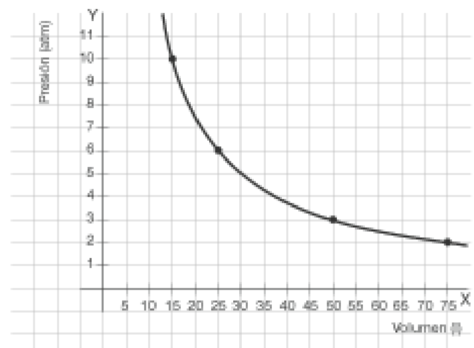
   $x = \dfrac{22 - 10}{1{,}2} = 10$

   Al cabo de 10 min.

   d) $1{,}2\text{ m/min} \cdot 5\text{ min} = 6\text{ m}$

   $y = 10 + 1{,}2 \cdot 5 = 16\text{ m}$

5.



— Una función de proporcionalidad inversa.

— $15 \cdot 10 = 25 \cdot 6 = 50 \cdot 3 = 75 \cdot 2 = 150$

La constante de proporcionalidad inversa es 150.

Indicadores esenciales de evaluación

	Puede continuar	Necesita refuerzo
	% de alumnos/as	
• Resuelve raíces cuadradas exactas y enteras, y efectúa operaciones combinadas con potencias y raíces.		
• Interpreta números expresados en notación científica y escribe números en dicha notación.		
• Distingue y representa gráficamente las funciones de proporcionalidad inversa y las exponenciales.		
• Calcula la función inversa de funciones de primer grado, de funciones cuadráticas y exponenciales.		
• Utiliza de forma adecuada la calculadora y la computadora en la realización de cálculos y en la presentación de funciones.		
• Reconoce una función lineal a partir de su ecuación, tabla de valores y gráfico; además, a partir de una de ellas, determina las otras dos.		
• Diferencia una función lineal de una función exponencial por medio de su gráfico de la tabla de valores y de la ecuación.		
• Determina, a partir de la ecuación de una recta, la ecuación de una recta paralela o de una recta perpendicular a ella.		
• Muestra interés y perseverancia en el trabajo con funciones constantes, lineales y afines.		

Módulo **3** **Bloques:** Numérico. Relaciones y funciones.

Expresiones algebraicas y numéricas Polinomios y fracciones algebraicas

Objetivo del módulo

- Operar con números reales mediante la aplicación a polinomios y las estrategias de resolución de problemas para solucionar situaciones matemáticas del entorno.

DCD Destrezas con criterios de desempeño

- Utilizar el lenguaje algebraico con precisión para expresar e interpretar información.
- Operar con números reales aplicados a polinomios.
- Efectuar operaciones con polinomios y fracciones algebraicas.
- Presentar de manera clara y ordenada la resolución de problemas.
- Confiar en las capacidades propias para resolver problemas.

Estrategias metodológicas

Relacionada con la DCD: **Operar con números reales aplicados a polinomios.**

Para la activación de conocimientos previos

- La utilización y manipulación de símbolos, imprescindibles para el trabajo con polinomios, son dificultades con las que se encuentra gran parte del alumnado. Por ello, es necesario facilitar la asimilación del lenguaje algebraico: puede cambiarse, en ocasiones, la letra de la indeterminada para que no siempre sea x; también puede introducirse el concepto de polinomio utilizando ejemplos físicos, como las fórmulas del movimiento con velocidad constante ($x = v \cdot t$), o las de caída libre de un cuerpo ($y = \frac{1}{2} gt^2$).
- Antes de introducir las diversas operaciones con polinomios, deben recordarse las propiedades de las operaciones con números racionales y, en caso necesario, trabajarlas de nuevo.
- Al introducir la regla de Ruffini para la división de polinomios, debe subrayarse el hecho de que el divisor debe ser un polinomio cuya expresión sea del tipo $x - a$. Para ello pueden efectuarse ejercicios preparatorios, antes de explicar la regla, en la que el alumno, una vez reconocida una división que pueda realizarse mediante esta regla, debe detectar la a del dividendo.

Para la construcción del conocimiento

- Para multiplicar polinomios es importante que el estudiante mantenga un orden al realizar los procesos, entonces, se multiplica cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio, combinando los términos semejantes y expresando el resultado lo más simple posible.
- Justifique los procesos con un ejercicio modelo, mencione constantemente las leyes de los signos, las propiedades de la multiplicación y la potenciación.

Monomio por monomio

- Para multiplicar un término por otro, primero se multiplica las **constantes**, después multiplica **cada variable** y combina el resultado.

$(2xy)(4y) = 8xy^2$

Monomio por binomio

- Multiplica el término que está solo por los otros dos términos, así:

$2x(3x + y) = 6x^2 + 2xy$

Binomio por binomio

- Cada uno de los dos términos en el primer binomio se multiplica por cada uno de los dos términos del segundo binomio. Son cuatro multiplicaciones diferentes.

$(a + b)(x - y) = ax - ay + bx - by$

Binomio por trinomio

- Multiplica cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio

$(x + a)(2x + 3y - 5) = 2x^2 + 3xy - 5x + 2ax + 3ay - 5a$

- Permita que los estudiantes realicen también las multiplicaciones en forma vertical.
- Utilizando alguno de los buscadores en Internet, encuentre videos que hagan referencia a la aplicación de la regla de Ruffini para la resolución de ejercicios con polinomios. Pida a los estudiantes que los observen y preparen uno similar.
- Algunas de las direcciones pueden ser:

http://www.mailxmail.com/curso-division-polinomios-regla-ruffini/regla-ruffini-uso-division-polinomios
http://www.youtube.com/watch?v=pugA5cWVuvI
http://www.youtube.com/watch?v=25Z5TiRyTrk
http://www.mailxmail.com/curso-division-polinomios-regla-ruffini/practica-ejemplo-1
http://www.dailymotion.com/video/xfci60_2-regla-de-ruffini-2_tech

Para la aplicación del conocimiento

- Pida a los alumnos que realicen ejercicios como:

Sean los polinomios A $(x) = x^2 - 2x + 3$, B$(x) = 3x^2 - 5x - 1$ y C$(x) = 2x^4 - 3x^2 - 2x + 1$

Calcular:

a) A(x) + B(x) – C(x) b) –A(x) – 2B(x) c) A(x) ÷ B(x) d) B(x) . C(x) e) –A(x) – C(x)

Para la evaluación

- Resuelva el problema de la página 106 del texto del alumno utilizando menos pasos de los que allí se indican.
- Muestre el proceso de resolución del problema planteado por usted y el del texto.
- Organice una mesa de discusión sobre el proceso de resolución del problema de la página 106 del texto del alumno.
- Utilizando un registro de observación evalúe la participación de los estudiantes.
- Solicite que resuelvan el problema de la sección “Practica”, de la página 107 del texto del alumno.

Relacionada con la DCD: **Efectuar operaciones con polinomios y fracciones algebraicas.**

Para la activación de conocimientos previos

- En este apartado tienen que subrayarse los paralelismos entre los conceptos numéricos y los algebraicos.

Fracción numérica	Fracción algebraica
definición: $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$	$\frac{p(x)}{Q(X)}$ con $Q(x) \neq 0$
equivalencia: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$	equivalencia: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

Para la construcción del conocimiento

- Analice los procedimientos para efectuar la suma, resta, multiplicación y división de fracciones algebraicas y, aplíquelos correctamente en la resolución de ejercicios.

1. Se detalla a continuación el proceso para la división de fracciones algebraicas.

$$\frac{6\,x^2y^3 + 4\,x^3y^2 + 10\,xy}{2\,xy}$$

Paso 1: Dividimos cada término del numerador entre $2xy$. $\frac{6\,x^2y^3 + 4\,x^3y^2 + 10\,xy}{2\,xy} = \frac{6\,x^2y^3}{2\,xy} + \frac{4\,x^3y^2}{2\,xy} + \frac{10\,xy}{2\,xy}$

Paso 2: Simplificamos. $\frac{6\,x^2y^3 + 4\,x^3y^2 + 10\,xy}{2\,xy} = 3xy^2 + 2x^2y + 5$

También se puede trabajar, obteniendo el factor común del numerador y simplificando luego con el denominador. Así: $\frac{2\,xy\,(3xy^2 + 2x^2y + 5)}{2\,xy} = 3xy^2 + 2x^2y + 5$

2. Ahora para expresiones fraccionarias

Paso 1: Multiplicar la primera por la inversa de la segunda.

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 9} \div \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 8x + 15}$$

Paso 2: Dividir $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 9} \div \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 8x + 15} = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9} \times \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 7x + 10}$

Paso 3: Simplificar descomponiendo primero en factores.

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 9} \times \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 7x + 10} = \frac{(x + 2)\,(x - 2)\,(x - 5)\,(x - 3)}{(x + 3)\,(x - 3)\,(x - 5)\,(x - 2)} = \frac{x + 2}{x - 3}$$

Para la aplicación del conocimiento

Empleando diagramas de flujo, los estudiantes resumirán los pasos necesarios para realizar estos procesos, y junto a estos ubicarán ejemplos.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \div \frac{R(x)}{S(x)} = \frac{P(x) \cdot S(x)}{Q(x) \cdot R(x)}$$

Fórmula general

$$\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} \div \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} =$$

$$= \frac{(x^2 + 2x) \cdot (x^2 - 4)}{(x^2 - 5x + 6) \cdot (x^2 + 4x + 4)} =$$

Se factorizan el numerador y el denominador.

$$= \frac{x\,(x + 2) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)}{(x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x + 2)^2} =$$

Se identifican los factores comunes en ambos términos.

$$= \frac{x}{x - 3}$$

Se simplifica eliminando los factores comunes del numerador y denominador.

Para la evaluación

- Utilice la sección de Coevaluación del módulo 3, página 110 del texto, para que los alumnos en parejas desarrollen las actividades.

Recomendaciones para docentes

Sección para uso exclusivo del educador

Algoritmo de Euclides

El algoritmo de Euclides sirve para obtener el **máximo común divisor (m.c.d.)** de dos números enteros positivos. Recibe este nombre por Euclides, pensador griego que vivió hacia el 300 a. C. y que recogió en trece libros titulados *Elementos* las nociones de geometría y aritmética conocidas hasta entonces. Este algoritmo es de enorme importancia para el álgebra moderna, ya que permite aplicar el cálculo del m.c.d. a la resolución de polinomios.

Se recomienda visitar la página http://www.lateclade escape.com, en la que se presenta valiosa información al respecto de los algoritmos del m.c.d y m.c.m., así como de otros temas matemáticos para consulta y formación del docente. Con relación al tema de este apartado se menciona:

Sean a, b dos números, tal que a > b.

1. Se efectúa la división entera entre a y b. Obtenemos un cociente c_1 y un resto r_1.

2. Se efectúa la división del divisor b entre el resto r_1 y obtenemos un cociente c_2 y un resto r_2.

3. Se divide r_1 entre r_2 y obtenemos c_3 y r_3.

4. Se repite el proceso hasta llegar a una división exacta, de resto cero.

5. El último divisor empleado es el m.c.d. de los números a y b.

Ejemplo:

Hallemos el m.c.d. de 320 y 124.

a) $320 \div 124 \Rightarrow c_1 = 2$ y $r_1 = 72$

b) $124 \div 72 \Rightarrow c_2 = 1$ y $r_2 = 52$

c) $52 \div 20 \Rightarrow c_3 = 2$ y $r_3 = 12$

d) $20 \div 12 \Rightarrow c_4 = 1$ y $r_4 = 8$

e) $12 \div 8 \Rightarrow c_5 = 1$ y $r_5 = 4$

f) $8 \div 4 \Rightarrow c_6 = 2$ y $r_6 = 0$

El último divisor es 4, por lo tanto, es el m.c.d. de los números 320 y 124.

Adaptado de http://www.lateclade escape.com

Finalmente, se sugiere el álgebra superior de Hall-Knight para ampliar el conocimiento sobre el algoritmo propuesto.

Buen Vivir: Educación, cultura y saberes ancestrales

La actividad inicial puede servir para que el profesor/a aborde el tema de la riqueza cultural de las diferentes nacionalidades y comunidades étnicas del país. Se ha elegido la pintura naif de la comunidad de Tigua; sin embargo existen otras expresiones pictóricas importantes.

Así también, es una oportunidad para acercar a los estudiantes al arte y a la cultura. A lo largo del módulo, el profesor/a puede presentar otras manifestaciones artísticas, por ejemplo, las fiestas tradicionales de los pueblos indígenas de la Sierra y Amazonía, las tradiciones de los pueblos montubios y afroecuatorianos de la Costa y Sierra, los tejidos con diversos materiales orgánicos y fibras, modelado en barro, yeso, mazapán, las esculturas en piedra y distintos metales, las artesanías con materiales orgánicos e inorgánicos. Aproveche este tema para reforzar el sentido de identidad y de unidad que debe existir entre los ecuatorianos/as. Las diferencias en las expresiones culturales deben servir para valorar la riqueza de los pueblos, pero deben permitir el encuentro de puntos en común dentro del sentido de patria y nacionalidad.

Bibliografía

- MINISTERIO DE EDUCACIÓN, Actualización y Fortalecimiento Curricular de la Educación Básica, Quito, 2010.
- ICM-ESPOL, *Fundamentos de Matemática para Bachillerato*, 2006.
- RESS, Paul y SPARKS, Fred, *Álgebra elemental*, McGraw Hill Interamericana , México, 1999.

Refuerzo Operaciones con fracciones algebraicas

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

1. Halla el valor de k para que:

   a) el polinomio $7x^2 - 5x + k$ sea divisible entre $x - 5$.

   b) el polinomio $x^3 - 3x^2 + 4x + k$ sea divisible entre $x - 2$.

2. Halla el valor de a para que:

   a) $2x^4 + 25x + a$ sea divisible entre $x - 3$.

   b) $20x^3 - 7x^2 + 29x + a$ sea divisible entre $4x + 1$.

3. Halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones de polinomios.

   a) $(x^6 - 1) \div (x - 1)$

   b) $(x^2 + \frac{20}{3}x^2 + 16x + 10) \div (3x + 2)$

4. Sea $P(x) = a^3x^4 - 8a^2x^2 + 8ax + 4$, en el que a es un número racional. Determina el valor $P(-1)$, sabiendo que $P(2) = 4$.

5. Halla los valores de a para que $x - 3$ sea divisor de los siguientes polinomios.

   a) $x^3 - 3x^2 - a^2x + 6a$

   b) $x^2 - ax - 5x + 3a$

6. Encuentra el valor de a para que $ax^3 + x^2 - a^2x - 1$ tenga una raíz igual a -1.

7. Halla el valor de a en este polinomio: $P(x) = x^2 + 2(a + 2)x + 9a$ para que tenga dos raíces iguales.

8. Encuentra el valor de a en este polinomio: $Q(x) = x^2 - 3x + a$, si una de las raíces es el doble de la otra.

9. Al dividir el polinomio $P(x)$, cuyos términos no conocemos, entre $x - 1$ se obtiene de resto 0. Al dividir $P(x)$ entre $x - 2$ también se obtiene de resto 0. ¿Cuál es el resto que se obtiene al dividir $P(x)$ entre $(x - 1)(x - 2)$?

10. Las raíces del polinomio $P(x)$ son -2 y 3. Las raíces del polinomio $Q(x)$ son -1 y 2. ¿Cuáles son las raíces del polinomio $P(x) \cdot Q(x)$?

11. ¿Cuál es el resto de la división de $x^6 + b^6$ entre $x + a$, siendo a un número desconocido?

12. Halla el polinomio cuyo cuadrado es $x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 6x + 9$.

13. Divide $3x^2 - 4x^4 + x^5 - x^3 - 2x + a$ entre $x - 1$, y determina a para que la división sea exacta.

14. Halla el número c que cumpla que la división de $P(x)$ entre $x - 2$ tenga de resto $R(x)$.

   a) $P(x) = 2x^2 + cx - 7$; $R(x) = 0$

   b) $P(x) = 4x^2 + 4x - 5$; $R(x) = c - 5$

Refuerzo Operaciones con fracciones algebraicas

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

1. Factoriza estos polinomios.

   a) $x^4 - 1$

   b) $x^4 - 12x^3 + 55x^2 - 114x + 90$

2. Un polinomio de segundo grado tiene estas raíces. Calcula la forma reducida y ordenada de cada polinomio.

   a) $2 + \sqrt{3}\ ;\ 2 - \sqrt{3}$

   b) $\dfrac{m}{n};\ -\dfrac{m}{n}$

   c) $-5 \pm 2\sqrt{3}$

3. Demuestra que el polinomio $x^m - a^m$ es divisible por $x - a$, siendo a un número real cualquiera, y m un número natural cualquiera. Calcula el cociente de esta división.

$$(x^m - a^m) \div (x - a)$$

4. Demuestra que el polinomio $x^m - a^m$ es divisible por $x + a$, siendo a un número real cualquiera, y m un número natural par. Demuestra también que, si m es un número impar, el polinomio no es divisible.

5. Simplifica estas fracciones.

   a) $\dfrac{x-\sqrt{2}}{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2}$

   b) $\dfrac{x^3 - 6x^2 + 5x + 12}{2x^3 + 6x^2 - 2x - 6}$

   c) $\dfrac{x^4 + 9x^3 - 37x^2 + 33x - 6}{x^4 - 18x^3 + 23x^2 + 42x - 48}$

6. Simplifica estas expresiones.

   a) $\dfrac{1+\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2}{1-\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2}$

   b) $\dfrac{1-\dfrac{x+a}{x-a}}{1+\dfrac{x+a}{x-a}}$ siendo a un número real cualquiera.

Módulo

3 ☑ Ficha de evaluación

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

1. Propón un enunciado que corresponda a la siguiente igualdad.

$$3x - 2 = 2x + 4$$

2. Efectúa las siguientes operaciones reduciendo términos semejantes.

a) $3x^2 + 2x^2 - x^2 - x^3 + \frac{1}{3}x^2 - x + x^2 - \frac{1}{4}x^3$ b) $x^5 + x + 5x^5 - \frac{1}{3}x^2 + 3x - \frac{2}{3}x^2 + 5x$

3. Cuál de los siguientes valores es una raíz del polinomio $P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$.

a) $x = -1$ b) $x = -3$ c) $x = 0$

4. Sean $P(x) = x - 2x^2 + 2x - 3$ y $Q(x) = 2x + x^3 - 5$.

a) Indica si los polinomios P(x) y Q(x) son completos o incompletos.

b) Calcula $P(x) - Q(x)$

5. Sean $P(x) = x^3 - x^2 + 2x - 15$, $Q(x) = x^4 - 5x^2$ y $R(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 5$. Calcula:

a) $P(x) + Q(x) - R(x)$ b) $P(x) \cdot Q(x)$ c) $-P(x) + 2\,Q(x)$

6. Dados los polinomios $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$, $Q(x) = -3x^3 + 5x^2 - 3x + 4$ y $R(x) = x^3 + 2x - 3$, efectúa las operaciones indicadas.

a) $P(x) - Q(x)$ b) $P(x) \cdot R(x) - Q(x)$

7. Dados los polinomios $P(x) = 3x^2 + 2x - 1$ y $Q(x) = 6x^3 + 13x^2 + 4x - 3$, calcula:

a) $P(x) + Q(x)$ c) $P(x) \cdot Q(x)$

b) $Q(x) - P(x)$ d) $(P(x))^2$

8. Factoriza los siguientes polinomios.

a) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$

b) $x^3 + 5x^2 + x + 5$

c) $12x^3 - 16x^2 - 20x + 8$

— Indica, a continuación, sus raíces.

9. Efectúa las siguientes operaciones.

a) $\frac{1}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2}$

b) $\frac{3x+2}{2x^2+5x+2} - \frac{x-4}{6x^2+x-1}$

c) $\frac{4x+2}{x^2+4x+3} \cdot \frac{x+3}{7x+5}$

d) $\frac{15}{3x-1} : \frac{3}{2x+1}$

☑ Ficha de evaluación

Solucionario

1. El triple de un número menos 2 es igual al doble de dicho número más 4.

2. a) $\left(-1-\frac{1}{4}\right)x^3+\left(3+2-1+\frac{1}{3}+1\right)x^2-x=$

$=-\frac{5}{4}x^3+\frac{16}{3}x^2-x$

b) $(1+5)x^5+\left(-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)x^2+(1+3+5)x=$

$=6x^5-x^2+9x$

3. $P(-1)=(-1)^3+(-1)^2-5\cdot(-1)+3=$

$=-1+1+5+3=8$

$P(-3)=(-3)^3+(-3)^2-5\cdot(-3)+3=$

$=-27+9+15+3=0$

$P(0)=3$

–3 es raíz del polinomio P(x).

4. $P(x)=-2x^2+3x-3 \qquad Q(x)=x^3+2x-5$

a) P(x) es un polinomio completo y Q(x), incompleto.

b)
$$\begin{array}{r}
-2x^2+3x-3\\
-x^3\qquad\quad -2x+5\\
\hline
-x^3-2x^2+\ x+2
\end{array}$$

$P(x)-Q(x)=-x^3-2x^2+x+2$

5. a)
$$\begin{array}{r}
x^3-\ x^2+2x-15\\
x^4\qquad\quad -5x^2\qquad\qquad\ \\
-2x^3+3x^2-2x+\ 5\\
\hline
x^4-\ x^3-3x^2\qquad\quad -10
\end{array}$$

$P(x)+Q(x)-R(x)=x^4-x^3-3x^2-10$

b)
$$\begin{array}{r}
x^3-x^2+2x-15\\
x^4-5x^2\\
\hline
-5x^5+\ 5x^4-10x^3-75x^2\\
x^7-x^6+2x^5-15x^4\qquad\qquad\qquad\\
\hline
x^7-x^6-3x^5-10x^4-10x^3-75x^2
\end{array}$$

$P(x)\cdot Q(x)=x^7-x^6-3x^5-10x^4-10x^3-75x^2$

c)
$$\begin{array}{r}
-x^3+\ \ x^2-2x+15\\
2x^4\qquad\quad -10x^2\qquad\qquad\ \\
\hline
2x^4-x^3-\ 9x^2-2x+15
\end{array}$$

$-P(x)+2Q(x)=2x^4-x^3-9x^2-2x+15$

6. a)
$$\begin{array}{r}
2x^3-4x^2+3x-1\\
3x^3-5x^2+3x-4\\
\hline
5x^3-9x^2+6x-5
\end{array}$$

$P(x)-Q(x)=5x^3-9x^2+6x-5$

b)
$$\begin{array}{r}
2x^3-4x^2+\ 3x-1\\
x^3+\ 2x-3\\
\hline
-\ 6x^3+12x^2-\ 9x+3\\
4x^4-\ 8x^3+\ 6x^2-\ 2x\qquad\\
2x^6-4x^5+3x^4-\quad x^3\qquad\qquad\qquad\qquad\\
\hline
2x^6-4x^5+7x^4-15x^3+18x^2-11x+3
\end{array}$$

$P(x)\cdot R(x)=2x^6-4x^5+7x^4-15x^3+18x^2-$
$-11x+3$

$$\begin{array}{r}
2x^6-4x^5+7x^4-15x^3+18x^2-11x+3\\
3x^3-\ 5x^2+\ 3x-4\\
\hline
2x^6-4x^5+7x^4-12x^3+13x^2-\ 8x-1
\end{array}$$

$P(x)\cdot R(x)-Q(x)=2x^6-4x^5+7x^4-$
$-12x^3+13x^2-8x-1$

7. a) $P(x)+Q(x)=6x^3+16x^2+6x-4$

b) $Q(x)-P(x)=6x^3+10x^2+2x-2$

c) $P(x)\cdot Q(x)=18x^5+51x^4+32x^3-14x^2-10x+3$

d) $(P(x))^2=9x^4+12x^3-2x^2-4x+1$

8. a) $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)$ — Raíces: 1, 2, 3, 4

b) $(x+5)\cdot(x^2+1)$ — Raíces: –5

c) $4\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(3x-1)$ — Raíces: –1, 2, $\frac{1}{3}$

9. a) $\dfrac{x-4}{(x-1)^2}$

b) $\dfrac{8x^2+5x+6}{6x^3+13x^2+x-2}$

c) $\dfrac{4x+2}{7x^2+12x+5}$

d) $\dfrac{10x+5}{3x-1}$

☑ Indicadores esenciales de evaluación

	Puede continuar	Necesita refuerzo
	% de alumnos/as	
• Calcula el valor numérico de un polinomio.		
• Aplica la regla de Ruffini en la división de polinomios.		
• Aplica el teorema del resto para hallar las raíces de un polinomio.		
• Opera polinomios.		
• Factoriza polinomios.		

Módulo 4 Bloques: Geométrico. De medida.

Ángulos notables Razones trigonométricas

Objetivo del módulo

- Resolver problemas que contengan el cálculo de elementos geométricos en figuras, mediante la aplicación de las razones trigonométricas y el teorema de Pitágoras.

DCD Destrezas con criterios de desempeño

- Reconocer ángulos complementarios y suplementarios en la resolución de problemas.
- Calcular medidas de ángulos internos en polígonos regulares de hasta seis lados para establecer patrones.
- Definir las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.
- Aplicar las razones trigonométricas en el cálculo de longitudes de lados de triángulos rectángulos.
- Realizar conversiones de ángulos entre radianes y grados.
- Reconocer medidas en radianes de ángulos notables en los cuatro cuadrantes.
- Utilizar el lenguaje geométrico para interpretar y transmitir información.
- Aplicar los conceptos elementales de la trigonometría a la resolución de problemas de la vida cotidiana.
- Apreciar las importantes aplicaciones de la trigonometría en la determinación de alturas y distancias.
- Valorar el uso de recursos tecnológicos como la calculadora y el ordenador en el trabajo con razones trigonométricas.

Estrategias metodológicas

Relacionada con la DCD: **Reconocer ángulos complementarios y suplementarios en la resolución de problemas.**

Para la activación de conocimientos previos

- Es importante que el alumno aprenda a identificar los diferentes tipos de ángulos y que comprenda que los criterios de clasificación de ángulos son excluyentes. Pida a los alumnos que señalen el tipo de ángulo que corresponde en la siguiente tabla:

El ángulo de 42° es...	agudo recto obtuso
El ángulo de 140° es...	agudo recto obtuso
El ángulo de 90° es...	agudo recto obtuso
El ángulo de 89° es...	agudo recto obtuso
El ángulo de 91° es...	agudo recto obtuso

- La suma de ángulos en el sistema sexagesimal no suelen presentar grandes dificultades. Cabe insistir, eso sí, en la necesidad de convertir los resultados que exceden de 60 en la unidad inmediata superior. La operación que resulta más difícil es la resta en el caso en que deba transformarse el minuendo. Al principio deben darse a los alumnos restas preparadas y hacerles razonar el procedimiento de transformación del minuendo hasta que sean capaces de hacerlo por sí mismos.

- Es importante que los alumnos usen el transportador de ángulos para medir, comparar y representar ángulos (véase el ejemplo 1 de la página 114). También es conveniente que se acostumbren a realizar estimaciones previas a la medición de un ángulo con el transportador.

Para la construcción del conocimiento

- Una actividad que permite comprender de mejor manera los ángulos complementarios y suplementarios es el de la orientación. Con esta información, trabaje en el patio con los estudiantes, realizando diferentes ejercicios.
- Los puntos cardinales del horizonte son: Este por donde sale el sol; Oeste, por donde se oculta; para el Sur y Norte, se sugiere usar una brújula.
- Pida que anoten información meteorológica proporcionada por el INAMHI un día concreto. Que hablen de las diferentes direcciones del viento: del noreste (NE), del este (E), del sudoeste (SO), del noroeste (NO)... Estas direcciones vienen dadas por la rosa de los vientos, en la que están marcadas también las direcciones intermedias NS y EO, como se puede observar en la gráfica en la sección "Para la evaluación" de esta página. Cada dos direcciones consecutivas forman un ángulo de 45°.

Para la aplicación del conocimiento

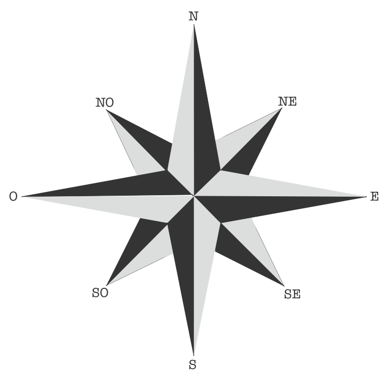
- Se puede utilizar un programa de código abierto llamado Geogebra, que le permitirá realizar ejercicios novedosos y virtuales de geometría sin necesidad de un gasto adicional. El programa permite manejarse en un entorno atractivo y con instrucciones fáciles de entender y ejecutar. Motive a sus estudiantes a familiarizarse con este programa, para obtener mejores resultados.
- Organice concursos de orientación, puede ser mirando en qué posición se encuentra el sol o utilizando una brújula.

Para la evaluación

- Para este trabajo, es necesario que los alumnos previamente dibujen una rosa de los vientos, como el del modelo indicado.
- Determine las diversas alternativas que se tienen para encontrar ángulos complementarios y suplementarios.

  Por ejemplo:

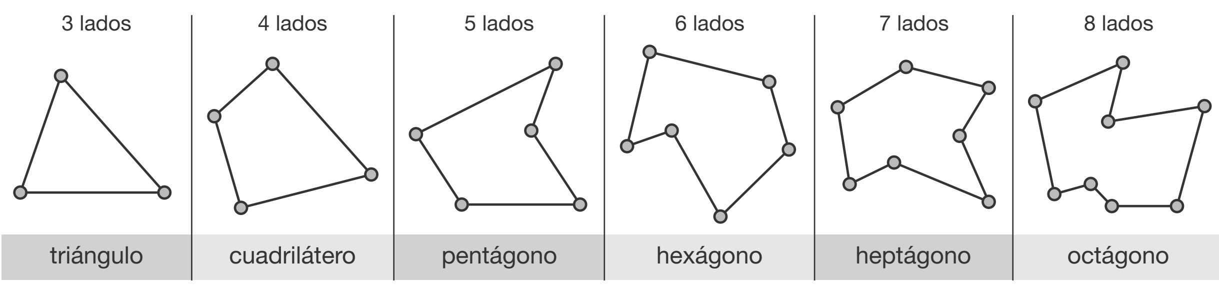
  1. Un giro de O a NE es un ángulo suplementario del giro de SE a S.
  2. Un giro de N a NE es un ángulo complementario de un giro de S a SO.



Relacionada con la DCD: **Calcular medidas de ángulos internos en polígonos regulares de hasta seis lados para establecer patrones.**

Para la activación de conocimientos previos

- Muchas veces, los alumnos solo reconocen como polígonos los polígonos regulares. Por este motivo, es conveniente utilizar polígonos irregulares en los diferentes ejemplos.



- También se debe acostumbrar a los alumnos a describir los polígonos y sus elementos con precisión y a clasificarlos correctamente según diferentes criterios.

Para la construcción del conocimiento

- Use el tangram para formar figuras de distinto número de lados. Solicite que los alumnos midan los ángulos internos de estos polígonos y hallen su suma.
- Examine la relación entre el número de vértices de un polígono y el número de diagonales, el cálculo del valor del ángulo central de un polígono regular, y las condiciones que deben cumplirse para que dos polígonos sean iguales.

Para la aplicación del conocimiento

- Los estudiantes dibujarán en pedazos de cartulina, polígonos de distintas formas y tamaños. Luego procederán a medir sus ángulos internos y hallar la suma total. Comprobarán su resultado aplicando la expresión: $180° \cdot (n - 2)$
- Al final de la clase, poner en común los resultados y emitir conclusiones.

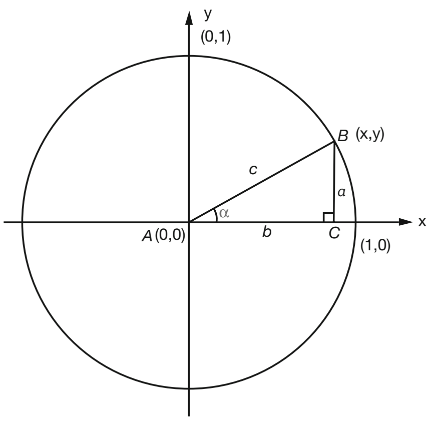
Para la evaluación

- Considere estos criterios de evaluación de acuerdo a las actividades que los alumnos realicen.
  1. Reconoce polígonos según sus lados y ángulos.
  2. Distingue entre polígonos regulares y no regulares.
  3. Halla la suma de los ángulos interiores de un polígono.
  4. Construye polígonos utilizando el tangram.
  5. Elabora correctamente las representaciones.
  6. Participa en clase.
  7. Cuida sus materiales.

Recomendaciones para docentes

Sección para uso exclusivo del educador

Razones trigonométricas en un círculo de radio unitario



Si (*x*, *y*) es un punto de la circunferencia unitaria y el radio (c=1) que tiene el origen en (0, 0), forma un ángulo α con el eje X, las principales razones trigonométricas se pueden definir como valores de segmentos asociados a triángulos rectángulos auxiliares, de la siguiente manera:

El seno es la razón entre el cateto opuesto (*a*) y la hipotenusa (*c*).

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{a}{c}$$

y dado que la hipotenusa es igual al radio, cuyo valor es 1, se deduce:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = a$$

El coseno es la razón entre el cateto adyacente (*b*) y la hipotenusa (*c*).

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$

y como la hipotenusa vale 1, se deduce:

$$\cos(\alpha) = b$$

La tangente es la razón entre el cateto opuesto y el adyacente.

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$$

La cosecante, la secante y la cotangente, son las razones trigonométricas recíprocas del seno, coseno y tangente respectivamente, sus valores son los recíprocos de los obtenidos.

Buen Vivir: Naturaleza y ambiente sano

La actividad inicial puede utilizarse para comentar planes de acción en nuestro entorno.

Pida que lean y reflexionen. Al final firmen un acta-compromiso de los estudiantes del décimo año.

Los derechos de la madre tierra en el debate internacional

La Conferencia Mundial de los Pueblos sobre el Cambio Climático y los Derechos de la Madre Tierra realizada en Cochabamba, del 19 al 22 de abril de 2010, convocada por el presidente de Bolivia, Evo Morales, como una respuesta al fracaso de la Cumbre de Copenhague de diciembre de 2009, generó entre sus productos principales, un Proyecto de Declaración de los Derechos de la madre tierra, para ser sometido a la Asamblea de las Naciones Unidas.

A solo año y medio desde el reconocimiento constitucional del Ecuador de que la Naturaleza tiene derechos, la idea ha caminado tanto que ahora, en un masivo escenario de debate global, despierta enormes entusiasmos.

Los trabajos del Grupo 3 de la "Cumbre de Cochabamba" albergaron discusiones apasionadas entre no menos de cien participantes a lo largo de tres días, para afinar un texto del Proyecto de Declaración que partiendo del documento de trabajo elaborado, logre incorporar y armonizar las visiones y aspiraciones de un colectivo por demás diverso. Al final, la plenaria lo aprobó en medio de un consenso casi completo respecto a la pertinencia de reconocer, mediante un instrumento internacional de alcance universal, los derechos de la madre tierra, pero con debates aún no agotados respecto de varios temas críticos de su contenido.

El documento final aprobado, contiene sin embargo una excelente síntesis del estado de la cuestión respecto a la discusión internacional sobre los derechos de la naturaleza, y sin duda servirá como punto de partida del proceso, que confiamos sea breve pero sustantivo, de aprobación de la Declaración por parte de la Asamblea de la ONU.

Tomado de ***Derechos de la Pachamama: un paradigma emergente frente a la crisis ambiental global por*** *Mario Melo-Ecuador.*

Este es un modelo del acta-compromiso, la misma que puede variar de acuerdo a los consensos que llegue con los estudiantes.

En la ciudad de ……………………… a los …… días del mes de ………… de ………, bajo este acto, los abajo firmantes, alumnos del décimo año del colegio ……………..., nos comprometemos a trabajar con todos los actores y sectores de la comunidad, para mantener y proteger nuestro medioambiente con acciones que promueven el bienestar colectivo y permitan tener un entorno libre de contaminación, para lo cual propiciaremos:

– Hacer campañas de reciclaje y reutilización.

– Trabajar conjuntamente con las autoridades del plantel para ……………………..

– Propiciar la participación de ……………………..

Se suscribe este compromiso que se encuentra abierto a la adhesión de otros sectores y organizaciones de la comunidad que se comprometan a trabajar conjuntamente hacia el logro de estos objetivos.

Firmantes:

– Nombre y Apellido. C.I. …………..........…

– Nombre y Apellido. C.I. …………..........…

Bibliografía

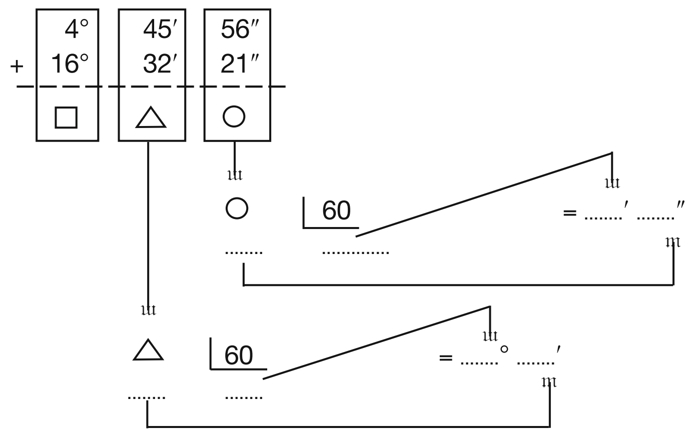
- GARCÍA, R., COLERA, J., GAZTELU, I. y OLIVEIRA, L. J., *Matemáticas 1-4*, Editorial Anaya, 2008.
- LEITHOLD, Louis, *Álgebra y Trigonometría con geometría analítica*, Harna México, México, 1994.
- RESS, Paul y SPARKS, Fred, *Álgebra y Trigonometría*, McGraw Hill Interamericana , México, 1999.
- Guerra, Marcia del Carmen, *Diccionario de Matemáticas*, Quito, 2010.

Refuerzo Sistema sexagesimal y razones trigonométricas de un ángulo agudo

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

1. Observa cómo efectuamos la suma de la derecha, completando los espacios indicados.

   Primero, calcula las sumas indicadas en cada recuadro y, a continuación, transforma los resultados que sean mayores que 60.



— Ahora suma todos los resultados.

□ = ...°

△ = ...° ....′

+ ○ = ...′ ....″

2. Sigue los pasos del procedimiento anterior para calcular las sumas que te presentamos a continuación.

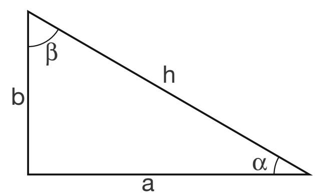
   a) 23° 15′ 54″ + 34° 56′ 13″ =

   b) 32° 25′ 21″ + 21° 21′ 23″ =

   c) 32° 24′ 43″ + 21° 24′ 32″ =

   d) 4° 12′ 43″ + 13° 43′ 42″ =

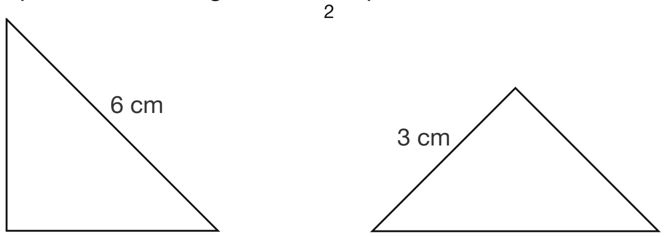
3. Sabemos que en un triángulo rectángulo, el cateto opuesto a un ángulo es aquel que no tiene ningún contacto con el ángulo. Por el contrario, el cateto contiguo a un ángulo es aquel que junto con la hipotenusa ayuda a formar el ángulo. Indica el cateto opuesto al ángulo α y el cateto contiguo al ángulo α.



   Completa:

   El lado .... es el cateto opuesto al ángulo β. El lado *b* es el cateto contiguo al ángulo .... Así, el cateto opuesto al ángulo α es el cateto contiguo al ángulo .... De la misma manera, el cateto contiguo al ángulo .... es el cateto opuesto al ángulo ....

4. Siguiendo el mismo procedimiento que en el ejercicio anterior, indica la medida de los ángulos de estos triángulos rectángulos, sabiendo que tienen un ángulo de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ que debes señalar.



   Sabemos que sen 45° = cos 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Con ello podemos deducir que si h es el valor de la hipotenusa, ambos catetos de un triángulo rectángulo con un ángulo de 45° deben medir $\frac{\sqrt{2}}{2}$ h.

   a) ¿Cuánto miden los catetos en el triángulo de la figura 3? ....

   b) ¿Cuánto miden la hipotenusa y el otro cateto del triángulo de la figura?..

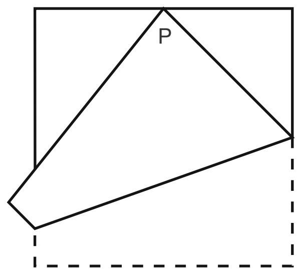
   c) Comprueba que ambos triángulos cumplen el teorema de Pitágoras.

Refuerzo Razones trigonométricas

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

1. Una persona camina 60 metros en línea recta, luego da un giro de 90° a la izquierda y camina otros 30 metros; a continuación, da un giro de 60° a la derecha y camina 50 metros, gira 45° a la derecha y camina 100 metros; seguidamente, da un giro de 90° a la izquierda y camina otros 100 metros. Desde este último punto vuelve al punto inicial en línea recta. ¿Cuántos metros ha recorrido en su extraño trayecto?

2. Una hoja cuadrada de papel, de 10 cm de lado, se dobla de la forma que se indica en la figura. Encuentra la relación entre los triángulos que tienen el vértice común en el punto *P*.



3. Calcula, utilizando siempre un ángulo del primer cuadrante, las razones trigonométricas de los ángulos siguientes.

	sen α	cos α	tan α
120°			
$\frac{5\pi}{3}$ rad			
$\frac{5\pi}{4}$ rad			
−750°			
2 385°			

4. Si tan α = 2,4 y α pertenece al primer cuadrante, calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.

	sen α	cos α	tan α
$180° - \alpha$			
$180° + \alpha$			
$360° - \alpha$			
$-\alpha$			

5. Halla todos los ángulos comprendidos entre 0° y 360° que verifican:

a) $\cos\alpha = \frac{-1}{2}$ b) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ c) $\tan\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{3}$

☑ Ficha de evaluación

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

1. El perímetro de un rombo es 40 cm y uno de sus ángulos mide 75°. Averigua la medida de los lados y la amplitud de todos sus ángulos y dibújalo.

2. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo de catetos $b = 8$ cm y $c = 15$ cm.

3. Resuelve estos triángulos rectángulos.
   a) Catetos: $b = 9$ cm y $c = 40$ cm
   b) Un cateto: $b = 10$ cm, y el ángulo $\widehat{B} = 40°$

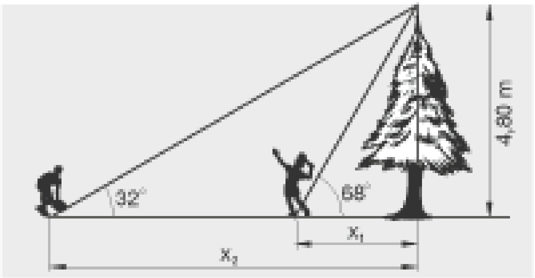
4. Una persona observa un edificio con un ángulo de elevación de 30º. Cuando esta persona se acerca 50 m al edificio, el ángulo de elevación se transforma en 60º. ¿Cuál es la altura del edificio?

5. Representa en la circunferencia goniométrica los segmentos correspondientes al seno, el coseno y la tangente de los siguientes ángulos.
   a) 30º b) 210º

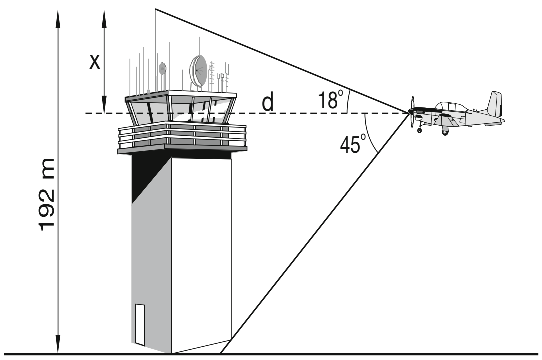
6. Halla todos los ángulos entre 0 y 360º que cumplan:
   a) $\cos \alpha = 1$ b) $\tan \alpha = 1$

7. Indica el ángulo del primer cuadrante que permite calcular las razones trigonométricas de los siguientes ángulos.
   a) 120º b) 300º c) 1 564º

8. Dos muchachos juegan al tenis al lado de un árbol de 4,80 m de altura. Si los chicos y el árbol están alineados, y cada uno de los chicos observa el punto más alto del árbol con ángulos de 68° y 32° respectivamente, ¿qué distancia separa a estos chicos?



9. La altura de la torre de control de un aeropuerto es de 192 m. En un momento dado, desde un avión que se aproxima a la torre se observa el punto más alto de ésta con un ángulo de elevación igual a 18° y la base de la torre con un ángulo de depresión igual a 45°. ¿Qué distancia separa el avión de la torre de control?



Ficha de evaluación

Solucionario

1. Cada lado mide 10 cm y la amplitud de sus ángulos es 75° y 105°.

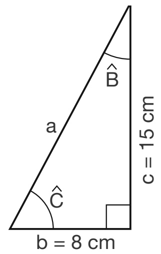
2. — $a = \sqrt{b^2 + c^2}$

$a = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ cm

— $\operatorname{sen} \widehat{B} = \dfrac{8}{17}$ $\qquad \operatorname{sen} \widehat{C} = \dfrac{15}{17}$

$\cos \widehat{B} = \dfrac{15}{17}$ $\qquad \cos \widehat{C} = \dfrac{8}{17}$

$\tan \widehat{B} = \dfrac{8}{15}$ $\qquad \tan \widehat{C} = \dfrac{15}{8}$

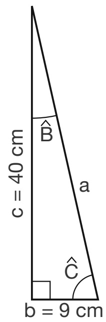


3. — $a = \sqrt{b^2 + c^2}$

$a = \sqrt{9^2 + 40^2} = 41$ cm

— $\tan \widehat{B} = \dfrac{9}{40} \Rightarrow \widehat{B} = 12{,}68°$

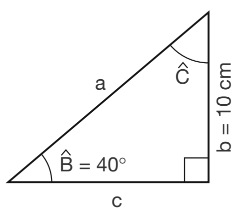
— $\tan \widehat{C} = \dfrac{40}{9} \Rightarrow \widehat{C} = 77{,}32°$



b) — $\tan \widehat{B} = \dfrac{b}{c}$

$c = \dfrac{b}{\tan \widehat{B}} = \dfrac{10}{\tan 40°}$

$= 11{,}92$ cm



— $\widehat{B} + \widehat{C} + 90° = 180°$

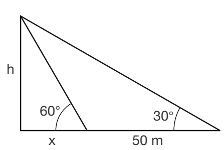
$\widehat{C} = 90° - \widehat{B}$

$\widehat{C} = 90° - 40° = 50°$

— $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{b}{a}$

$a = \dfrac{b}{\operatorname{sen} \alpha}$

$a = \dfrac{10 \text{ cm}}{\operatorname{sen}\ 40°} = 15{,}56$ cm

4. 

$$\left.\begin{aligned} \tan 30° &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x + 50} \\ \tan 60° &= \sqrt{3} = \frac{h}{x} \end{aligned}\right\}$$

$h = \sqrt{3}\, x$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}\, x}{x + 50}$

$x + 50 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$

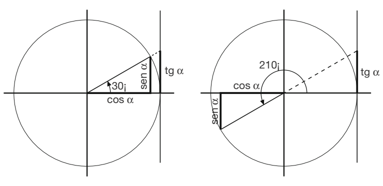
$x + 50 = 3\, x$

$2x = 50$

$x = 25$ m

$h = \sqrt{3} \cdot 25 = 43{,}30$ m

El edificio mide 43,30 metros de altura.

5. 

6. a) $\cos \alpha = 1 \qquad \Rightarrow \alpha = 0°$ o $\alpha = 360°$
   b) $\tan \alpha = 1 \qquad \Rightarrow \alpha = 45°$ o $\alpha = 225°$

7. a) $180° - 120° = 60°$
   b) $360° - 300° = 60°$
   c) 1 564 $\quad$ 360
      124 $\quad$ 4
      $1\,564° = 4 \cdot 360° + 124°$
      $180° - 124° = 56°$

8. $\tan 68° = \dfrac{4{,}80}{x_1} \qquad \Rightarrow x_1 = 1{,}94$ m

$\tan 32° = \dfrac{4{,}80}{x_2} \qquad \Rightarrow x_2 = 7{,}68$ m

$x_2 - x_1 = 5{,}74$ m

La distancia que separa a los dos chicos es de 5,74 m.

9. $$\left.\begin{aligned} \tan 18° &= \frac{x}{d} \\ \tan 45° &= \frac{192 - x}{d} \end{aligned}\right\}$$

$x = 47{,}1$ m

$d = 144{,}9$ m

La distancia que separa el avión de la torre de control es de 144,9 m.

Indicadores esenciales de evaluación

	Puede continuar	Necesita refuerzo
	% de alumnos/as	
• Obtiene gráficamente las razones trigonométricas de cualquier ángulo sobre la circunferencia goniométrica.		
• Calcula las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera conocida una de ellas.		
• Calcula las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera reduciéndolo previamente al primer cuadrante.		
• Aplica la trigonometría a la resolución de diferentes tipos de problemas de la vida cotidiana.		

Módulo 5 Bloques: Geométrico. Estadística y probabilidad

Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos Media aritmética

Objetivo del módulo

- Aplicar el teorema de Pitágoras para hallar áreas y volúmenes de cuerpos geométricos con el propósito de alcanzar un mejor entendimiento del entorno.
- Utilizar la estadística para resolver problemas de la vida cotidiana en los que intervienen cálculos de la media aritmética.

DCD Destrezas con criterios de desempeño

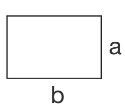
- Calcular áreas laterales de conos y pirámides en la resolución de problemas.
- Calcular volúmenes de pirámides y conos con la aplicación del teorema de Pitágoras.
- Aplicar el teorema de Pitágoras en el cálculo de áreas y volúmenes.
- Calcular la media aritmética de una serie de datos reales.
- Apreciar, en diferentes ámbitos de la vida cotidiana, los aspectos que pueden ser expresados por medio de la geometría.
- Tener una predisposición a aplicar las nociones geométricas en situaciones cotidianas.
- Utilizar de forma crítica la calculadora y el computador para realizar cálculos estadísticos.
- Valorar y utilizar la estadística para representar y resolver problemas de la vida cotidiana y del conocimiento científico.

Estrategias metodológicas

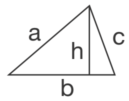
Relacionada con la DCD: **Calcular áreas laterales de conos y pirámides en la resolución de problemas.**

Para la activación de conocimientos previos

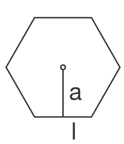
Revise los procesos y fórmulas para encontrar las áreas de figuras planas.



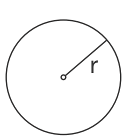
Área del rectángulo = b × a



Área del triángulo = $\dfrac{b \times h}{2}$



Área del polígono = $\dfrac{\text{perímetro} \times \text{ap}}{2}$



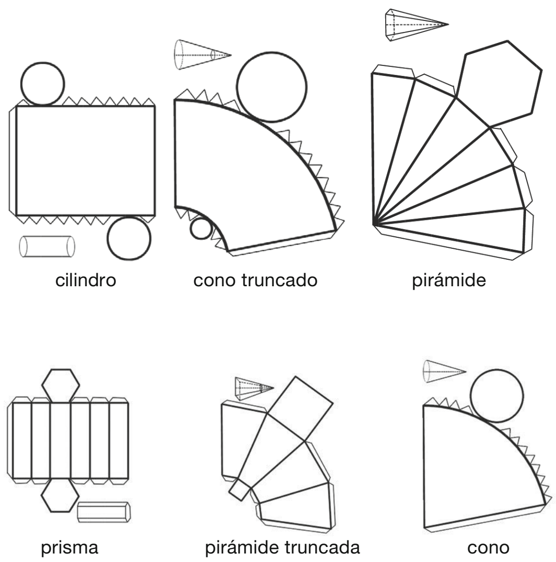
Área del círculo = πr^2

Para la construcción del conocimiento

- Solicite a sus alumnos que lleven al aula objetos que tengan las formas requeridas y con ellos calcular sus áreas. Si es posible, que los desarmen en el caso de cajas de cartón, para medir sus dimensiones.
- Relacione el cálculo de la superficie de prismas, pirámides, troncos de pirámide, cilindros, conos y troncos de cono con la de su patrón.

Para la aplicación del conocimiento

- Utilice los desarrollos planos del prisma, pirámide, pirámide truncada, cilindro, cono y cono truncado para el cálculo de sus áreas.
- Solicite a los estudiantes que los construyan usando cartulina de variados colores y con diferentes medidas. Puede fotocopiarlos con ampliación.



Para la evaluación

- La construcción de las figuras geométricas anteriores será uno de los aspectos a ser considerados. No olvide motivarlos para que sus trabajos sean creativos y bien realizados. En ellas deben escribir las áreas laterales calculadas.
- Forme grupos de trabajo y solicite que realicen las actividades 41 a 51 de la página 164 del texto y las presenten a través de diapositivas, cuadros, maquetas, entre otros.

Relacionada con la DCD: **Calcular volúmenes de pirámides y conos con la aplicación del teorema de Pitágoras.**

Para la activación de conocimientos previos

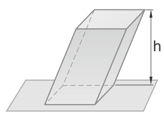
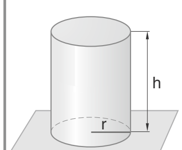
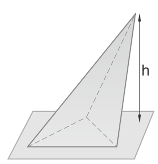
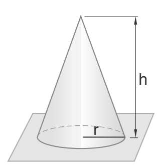
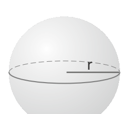
- Antes de iniciar el cálculo del volumen de los cuerpos geométricos, es conveniente recordar los temas de medida de volumen y de capacidad.
- Si se introduce el principio de Cavalieri a partir del estudio de cuerpos geométricos, los alumnos pueden llegar a la conclusión de que procede de razonamientos exclusivamente matemáticos y que sólo se aplica en matemáticas.
- También puede iniciar la explicación con el ejemplo de un mazo de cartas o un paquete de folios que puede mantenerse ordenado o deformarse. En cualquier caso, el volumen que ocupará será el mismo.
- Para la introducción del cálculo aproximado de volúmenes, el profesor puede poner ejemplos de la vida cotidiana. Así, para efectuar una mudanza, los operarios deben calcular el volumen aproximado de todos los muebles y objetos. De esta manera podrán escoger el camión o camiones que los transportarán.

Para la construcción del conocimiento

- Use el material que se preparó en la destreza anterior, de esta manera los estudiantes pueden manipular, medir y observar directamente cómo se calcula el volumen de estos cuerpos geométricos y dar una estrategia de cómo lo pueden hacer de forma aproximada.
- Tanto en la naturaleza como en construcciones hechas por el hombre podemos encontrar diversos cuerpos geométricos. Invite a sus alumnos a que lleven al aula objetos que tengan la forma de pirámides y conos.
- Si son cuerpos huecos, se puede encontrar su volumen al llenarlos con agua y luego medir el contenido en un recipiente graduado.

Para la aplicación del conocimiento

- Para resumir todo lo aprendido sobre los cuerpos geométricos, los alumnos podrían elaborar una tabla similar a la que se encuentra a continuación. Estos trabajos pueden ser expuestos en el aula o en una cartelera del colegio, premiando la calidad de los mismos.

Volumen de cuerpos geométricos	
Figura	*Volumen*
 Prisma	$V = A_{base} \cdot h$
 Cilindro	$V = A_{base} \cdot h = \pi r^2 \cdot h$
 Pirámide	$V = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h$
 Cono	$V = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$
 Esfera	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

- Puede instalar en la computadora el programa limix-geometric desde la página http://descargar.portalprogramas.com/Limix-Geometric.html. Es una sencilla aplicación que permite a los estudiantes realizar los ejercicios propuestos en el libro y comprobar los resultados.

Para la evaluación

- Usando la información que se detalla, organice un concurso para detectar los cuerpos geométricos que nos rodean.
- Nuestra vida y los cuerpos geométricos
- Cuando salgo de mi casa (**paralelepípedo**), tomo el bus (**paralelepípedo**) para ir al colegio, allí tomo apuntes con un bolígrafo (**cilindro**), en un cuaderno (**paralelepípedo**). En el recreo juego al fútbol (**esfera**) y por la tarde en mi casa, riego las plantas que están en las macetas (**cono truncado**)...
- Este trabajo deberá presentarse en formato de texto o presentación de diapositivas. Además deberá constar (de las que son posibles), el cálculo de áreas y volúmenes.

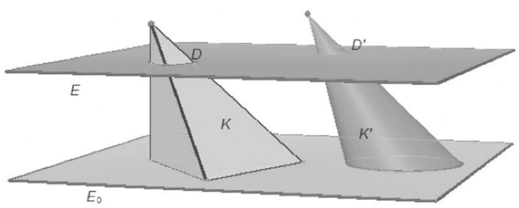
Recomendaciones para docentes

Sección para uso exclusivo del educador

Principio de Cavalieri

Se presenta el principio de Cavalieri, de fácil comprensión intuitiva, en el que nos apoyaremos para generalizar el procedimiento de cálculo del volumen de prismas, cilindros y multitud de figuras siempre que tengan sus secciones paralelas iguales: el volumen se obtiene multiplicando la superficie de la sección (base) por la distancia entre las secciones extremas (altura).

Se sugiere ejercicios en los que adaptarán dicho principio general a las formas concretas de cada figura prismática (cálculo de la superficie de la base).



Buen Vivir: Uso del tiempo libre

La actividad inicial y otras desarrolladas a lo largo del módulo pueden servir al profesor/a para abrir un espacio de reflexión sobre el uso adecuado del tiempo libre. Es fundamental que los estudiantes tomen conciencia sobre la importancia de las actividades de recreación para su desarrollo y crecimiento intelectual. Aproveche esta actividad para estudiar con sus estudiantes los reportes proporcionados por el Ministerio de Salud acerca de las enfermedades relacionadas con la inactividad.

Motívelos para que realicen ejercicio o actividad física continua. Es importante que los docentes de todas las áreas, no solamente los de Cultura Física, inculquen actitudes positivas hacia el deporte y la recreación.

Aprovechando los conocimientos estadísticos aprendidos a lo largo de estos años, solicite a los estudiantes que realicen una encuesta sobre las principales actividades que realizan en su tiempo libre, y cuáles desearían emprender. Los trasfieran a gráficas y expliquen frente a la clase. De esta manera, no solamente trabajará un tema fundamental para el Buen Vivir, sino que permitirá que sus estudiantes relacionen la Matemática con realidades de la vida cotidiana. Esta actividad puede ser un primer paso dentro de una campaña escolar o institucional sobre el tema. Recuerde a lo largo del módulo juegos tradicionales y desarrolle actividades al aire libre para la exploración o aplicación de los conocimientos.

Bibliografía

- http://inst-mat.utalca.cl/tem/taller-geo/interactivas/curso1/geometria/textos/didac.htm
- http://1.bp.blogspot.com/_jL1oZH2BJ4c/TN3i-E6c0NI/AAAAAAAAAFQ/DHKuHeRj1fk/s1600/conoplant.gif
- http://fallbrookhs.org/ourpages/users/jtaglenava/mywebsite/geometry/LIBRO/12_5.pdf
- http://www.educarchile.cl/UserFiles/P0032/File/pdf_esencial/8voBasico/matematica/8_ANO_Unidad_08_docentes.pdf
- GALINDO, Edwin, *Estadística elemental moderna, conceptos básicos y aplicaciones*, Prociencia Editores, Quito, 2007.
- GUERRA, María del Carmen, *Diccionario de Matemáticas*, Quito, 2010.
- LEITHOLD, Louis, *Álgebra y Trigonometría con geometría analítica*, Harna México, México, 1994.

Refuerzo Áreas y volúmenes de prismas y cilindros

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

1. a) ¿Cuáles de los siguientes cuerpos poseen caras circulares: esfera, tetraedro, tronco de pirámide, cilindro, prisma, pirámide, cono?

   b) ¿Cómo se llama el poliedro regular formado por caras pentagonales?

   c) ¿Cuáles son los poliedros regulares cuyas caras son triángulos equiláteros?

2. a) ¿Cuál es la unidad de superficie del Sistema Internacional?

   b) ¿Cuál es la unidad de volumen del Sistema Internacional?

   c) Completa las siguientes igualdades.

1 dm^3 = ... l	1 dm^3 = ... mm^3	1 dm^2 = ... mm^2
1 m^3 = ... dm^3	1 dm^2 = ... cm^2	1 dm^3 = ... cm^3

3. Con una regla, mide las dimensiones de un erlenmeyer y de un tubo de ensayo. A partir de las medidas obtenidas, calcula la capacidad de ambos recipientes.

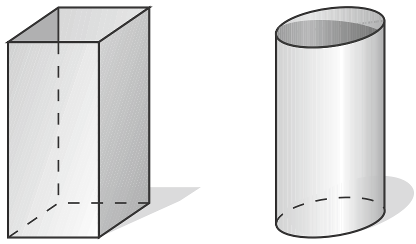
   — Obtén la capacidad de los dos recipientes llenándolos de agua y vaciando el contenido en una probeta graduada. Compara el resultado que has obtenido ahora con el calculado.

4. Calcula el volumen de la Tierra si sabemos que su radio es de $6{,}37 \cdot 10^6$ m.

   — ¿Cuál será la densidad de la Tierra si su masa es de $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg?

5. Busca información sobre el diámetro que deben tener las pelotas reglamentarias de balonmano y golf. A partir de los datos encontrados, calcula la relación entre el volumen de una pelota de balonmano y una de golf.

6. Construye con cartulina un prisma de base cuadrada y un cilindro de modo que tengan la misma altura y la misma área de la base. Ambos cuerpos no deben tener sus bases superiores.



   Llena el prisma con serrín y vacía su contenido en el cilindro.

   — Según el resultado que has obtenido, ¿qué puedes decir sobre los volúmenes de ambos cuerpos?

   — ¿Con qué principio está de acuerdo el resultado obtenido?

7. Construye, ahora, una pirámide de base cuadrada que tenga la misma altura y la misma área de la base que el prisma de la actividad anterior.

   Llena la pirámide con serrín y vacía su contenido en el prisma.

   — ¿Cuántas veces deberás repetir la operación para que el prisma quede completamente lleno?

   — ¿Qué relación hay entre el volumen del prisma y el de la pirámide?

8. Si una pirámide cuadrangular tiene un volumen de 6 l, ¿cuál será el volumen de un cilindro de igual altura e igual área de la base?

Refuerzo Media aritmética

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

1. Hemos preguntado a un grupo de 15 chicos y chicas cuántos programas de televisión han visto el último fin de semana. Las respuestas han sido: 7, 2, 6, 3, 5, 0, 1, 5, 4, 0, 8, 5, 5, 2, 6.

   a) El valor de la variable que se repite más veces es .... Este valor se llama ....

   b) Ahora suma todos los valores y divídelos entre el número total de chicos y chicas.

$$\bar{x} = \frac{7 + ... + ... + ... + ... + ... + ... + ... + ... + ... + ... + ... + ... + ... + ...}{....} = \frac{....}{....} = ...$$

   Este valor se llama ....

2. Queremos realizar un estudio sobre el número de ocupantes de los turismos que circulan por nuestra ciudad. Los datos recogidos se han expresado en la siguiente tabla.

Número de ocupantes	1	2	3	4	4	4
Frecuencia absoluta	9	4	3	2	2	2

   a) ¿Cuántos vehículos hemos observado?

   b) ¿En cuántos coches había 4 ocupantes?

   c) Ordena todos los datos de menor a mayor. Ten en cuenta que la frecuencia absoluta de cada dato te indica el número de veces que se repite dicho dato. Por tanto, deberás escribir 9 veces el 1, 4 veces el 2...

   d) Calcula la media aritmética. Para ello, has de .... todos los valores y dividir por .... Puedes utilizar la lista ordenada que has escrito antes.

   — ¿Cuántas veces has sumado el 1? Fíjate en que sumar 9 veces 1 equivale a multiplicar 1 · 9.

   — ¿Cuántas veces has sumado el 2? Sumar 4 veces 2 equivale a multiplicar 2 · 4.

   Por lo tanto, otra forma de calcular la media aritmética es multiplicar cada dato por su frecuencia, sumar los resultados obtenidos y dividir por el número total de datos.

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + ... + x_n \cdot n_n}{N} = \frac{\sum x_i \cdot n_i}{N}$$

3. Hemos preguntado a 30 chicos el número de libros que han leído durante el verano. Los resultados obtenidos se han resumido en la siguiente tabla:

Número de libros (x_i)	0	1	2	3	4	5 o más
Número de chicos (n_i)	9	8	5	4	3	1

   — Utiliza la fórmula anterior para calcular la media de libros leídos.

4. Revisa los datos de las actividades anteriores y completa la tabla de la derecha.

   El parámetro que has obtenido en la última fila se denomina .... y nos da idea de lo .... que están los datos.

Actividad	1	2	3
Valor mínimo (m)			
Valor máximo (M)			
$M - m$			

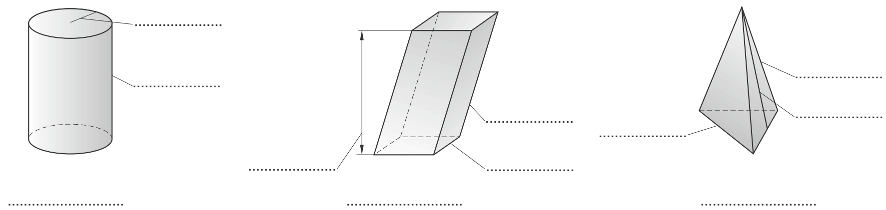
Módulo

5 ☑ Ficha de evaluación

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

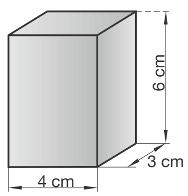
1. Explica si es posible construir un poliedro regular de caras hexagonales.

2. Escribe el nombre de los cuerpos geométricos de la siguiente figura y de los elementos que se indican.



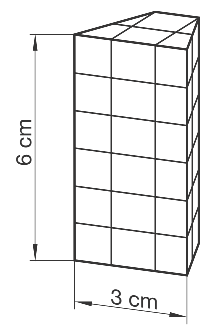
3. ¿Todos los cuerpos geométricos tienen patrones planos? ¿Y todos los poliedros? Justifica tus respuestas.

4. Observa la caja de la figura e indica cuántos cubos de 1 cm de lado son necesarios para rellenarla.



— Si utilizamos cajas como la de la figura para el envasado de cartones de leche de medidas 2 cm, 3 cm y 4 cm, ¿cuántos cartones se podrán colocar en cada una de ellas?

5. Calcula el volumen del siguiente prisma por dos métodos diferentes.



   a) Cuenta aproximadamente los cubos que lo forman.

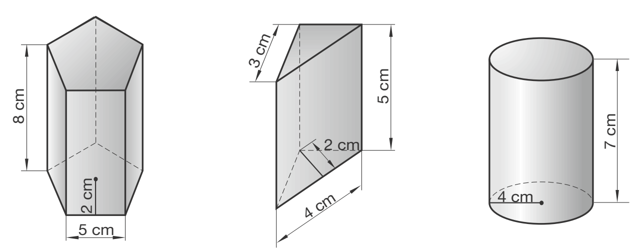
   b) Aplica la fórmula para calcular el volumen de un prisma.

   $V_{prisma} = A_{base} \cdot \text{altura}$

- ¿Qué polígono forma la base de este prisma?

  Recuerda que el área del trapecio es igual al producto de la semisuma de las bases por su altura.

6. Identifica los siguientes cuerpos geométricos y calcula su volumen.



7. Escribe dos ejemplos de la vida escolar en los que puedas encontrar la media aritmética.

8. Define qué es la media aritmética.

9. El número de faltas personales cometidas por cierto jugador de baloncesto en los últimos 30 partidos ha sido: 5, 4, 2, 2, 3, 4, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 3, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 4, 5, 0, 1, 1, 5, 1, 3, 3, 2.

   — Elabora, con estos datos, la tabla de frecuencias correspondiente.

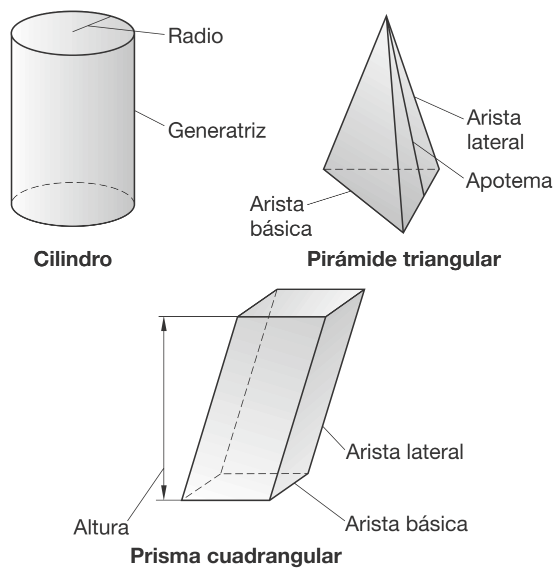
   — Calcula la media aritmética.

Ficha de evaluación

Solucionario

1. No es posible porque sus ángulos miden 120°.

   Así, 3 hexágonos que concurren en un vértice forman un ángulo de 360°, por lo que no podrán dar lugar a las caras de un ángulo poliedro (cuya suma siempre es inferior a 360°).

2. 

3. Todos los poliedros tienen patrones planos porque sus caras son polígonos. Pero no todos los cuerpos geométricos tienen patrones planos, pues pueden estar formados por superficies curvas. Por ejemplo, la esfera no tiene desarrollo plano.

4. 72 cubos ($4 \cdot 3 \cdot 6 = 72$)

   — Como cada cartón ocupa 24 cm^3, 3 cartones.

5. a) 24 cubos.

   b) $V = \dfrac{3\,cm + 1\,cm}{2} \cdot 2\ cm \cdot 6\ cm = 24\ cm^3$

   • La base es un trapecio.

6. $V_{prisma\ pentagonal} = \dfrac{25\,cm \cdot 2\,cm}{2} \cdot 8\ cm = 200\ cm^3$

   $V_{prisma\ triangular} = \dfrac{4\,cm \cdot 2\,cm}{2} \cdot 5\ cm = 20\ cm^3$

   $V_{cilindro} = \pi\ (4\ cm)^2 \cdot 7\ cm = 351{,}68\ cm^3$

7. Respuesta abierta.

8. La media aritmética indica el centro alrededor del cual se han realizado unas medidas u observaciones. Es sinónimo de promedio. Su fórmula es la suma de todos los valores obtenidos dividida para el número de ellos.

9. El número de faltas personales cometidas por cierto jugador de baloncesto en los últimos 30 partidos ha sido: 5, 4, 2, 2, 3, 4, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 3, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 4, 5, 0, 1, 1, 5, 1, 3, 3, 2.

   — Elabora, con estos datos, la tabla de frecuencias correspondiente.

   — Calcula la media aritmética.

x_i	F_i
0	4
1	7
2	4
3	8
4	4
5	3

$\bar{x} = 2{,}33;$

Indicadores esenciales de evaluación

	Puede continuar	Necesita refuerzo
	% de alumnos/as	
• Relaciona el área de un cuerpo geométrico con el área de su desarrollo plano y calcula el área de prismas, pirámides, troncos de pirámide, cilindros, conos y troncos de cono.		
• Recuerda qué es el volumen de un cuerpo y conoce el principio de Cavalieri para poder aplicarlo en el cálculo de volúmenes.		
• Calcula los volúmenes de prismas, cilindros, pirámides, conos y esferas.		
• Utiliza el volumen de la esfera para calcular su área.		
• Estima la medida de superficies y volúmenes de espacios y objetos con una precisión acorde a la regularidad de sus formas y su tamaño.		
• Calcula medias aritméticas.		

Módulo 6 **Bloques:** De medida. Estadística y probabilidad

Probabilidad
Conversiones entre unidades del SI

Objetivos del módulo

- Recolectar, representar y analizar datos probabilísticos relacionados con el entorno para alcanzar un mejor entendimiento del mismo.

DCD Destrezas con criterios de desempeño

- Calcular probabilidades simples con el uso de fracciones.
- Reconocer situaciones susceptibles de ser tratadas mediante la teoría de la probabilidad.
- Utilizar la unidad de medidas más adecuada a cada situación.
- Comparar y ordenar diversas medidas expresadas en distintas unidades.
- Conocer las posibilidades que ofrece el uso de la calculadora y la computadora.
- Reconocer e interpretar el lenguaje relacionado con la probabilidad que se presenta en la vida cotidiana.
- Realizar reducciones y conversiones de unidades del SI y de otros sistemas en la resolución de problemas.

Estrategias metodológicas

Relacionada con la DCD: **Calcular probabilidades simples con el uso de fracciones.**

Para la activación de conocimientos previos

- *Juego de dados*

Se divide la clase en grupos de cinco alumnos y se les entrega a cada grupo un par de dados. Cada grupo arroja cinco veces el par de dados anotando en cada ocasión el resultado (la suma de ambos dados).

Después se pone en común los resultados obtenidos, de forma que los alumnos observen qué números tienen mayor probabilidad de aparecer. Luego, el profesor detallará todos los posibles casos que tiene este experimento, demostrando así el motivo por el cual algunos números se han obtenido más que los otros. Es un buen ejercicio para introducir el concepto de probabilidad de un suceso.

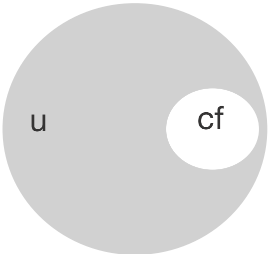
Para la construcción del conocimiento

- La probabilidad es la condición de que suceda o no un determinado hecho o suceso. Se la entiende como la relación matemática entre los casos favorables (cf) sobre el total de los casos posibles (p).

$$\text{Probabilidad} = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{universo}}$$

Simbólicamente: $P(A) = \frac{cf}{u}$

Utilizando un diagrama de Venn, la representacion gráfica es:



$P(A) = \frac{cf}{u}$

- La probabilidad certeza se obtiene cuando el cociente es 1, es decir, que el número de casos favorables y posibles es el mismo. Por ejemplo: Si en una caja hay 20 esferas de color rojo, ¿qué probabilidad hay que, al sacar una, ésta sea roja?

$$P(A) = \frac{cf}{u} = \frac{20}{20} = 1$$

- La probabilidad nula o imposibilidad se obtiene cuando el número de casos favorables es igual a 0. (cf = 0). Por ejemplo: Si en una caja hay 15 esferas de color amarillo, ¿qué probabilidad hay que, al sacar una, sea roja?

$$P(A) = \frac{0}{15} = 0$$

- La probabilidad conjunta se da cuando dos sucesos A y B son independiente, la probabilidad de que ocurran ambos sucesos simultáneamente será igual al producto de las probabilidades individuales.

  Cuando hay más de dos sucesos independientes, la probabilidad conjunta será igual al producto de las probabilidades de cada uno de los sucesos.

  Simbólicamente: $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

  Por ejemplo: En un ánfora hay 100 fichas numeradas del 1 al 100. Se hacen dos extracciones al azar con resposición. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos fichas que se obtengan sean 20?

  Sean: **A** suceso veinte obtenido en la primera extracción; y,

  B suceso veinte obtenido en la segunda extracción.

  La primera ficha se coloca nuevamente (reposición) en el ánfora, antes de realizar la segunda extracción. Entonces, la probabilidad de dos sucesos iguales será:

$$P(A) = \frac{1}{100} = 0{,}01 \qquad P(B) = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{10\,000} = 0{,}0001 \qquad P(\text{dos fichas sean } 20) = \frac{1}{10\,000} = 0{,}0001$$

Para la aplicación del conocimiento

- Realice estos ejercicios para que los alumnos verifiquen lo anteriormente citado.

  Para pensar

  En una bolsa hay 3 bolas verdes y cuatro amarillas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola azul?

$$P_{(azul)} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{universo}} = \frac{0}{7} = 1$$

  En una bolsa hay 15 bolas verdes. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una verde?

$$P_{(verde)} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{universo}} = \frac{15}{15} = 1$$

  En este caso existe el cien por ciento de probabilidad de que el suceso ocurra. Es una probabilidad segura. Por lo tanto, todas las demás probabilidades estarán entre 0 y 1.

Para la evaluación

Pida a los alumnos que busquen usos de las probabilidades en la vida diaria en juegos, deportes e informes del tiempo. Pida que hagan una lista de sucesos que nunca podrían ocurrir, que podrían ocurrir (en qué porcentaje) y que seguramente ocurrirán.

Relacionada con la DCD: **Realizar reducciones y conversiones de unidades del SI y de otros sistemas en la resolución de problemas.**

Para la activación de conocimientos previos

- Es importante recordar que los múltiplos y los submúltiplos del metro, del kilogramo y del litro forman el Sistema Métrico Decimal (SMD), en el que para pasar de una unidad a la inmediata inferior o superior se multiplica o divide por 10, respectivamente.
- Es conveniente repasar la multiplicación y la división por la unidad seguida de ceros antes de iniciar la conversión de unidades.
- Se debe insistir en la necesidad de expresar todas las medidas en la misma unidad antes de compararlas, ordenarlas u operar con ellas. A partir de aquí se podrá introducir la transformación de unidades utilizando factores de conversión.
- Las unidades derivadas: metro cuadrado, metro cúbico y sus relaciones deben trabajarse luego que el alumno/a domine los correspondientes al SMD, resaltando que el proceso es similar, pero ahora cada unidad es 100 veces mayor que la inmediata inferior (unidades de superficie), o 1 000 veces (unidades de volumen).

Para la construcción del conocimiento

- Pida a los alumnos que recuerden cuándo y dónde se usan los múltiplos y submúltiplos del metro, el kilogramo y el litro.
- Es importante reconocer los múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado y el metro cúbico, y justificar sus relaciones a partir de las anteriores.
- Se sugiere observar cómo se efectúan diversas transformaciones de unidades usando factores de conversión, así como también la tabla de conversiones, utilizada en la página 72 de la Actualización de Fortalecimiento Curricular de la Educación General Básica 2010 para 7.º año.

Para la aplicación del conocimiento

- Pida que además de los ejercicios propuestos en el libro del alumno, realicen otros como estos:

1. ¿A qué es igual 1 kg?

a) 10 t
b) 1000 t
c) 1000 g
d) 0,001 g
e) 0,01 t

2. ¿A qué es igual 1 l?

a) Un decímetro cúbico.
b) Un metro cúbico.
c) Un centímetro cúbico.
d) Un kilogramo.
e) 100 mililitros.

3. ¿A qué es igual 1 h?

a) 0,01 días
b) 120 s
c) 0,60 min
d) 3 600 s

4. ¿A qué es igual 1 m?

a) 10 km
b) 100 km
c) 1000 km
d) 100 cm
e) 10 cm
f) 100 mm

Para la evaluación

Forme grupos de trabajo y pida que cada uno elabore un cuestionario sobre las diferentes unidades estudiadas y sus factores de conversión. Una vez listo, deben elegir a un representante que formará parte de un jurado general. Estos cuestionarios serán entregados al profesor, quien al azar irá nombrando a los alumnos para que respondan a la actividad dada por sus compañeros.

Para la evaluación

- Podría también considerar estos aspectos a evaluar.
  1. Se integra al trabajo del grupo
  2. Participa en la discusión activamente
  3. Aporta ideas al trabajo del grupo
  4. Respeta otras ideas aportadas
  5. Aporta información para el trabajo del grupo
  6. Participa en los registros y redacción de las ideas del grupo

Recomendaciones para docentes

Sección para uso exclusivo del educador

Conceptos fundamentales de la probabilidad

Sucesos

Se llama **suceso** a cada uno de las posibilidades que se producen en un experimento aleatorio. Cada suceso es una parte del espacio muestral Ω. Algunos sucesos son:

- **Suceso seguro** es aquel que ocurre siempre que se realiza el experimento aleatorio. Coincide con el espacio muestral Ω y su probabilidad es 1; por ejemplo, obtener un número menor a 8 al lanzar un dado.
- **Suceso imposible** es el que no ocurre jamás al realizar el experimento aleatorio. Se representa por el símbolo $\varnothing$ y su probabilidad es 0; por ejemplo, al lanzar dos dados, obtener 1 con la suma de los dos números.
- **Suceso contrario** a un suceso A es aquel que se verifica siempre y cuando no se verifica A, y se representa mediante $\bar{A}$ y su probabilidad es: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- **Sucesos compatibles** son aquellos que pueden verificarse a la vez. En caso contrario, son **incompatibles.**

Propiedades de la probabilidad

Al repetir un experimento aleatorio, la **frecuencia relativa de un suceso** A tiende a **estabilizarse** en torno a un determinado valor que llamamos **probabilidad,** $P(A)$, a medida que aumenta el número de realizaciones. La probabilidad se considera como una medida de la posibilidad de que ocurra un suceso.

- La probabilidad de un suceso A es un valor comprendido entre 0 y 1. ($0 \le P(A) \le 1$)
- La probabilidad del suceso imposible es siempre 0. ($P(\varnothing) = 0$)
- La probabilidad del suceso seguro es siempre 1. ($P(\Omega) = 1$)
- La suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales (excluyentes) de un experimento aleatorio es 1.
  Por lo tanto, si: $\Omega = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ se cumple que: $P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1$
- La probabilidad de un suceso es igual a la suma de las probabilidades de sus sucesos elementales favorables.
  Por lo tanto, si: $N = \{N_1, N_2, ..., N_n\}$ se cumple que: $P(N) = P(N_1) + P(N_2) + ... + P(N_n)$
- La suma de la probabilidad de un suceso y la probabilidad del suceso contrario es igual a 1.

La escritura correcta de los símbolos matemáticos

La Real Academia de la Lengua Española, en el Diccionario de Lengua Española, XXI edición, 2001, señala:

> Los símbolos son abreviaciones de carácter científico-técnico y están constituidos por letras o por signos no alfabetizables. En general, son fijados convencionalmente por instituciones de normalización y poseen validez internacional.
>
> Los símbolos más comunes son los referidos a unidades de medida *(m, kg),* elementos químicos *(Ag, C, Fe),* operaciones y conceptos matemáticos (+, %), monedas (*$, £, ¥, €, CLP*) y puntos cardinales (*N, S, SE*).
>
> Los símbolos de los prefijos de las unidades de medida, que no se usan nunca aislados, se transcriben seguidos de un guión.
>
> Los símbolos son siempre invariables en plural; por tanto, todas las formas recogidas en esta lista sirven tanto para el singular como para el plural.

A continuación los principales símbolos usados en matemática.

A	área
c-	centi
cal	caloría
cd	candela
cm^2	centímetro cuadrado
cm^3	centímetro cúbico (y no c. c.)
d-	deci-
da-	deca-
dm	decímetro
dm^2	decímetro cuadrado
dm^3	decímetro cúbico
ft	pie (del ingl. foot, 'unidad de longitud')
g	gramo (y no gr)
G-	giga-
h	altura (del ingl. height) || hora
h-	hecto-
ha	hectárea
in	pulgada (del ingl. inch, 'unidad de longitud')
kg	kilogramo
km	kilómetro
l; L	litro (y no lit, Lit)
lb	libra ('unidad de masa')
m	metro (y no mt ni mtr)
m^2	metro cuadrado
m^3	metro cúbico
m-	mili-
M-	mega-
mg	miligramo
min	minuto (de tiempo)
mm	milímetro
n-	nano-
oz	onza
Qm	quintal métrico

rad	radián
s	segundo [de tiempo] (y no sg)
t	tonelada
yd	yarda
Å	angstrom
@	arroba
¢	centavo (cf. c., cent., ctv. y ctvo.)
ºC	grado Celsius
ºF	grado Fahrenheit
π	número pi
'	minuto de ángulo
''	segundo de ángulo
#	número (cf. n.º, nro. y núm.)
+	más
–	menos
±	más menos
<	menor que
>	mayor que
=	igual a
≤	menor o igual que
≥	mayor o igual que
≠	no igual a
≅	semejante a
=>	implica
×	por, multiplicado por
÷	entre, dividido por
∞	infinito
°	grado de ángulo
%	por ciento
‰	por mil

Tomado de: www.rae.es

Buen Vivir: Derechos humanos

La actividad inicial puede servir de marco general para que el profesor/a aborde el tema de los derechos de todos los seres vivos y, poco a poco, a lo largo del módulo pueda concentrarse en el tema de los derechos humanos. De esta manera, los/as estudiantes comprenderán que sus derechos están estrechamente relacionados con el de los otros seres vivos y los de la naturaleza.

Al final se puede concretar en el tema de la elección de una profesión. Jugar con las probabilidades de escoger uno o dos de un listado.

Junto con el orientador vocacional hablar sobre el tema, reflexionar considerando los siguientes aspectos:

- Problema que muchos adolescentes enfrentan: no saben qué carrera es la mejor para ellos y su futuro.
- Una decisión complicada en la vida de cada persona.
- Apoyo por el psicólogo educativo del plantel, charlas con profesionales, visita a las facultades.

Bibliografía

- http://www.publicatuslibros.com/fileadmin/Biblioteca/Libros/Tecnicos/Rau__Nunez_Cabello_-_TALLER_DE_ESTADISTICA_Y_PROBABILIDAD.pdf
- http://ntic.educacion.es/w3//recursos/bachillerato/matematicas/probabilidad/profesor/profesor5m.htm
- http://www.inti.gob.ar/cirsoc/pdf/201/comentarios/unidades.pdf
- 158.251.72.52/sitio/moodle/.../Unidad%204%20Probabilidad.doc
- http://es.shvoong.com/humanities/1702611-elecci%C3%B3n-una-carrera/#ixzz1K6AZKC1V
- www.rae.es
- GALINDO, Edwin, *Estadística elemental moderna, conceptos básicos y aplicaciones*, Prociencia Editores, Quito, 2007.

Refuerzo Factores de conversión

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

Recuerda que un factor de conversión es un cociente entre dos cantidades equivalentes expresadas en unidades diferentes.

1. Indica cuáles de las siguientes fracciones son factores de conversión. Puedes ayudarte de las tablas que has completado anteriormente.

   a) $\dfrac{1\,\text{cm}}{10\,\text{mm}}$ c) $\dfrac{10\,000\,\text{dam}}{1\,\text{cm}}$ e) $\dfrac{100\,\text{dal}}{1\,\text{kl}}$

   b) $\dfrac{1\,\text{km}}{1000\,\text{m}}$ d) $\dfrac{100\,\text{hm}}{1\,\text{m}}$ f) $\dfrac{1\,\text{hg}}{1000\,\text{dg}}$

   Veamos cómo podemos usar los factores de conversión para transformar unas unidades en otras.

   Observa cómo procedemos para efectuar la conversión de 5 hg en decigramos.

   — Escribimos la unidad inicial y la unidad final.

unidad inicial	*unidad final*
hg	dg

   — Escribimos el factor de conversión que expresa la equivalencia entre hectogramos y decigramos, teniendo en cuenta que la unidad inicial debe aparecer en el denominador y la final, en el numerador.

   Fíjate en que existen dos fracciones posibles:

   $$\frac{1\,\text{dg}}{0{,}001\,\text{hg}} \quad \text{y} \quad \frac{1000\,\text{dg}}{1\,\text{hg}}$$

   Utilizaremos siempre fracciones en las que no aparezcan números decimales, para simplificar los cálculos.

   — Multiplicamos la unidad inicial por el factor de conversión.

   $$5\,\text{hg}\cdot\frac{1000\,\text{dg}}{1\,\text{hg}} = 5\cdot 1000\,\text{dg} = 5\,000\,\text{dg}$$

2. Efectúa las siguientes transformaciones; para ello, utiliza el factor de conversión adecuado.

   a) $25\,\text{dag} = 25\,\text{dag}\cdot\dfrac{10\,000\,\text{mg}}{1\,\text{dag}} =$ .... mg

   b) 23 hg = ... cg

   c) 1,2 l = ... hl

   d) 0,05 dam = ... mm

   e) 156,4 cl = ... hl

   f) 12 hm = ... dm

   g) 13,7 g = ... hg

3. Transforma las siguientes unidades de superficie y volumen.

   a) $142\,500\,\text{m}^2 = 142\,500\,\text{m}^2\cdot\dfrac{1\,\text{hm}^2}{10\,000\,\text{m}^2} =$ .... hm^2

   b) $0{,}00325\,\text{hm}^2 =$ .... dm^2

   c) $4{,}145\,\text{dm}^3 =$ .... mm^3

Refuerzo Cálculo de probabilidad

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

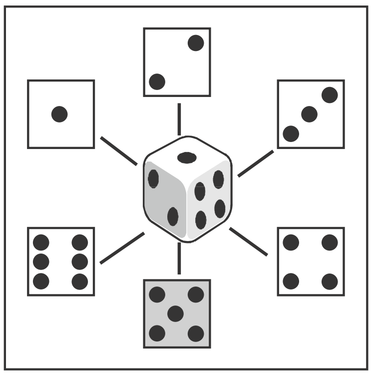
1. Julián y Roberto deciden jugar una partida de dados. Como es habitual en este juego, comienza el primero que consigue un 5 al lanzar un dado.

   — ¿Qué cara crees que saldrá? ¿Es más probable una cara que otra?

   Todas las caras tienen la misma probabilidad de salir. Decimos que estamos en una situación de ....

   En estas situaciones puede calcularse la probabilidad de un suceso A aplicando la regla de ....:

$$P(A) = \frac{\text{Número de resultados ....}}{\text{Número de resultados ....}}$$

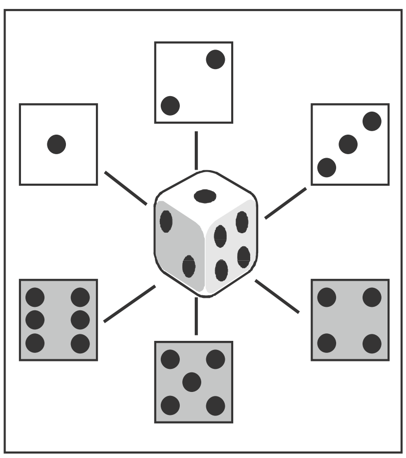


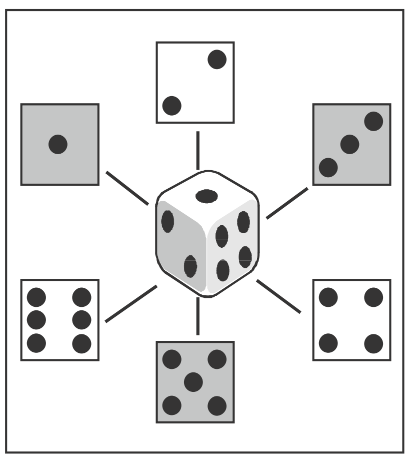
   — Vamos a calcular la probabilidad del suceso *A: Sacar un 5*. Para ello, considera el esquema de la figura y completa:

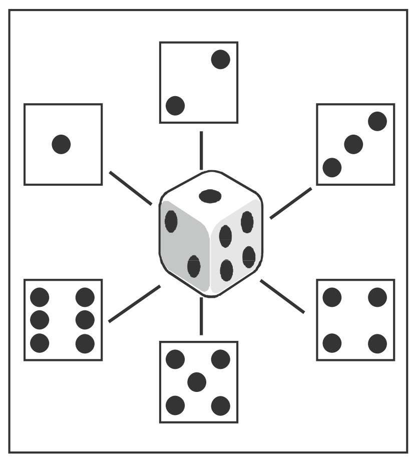
   - ¿Cuántos resultados posibles hay en el experimento consistente en lanzar un dado? ....
   - ¿Cuántos resultados favorables hay en el suceso *Sacar un 5*? ....
   - $P(5) = \dfrac{\text{Número de resultados ....}}{\text{Número de resultados ....}} = \dfrac{......}{......} = ...$

   — Determina la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$ y $P(6)$.

   Explica cómo has obtenido dichas probabilidades.







Sacar un número mayor que 3	Sacar un número impar	Sacar un número menor que 1
$P(> 3) = \dfrac{......}{6} = ...$	$P(\text{impar}) = \dfrac{......}{......} = ...$	$P(< 1) = \dfrac{......}{......} = ...$

2. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.
3. Determina ahora la probabilidad de los sucesos:

   P (sacar un número par) =

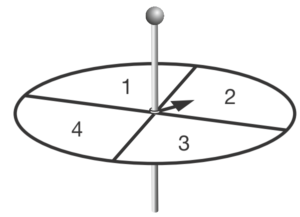
   P (sacar un número mayor que 6) =

   P (sacar un número menor que 3) =

Ficha de evaluación

Nombre: .... Curso: .... Fecha: ....

1. Describe tres experimentos aleatorios y tres que no lo sean.



2. Define espacio muestral. Anota los resultados posibles del experimento aleatorio consistente en hacer girar una perinola como la de la figura y escribe el espacio muestral Ω.

3. ¿La probabilidad de un suceso puede tener el valor 1,5? Justifica tu respuesta a partir de la regla de Laplace.

4. A través de unos estudios realizados, se sabe que el 4 % de los habitantes de una provincia no tiene ningún tipo de teléfono, que el 90 % tiene teléfono en su casa y que la sexta parte de los que tienen teléfono en su casa también tiene celular.

   a) ¿Qué porcentaje de habitantes de la provincia tiene teléfono celular?

   b) Completa una siguiente tabla de contingencia que muestra el número de habitantes de la provincia con o sin teléfono fijo, con o sin celular, si sabemos que la provincia tiene un millón de habitantes.

   c) Si se escoge un habitante de la provincia al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga teléfono pero que no tenga celular?

5. Relaciona las expresiones que representen la misma medida.

4 hg 3 dag 5 g	43,5 hg	4 g 3 dg 5 cg	4,35 dag
4,35 g	4 dag 3 g 5 dg	43,5 dag	4 kg 3 hg 5 dag

6. Expresa en forma compleja las siguientes medidas.

   a) 82 dam   c) 37 254 dm^2 e) 176 kg

   b) 145 254 cm^3 d) 1,2345 t   f) 4,23 dal

7. Un tonel contiene 2 000 litros de gaseosa. ¿Cuántas botellas de 75 cl se podrán llenar? ¿Y cuántas de 1 500 ml?

8. Escribe, ordenados de mayor a menor, la altura de los picos que aparecen en la tabla.

Pico	Altura
Everest	8 km 8 hm 4 dam 8 m
Aconcagua	69,60 hm
Chimborazo	6 km 310 m
Mont Blanc	480 dam 7 m
McKinley	61 940 dm

Pico	Altura

9. Transforma utilizando factores de conversión:

   a) 80 dam = ... km   c) 12 dg = ... dag   e) 18 dm^3 = ... hm^3

   b) 1,45 cm^2 = ... mm^2 d) 12 t = ... hg   f) 4 dal = ... cl

10. a) En la medida de una longitud se ha cometido un error de 5 m. ¿Representa esto un error grave?

    b) ¿Cómo harías una estimación del volumen de una habitación?

☑ Ficha de evaluación

Solucionario

1. Respuesta sugerida:

   Experimentos aleatorios: lanzar una moneda y observar si sale cara o cruz; sacar una bola de una urna opaca donde hay bolas de varios colores; extraer una carta de una baraja.

   Experimentos no aleatorios: determinar la cantidad de hierro de un mineral; saber si una pelota caerá, o no, al lanzarla al aire; calcular la distancia máxima que recorrerá un proyectil.

2. Un espacio muestral es el conjunto de todos los resultados elementales de un experimento aleatorio.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$$

3. No. La probabilidad de un suceso será siempre menor o igual que 1, pues el número de casos favorables siempre será menor, o, como mucho, igual que el de casos posibles. Y, por la regla de Laplace, la probabilidad es el cociente entre los casos favorables y los casos posibles.

$$\frac{36}{48} = \frac{3}{4}\text{; d) } 0$$

4. a) $90\% \cdot \frac{1}{6} = 15\%$ $\quad 90\% \cdot \frac{5}{6} = 75\%$

   El 15 % de los habitantes de la provincia tiene celular y teléfono fijo y el 75 % tiene teléfono fijo y no tiene celular.

   Hay un 6 % que tiene móvil y no tiene teléfono fijo.

   Por lo tanto, tendrá celular el 21 % de los habitantes de la provincia.

   b)

	Celular	No celular
Fijo	150 000	750 000
No fijo	60 000	40 000

   c) *A: obtener un habitante de la provincia que tenga teléfono fijo pero que no tenga celular.*

$$P(A) = \frac{750\,000}{1\,000\,000} = 0{,}75$$

5.

4 hg 3 dag 5 g	4,35 g
43,5 hg	4 dag 3 g 5 dg
4 g 3 dg 5 cg	43,5 dag
4,35 dag	4 kg 3 hg 5 dag

6. a) 8 hm 2 dam; b) 145 dm^3 254 cm^3; c) 3 dam^2 72 m^2 54 dm^2; d) 1 t 2 q 3 mag 4 kg 5 hg; e) 1 q 7 mag 6 kg; f) 4 dal 2 l 3 dl.

7. 2 666 botellas de 75 cl; 1 333 botellas de 1 500 ml.

8. 8 km 8 hm 4 dam 8 m > 69,60 hm > 6 km 310 m > 61 940 dm > 480 dam 7 m

9. a) 0,8 km; b) 145 mm^2; c) 0,12 dag;

   d) 120 000 hg; e) 0,000 000 018 hm^3; f) 4 000 cl.

10. a) Depende. Cuanto mayor sea el valor de la longitud que hemos medido, menos grave será el error. Entonces, si hemos medido el ancho de una habitación, el error es muy grave, pero si hemos medido la distancia entre dos ciudades, el error es muy pequeño.

    b) Estimamos las longitudes de la habitación (alto, ancho, largo), por ejemplo por adición repetida, y multiplicamos los valores obtenidos.

☑ Indicadores esenciales de evaluación

	Puede continuar	Necesita refuerzo
	% de alumnos/as	
• Calcula probabilidades simples.		
• Reconoce cuándo un experimento es aleatorio o determinista.		
• Identifica el espacio muestral correspondiente a un experimento aleatorio.		
• Identifica el suceso seguro, el suceso imposible y el suceso contrario a uno dado en un experimento aleatorio, y determina si dos sucesos dados son compatibles o incompatibles.		
• Aplica la regla de Laplace para calcular la probabilidad de un suceso.		
• Elabora diagramas en árbol y tablas de contingencia para llevar a cabo el recuento de resultados en un experimento aleatorio.		
• Simula un experimento aleatorio mediante un programa informático.		
• Reconoce la utilidad de la probabilidad en diferentes situaciones de la vida cotidiana.		
• Realiza conversiones dentro del SI de medidas y con otros sistemas de uso común en nuestro medio.		

Módulo 1

Números naturales
Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Actividad inicial

- El número de oro aparece en la pirámide de Keops, en el Partenón (cuyo alzado se inscribe en un rectángulo áureo), en el boceto del cuadro de Dalí *Leda atómica,* en las tarjetas de crédito (donde los lados están en relación aproximadamente igual a ϕ), en la relación entre las longitudes de las falanges humanas y en el cálculo del número de descendientes de una abeja macho.
- La relación entre los lados de un carné de identidad es:

$$\frac{8{,}6 \text{ cm}}{5{,}4 \text{ cm}} = 1{,}6 \approx \phi$$

Evaluación diagnóstica

- Racionales: $-\frac{2}{5}$; $-1{,}25$; $6{,}34$

  Irracionales: $-\sqrt{11}$; $\frac{\pi}{3}$; $1-\sqrt{2}$; $-1{,}202\ 002...$

- $-5+\frac{4}{5}\left[\frac{-1}{4}-\frac{2}{4}\right]-\frac{5}{3}\left(\frac{14}{8}\right)=-5+\frac{-3}{5}-\frac{35}{12}=\frac{-511}{60}$

- a) $5x$; b) b^3; c) $\frac{17}{5}y$

- $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}=\frac{1}{3^{-4}}=3^4$;

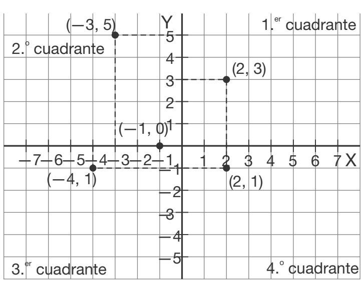
  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-9}=\left(\frac{3}{2}\right)^{9}$;

  $\left(\frac{-7}{9}\right)^{3}:\left(\frac{7}{-9}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{9}{7}\right)^{-11}=\left(\frac{-7}{9}\right)^{3-(-4)}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^{11}=$

  $=\left(\frac{-7}{9}\right)^{7}\cdot\left(\frac{7}{9}\right)^{11}=-\left(\frac{7}{9}\right)^{18}$

- $\sqrt{\frac{16}{25}}=\pm\frac{4}{5}$; $\sqrt{\frac{1}{81}}=\pm\frac{1}{9}$; $\sqrt{\frac{4}{169}}=\pm\frac{2}{13}$

- $10^x = \mathbf{100}$ $\qquad x = \mathbf{2}$

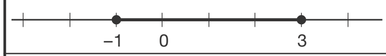
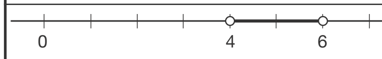
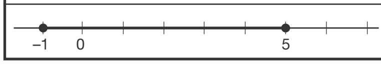
- 

- $2(x-3)=\frac{x+6}{2}$

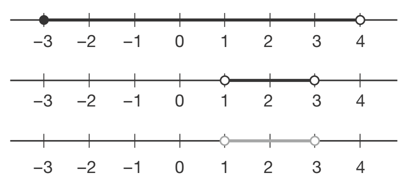
Actividades

2. a) -3; b) $\frac{3}{4}$; c) 6π cm.

4.

Representación	Intervalo
	(–1, 3)
	[–4, 2]
	(4, 6)
	[–1, 5]

6. (–8, –2)

8. 

10. $\sqrt{17} = 4{,}123\ 105\ 62... \simeq 4{,}12310$

12. $2{,}3476 \simeq 2{,}35$; $0{,}005 \simeq 0{,}01$; $3{,}899 \simeq 3{,}90$; $15{,}762 \simeq 15{,}76$

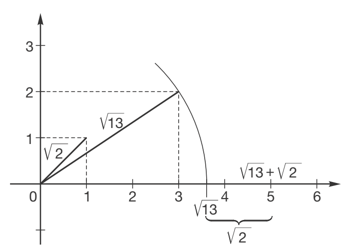
14. Para calcular el error absoluto restamos el valor aproximado del valor exacto

    $2{,}567\,929 - 2{,}567 = 0{,}000\,929$

    El error relativo es el cociente del error absoluto entre el valor exacto.

    $$\frac{0{,}000\ 929}{2{,}567\ 929} = 0{,}000\ 3617 \rightarrow 0{,}036\ 17\ \%$$

16. $|3{,}141592... - 3{,}1415| = 0{,}000\ 092... < 0{,}0001$

18. 

20. Efectuamos los cálculos directos.

    $\pi+\sqrt{8} = 5{,}97$; $\pi\cdot\sqrt{8} = 8{,}8862$

    Veamos si todas las cifras de estos resultados son correctas.

    $$3{,}14 \le \pi \le 3{,}15;\ 2{,}82 \le \sqrt{8} \le 2{,}83$$
    $$3{,}14 + 2{,}82 \le \pi + \sqrt{8} \le 3{,}15 + 2{,}83$$
    $$5{,}96 \le \pi + \sqrt{8} \le 5{,}98$$

    Sólo podemos aceptar una de las dos cifras decimales obtenidas inicialmente para $\pi+\sqrt{8}$.

    $\pi+\sqrt{8} \simeq 6{,}0$

    $$3{,}14 \cdot 2{,}82 \le \pi\cdot\sqrt{8} \le 3{,}15 \cdot 2{,}83$$
    $$8{,}8548 \le \pi\cdot\sqrt{8} \le 8{,}9145$$

    No podemos aceptar ninguna de las cuatro cifras decimales obtenidas inicialmente para $\pi\cdot\sqrt{8}$.

    $\pi\cdot\sqrt{8} \simeq 9$

22. a) $\left(\dfrac{1}{3\pi}\right)^2$; b) $\left(\dfrac{9}{4x}\right)^3$; c) $\left(\dfrac{1}{\pi-1}\right)^5$

d) $\left(\dfrac{x+3}{4}\right)^1$

24. $\dfrac{9}{16}, \dfrac{16}{25}$ y $\dfrac{169}{81}$

— $\sqrt{\dfrac{125}{4}} = \pm 5{,}59016...;\ \sqrt{\dfrac{9}{16}} = \pm\dfrac{3}{4};$

$\sqrt{\dfrac{99}{35}} = \pm 1{,}68183...;\ \sqrt{\dfrac{16}{25}} = \pm\dfrac{4}{5};$

$\sqrt{\dfrac{111}{38}} = \pm 1{,}70910...;\ \sqrt{\dfrac{169}{81}} = \pm\dfrac{13}{9}.$

— Números racionales: $\pm\dfrac{3}{4}, \pm\dfrac{4}{5}, \pm\dfrac{13}{9}$.

Números irracionales: $\pm$ 5,590 16..., $\pm$ 1,681 83..., $\pm$ 1,709 10...

26. Son semejantes $-2\sqrt{5}$ y $6\sqrt{5}$; $4\sqrt[3]{2}$ y $-6\sqrt[3]{2}$

28. $\sqrt{\dfrac{24}{6}} = \sqrt{4} = \pm 2;\ \sqrt{\dfrac{a}{2b}};\ \sqrt{\dfrac{144}{16c}} = \sqrt{\dfrac{9}{c}};$

$\sqrt{\dfrac{12a}{3a}} = \sqrt{4} = \pm 2.$

30. $\sqrt[4]{5^4} = 5;\ +\sqrt{5^2} = +5;\ \left(\dfrac{12}{7}\right)^2 = +\dfrac{144}{49};$

$\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[4]{2^4} = 2.$

32. a) $121 + 22\sqrt{2} + 2 = 123 + 22\sqrt{2}$;

b) $6 - 2\sqrt{30} + 5 = 11 - 2\sqrt{30}$;

c) $10 - 17 = -7$; d) $49 - 21 = 28$.

34. a) $3^2 \cdot 5 \cdot a \cdot b^2\sqrt{5} = 45ab^2\sqrt{5}$;

b) $(ab)^3\sqrt[3]{7a}$;

c) $-12 \cdot 2^3 \cdot a^3\sqrt{2a} = -96a^3\sqrt{2a}$;

d) $\dfrac{16}{5}\cdot\dfrac{5}{\sqrt{2}} = \dfrac{16}{\sqrt{2}} = \dfrac{8\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$.

36. $99^{\frac{1}{2}};\ 365^{\frac{1}{2}};\ 44^{\frac{1}{2}};\ 75^{\frac{1}{2}};\ 3^{\frac{1}{2}};\ 18^{\frac{1}{2}};\ 243^{\frac{1}{2}}.$

38. $(-18)^{\frac{1}{3}};\ 5^{\frac{1}{5}};\ (-4)^{\frac{1}{3}};\ 5^{\frac{1}{4}};\ 3^{\frac{1}{6}};\ 18^{\frac{1}{4}};\ 4^{\frac{1}{6}};$

$(-16)^{\frac{1}{5}}.$

40. $5^{-\frac{1}{3}};\ 2^{-\frac{1}{5}};\ 5^{-\frac{1}{4}};\ 2\cdot 9^{-\frac{1}{3}};\ -2\cdot 3^{-\frac{1}{6}}.$

42. a) $\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{11}{15}}$; b) $\left(\dfrac{-3}{4}\right)^{4-\frac{2}{5}+1} = \left(\dfrac{-3}{4}\right)^{\frac{23}{5}}$;

c) $\left(1+\sqrt{2}\right)^{\frac{9}{5}-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \left(1+\sqrt{2}\right)^{\frac{23}{10}}$; d) 1.

44. a) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-2} + \dfrac{3-3\sqrt{2}}{1-2} = -1-\sqrt{2}-3+$

$+3\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 4$

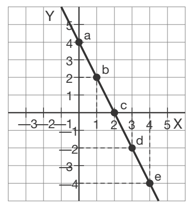
b) $\dfrac{3\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3-2} + \dfrac{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3-2} =$

$= 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{3} - \sqrt{2}$

46. Traducimos el enunciado al lenguaje algebraico:

$2x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - 2x$

x	y = 4 − 2x
0	4 (a)
1	2 (b)
2	0 (c)
3	−2 (d)
4	−4 (e)



48. $3x - 2y = -1 \Rightarrow x = \dfrac{2y-1}{3}$

$y = -1 \Rightarrow x = \dfrac{2(-1)-1}{3} \Rightarrow x = -1$

$y = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{2\left(\dfrac{1}{2}\right)-1}{3} \Rightarrow x = 0$

$y = 2 \Rightarrow x = \dfrac{2\cdot 2-1}{3} \Rightarrow x = 1$

50. $\left.\begin{array}{l} 3x - 4y = 7 \\ 7x + 8y = -105 \end{array}\right\}$

Sustituimos las soluciones en el sistema de ecuaciones:

$3(-7) - 4(-5) = 7$

$-21 + 20 = 7 \Rightarrow -1 = 7$

$7(-7) + 8(-5) = 105$

$-49 - 40 = -105 \Rightarrow -89 = -105$

Por lo tanto, (–7, –5) no es solución del sistema de ecuaciones.

52. a) $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 0 \\ x + 3y = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 2x \\ y = \dfrac{7-x}{3} \end{array}\right\}$

1.ª ecuación

x	1	2	0
y = 2x	2	4	0

2.ª ecuación

x	4	7	1
$y = \dfrac{7-x}{3}$	1	0	2

Las rectas se cruzan en (1, 2), por lo que *x* = 1, *y* = 2 es la solución del sistema.

— Comprobación de la solución:

1.ª ecuación:

$2\cdot 1 - 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

2.ª ecuación:

$1 + 3\cdot 2 = 7 \Rightarrow 7 = 7$

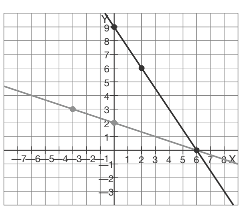
b) $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 18 \\ -2x - 6y = -12 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{18-3x}{2} \\ y = \dfrac{12-2x}{6} \end{array}\right\}$

1.ª ecuación

x	0	2
$y = \dfrac{18-3x}{2}$	9	6

2.ª ecuación

x	0	−3
$y = \dfrac{12-2x}{6}$	2	3



Las rectas se cruzan en (6, 0), solución del sistema.

— Comprobación de la solución:

1.ª ecuación:

$$3 \cdot 6 + 2 \cdot 0 = 18 \Rightarrow 18 = 18$$

2.ª ecuación:

$$-2 \cdot 6 - 6 \cdot 0 = -12 \Rightarrow -12 = -12$$

— *a* y *b* no son equivalentes porque no tienen la misma solución.

54. Método por sustitución:

$$\left.\begin{array}{l} 2y - 3x = 7 \\ y - 2x = 2 \end{array}\right\} \; y = 2 + 2x$$

$$2(2 + 2x) - 3x = 7 \Rightarrow x = 3$$

$$y = 2 + 2 \cdot 3 \Rightarrow y = 8$$

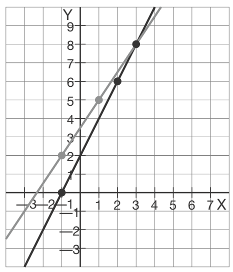
Método gráfico:

1.ª ecuación

x	1	–1
$y = \dfrac{7 + 3x}{2}$	5	2

2.ª ecuación

x	1	–2
y = 2 + 2x	0	6



El punto de corte de las dos rectas es (3, 8). Obtenemos el mismo resultado por los dos métodos.

56. Método de igualación:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{1 + 3y}{2} \\ x = 11 - 2y \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1 + 3y}{2} = 11 - 2y$$

$$7y = 21 \Rightarrow y = 3$$

$$x = 11 - 2 \cdot 3 \Rightarrow x = 5$$

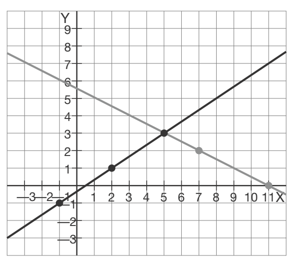
Método gráfico:

1.ª ecuación

y	–1	3
$x = \dfrac{1 + 3y}{2}$	1	5

2.ª ecuación

y	2	4
x = 11 + 2y	7	3



El punto de corte de las dos rectas es (5, 3), solución del sistema.

58. a) $\left.\begin{array}{l} x + y = 4 \\ 2x + 4y = 10 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{r} -2x - 2y = -8 \\ \underline{2x + 4y = 10} \\ 2y = 2 \Rightarrow y = 1 \end{array}$

$$\begin{array}{l} -4x - 4y = -16 \\ \underline{2x + 4y = \;\; 10} \\ -2x \qquad = -6 \Rightarrow x = 3 \end{array}$$

b) $\left.\begin{array}{l} x - 4y = 2 \\ 2x - 5y = 7 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{r} -2x + 8y = -4 \\ \underline{2x - 5y = 7} \\ 3y = 3 \Rightarrow y = 1 \end{array}$

$$\begin{array}{l} 5x + 20y = 10 \\ \underline{-8x + 20y = -28} \\ -3x \qquad = -18 \Rightarrow x = 6 \end{array}$$

62. Representamos por *x* el precio de los libros y por *y* el de los rotuladores.

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y = 25 \\ x + 2y = 9 \end{array}\right\} \; x = 9 - 2y$$

$$3(9 - 2y) + 2y = 25$$

$$27 - 6y + 2y = 25$$

$$-4y = -2$$

$$y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 8$$

Un libro vale \$ 8 y un rotulador 50 centavos.

64. Años que han de transcurrir: *x*.

	Padre	Hijo
Edad actual	35	5
Edad dentro de *x* años	35 + x	5 + x

$$35 + x = 4(5 + x)$$
$$35 + x = 20 + 4x$$
$$x - 4x = 20 - 35$$
$$-3x = -15 \Rightarrow x = 5$$

Dentro de 5 años.

66. $$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{4x - 2}{2} - \dfrac{5(2y - 3x)}{8} = y \\ \dfrac{6x + y}{3} - \dfrac{3x - 4(2 - y)}{5} = x + y - 2 \end{array}\right\}$$

$$8\left(\frac{4x - 2}{2} - \frac{10y - 15x}{8}\right) = 8y$$

$$31x - 18y = 8$$

$$\frac{6x + y}{3} - \frac{3x - 4(2 - y)}{5} = x + y - 2$$

$$15\left(\frac{6x + y}{3} - \frac{3x - 8 + 4y}{5}\right) =$$

$$= 15(x + y - 2)$$

$$3x - 11y = -27$$

Sistema equivalente: $31x - 18y =$

$3x - 11y = -27$

Resolvemos el sistema por el método de reducción:

$$\begin{array}{l} -3\,(31x - 18y = 8) \\ \underline{31\,(3x - 11y = -27)} \\ -287y = -861 \Rightarrow y = \dfrac{-861}{-287} = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -11\,(31x - 18y = 8) \\ \underline{18\,(3x - 11y = -27)} \\ -287x = -574 \Rightarrow x = \dfrac{-574}{-287} = 2 \end{array}$$

Solución: $x = 2$, $y = 3$.

68. Hallamos la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 y 3:

$$h^2 = 5^2 + 3^2 = 25 + 9 = 34 \Rightarrow h = \sqrt{34}$$

70. a) *a* es un número del intervalo [–2,8] ya que está comprendido entre –2 y 6. De *b* se sabe que está comprendido entre 4 y 8. Por tanto, *b* sólo puede pertenecer al intervalo [–2,4] si su valor es $b = 4$.

b) $-2 + 4 = 2$; $6 + 8 = 14$;

a + b pertenece al intervalo [2, 14].

72.

a) $(+2)^3\,(+2)^{-4}\,(+2)^4 = (+2)^{3-4+4} = (+2)^3$

b) $(+7)^{-2}\,(+7)^9\,(+7)^4 = (+7)^{-2+9+4} = (+7)^{11}$

74.

a) $\dfrac{1}{12^5}$ b) $\dfrac{1}{(a-1)^3}$ c) $\left(\dfrac{3}{8x}\right)^2$

76. a) $2\sqrt{3}$; b) $-10\sqrt{2} - 9\sqrt{3}$;

c) $\dfrac{12}{6}\sqrt{15} = 2\sqrt{15}$; d) $\dfrac{16}{6}\sqrt{11} -$

$$-\frac{31}{12}\sqrt{7} = \frac{8}{3}\sqrt{11} - \frac{31}{12}\sqrt{7}$$

78.

a) $3\sqrt{2} - 5 \cdot 2\sqrt{2} + 7 \cdot 5\sqrt{2} - 4 \cdot 3\sqrt{2} =$

$= (3 - 10 + 35 - 12)\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$

b) $-3 \cdot 3\sqrt{3} - 2 \cdot 5\sqrt{5} + 8 \cdot 5\sqrt{3} -$

$-10 \cdot 2\sqrt{5} = 31\sqrt{3} - 30\sqrt{5}$

c) $7 \cdot 5^2 - \dfrac{2}{5}\sqrt{5} + \dfrac{3}{7} + 6 \cdot 5\sqrt{5} =$

$= \dfrac{148}{5}\sqrt{5} + \dfrac{1228}{7}$

80.

a) $\dfrac{5^2\cdot 3\cdot\sqrt{6\cdot}\sqrt{3}}{2^3\cdot 3\sqrt{3}}=\dfrac{25}{8}\sqrt{6}$

b) $\dfrac{\sqrt{2^5\cdot 3^5}}{(\sqrt{3^6})^3}=\dfrac{2^2\cdot 3^2\cdot\sqrt{2\cdot 3}}{3^9}=\dfrac{2^2\sqrt{6}}{3^7}$

c) $\sqrt{\dfrac{2\cdot 3^2\cdot a^3b^2}{3^3\cdot a^2b}}=\sqrt{\dfrac{2ab}{3}}=\dfrac{\sqrt{6ab}}{3}$

d) $\dfrac{2\cdot 3\cdot 5^3\sqrt{3\cdot 5}}{2^2\cdot 3\cdot 5^3\sqrt{3\cdot 5}}=\dfrac{1}{2}$

82. a) $1-\sqrt{2}$; b) $5+\sqrt{17}$; c) $\sqrt{3}-\sqrt{8}$.

84. Los dos denominadores son conjugados entre sí, por tanto sumamos directamente las dos fracciones:

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=$$

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3}=$$

El número entero es 4.

86. a) $\dfrac{3\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}$; por tanto:

4.º término: $15\sqrt{5}$

5.º término: $15\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=15\cdot 5=75$

6.º término: $75\sqrt{5}$

Serie: $3,\ 3\sqrt{5},\ 15, 15\sqrt{5},\ 75,\ 75\sqrt{5},\ldots$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

4.º término: $2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=4$

5.º término: $4\sqrt{2}$

6.º término: $4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=8$

Serie: $\sqrt{2},\ 2,\ 2\sqrt{2},\ 4,\ 4\sqrt{2},\ 8,\ldots$

c) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\dfrac{(2+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=$

$=\dfrac{2-2\sqrt{2}+\sqrt{2}-2}{1-2}=\sqrt{2}$

4.º término:

$(2+2\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=4+2\sqrt{2}$

5.º término:

$(4+2\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}=4\sqrt{2}+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=4+4\sqrt{2}$

6.º término:

$(4+4\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}=4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=8+4\sqrt{2}$

Serie:

$1+\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2},\ 2+2\sqrt{2},\ 4+2\sqrt{2},$

$4+4\sqrt{2},\ 8+4\sqrt{2},\ldots$

d) $\dfrac{5-\sqrt{5}}{-\sqrt{5}}=\dfrac{(5-\sqrt{5})\sqrt{5}}{-\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=$ $\dfrac{5-\sqrt{5}}{-\sqrt{5}}=\dfrac{(5-\sqrt{5})\sqrt{5}}{-\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=$

4.º término:

$(10-6\sqrt{5})(1-\sqrt{5})=10-10\sqrt{5}-6\sqrt{5}+6\cdot 5=$

$=40-16\sqrt{5}$

5.º término:

$(40-16\sqrt{5})(1-\sqrt{5})=$

$=40-40\sqrt{5}-16\sqrt{5}+16\cdot 5=120-56\sqrt{5}$

6.º término:

$(120-56\sqrt{5})(1-\sqrt{5})=$

$=120-120\sqrt{5}-56\sqrt{5}+56\cdot 5=400-176\sqrt{5}$

Serie:

$-\sqrt{5},5-\sqrt{5},10-6\sqrt{5},\ 40-16\sqrt{5},$

$120-56\sqrt{5},\ 400-176\sqrt{5},\ldots$

88. $99^{\frac{1}{2}};\ 365^{\frac{1}{2}};\ 44^{\frac{1}{3}};\ 75^{\frac{1}{5}};\ 3^{\frac{1}{7}};\ 18^{\frac{1}{3}};\ 243^{\frac{1}{2}}$

90. $5^{\frac{-1}{2}};\ 7^{\frac{-1}{2}};\ 6^{\frac{-1}{2}};\ 3\cdot 19^{\frac{-1}{2}};\ -2\cdot 13^{\frac{-1}{2}}$

92. a) $\dfrac{x}{5}+2x=16-x$

- $x=-2$

$-\dfrac{2}{5}-4=16+2;\ \dfrac{-22}{5}\neq 18$

- $x=5$

$1+10=16-5;\ 11=11$

- $x=\dfrac{-1}{2}$

$-\dfrac{1}{10}-1=16+\dfrac{1}{2};\ \dfrac{-11}{10}\neq\dfrac{33}{2}$

La solución es $x=5$.

b) $3x+5=2-4(1-2x)$

$3x+5=2-4+8x$

$3x+5=-2+8x$

- $x=\dfrac{7}{5}$

$\dfrac{21}{5}+5=-2+\dfrac{56}{5};\ \dfrac{46}{5}=\dfrac{46}{5}$

- $x=5$

$5+5=-2+40;\ 20\neq 38$

- $x=\dfrac{-1}{5}$

$-\dfrac{3}{5}+5=-2-\dfrac{8}{5};\ \dfrac{22}{5}\neq\dfrac{-18}{5}$

La solución es $x=\dfrac{7}{5}$.

94.

$\dfrac{a}{5}+\dfrac{1-6\cdot\frac{1}{6}}{7}=1$

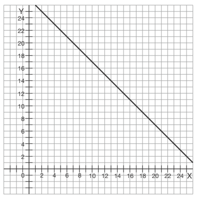
$\dfrac{a}{5}+\dfrac{1-1}{7}=1$

$\dfrac{a}{5}+\dfrac{0}{7}=1$

$\dfrac{a}{5}=1\Rightarrow a=5$

96. $x+y=27$

x	y = 27 – x
12	15
14	13
16	11

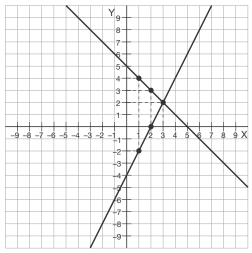


98. Una, infinitas o ninguna.

106.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 5 \\ 2x - 4 = y \end{array}\right\}$$

Primera ecuación		Segunda ecuación	
x	y = 5 – x	x	y = 2x – 4
1	4	1	–2
2	3	2	0
3	2	3	2



La solución del sistema es $x = 3$, $y = 2$.

102. — Método de sustitución

$2(2x - 2) = 4x + 5$

$0x = 9$ Esta ecuación no tiene solución.

— Método de igualación

$$y = \frac{4x + 5}{7}$$

$$2x - 2 = \frac{4x + 5}{7}$$

$0x = 9$ Esta ecuación no tiene solución.

— Método de reducción

$$\begin{array}{l} 4x - 2y = 4 \\ -4x + 2y = 5 \\ 0x + 0y = 9 \end{array}$$

Esta ecuación no tiene solución.

104. $x + y = 6$
$x - y = -2$

106. a) $x = \dfrac{-13 + 8y}{5}$

$$2\left(\frac{-13 + 8y}{5}\right) - 3y = -4$$

$y = 6$

$$x = \frac{-13 + 8 \cdot 6}{5} = 7$$

La solución es $x = 7$, $y = 6$.

b) $y = 2x$

$5x - 2x = -3$

$x = -1$

$y = 2 \cdot (-1) = -2$

La solución del sistema es $x = -1$, $y = -2$.

108. a)
$$\begin{array}{l} 2x + 3y = 1 \\ -2x - 2y = 4 \\ \quad y = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x + 3y = 1 \\ -3x - 3y = 6 \\ -x \quad = 7 \quad \Rightarrow \quad x = -7 \end{array}$$

La solución del sistema es $x = -7$, $y = 5$.

b) $4y = 3 + x$

$10 = 3x + 7y$

$$\begin{array}{l} 3x - 12y = -9 \\ -3x - 7y = -10 \\ \quad -19y = -19 \quad \Rightarrow \quad y = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -7x + 28y = 21 \\ -12x - 28y = -40 \\ -19x \quad = -19 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \end{array}$$

La solución del sistema es $x = 1$, $y = 1$.

110. a)
$$\begin{array}{l} 2x - y = 0 \\ -2x - 6y = -14 \\ \quad -7y = -14 \quad \Rightarrow \quad y = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6x - 3y = 0 \\ x + 3y = 7 \\ 7x \quad = 7 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \end{array}$$

La solución es $x = 1$, $y = 2$.

b)
$$\begin{array}{l} 9x + 6y = 21 \\ -2x - 6y = -14 \\ 7x \quad = 7 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6x + 4y = 14 \\ -6x - 18y = -42 \\ \quad -14y = -28 \quad \Rightarrow \quad y = 2 \end{array}$$

La solución es $x = 1$, $y = 2$.

Puesto que ambos sistemas tienen la misma solución, son equivalentes.

112. $x \rightarrow$ Número de gallinas

Número de conejos: $40 - x$

$2x + 4(40 - x) = 106$

$2x + 160 - 4x = 106$

$2x - 4x = 106 - 160$

$-2x = -54 \Rightarrow x = 27$

$40 - x = 40 - 27 = 13$

En el corral hay 27 gallinas y 13 conejos.

114. $x \rightarrow$ Número de monedas de 5 céntimos de dólar

Número de monedas de 10 céntimos de dólar: $15 - x$

$5x + 10(15 - x) = 140$

$5x + 150 - 10x = 140$

$5x - 10x = 140 - 150$

$-5x = -10 \Rightarrow x = 2 \rightarrow 15 - x = 15 - 2 = 13$

Tengo 2 monedas de 5 centavos de dólar y 13 monedas de 10 centavos de dolar.

116. $x \rightarrow$ Lado del cuadrado menor

Lado del cuadrado mayor: $2x + 3$

$4(2x + 3) - 46 = 4x$

$8x + 12 - 46 = 4x$

$8x - 4x = -12 + 46$

$4x = 34 \Rightarrow x = 8{,}5 \rightarrow 2x + 3 = 2 \cdot 8{,}5 + 3 = 20$

La longitud de los lados de ambos cuadrados es 8,5 cm y 20 cm.

118. Representamos por x la cifra de las decenas y por y la cifra de las unidades.

— Las cifras suman 9: $x + y = 9$

— La cifra de las unidades es el doble que la cifra de las decenas: $y = 2x$

— Sistema: $\left.\begin{array}{l} x + y = 9 \\ y = 2x \end{array}\right\}$

$x + 2x = 9$

$x = 3 \rightarrow y = 2x = 2 \cdot 3 = 6$

El número buscado es el 36.

120. Representamos por x el número de estantes y por y el número de productos químicos.

$$\left.\begin{array}{l} 8x = y \\ 10(x - 1) = y \end{array}\right\}$$

$8x = 10(x - 1)$

$-2x = -10$

$x = 5 \rightarrow y = 8x = 8 \cdot 5 = 40$

El laboratorio dispone de 40 productos químicos.

122. Respuesta sugerida:

Ecuación: Proviene del latín *aequatio,* que significa 'igualdad'.

124. La **pieza 1** es un triángulo de base igual a la mitad del lado del cuadrado que limita el tangram y de altura igual a la cuarta parte del lado de dicho cuadrado.

Su área es: $A = \dfrac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{2} = \dfrac{2 \cdot 5}{2} = 5 \text{ cm}^2$

Pieza 2: $A = \dfrac{4\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = \dfrac{8 \cdot 5}{2} = 20 \text{ cm}^2$

La **pieza 3** es un cuadrado. Para hallar la medida de su lado hay que calcular la diagonal del tangram ya que el lado de la pieza 3 es una cuarta parte de la diagonal del tangram:

$$d^2 = (4\sqrt{5})^2 + (4\sqrt{5})^2 = 16 \cdot 5 - 16 \cdot 5 = 160$$

$$d = \sqrt{160} = \sqrt{2^5 \cdot 5} = 2^2\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$$

El área de la pieza 3 es: $A = \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 10 \text{ cm}^2$, resultado coherente puesto que tiene el doble de superficie que la pieza 1.

El área de la **pieza 4** es la misma que la de la pie-za 2. Su valor es 20 cm^2.

El área de la **pieza 5** es la misma que la de la pie-za 1. Su valor es 5 cm^2.

La **pieza 6** es un triángulo de base y altura iguales a la mitad del lado del cuadrado que limita el tangram. Su área es: $A = \dfrac{2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{2} = 10 \text{cm}^2$

La **pieza 7** es un paralelogramo de base igual a la mitad del lado del cuadrado que limita el tangram y de altura igual a la cuarta parte de dicho lado. Su

área es: $A = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 10 \text{ cm}^2$

126. Sea *x* la distancia entre *B* y *C*. Se tiene:

$$\frac{3}{5}x + x = \frac{400(\sqrt{128} - \sqrt{50})}{\sqrt{18}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{8}{5}x = \frac{400(\sqrt{128} - \sqrt{50})}{\sqrt{18}} \Rightarrow$$

$$x = \frac{5 \cdot 400(\sqrt{128} - \sqrt{50})}{8\sqrt{18}} = \frac{250(\sqrt{128} - \sqrt{50})}{\sqrt{18}} =$$

$$= \frac{250\sqrt{18}\,(\sqrt{128} - \sqrt{50})}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{18}} = \frac{250(\sqrt{2304} - \sqrt{900})}{18} =$$

$$\frac{250 \cdot (48 - 30)}{18} = \frac{250 \cdot 18}{18} = 250$$

$$\frac{3}{5}x = \frac{3}{5} \cdot 250 = 150$$

La distancia entre *A* y *B* es de 150 km y la distancia entre *B* y *C* es de 250 km.

130. *x* → Precio rotulador

Precio de 4 libretas: 6,7 – 3*x*

Precio de 4 libretas: 2 · 3,1 – 2*x*

a) $6{,}7 - 3x = 2 \cdot 3{,}1 - 2x$

$6{,}7 - 3x = 6{,}2 - 2x$

$-3x + 2x = 6{,}2 - 6{,}7$

$-x = -0{,}5 \Rightarrow x = 0{,}5 \rightarrow \$\,0{,}5$

b) Precio de 4 libretas: $6{,}7 - 3x =$

$= 6{,}7 - 3 \cdot 0{,}5 = 5{,}2$

Precio de 1 libreta $\dfrac{5{,}2}{4} = 1{,}3 \rightarrow \$\,1{,}3$

c) $2 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 1{,}3 = 1 + 2{,}6 = 3{,}6 \rightarrow \$\,3{,}6$

132. $\left.\begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + y = 5 \end{array}\right\}$

Autoevaluación

2. $2(y + 2) - x = x + 6$

$2(y + 1) + x = 5 + y$

Primera ecuación:

$2(y + 2) - x = x + 6$

$y - x = 1$

Segunda ecuación:

$2(y + 1) + x = 5 + y$

$y + x = 3$

$y - x = 1$

$y + x = 3$

$y - x = 1$

$\underline{y + x = 3}$

$2y \quad = 4 \Rightarrow y = 2$

$-y + x = -1$

$\underline{y + x = 3}$

$2x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

$x = 1;\ y = 2$

4. $(\sqrt{2})^3 \cdot (\sqrt{2})^{-2} = (\sqrt{2})^{3-2} = \sqrt{2}$

Coevaluación

2. $2y - 4 = 2(x - 3)$

$y = x - 1$

a) $2y - 4 = 2(x - 3)$

4. a) $(\pi^{-5} \cdot \pi^{-3} \cdot \pi^{6})^2 = (\pi^{-2})^2 = \pi^{-2 \cdot 2} = \pi^{-4}$

b) $\pi^5 \cdot (\pi^{\frac{1}{2}} : \pi^{-3}) = \pi^5 \cdot \pi^{\frac{1}{2}+3} = \pi^{5+\frac{1}{2}+3} = \pi^{\frac{17}{2}}$

Demuestra tu ingenio

$24 + 0{,}08\,(t - 180) = 30 + 0{,}05\,(t - 120)$

$24 + 0{,}08t - 14{,}4 = 30 + 0{,}05t - 6$

$0{,}03t = 14{,}4 \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{14{,}4}{0{,}03} = 480$

$t = 480$ min = 8 horas

$24 + 0{,}08 \cdot (300) = 30 + 0{,}05\,(360) = 48$

El importe de cada factura es de 48 € y han hablado 8 horas cada una.

Módulo 2 Notación científica Función lineal Función exponencial

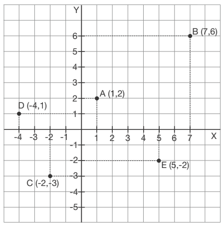
Actividad inicial

- Masa de la Tierra: 5 980 000 000 000 000 000 000 000 kg
- Masa de un electrón: 0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 910 95 kg
- La notación científica nos permite escribir y leer números muy grandes o muy pequeños con mayor facilidad.

Evaluación diagnóstica

- a) 3^5; b) 9^4
- a) 4^5; b) 5^4; c) 6^{10}
- Respuesta abierta
- $A = \pi r^2$

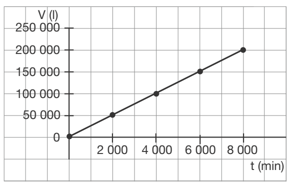
r (m)	0	5	**10**	15	**20**
A (m^2)	0	**78,54**	314,16	**706,86**	1256,64

- 

- V: volumen (litros)
  t: tiempo (minutos)
  V = 25 · t

—

t	0	2 000	4 000	6 000	8 000
V	0	50 000	100 000	150 000	200 000

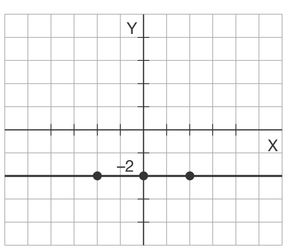
— 

Se trata de una recta.

Actividades

2. Positivas: $(-2)^{12}$, $(+6)^5$, $(-4)^{32}$
   Negativas: $(-4)^7$, $(-7)^{21}$
4. -5^9; 7^{14}; -15^7; 9^{12}; -3^{21}
6. a) $(-2)^3 = -2^3$; b) 7^8; c) 4^{12}; d) $6^{12} : 6^8 = 6^4$; e) $7^{21} : 7^4 = 7^{17}$; f) $-4^{15} : 4^9 = -4^6$
8. $\frac{1}{2^{-3}}; \frac{1}{(-4)^{-7}}; \frac{1}{(-7)^{-99}}; \frac{1}{(-5)^{-11}}; \frac{1}{9^{-4}}$
10. a) 7^3; b) 1; c) $(-5)^7$; d) $(-3)^{10}$
12. a) 10^{-12}
    b) $10^{-5} \cdot (10^2)^{-5} = 10^{-5} \cdot 10^{-10} = 10^{-15}$
    c) $10^{18} \cdot 10^9 = 10^{27}$
    d) $10^{-1} \cdot 10^{-5} : 10^{-16} = 10^{10}$
14. 542 000; 41 876 000; 0,001; 0,000 157; –0,03
    Cifras significativas:
    $5{,}42 \cdot 10^5$: tres; $4{,}1876 \cdot 10^7$: cinco; 10^{-3}: una; $1{,}57 \cdot 10^{-4}$: tres; $-3 \cdot 10^{-2}$: una.
16. $9{,}385 \cdot 10^{-6} < 3{,}56 \cdot 10^{-3} < 7{,}863 \cdot 10^{-3} <$
    $< 3{,}295 \cdot 10^0 < 1{,}57 \cdot 10^1 < 4{,}25 \cdot 10^2 <$
    $< 5{,}32 \cdot 10^2 < 8{,}42 \cdot 10^5$
18. a) Variable independiente: número de billetes.
    Variable dependiente: importe.
    b) Variable independiente: metros cúbicos consumidos.
    Variable dependiente: importe.
20. D(f) = {1, 2, 3, ... , 323, 324, 325}
    R(f) = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
22. a)

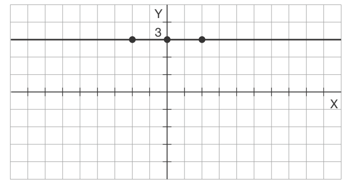
x	–2	0	2
y	–2	–2	–2



Ordenada en el origen: –2

b)

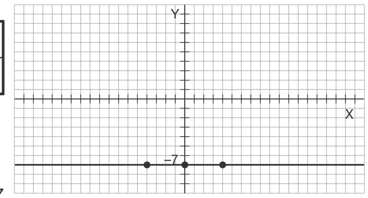
x	–2	0	2
y	3	3	–3



Ordenada en el origen: 3

c)

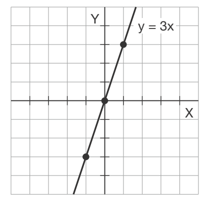
x	–4	0	4
y	–7	–7	–7



Ordenada en el origen: –7

24. La expresión algebraica de la función es $y = -6$.
26. a)

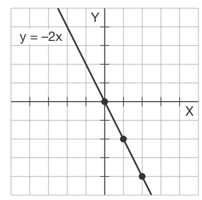
x	–1	0	1
y	–3	0	3



La pendiente de la recta es 3.

b)

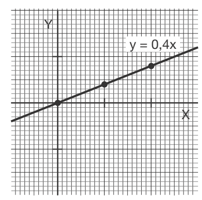
x	0	1	2
y	0	–2	–4



La pendiente de la recta es –2.

c)

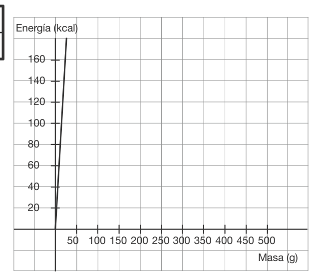
x	0	1	2
y	0	0,4	0,8



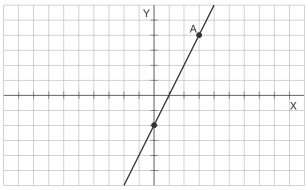
La pendiente de la recta es 0,4.

28.

Masa en g (x)	100	200	300	400	500
Energía en kcal (y)	675	1350	2025	2700	3375



30. Pasa por (0, 5; 0) y (1, 50).
    Consideramos estos puntos (3, 2).
    $$m = \frac{50}{0{,}5} = 100$$
    La expresión algebraica de la función es $y = \frac{2}{3}x$.
32. Pendiente:
    $$m = \frac{1-3}{2-1} = -2$$
    $y = -2x + b$
    Consideramos el punto (1, 3).
    $3 = -2 \cdot 1 + b \Leftrightarrow 3 = -2 + b \Leftrightarrow b = 5$
    La expresión algebraica de la función es $y = -2x + 5$.

34. 

36. a) Resulta el sistema:

$$\left.\begin{aligned}-1 &= 2m+b\\ 3 &= 4m+b\end{aligned}\right\}$$

Lo resolvemos y obtenemos $m = 2$ y $b = -5$.

La ecuación de la recta es $y = 2x - 5$.

b) Resulta el sistema:

$$\left.\begin{aligned}2 &= -3m+b\\ -4 &= m+b\end{aligned}\right\}$$

Al resolver obtenemos $m = -\frac{3}{2}$ y $b = -\frac{5}{2}$.

La ecuación de la recta es $y = -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$.

38. $m = 1$

$y = x + b$; $-3 = 2 + b$; $b = -3 - 2 = -5$

La ecuación de la recta es $y = x - 5$.

40. Recta *r*

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3-3}{-4-4} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}$

La recta pasa por (0, 0) $\Rightarrow$ $b = 0$.

La ecuación de la recta es $y = \frac{3}{4}x$.

Recta *s*

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-2}{-2-2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

La recta pasa por (–2, 0): $0 = -1 + b \Rightarrow b = 1$

La ecuación de la recta es $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Recta *t*

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1-1}{0+3} = \frac{-2}{3}$

La recta pasa por (0, –1) $\Rightarrow$ $b = -1$.

La ecuación de la recta es $y = -\frac{2}{3}x - 1$.

42. a) $f(2) = 3^2 = 9$

b) $f(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

c) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

d) $f\left(-\frac{3}{4}\right) = 3^{\frac{-3}{4}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{27}}$

44. a) $f(2) = 25$; $f(3) = 125$; $f(4) = 625$

b) $f(2) = \frac{1}{25}$; $f(3) = \frac{1}{125}$; $f(4) = \frac{1}{625}$

c) $4^x = 64 \Rightarrow 4^x = 4^3 \Rightarrow x = 3$;

$4^x = 1 \Rightarrow 4^x = 4^0 \Rightarrow x = 0$

46. $s_1 \rightarrow$ espacio recorrido por Omar en función del tiempo transcurrido.

$s_2 \rightarrow$ espacio recorrido por Daniel en función del tiempo transcurrido.

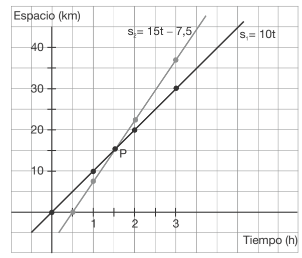
Tomamos la salida de Omar en el instante $t = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow s_1 = 10t$.

Tiempo en horas *(t)*	0	1	2	3
Espacio en km (s_1)	0	10	20	30

Daniel sale media hora más tarde. En esa media hora hubiese recorrido 7,5 km, por lo que:

$$s_2 = 15t - 7{,}5$$

Tiempo en horas *(t)*	0,5	1	2	3
Espacio en km (s_2)	0	7,5	22,5	37,5



Las dos rectas se cortan en el punto *P* (1,5, 15).

Daniel encuentra a Omar cuando lleva 1,5 h de ejercicio y ambos han recorrido 15 km.

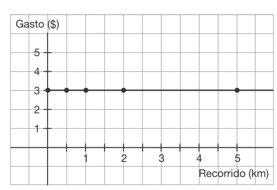
48.

A	B	A + B
$3{,}2 \cdot 10^6$	$2{,}5 \cdot 10^4$	$3{,}225 \cdot 10^6$
$-6{,}2 \cdot 10^{10}$	$2{,}5 \cdot 10^{12}$	$2{,}438 \cdot 10^{12}$
$1{,}5 \cdot 10^{-4}$	$1{,}2 \cdot 10^{-6}$	$1{,}512 \cdot 10^{-4}$
$3{,}2 \cdot 10^6$	$1{,}25 \cdot 10^4$	$3{,}2125 \cdot 10^6$

A – B	A · B	A : B
$3{,}175 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^{10}$	$1{,}28 \cdot 10^2$
$-2{,}562 \cdot 10^{12}$	$-1{,}55 \cdot 10^{23}$	$-2{,}48 \cdot 10^{-2}$
$1{,}488 \cdot 10^{-4}$	$1{,}8 \cdot 10^{-10}$	$1{,}25 \cdot 10^2$
$3{,}1875 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^{10}$	$2{,}56 \cdot 10^2$

50.

Gasto *($)*	3	3	3	3	3
Recorrido *(km)*	0	0,5	1	2	5



52. Para deducir la expresión algebraica de una función lineal, es necesario conocer dos puntos: el (0, 0) y otro.

Para deducir la expresión algebraica de una función afín no lineal es necesario conocer dos puntos.

54. La gráfica de la función lineal pasa por el punto (2, 6) y, por tanto, cumple:

$y = mx$; $6 = 2m \rightarrow m = 3$

La función lineal es $y = 3x$.

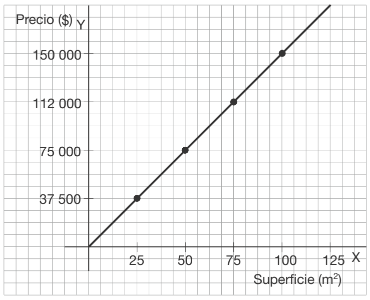
a) $6 \neq 3 \cdot 4$. No pertenece.

b) $3 = 3 \cdot 1$. Sí pertenece.

c) $4 \neq 3 \cdot 2$. No pertenece.

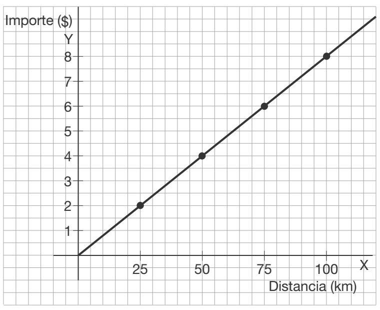
56. a)

Superficie en m² *(x)*	25	50	75	100
Precio en dólares *(y)*	37500	75000	112500	150000

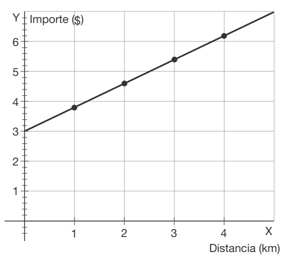


b)

Distancia en km *(x)*	25	50	75	100
Importe en dólares *(y)*	2	4	6	8



58.



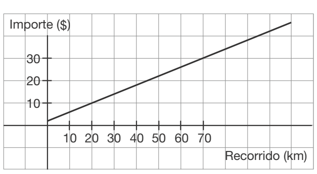
—Una función afín no lineal.

—Pendiente: $m = \dfrac{4{,}6 - 3{,}8}{2 - 1} = 0{,}8$

Ordenada en el origen: $y = 0{,}8x + b$; $3{,}8 = 0{,}8 \cdot 1 + b$; $b = 3$

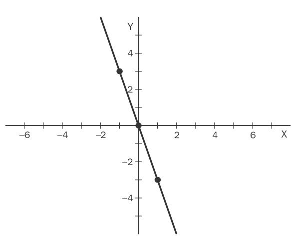
La pendiente es 0,8 y la ordenada en el origen es 3.

60. $y = 0{,}4x + 2$



62. a)

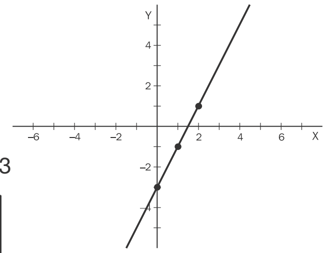
x	–1	0	1
y	3	0	–3



Función lineal. $m = -3$, $b = 0$

b)

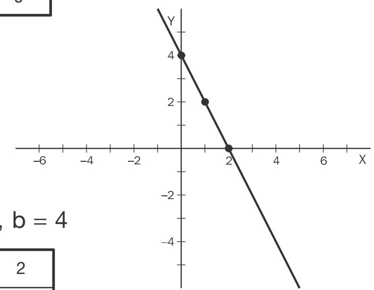
x	0	1	2
y	–3	–1	1



Función afín. $m = 2$, $b = -3$

c)

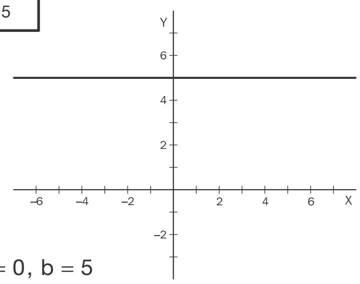
x	0	1	2
y	4	2	0



Función afín. $m = -2$, $b = 4$

d)

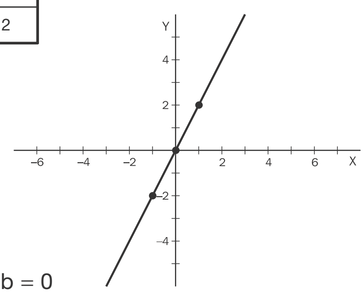
x	0	1	2
y	5	5	5



Función constante. $m = 0$, $b = 5$

e)

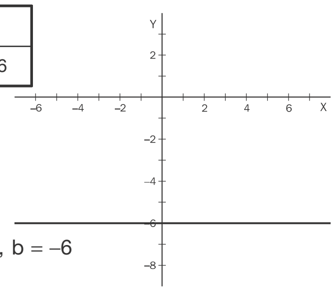
x	–1	0	1
y	–2	0	2



Función lineal. $m = 2$, $b = 0$

f)

x	–1	0	1
y	–6	–6	–6

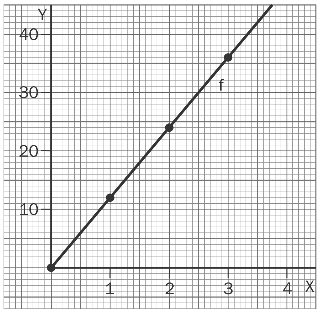


Función constante. $m = 0$, $b = -6$

64. Si la representación gráfica de la función afín es una recta paralela a $y = 2x$, tendrá la misma pendiente, es decir, $m = 2$. Por tanto: $y = 2x + b$.

Puesto que pasa por el punto P(2, 7), se cumple:
$7 = 2 \cdot 2 + b \Rightarrow 7 - 4 = b \Rightarrow b = 3$

La expresión algebraica es: $y = 2x + 3$.

66. 

a) Función lineal.

b) $m = 12$, $b = 0$. Por lo tanto, $y = 12x$.

c) $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = \mathbb{R}$

d) Puntos de corte con el eje OX: (0, 0)

Puntos de corte con el eje OY: (0, 0)

Función creciente en todo el intervalo de x.

TVM en el intervalo [1, 3]:

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{36 - 12}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

e) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 6$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -6$

68. $y = mx + b$, $P(1, -5)$, $b = -2$

$-5 = m - 2 \Rightarrow m = -3$

$y = -3x - 2$

70. Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente.

72. — $y = 3$

— $x = -1$

— $b = -2$

$0 = m - 2 \ \rightarrow \ m = 2$

$y = 2x - 2$

74. a) Resulta el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 10 &= -m + b \\ -17 &= 2m + b \end{aligned}\right\}$$

Lo resolvemos y obtenemos $b = 1$ y $m = -9$.

La ecuación de la recta es $y = -9x + 1$.

b) $m = 7$

$y = 7x + b$

$-1 = 7 \cdot 5 + b \Leftrightarrow -1 = 35 + b \Leftrightarrow b = -36$

La ecuación de la recta es $y = 7x - 36$.

c) $b = -5$

$y = mx - 5$

$-1 = 3m - 5 \Leftrightarrow 4 = 3m \Leftrightarrow \quad m = \frac{4}{3}$

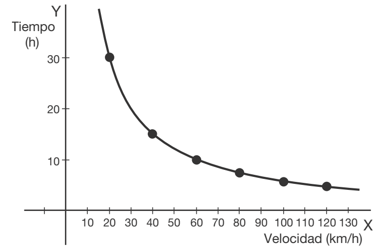
La ecuación de la recta es $y = \frac{4}{3}x - 5.$

d) $m = 2$

$y = 2x + b$

$5 = 2 \cdot 8 + b \Leftrightarrow 5 = 16 + b \Leftrightarrow -11 = b$

La ecuación de la recta es $y = 2x - 11$.

76. a) 

La expresión algebraica de la función es $y = \frac{600}{x}$. Es una función de proporcionalidad inversa.

b) $x = 75 \Rightarrow y = \frac{600}{x} = \frac{600}{75} = 8$. Tardará 8 horas.

78. $f(1) = 6{,}528 \Rightarrow k \cdot a^{1-1} = 6{,}528 \Rightarrow k \cdot a^0 =$
$= 6{,}528 \Rightarrow k = 6{,}528$

La función es de la forma $f(x) = 6{,}528 \cdot a^{x-1}$.

$f(3) = 40{,}8 \Rightarrow 6{,}528 \cdot a^{3-1} = 40{,}8 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = \frac{40{,}8}{6{,}528} = 6{,}25 \Rightarrow a = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$

Así, la función es: $f(x) = 6{,}528 \cdot 2{,}5^{x-1}$.

$f(2) = 6{,}528 \cdot 2{,}5^{2-1} = 6{,}528 \cdot 2{,}5 = 16{,}32$.

$f(4) = 6{,}528 \cdot 2{,}5^{4-1} = 6{,}528 \cdot 2{,}5^3 = 102$.

x	1	2	3	4
f(x)	6,528	16,32	40,8	102

80. El gráfico pasa por el punto *P*(0,5). Por tanto:
$5 = k \cdot a^0 \Rightarrow 5 = k \cdot 1 \Rightarrow k = 5$.

La imagen de 2 por *f* es el doble de la imagen de 1:

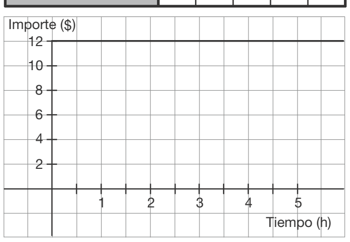
$f(2) = 2 \cdot f(1) \Rightarrow 5 \cdot a^2 = 2 \cdot 5 \cdot a^1 \Rightarrow 5a^2 = 10a \Rightarrow$

$\Rightarrow 5a^2 - 10a = 0 \Rightarrow 5a(a - 2) = 0$

Esta ecuación tiene dos soluciones: $a = 0$ y $a = 2$, de las cuales sólo tiene sentido el valor $a = 2$. La función es: $f(x) = 5 \cdot 2^x$

82. a)

Tiempo en horas *(x)*	1	2	3	4	5
Precio en euros *(y)*	12	12	12	12	12

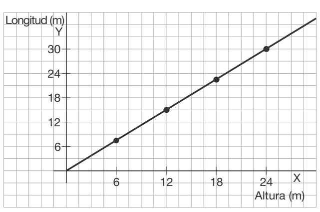


b) $m = 0$.

84.

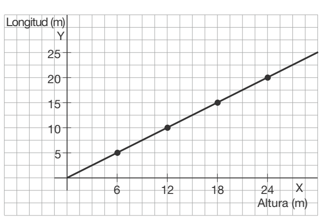
Altura del edificio en metros *(x)*	6	12	18	24
Longitud de la sombra a las 8 de la mañana en metros *(y)*	7,5	15	22,5	30

Pendiente: $\frac{30}{24} = \frac{5}{4}$



Altura del edificio en metros *(x)*	6	12	18	24
Longitud de la sombra a las 10 de la mañana en metros *(y)*	5	10	15	20

Pendiente: $\frac{20}{24} = \frac{5}{6}$



A las 11 de la mañana el Sol está más alto, por lo que la pendiente de la función es menor y, por tanto, las sombras serán menores.

86. a) $t = 5$ min $= 300$ s

$e = v \cdot t = 1{,}5 \cdot 300 = 450$

$e_s = 450 + 100 = 550$

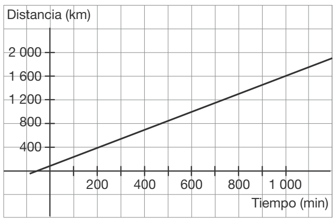
Recorrerá 450 m y se encontrará a 550 m de la señal.

b) $300 = 1{,}5 \cdot t \rightarrow t = \frac{300}{1{,}5} = 200$

Al cabo de 3 min 20 s.

c) $e = 1{,}5 \cdot t + 100$

d)



88. a) $A(x) = \frac{x}{2}$

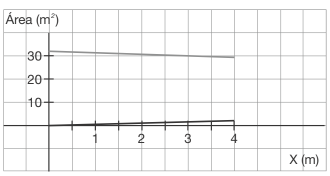
b) $0 < x \leq 4$

c) $A(2) = 1$, $A(4) = 2$

d) $B(x) = 32 - \frac{x}{2}$

e)

x	1	2	3	4
A(x)	0,5	1	1,5	2
B(x)	31,5	31	30,5	30



f) No puede estar en el segundo cuadrante porque el valor de *x* no puede ser negativo y está comprendido entre los valores 0 y 4 ($0 < x \leq 4$).

90. Si el 48% se ha evaporado, queda 100 – 48 = 52%. El 52% de $3{,}6 \cdot 10^{24}$ es:

$$\frac{52}{100} \cdot 3{,}6 \cdot 10^{24} = 1{,}872 \cdot 10^{24}$$

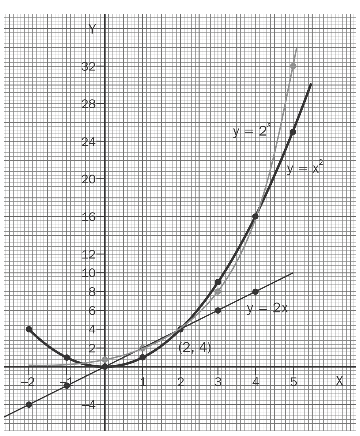
Autoevaluación

2. a) $m = 0$, $b =$ cualquier valor

b) $m \neq 0$, $b = 0$

c) $m \neq 0$, $b =$ cualquier valor

4.



El punto común es (2, 4).

Crece más rápidamente $y = 2^x$ para $x > 0$.

Coevaluación

2. La expresión analítica de una función afín es del tipo $y = xm + b$.

Al sustituir las coordenadas de los puntos dados en esta expresión, obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 4 = 1m + b \\ 7 = 3m + b \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema y obtenemos: $m = \frac{3}{2}$ y $b = \frac{5}{2}$.

La expresión algebraica es $y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$.

4. a) $x = -6$

- A partir de éste módulo, se colocarán en la sección **Solucionario**, únicamente las respuestas correspondientes al apartado **Ejercicios y problemas**, puesto que para este momento, los⁄as estudiantes habrán desarrollado la autonomía necesaria para encontrar las soluciones de las actividades, tareas y evaluaciones de los modulos por sí solos.

Módulo 3 Expresiones algebraicas y numéricas Polinomios y fracciones algebraicas

Ejercicios y problemas

32. Por ejemplo: $9x^4 - 3x + x$

34. En los tres casos $P(x)$ es cero, $P1 = P2 = P{-3} = 0$; se concluye que dichos valores son las raíces del polinomio.

36. Resto= 0

38. No es posible, pues al operarse los términos de mayor grado de cada polinomio, tercer y primer grado respectivamente, se obtiene un término de cuarto grado que es también el grado del polinomio.

40. El mayor grado posible es de primer grado, en cuanto ese nuevo polinomio ya no es posible dividirlo para el de segundo grado.

42. a) $\sqrt{2}$ b) – 3 c) $\sqrt{3} - 10\sqrt{2} - 2$

44. a) Cociente: $x + 3$, Residuo: – 4

b) Cociente: $x^2 + 6x + 37$, Residuo: 280

c) Cociente: $-2x^3 - 6x^2 - 9x -$, Residuo: –127

46. $9x^5 - 27x^4 + 36x^3 - 29x^2 + 14x - 1$

48. Dividimos el polinomio por $x - 1$.

	1	0	−7	+6
1		1	1	−6
	1	1	−6	0

Por lo tanto, el polinomio es divisible por $x - 1$, lo que nos indica que $x = 1$ es una raíz.

Dividimos el cociente obtenido por $x - 2$.

	1	1	−6
2		2	6
	1	3	0

Por lo tanto, el polinomio es divisible por $x - 2$, lo que nos indica que $x = 2$ es una raíz.

Como que el segundo cociente obtenido es $x - 3$, $x = 3$ es una raíz.

50. a)

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & -6x^2 & & +8 & 2x-4 \\ \cline{5-5} -2x^3 & +4x^2 & & & x^2-x-2 \\ \cline{1-2} & -2x^2 & +0x & & \\ & 2x^2 & -4x & & \\ \cline{2-3} & & -4x & +8 & \\ & & 4x & -8 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

$2x^3 - 6x^2 + 8$ es divisible por $2x - 4$.

b)

$$\begin{array}{rr|l} x^3 & -2x^2 & 2x-4 \\ \cline{3-3} -x^3 & +2x^2 & x^2 \\ \hline & 0 & \end{array}$$

$x^3 - 2x^2$ es múltiplo de $2x - 4$.

c)

$$\begin{array}{rrr|l} 2x^2 & +\ 6x & -4 & 2x-4 \\ \cline{4-4} -2x^2 & +\ 4x & & x+5 \\ \hline & 10x & -\ 4 & \\ & -10x & +20 & \\ \hline & & 16 & \end{array}$$

$2x^2 + 6x - 4$ no es múltiplo de $2x - 4$.

d)

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & +3x & -2 & 2x-4 \\ \cline{4-4} -x^2 & +2x & & \frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \\ \hline & 5x & -\ 2 & \\ & -5x & +10 & \\ \hline & & 8 & \end{array}$$

$x^2 + 3x - 2$ no es múltiplo de $2x - 4$.

52. a) $x(x-1)^2$

b) $(x-3)(x+1)(x+3)$

c) $(x^2-3)(x^2+3)$ (también podríamos escribir:

$(x -\quad 3)(x +\quad 3)(x^2+3)$)

54. a) $(5-x)(5+x)$ b) $(2x-3)(2x+3)$

c) $(5x-4y)(5x+4y)$ d) $(2x-3y)(2x+3y)(4x^2+9y^2)$

56. a) $(x+3)(x+1)$ b) $(x+7)(x-4)$

c) $(x-5)(x+3)$ d) $(x-4)(x-2)$

58. a) $$\frac{1}{(x-6)} + \frac{3x}{2} = \frac{2}{(x-6)\cdot 2} + \frac{3x(x-6)}{2(x-6)} =$$

$$= \frac{2+3x(x-6)}{2(x-6)} = \frac{3x^2-18x+2}{2x-12}$$

b) $$\frac{5}{x^2+x-6} + \frac{2x}{x^2+2x-3} =$$

$$= \frac{5(x-1)}{x^2+2x-3} + \frac{2x(x-2)}{(x^2+2x-3)(x-2)} =$$

$$= \frac{5x-5+2x^2-4x}{x^3-7x+6} = \frac{2x^2+x-5}{x^3-7x+6}$$

c) $$\frac{2x+2}{x^3-2x^2-9x+18} + \frac{x-3}{x^3-x^2-14x+24} =$$

$$= \frac{(2x+2)(x+4)}{(x^3-2x^2-9x+18)(x+4)} +$$

$$+ \frac{(x-3)(x+3)}{(x^3-x^2-14x+24)(x+3)} =$$

$$= \frac{2x^2+10x+8-(x^2-9)}{x^4+2x^3-17x^2-18x+72} =$$

$$= \frac{x^2+10x+17}{x^4+2x^3-17x^2-18x+72}$$

60. a) $$\frac{3x^2+1}{2x^2+1} : \frac{x+1}{4x+3} = \frac{3x^2+1}{2x^2+1} \cdot \frac{4x+3}{x+1} =$$

$$= \frac{12x^3+9x^2+4x+3}{2x^3+2x^2+x+1}$$

b) $$\frac{x^2+4x-3}{2x-3} : \frac{x^2-2x+1}{x^2+3x-4} =$$

$$= \frac{x^2+4x-3}{2x-3} \cdot \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x+1} =$$

$$= \frac{x^3+8x^2+13x-12}{2x^2-5x+3}$$

62. Efectuamos la división aplicando la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 1 & -1 & K \\ 1 & & 2 & 3 & 2 \\ \hline & 2 & 3 & 2 & \boxed{K+2} \end{array}$$

Puesto que el resto debe ser 1:

$K + 2 = 1$ $\qquad$ $K = -1$

64. Efectuamos la división aplicando la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & K & 18 \\ 3 & & 3 & 3 & 3K+9 \\ \hline & 1 & 1 & K+3 & \boxed{3K+27} \end{array}$$

Puesto que el resto ha de ser 0:

$3K + 27 = 0$ $\qquad$ $K = -9$

66. Un polinomio de grado 2 será de la forma:

$P(x) = ax^2 + bx + c$

Como el coeficiente de x es nulo: $b = 0$

$P(1) = a + c = 3$ $\qquad$ $P(2) = a \cdot 4 + c = 13$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} a + c = 3 \\ 4a + c = 13 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rrl} 4a & +c & = 13 \\ -\ a & -c & = -3 \\ \hline 3a & & = 10 \end{array} \qquad \begin{array}{rrl} 4a & +\ c & = 13 \\ -4a & -4c & = -12 \\ \hline & -3c & = 1 \end{array}$$

$a = \frac{10}{3}$ $\qquad$ $c = -\frac{1}{3}$

Por lo tanto, $P(x) = \frac{10}{3}x^2 - \frac{1}{3}$.

68. Para expresar mediante un polinomio el área de la figura sombreada restaremos al área del rectángulo el área de los tres triángulos.

- Rectángulo:

Base: $3x + 6x - 1 = 9x - 1$

Altura: $x + 3 + x + 1 = 2x + 4$

$A_{rectángulo} = (9x-1)\cdot(2x+4) = 18x^2 + 34x - 4$

- Triángulo 1 (triángulo inferior derecho):

$$A_{triángulo\ 1} = \frac{(6x-1)\cdot(x+1)}{2} = 3x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$$

- Triángulo 2 (triángulo superior derecho):

$$A_{triángulo\ 2} = \frac{6x\cdot(x+3)}{2} = 3x^2 + 9x$$

70. $$\frac{3x^3+2x^2-8x}{x^5+9x^4+21x^3-17x^2-102x-72}$$

72. a)

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & +6x^3 & -4x^2 & +ax & +b & x^2+6x-1 \\ \cline{6-6} -x^4 & -6x^3 & +x^2 & & & x^2-3 \\ \hline & & -3x^2 & +ax & +b & \\ & & 3x^2 & +18x & -3 & \\ \hline & & & (a+18)x & +(b-3) & \end{array}$$

$a + 18 = 0 \Rightarrow a = -18$

$b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3$

El valor de a es -18 y el de b es 3.

b) $a + 18 = 5 \Rightarrow a = 5 - 18 = -13$

$b - 3 = -1 \Rightarrow b = -1 + 3 = 2$

El valor de a es -13 y el de b es 2.

Módulo 4

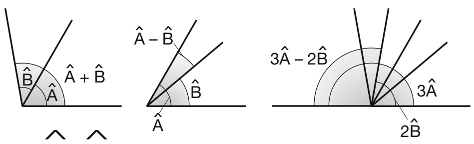
Ángulos notables Razones trigonométricas

Ejercicios y problemas

30. a) 5, 9; b) 540°, 720°; c) 5, 6.

32. Dos ángulos llanos.

34.



a) $\hat{A} + \hat{B} = 60° + 40° = 100°$

b) $\hat{A} - \hat{B} = 60° - 40° = 20°$

c) $3\hat{A} - 2\hat{B} = 3 \cdot 60° - 2 \cdot 40° = 100°$

36. — 270°; — 90°; — 360°; — 90°.

38.

a) $-45° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = -\dfrac{\pi}{4}$ rad   a) $-45° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = -\dfrac{\pi}{4}$ rad

b) $135° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{3\pi}{4}$ rad   b) $135° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{3\pi}{4}$ rad

c) $225° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{5\pi}{4}$ rad   c) $225° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{5\pi}{4}$ rad

d) $300° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{5\pi}{3}$ rad   d) $300° \cdot \dfrac{\pi \text{ rad}}{180°} = \dfrac{5\pi}{3}$ rad

40. No, porque la hipotenusa de un triángulo rectángulo es siempre mayor que cualquiera de los catetos.

42. La longitud del cateto opuesto es

$$\sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \text{ cm}$$

Por lo tanto:

$$\text{sen } \alpha = \frac{6}{10}$$

$$\cos \alpha = \frac{8}{10}$$

$$\tan \alpha = \frac{6}{8}$$

44. Primer triángulo

Longitud de la hipotenusa:

$$\sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{6}{\sqrt{52}}; \ \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{52}}; \ \tan\alpha = \frac{6}{4}$$

Segundo triángulo

Longitud del cateto contiguo:

$$\sqrt{3{,}5^2 - 2{,}4^2} = 2{,}5$$

$$\text{sen } \beta = \frac{2{,}4}{3{,}5}; \ \cos \beta = \frac{2{,}5}{3{,}5}; \ \tan\beta = \frac{2{,}4}{2{,}5}$$

Tercer triángulo

Longitud del cateto opuesto:

$$\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

$$\text{sen } \gamma = \frac{4}{5}; \ \cos \gamma = \frac{3}{5}; \ \tan\gamma = \frac{4}{3}$$

Cuarto triángulo

Las razones trigonométricas de 90º no están definidas a partir de un triángulo rectángulo pero sabemos que:

sen 90º = 1; cos 90º = 0; tan 90º no definida

46. a) Conocemos un cateto y la hipotenusa (caso 1)

$a = 20$ cm : $b = 16$ cm

$$c = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12 \text{ cm}$$

$$\text{sen } B = \frac{16}{20} = 0{,}8 \Rightarrow B = 53{,}13°$$

$$\cos C = \frac{16}{20} = 0{,}8 \Rightarrow C = 36{,}87°$$

b) Conocemos los dos catetos (caso 2)

$b = 5$ cm; $c = 10$ cm

$$a = \sqrt{5^2 - 10^2} = 11{,}18 \text{ cm}$$

$$\tan B = \frac{5}{10} = 0{,}5 \Rightarrow B = 26{,}56°$$

$$\tan C = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow C = 63{,}43°$$

c) Conocemos un cateto y un ángulo agudo (caso 4)

$b = 5$ cm; $C = 40°$

$$\cos 40° = \frac{5}{a} \Rightarrow a = \frac{5}{\cos 40°} = 6{,}53 \text{ cm}$$

$$\tan 40° = \frac{c}{5} \Rightarrow c = 5 \cdot \tan 40° = 4{,}20 \text{ cm}$$

$$B = 90° - 40° = 50°$$

d) Conocemos un cateto y un ángulo agudo (caso 4)

$c = 8$ cm; $C = 50°$

$$\text{sen } 50° = \frac{8}{a} \Rightarrow a = \frac{8}{\text{sen } 50°} = 10{,}44 \text{ cm}$$

$$\tan 50° = \frac{8}{b} \Rightarrow b = \frac{8}{\tan 50°} = 6{,}71 \text{ cm}$$

$$B = 90° - 50° = 40°$$

48.

$\text{sen } \alpha = -0{,}8$; $\cos \alpha = 0{,}6$;

$$\tan\alpha = \frac{-0{,}8}{0{,}6} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{sen } \beta = 0{,}6; \cos \beta = 0{,}8; \tan\beta = \frac{0{,}6}{0{,}8} = \frac{3}{4}$$

$\text{sen } \gamma = 0{,}43$; $\cos \gamma = -0{,}9$;

$$\tan \gamma = \frac{0{,}43}{-0{,}9} = -\frac{43}{90}$$

$$\text{sen } \delta = -0{,}7; \cos \delta = -0{,}77; \tan\delta = \frac{-0{,}7}{-0{,}7} =$$

50.

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como α pertenece al cuarto cuadrante, su coseno ha de ser positivo.

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\alpha = \frac{\frac{-\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1$$

52.
a) $\cos 60^\circ = \dfrac{x}{5} \Rightarrow x = \cos 60^\circ \cdot 5 = \dfrac{1}{2} \cdot 5 = \dfrac{5}{2}$

$\operatorname{sen} 60^\circ = \dfrac{y}{5} \Rightarrow y = \operatorname{sen} 60^\circ \cdot 5 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 5 = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

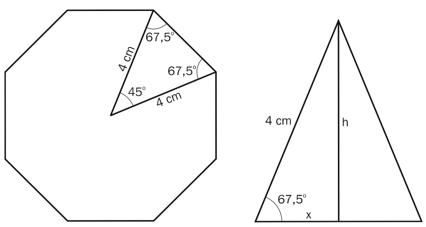
Las coordenadas del punto P son $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)$.

b) $\tan\alpha = \dfrac{4}{-3} \Rightarrow \alpha = 126{,}87^\circ$

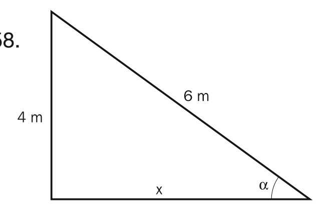
54.

sen α	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
cos α	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
tan α	-1	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	
α	$\dfrac{7\pi}{4}$	$\dfrac{5\pi}{6}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{3\pi}{4}$

56. El octágono está compuesto de ocho triángulos como el de la figura.



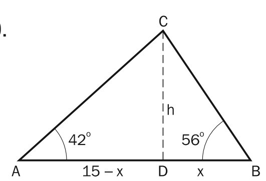
58.



Aplicando el teorema de Pitágoras

$$x = \sqrt{6^2 - 4^2} = 4{,}47 \text{ m}$$

60.



$$\left.\begin{aligned} \tan 56^\circ &= \frac{h}{x} \\ \tan 42^\circ &= \frac{h}{15 - x} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 1{,}48 &= \frac{h}{x} \\ 0{,}90 &= \frac{h}{15 - x} \end{aligned}\right\} h = 8{,}40 \text{ km};\ x = 5{,}67 \text{ km}$$

El avión vuela a una altura de 8,40 km.

La distancia del primer radar al avión es:

$$\sqrt{8{,}40^2 + (15 - 5{,}67)^2} = 12{,}55 \text{ km}$$

La distancia del segundo radar al avión es:

$$\sqrt{8{,}40^2 + 5{,}67^2} = 10{,}13 \text{ km}$$

62. Representamos por *h* la altura del árbol

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{h}{3{,}1} \Rightarrow h = \operatorname{sen} 60^\circ \cdot 3{,}1 = 2{,}7$$

La altura del árbol es 2,7 m.

Representamos por *x* la distancia entre el punto A y la base del árbol y por *y* la distancia de la base del árbol al punto B.

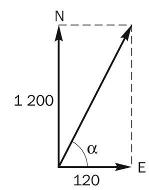
$$\cos 60^\circ = \frac{x}{3{,}1} \Rightarrow x = \cos 60^\circ \cdot 3{,}1 = 1{,}6 \text{ m}$$

$$\tan 55^\circ = \frac{2{,}7}{y} \Rightarrow y = \frac{2{,}7}{\tan 55^\circ} = 1{,}9 \text{ m}$$

$$1{,}6 \text{ m} + 1{,}9 \text{ m} = 3{,}5 \text{ m}$$

La distancia entre los puntos A y B es 3,5 m.

66.



$$\tan\alpha = \frac{1200}{120} \Rightarrow \alpha = 84{,}29^\circ$$

68. Con los cambios $\operatorname{sen}\hat{A} = x$, $\cos\hat{B} = y$ se obtiene este sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$x = 1 - 2y$

$2(1 - 2y) - y = 1 \Rightarrow 2 - 4y - y = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -5y = -1 \Rightarrow y = \dfrac{-1}{-5} = 0{,}2$

$x = 1 - 2 \cdot 0{,}2 = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

Hallamos los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$:

$\operatorname{sen}\hat{A} = x \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{A} = 0{,}6 \Rightarrow \hat{A} = 36{,}87^\circ$

$\cos\hat{B} = y \Rightarrow \cos\hat{B} = 0{,}2 \Rightarrow \hat{B} = 78{,}46^\circ$

Módulo 5 Áreas y volúmenes de cuerpos geométrico Media aritmética

Ejercicios y problemas

36. No, puesto que un poliedro convexo cumple la relación de Euler: $C + V = A + 2$.

    Entonces, si $C + V = A$:

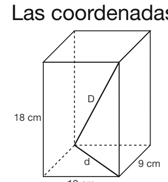
    $C + C = C + 2 \Rightarrow C = 2$, y un poliedro no puede tener dos caras.

38. Longitud: $180 - 22 = 158°$

    Latitud: 45°

    Las coordenadas geográficas de *B* son (158° O, 45° N).

40.



— Diagonal de la base del prisma:

$$d = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15\ \text{cm}$$

Diagonal del prisma:

$$D = \sqrt{15^2 + 18^2} = 23,43\ \text{cm}$$

La diagonal del prisma mide 23,43 cm.

42. El área de un cubo es seis veces el área de una de sus caras. Así, si *a* es la arista:

$$A = 6\,a^2$$

44. El cuerpo está formado por un prisma mayor y cuatro prismas menores.

$A_1 = 12 \cdot 7 + 2 \cdot 12 \cdot 2 + 2 \cdot 7 \cdot 2 + 12 \cdot 7 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 240$

$A_2 = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 \cdot 1 = 17$

$A = A_1 + 4\,A_2 = 240 + 4 \cdot 17 = 308$

El área del cuerpo es de 308 cm^2.

46. Si llamamos *a* a la arista del cubo, *d* a la diagonal de una cara y *D* a la diagonal del cubo, tenemos:

$d^2 = a^2 + a^2$

$D^2 = d^2 + a^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3\,a^2$

$10^2 = 3\,a^2;\ \ a^2 = \dfrac{10^2}{3}$

$A = 6\,a^2 = 6 \cdot \dfrac{10^2}{3} = 200$

El área del cubo es de 200 cm^2.

48. Primero hallamos la longitud del lado desconocido del trapecio.

$l = \sqrt{20^2 + 2,5^2} = \sqrt{406,25} = 20,16$

A continuación calculamos el área lateral y el área total del prisma.

$A_{lateral} = P \cdot h = (2 \cdot 20,16 + 10 + 15) \cdot 30 = 1\,959,60$

$A_{base} = \dfrac{(B + b)h'}{2} = \dfrac{(10 + 15) \cdot 20}{2} = 250$

$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = 1\,959,60 + 2 \cdot 250 = 2\,459,60$

El área lateral del prisma es de 1 959,60 cm^2 y el área total, de 2 459,60 cm^2.

50 $A_{lateral} = 2\,\pi\,r \cdot g = 2\,\pi \cdot 6 \cdot 6 = 226,08$

$A_{total} = 2\,\pi\,r \cdot (g + r) = 2\,\pi \cdot 6\,(6 + 6) = 452,16$

El área lateral del cilindro es de 226,08 cm^2 y el área total, de 452,16 cm^2.

52. Por el principio de Cavalieri, podemos asegurar que tienen el mismo volumen.

54. Respuesta sugerida: libro, caja de zapatos, caja de CD...

Medidas caja CD: 14 cm × 12,5 cm × 1 cm

$A_{lateral} = P \cdot h = (2 \cdot 14 + 2 \cdot 12,5) \cdot 1 = 53$

$A_{base} = 14 \cdot 12,5 = 175$

$A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = 53 + 2 \cdot 175 = 403$

$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = 175 \cdot 1 = 175$

El área total es de 403 cm^2 y el volumen, de 175 cm^3.

56. a) Se trata de un prisma y de medio cilindro.

Calculamos el área de las tres caras laterales y de la base del prisma y también la del medio cilindro.

$A_{3\ caras\ laterales} = 2 \cdot 9 + 3 \cdot 9 + 3 \cdot 9 = 72$

$A_{base} = 2 \cdot 3 = 6$

$A_{semicilindro} = \pi\,r\,(g + r) = \pi\,1\,(9 + 1) = 31,42$

El área del cuerpo geométrico es:

$A = A_{3\ caras\ laterales} + 2\,A_{base} + A_{semicilindro}$

$A = 72 + 2 \cdot 6 + 31,46 = 115,46$

Calculamos los volúmenes del prisma y del medio cilindro.

$V_{prisma} = A_{base} \cdot h = 6 \cdot 9 = 54$

$V_{semicilindro} = \dfrac{1}{2}\,\pi\,r^2\,h = \dfrac{1}{2}\,\pi \cdot 1^2 \cdot 9 = 14,14$

El volumen del cuerpo geométrico es:

$V = 54 + 14,14 = 68,14$

El área del cuerpo es de 115,46 cm^2 y el volumen, de 68,14 cm^3.

b) El cuerpo consiste en un cilindro hueco.

Calculamos las áreas laterales exterior e interior del cilindro.

$A_{lat.\ ext.} = 2\,\pi\,R \cdot g = 2\,\pi \cdot 6 \cdot 12 = 452,39$

$A_{lat.\ int.} = 2\,\pi\,r \cdot g = 2\,\pi \cdot 3 \cdot 12 = 226,19$

La base es una corona circular. Hallamos su área.

$A_{corona} = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi\,(6^2 - 3^2) = 84,82$

El área del cuerpo geométrico es:

$A = 452,39 + 226,19 + 2 \cdot 84,82 = 848,22$

El volumen del cuerpo geométrico es igual al volumen del cilindro exterior menos el del cilindro interior:

$V_{cil.\ ext.} = \pi\,R^2\,h = \pi \cdot 6^2 \cdot 12 = 1\,357,17$

$V_{cil.\ int.} = \pi\,r^2\,h = \pi \cdot 3^2 \cdot 12 = 339,29$

$V = 1\,357,17 - 339,29 = 1\,017,88$

El área del cuerpo es de 848,22 cm^2 y el volumen, de 1 017,88 cm^3.

c) El cuerpo está formado por un cono, un cilindro y una semiesfera.

Hallamos las alturas del cono y el cilindro.

$h_{cono} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

$h_{cilindro} = 26 - 12 = 14$

Hallamos las áreas parciales y el área total del cuerpo geométrico.

$A_{lateral\ cono} = \pi\,r \cdot g_{cono} = \pi \cdot 5 \cdot 13 = 204,20$

$A_{lateral\ cilindro} = 2\,\pi\,r \cdot g_{cilindro} = 2\,\pi \cdot 5 \cdot 14 = 439,82$

$A_{semiesfera} = \dfrac{4\,\pi\,r^2}{2} = 2\,\pi\,5^2 = 157,08$

$A = 204,20 + 439,82 + 157,08 = 801,10$

Hallamos los volúmenes parciales y el volumen total del cuerpo geométrico.

$V_{cono} = \dfrac{1}{3}\,\pi\,r^2 \cdot h_{cono} = \dfrac{1}{3}\,\pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 314,16$

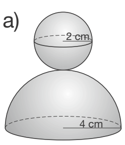
$V_{cilindro} = \pi\,r^2\,h_{cilindro} = \pi \cdot 5^2 \cdot 14 = 1\,099,56$

$V_{semiesfera} = \dfrac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} = \dfrac{4}{6}\,\pi\,5^3 = 261,80$

$V_{cuerpo} = 314,16 + 1\,099,56 + 261,80 = 1\,675,52$

El área del cuerpo es de 801,10 cm^2 y el volumen, de 1 675,52 cm^3.

58. a)



El cuerpo está formado por una esfera y una semiesfera. Hallamos las áreas parciales y el área total del cuerpo geométrico.

$A_{esfera} = 4\,\pi\,r^2 = 4\,\pi \cdot 2^2 = 50,27$

$A_{semiesfera} = 2\,\pi\,r^2 = 2\,\pi \cdot 4^2 = 100,53$

$A_{base} = \pi\,r^2 = \pi \cdot 4^2 = 50,27$

$A_{cuerpo} = 50,27 + 100,53 + 50,27 = 201,07$

Hallamos los volúmenes parciales y el volumen total del cuerpo geométrico.

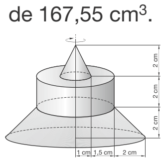
$V_{esfera} = \dfrac{4}{3}\,\pi\,r^3 = \dfrac{4}{3}\,\pi \cdot 2^3 = 33,51$

$V_{semiesfera} = \dfrac{2}{3}\,\pi\,r^3 = \dfrac{2}{3}\,\pi\,4^3 = 134,04$

$V_{cuerpo} = 33,51 + 134,04 = 167,55$

El área del cuerpo de revolución es de 201,07 cm^2 y el volumen, de 167,55 cm^3.

b)



Distribución gratuita - Prohibida la venta

El cuerpo está formado por un cono, un cilindro y un tronco de cono.

Hallamos las áreas parciales y el área total del cuerpo geométrico.

$g_{cono} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} = 2,24$

$A_{lateral\ cono} = \pi\ r \cdot g = \pi \cdot 1 \cdot 2,24 = 7,04$

$A_{corona\ circular} = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi\ (2,5^2 - 1^2) = 16,49$

$A_{lateral\ cilindro} = 2\ \pi\ r \cdot g = 2\ \pi \cdot 2,5 \cdot 2 = 31,42$

$g_{tronco\ de\ cono} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2,83$

$A_{lat.\ tronco} = \pi\ g \cdot (R + r) = \pi \cdot 2,83 \cdot (4,5 + 2,5) = 62,23$

$A_{base\ tronco\ de\ cono} = \pi\ R^2 = \pi \cdot 4,5^2 = 63,62$

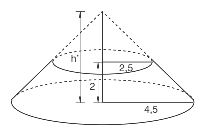
$A_{cuerpo} = 7,04 + 16,49 + 31,42 + 62,23 + 63,62 = 180,80$

Hallamos los volúmenes parciales y el volumen total del cuerpo geométrico.

$V_{cono} = \frac{1}{3}\ \pi\ r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\ \pi \cdot 1^2 \cdot 2 = 2,09$

$V_{cilindro} = \pi\ r^2\ h = \pi \cdot 2,5^2 \cdot 2 = 39,27$

El volumen del tronco de cono es igual al volumen del cono mayor de la figura menos el volumen del cono menor.



$\frac{h'}{4,5} = \frac{h' - 2}{2,5}$

$h' = 4,5$

$V_{cono\ grande} = \frac{1}{3}\ \pi\ R^2 \cdot h' = \frac{1}{3}\ \pi \cdot 4,5^2 \cdot 4,5 = 95,43$

$V_{cono\ pequeño} = \frac{1}{3}\ \pi\ r^2\ h = \frac{1}{3}\ \pi \cdot 2,5^2 \cdot 2,5 = 16,36$

$V_{tronco\ de\ cono} = 95,43 - 16,36 = 79,07$

$V_{cuerpo} = 2,09 + 39,27 + 79,07 = 120,43$

El área del cuerpo de revolución es de 180,80 cm^2 y el volumen, de 120,43 cm^3.

60. Hallamos el área de la esfera terrestre.

$A_{esfera} = 4\ \pi\ r^2 = 4\ \pi \cdot 6\,371^2 = 510\,064\,472\ km^2$

El 30 % está ocupado por tierra firme. Entonces:

$\frac{30}{100}$ de $510\,064\,472 = 153\,019\,342$

Los kilómetros cuadrados ocupados por tierra firme son 153 019 342.

62. Hallamos el área lateral de una lata:

$A_{lateral} = 2\pi\ r \cdot g = 2\pi\ 7 \cdot 20 = 879,65\ cm^2$

El área lateral de las 100 latas será:

$879,65 \cdot 100 = 87\,965\ cm^2$

Por tanto, se necesitan 87 965 cm^2 de papel.

Hallamos el volumen de una lata.

$V_{cilindro} = \pi\ r^2 \cdot h = \pi \cdot 7^2 \cdot 20 = 3\,078,76\ cm^3$

El volumen de las 100 latas será:

$3\,078,76 \cdot 100 = 307\,876\ cm^3$

La masa de aceite que ocupa este volumen es:

$307\,876\ cm^3 \cdot 0,92\ g/cm^3 = 283\,246\ g$

Necesitaremos 283 246 g o 283,246 kg.

64. La razón entre las alturas de dos pesas será igual a la razón de semejanza. La razón entre los volúmenes de dos pesas es igual al cubo de la razón de semejanza. Puesto que la masa es directamente proporcional al volumen, la razón entre las masas de dos pesas también será el cubo de la razón de semejanza.

Masa	Razón de semejanza	Altura
10 g	$k = \sqrt[3]{\frac{2000}{10}} = 5,85$	$h = \frac{8\,cm}{5,85} = 1,37\,cm$
20 g	$k = \sqrt[3]{\frac{2000}{20}} = 4,64$	$h = \frac{8\,cm}{4,64} = 1,72\,cm$
50 g	$k = \sqrt[3]{\frac{2000}{50}} = 3,42$	$h = \frac{8\,cm}{3,42} = 2,34\,cm$
100 g	$k = \sqrt[3]{\frac{2000}{100}} = 2,71$	$h = \frac{8\,cm}{2,71} = 2,95\,cm$
200 g	$k = \sqrt[3]{\frac{2000}{200}} = 2,15$	$h = \frac{8\,cm}{2,15} = 3,72\,cm$
500 g	$k = \sqrt[3]{\frac{2000}{500}} = 1,59$	$h = \frac{8\,cm}{1,59} = 5,03\,cm$
1 000 g	$k = \sqrt[3]{\frac{2000}{1000}} = 1,26$	$h = \frac{8\,cm}{1,26} = 6,35\,cm$

66. a) El radio y el volumen del primer cilindro son:

$r_1 = \frac{L_1}{2\pi} = \frac{40}{2\pi} = 6,37\,cm$

$V_1 = \pi\ r_1^2\ h_1 = \pi \cdot 6,37^2 \cdot 20 = 2\,549,5\ cm^3$

El radio y el volumen del segundo cilindro son:

$r_2 = \frac{L_2}{2\pi} = \frac{20}{2\pi} = 3,18\ cm$

$V_2 = \pi\ r_2^2\ h_2 = \pi \cdot 3,18^2 \cdot 40 = 1\,270,8\ cm^3$

b) Hallamos el área total y la relación V/A_{total} para los dos cilindros.

$A_{total\ 1} = 2\ \pi\ r_1\ (g_1 + r_1) = 2\ \pi \cdot 6,37 \cdot (20 + 6,37) =$

$= 1055,4\ cm^2$

$\frac{V_1}{A_{total\ 1}} = \frac{2549,5}{1055,4} = 2,42\ cm$

$A_{total\ 2} = 2\ \pi\ r_2\ (g_2 + r_2) = 2\ \pi \cdot 3,18 \cdot (40 + 3,18) =$

$= 862,8\ cm^2$

$\frac{V_2}{A_{total\ 2}} = \frac{1270,8}{862,8} = 1,47\ cm$

La relación V/A_{total} es mayor en el primer cilindro.

68. El volumen de la corteza terrestre es:

$$V_{corteza} = V_{esfera\ mayor} - V_{esfera\ menor}$$

$$V_{corteza} = \frac{4}{3}\ \pi\ R^3 - \frac{4}{3}\ \pi\ r^3$$

$V_{corteza} = \frac{4}{3}\ \pi\ 6\,371^3 - \frac{4}{3}\ \pi\ 6\,321^3 = 25\,303\,596\,326$

El volumen de la corteza terrestre es de 25 303 596 326 km^3.

72. 1,35 minutos.

74. Debe cumplirse que los volúmenes inicial y final de agua son iguales, es decir:

$100 \cdot 50 \cdot h = 100 \cdot 50 \cdot (h + 0,05) - 14\ (h + 0,05)$

$100 \cdot 50 \cdot h = 100 \cdot 50 \cdot h + 100 \cdot 50 \cdot 0,05 - 14\ (h + 0,05)$

$100 \cdot 50 \cdot 0,05 = 14\ (h + 0,05)$

$250 = 14\ h + 0,7$

$h = \frac{250 - 0,7}{14} = 17,8$

La altura inicial del agua en la piscina era de 17,8 cm.

Módulo 6 Probabilidad. Conversiones entre unidades del S.I.

Ejercicios y problemas

30. a) aleatorio; b) determinista; c) determinista.

En los experimentos deterministas podemos prever su resultado y, si los repetimos en las mismas circunstancias, el resultado será el mismo. En el experimento aleatorio no podemos prever el resultado y, si lo repetimos en las mismas circunstancias, el resultado puede variar, dentro de un conjunto de resultados posibles.

32. Ω = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36}

A: obtener rojo y número par en la ruleta.

A = {12, 14, 16, 18, 30, 32, 34, 36}

34. A = {A T, 2 T, 3 T, 4 T...K T}

B = {2 C, 2 C, 2 T, 2 B... 10 C, 10 C, 10 T, 10 B}

C = {5 C, 5 C, 5 T, 5 B}

D = {A C, A C, A T, A B...Q C, Q C, Q T, Q B}

— Suceso contrario: *No obtener tréboles o cualquiera de las otras cartas..*

36. 1. 0.

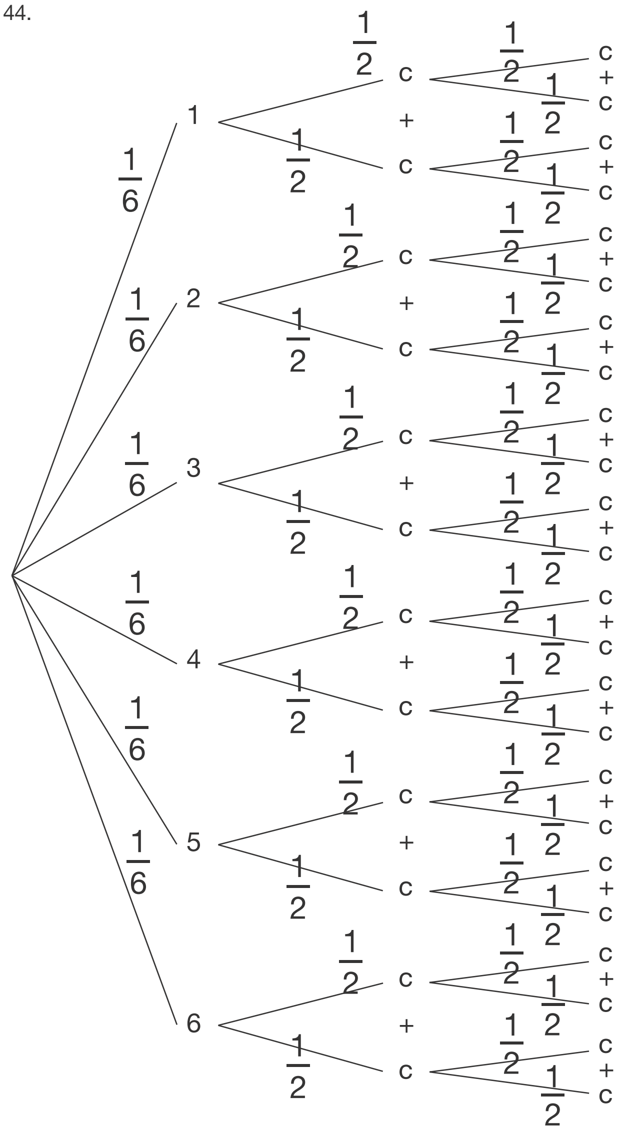
38. Respuesta abierta.

40. Que todos ellos tienen igual probabilidad de verificarse. Por ejemplo, al lanzar un dado: obtener 1, obtener 2, obtener 3, obtener 4, obtener 5 y obtener 6.

42. Resultados posibles: CCCC, CCCX, CCXC, CXCC, XCCC, **CCXX, CXCX, CXXC, XCCX, XCXC, XXCC,** CXXX, XCXX, XXCX, XXXC, XXXX.

Observando los posibles resultados, vemos que es más probable sacar dos caras y dos cruces que tres caras y una cruz.

44.



A: *obtener un número mayor que 4 y dos caras.*

$$P(A) = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot = \frac{1}{12} = 0{,}083$$

B: *obtener una cara y una cruz sin que importe el orden.*

$$P(B) = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

46. 0,15 m; 0,025 m; 16 000 m; 10 m; 56 m.

48. a) 0,0005 kl d) 1 500 dg
b) 450 000 cm e) 0,0371 dal
c) 500 kg f) 0,00643 hm

50. a) 142 400 dm^3
b) 24 867 000 000 mm^3
c) 0,265 435 hm^3

52. En la primera fila la ruleta de la izquierda, en la segunda fila las tres ruletas.

54. A_1 = Área del círculo rojo; A_2 = Área de la corona circular amarilla; A_3 = Área de la corona circular azul; A_T = Área total de la diana.

Suceso *B: colocar el dardo en el círculo rojo.*

$$P(B) = \frac{A_1}{A_T} = \frac{\cancel{\pi} \cdot 1^2}{\cancel{\pi} \cdot 3^2} = \frac{1}{9}$$

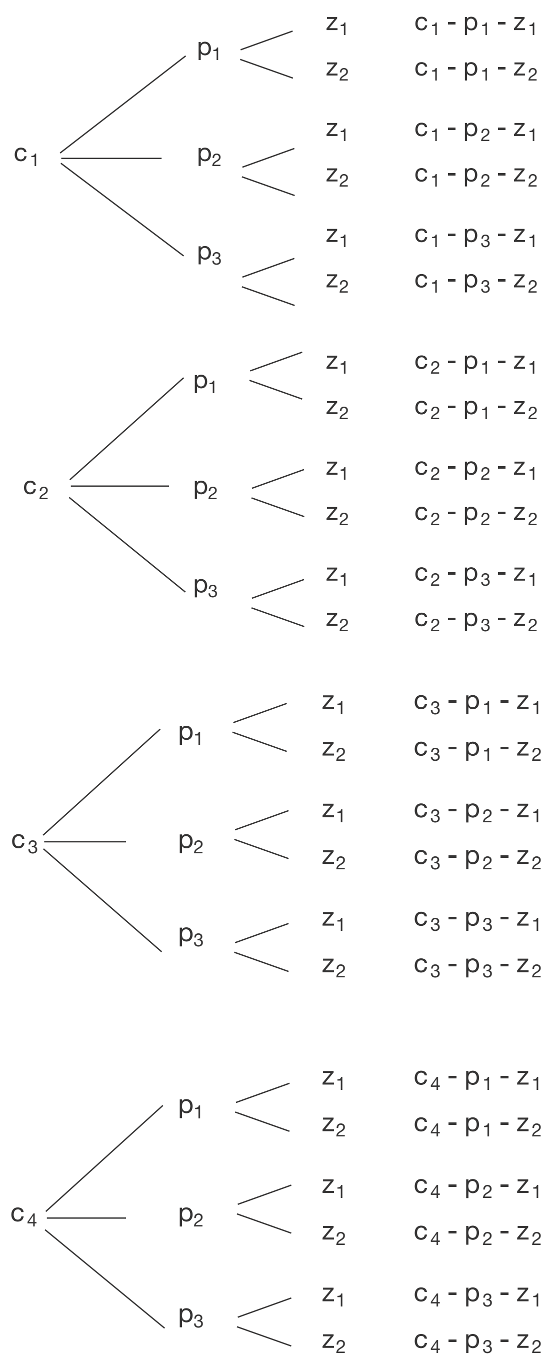
Suceso *C: colocar el dardo en la corona circular amarilla.*

$$P(C) = \frac{A_2}{A_T} = \frac{\cancel{\pi} \cdot (2^2 - 1^2)}{\cancel{\pi} \cdot 3^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Suceso *D: colocar el dardo en la corona circular azul.*

$$P(D) = \frac{A_3}{A_T} = \frac{\cancel{\pi} \cdot (3^2 - 2^2)}{\cancel{\pi} \cdot 3^2} = \frac{5}{9}$$

56. a) Camisetas Pantalones Zapatillas Resultados



58. Este problema sigue el esquema del procedimiento del apartado *Simulaciones aleatorias con la computadora.*

Los comandos que introducimos en los experimentos son:

a) *Lanzar una moneda:*

= ENTERO(ALEATORIO()*2 + 1)

Consideramos que el valor 1 es el suceso *Obtener cara* y el valor 2, el suceso *Obtener cruz*.

b) *Lanzar un dado:*

= ENTERO(ALEATORIO()*6 + 1)

Consideramos que los valores 1, 2, 3 son el suceso *Obtener 1;* los valores 4 y 5, el suceso *Obtener X,* y el valor 6, el suceso *Obtener 2.*

c) *Sacar una bola de una urna que contiene 10 bolas numeradas del 1 al 10:*

= ENTERO(ALEATORIO()*10 + 1)

Interpretamos, respectivamente, los valores obtenidos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 como los sucesos {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}, {7}, {8}, {9} y {10}.

— Los posibles resultados obtenidos pueden presentar ciertas diferencias debido a que el número de realizaciones del experimento aleatorio, 100 veces, no es muy elevado.

60. 23 l 46 cl = 2 300 cl + 46 cl = 2 346 cl

$$2\,346 \cdot \frac{10}{100} = 234{,}6$$

Se han evaporado 234,6 cl.

Por tanto, quedan 2 346 cl – 234,6 cl = 2 111,4 cl.

$$2\,111{,}4\ \cancel{\text{cl}} \cdot \frac{1\ \text{l}}{100\ \cancel{\text{cl}}} = 21{,}114\ \text{l}$$

En el recipiente quedan 21,114 l.

62. Si no se tiene en cuenta el volumen que ocupan las paredes, la capacidad del vaso es de 0,25 dm^3 = 0,25 l.

— El espacio interior del vaso ocuparía un volumen de:

$$0{,}25\ dm^3 - 0{,}02\ dm^3 = 0{,}23\ dm^3$$

Así, la capacidad del vaso sería:

$$0{,}23\ dm^3 = 0{,}23\ \text{l}$$

64. De *a)* se deduce que hay el mismo número de bolas rojas que de azules, y de *b),* que hay la mitad de bolas verdes que de azules.

Así, si llamamos *x* al número de bolas rojas, se cumple:

$$10 < x + x + \frac{x}{2} = \frac{5x}{2} < 20 \text{ y } \frac{5x}{2} \text{ ha de ser un número entero.}$$

De aquí resulta *x* = 6; por lo tanto, hay 6 bolas rojas, 6 azules y 3 verdes.

66. a) $\Rightarrow P_1 + P_2 + P_3 = 1$ kg

b) $\Rightarrow P_1 - 0{,}1$ kg $= 2\ P_3$

c) $\Rightarrow P_1 = P_2 + P_3$

De a) y c) deducimos: $P_1 + P_1 = 1$ kg $\Rightarrow P_1 = 0{,}5$ kg.

De b) se deduce: 0,5 kg – 0,1 kg = 2 $P_3 \Rightarrow P_3 = 0{,}2$ kg.

De c) se deduce: 0,5 kg = P_2 + 0,2 kg $\Rightarrow P_2 = 0{,}3$ kg.

68. — Las causas de que el aceite y la leche puedan tener diferentes unidades de medida pueden ser diversas y difieren según el país. A continuación, mostramos algunas posibles causas:

- Los recipientes en los que se almacenaban, origen usualmente de las unidades de medida, eran diferentes para el aceite y para la leche.
- Como el aceite es más viscoso que la leche, los instrumentos que se utilizaban para medirlos eran distintos.
- Su diferente uso hacía que para estos dos líquidos se utilizaran distintas medidas.
- El consumo de una de las dos sustancias podría ser más alto que el de la otra, hecho que aconsejaría emplear unidades más grandes para medir la más consumida.

Notas

Notas

Notas

Notas

Notas

Notas

Notas

Notas