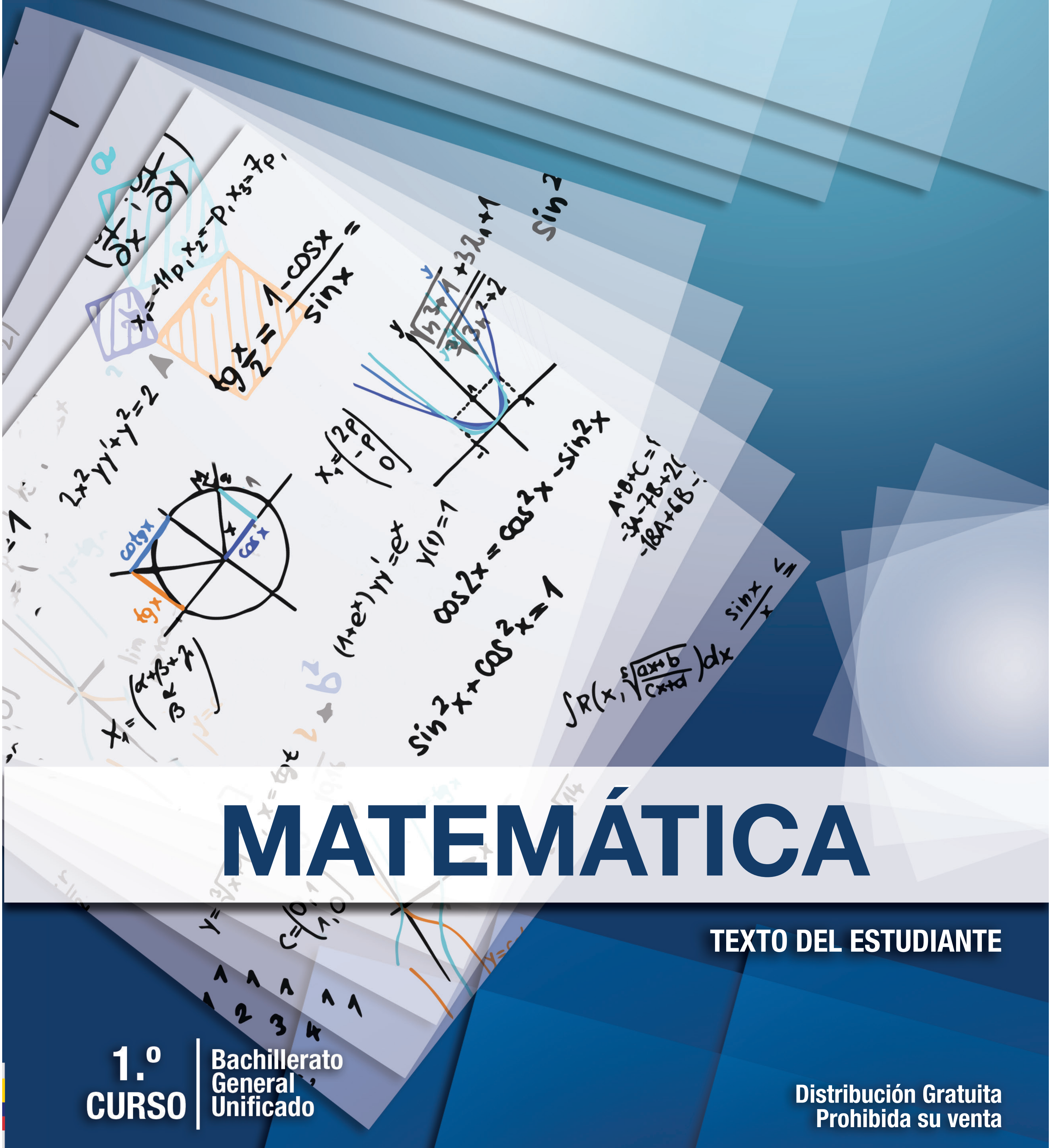
Ministerio de Educación



MATEMÁTICA

TEXTO DEL ESTUDIANTE

1.º CURSO

Bachillerato General Unificado

Distribución Gratuita
Prohibida su venta

BECU_M1_B0_P01_05.indd 1 4/22/14 11:49 AM

PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA
Rafael Correa Delgado

MINISTRO DE EDUCACIÓN
Augusto Espinosa Andrade

VICEMINISTRO DE EDUCACIÓN
Freddy Peñafiel Larrea

VICEMINISTRO DE GESTIÓN EDUCATIVA
Jaime Roca Gutiérrez

SUBSECRETARIA DE FUNDAMENTOS EDUCATIVOS
Tannya Lozada

DIRECTORA NACIONAL DE CURRÍCULO
Isabel Ramos Castañeda

© Ministerio de Educación del Ecuador, 2014
Av. Amazonas N34-451 y Atahualpa
Quito, Ecuador
www.educacion.gob.ec

La reproducción parcial o total de esta publicación, en cualquier forma y por cualquier medio mecánico o electrónico, está permitida siempre y cuando sea autorizada por los editores y se cite correctamente la fuente.

Primera edición: julio 2014
Impreso por El Telégrafo
ISBN: 978-9942-19-116-8
Derechos de autor: QUI-041806
DISTRIBUCIÓN GRATUITA - PROHIBIDA SU VENTA

Matemática

Primer año de Bachillerato General Unificado

TEXTO DEL ESTUDIANTE

El libro Matemática para primer curso de Bachillerato de la serie Bachillerato Ecuador es una obra colectiva creada y diseñada por el Departamento de Ediciones Educativas de Santillana S. A., bajo la Dirección Editorial de Ana Lucía de Escobar

EQUIPO EDITORIAL

Edición:
Ghen Villafuerte
Colaboración: Mirtha Morales, Mónica Mantilla y Washington Daza

Corrección De Estilo
Ana Aulestia, Nadya Durango, Esteban Jaramillo y Cecilia Miranda

Diseño y Diagramación
Sandra Corrales, Willer Chamorro, Jonathan Barragán y Gonzalo Arias

Ilustración y fotografía:
Archivo Santillana

Concepto general:
Verónica Tamayo

EQUIPO TÉCNICO

Administradora de operaciones:
Adelaida Aráuz

Jefa de corrección de estilo:
Eurídice Salguero

Jefe de arte:
Gabriel Karolys

Coordinadora gráfica:
Verónica Tamayo

Supervisora de calidad:
Nancy Novillo

Digitalizadora de imágenes:
Diana Novillo

Documentalista:
Cecilia Flores

SANTILLANA

Ministerio de Educación

ADVERTENCIA
Un objetivo manifiesto del Ministerio de Educación es combatir el sexismo y la discriminación de género en la sociedad ecuatoriana y promover, a través del sistema educativo, la equidad entre mujeres y hombres. Para alcanzar este objetivo, promovemos el uso de un lenguaje que no reproduzca esquemas sexistas, y de conformidad con esta práctica preferimos emplear en nuestros documentos oficiales palabras neutras, tales como las personas (en lugar de los hombres) o el profesorado (en lugar de los profesores), etc. Sólo en los casos en que tales expresiones no existan, se usará la forma masculina como génerica para hacer referencia tanto a las personas del sexo femenino como masculino. Esta práctica comunicativa, que es recomendada por la Real Academia Española en su Diccionario Panhispánico de Dudas, obedece a dos razones: (a) en español es posible <referirse a colectivos mixtos a través del género gramatical masculino>, y (b) es preferible aplicar <la ley lingüística de la economía expresiva> para así evitar el abultamiento gráfico y la consiguiente ilegibilidad que ocurriría en el caso de utilizar expresiones como las y los, os/as y otras fórmulas que buscan visibilizar la presencia de ambos sexos.

PRESENTACIÓN

El Plan Decenal de Educación, aprobado mediante Consulta Popular el 26 de noviembre 2006 con el 66% del total de votos, marcó desde entonces la agenda para la Política Pública en el Ministerio de Educación.

La estrategia clave para la consecución de las Políticas del Plan Decenal de Educación referentes a la Universalización de la Educación General Básica de primero a décimo grados, al incremento de la población estudiantil del Bachillerato hasta alcanzar al menos el 75% de los jóvenes en la edad correspondiente (al año 2013), a la tasa neta de asistencia a Educación General Básica que alcanzó el 96,1% y a la tasa neta de asistencia a Bachillerato que ascendió a 65,8% frente al 51,2% (registrado en el año 2007), está necesariamente ligada a la fuerte inversión que el Gobierno Nacional ha realizado los últimos años en educación.

Con el presupuesto asignado, el Ministerio de Educación despliega, desde el año 2007, varios programas dirigidos a la eliminación de las barreras económicas de acceso a la educación de los niños, niñas y adolescentes. Uno de estos programas es el referente a la entrega gratuita de textos escolares a los estudiantes y docentes de Educación General Básica, Bachillerato General Unificado de la oferta intercultural e intercultural bilingüe, que asisten de manera regular a las instituciones fiscales, fiscomisionales y municipales en todo el país.

Para los estudiantes, se entrega textos y cuadernos de trabajo; para los docentes, textos y guías docentes; y para los estudiantes y docentes de Educación Intercultural Bilingüe, los kukayos pedagógicos (textos bilingües).

En el año 2014, se entregará textos a los estudiantes y guías del docente para Bachillerato General Unificado (BGU) del régimen Sierra y Costa en las materias de Matemática, Lengua y Literatura, Física, Química, Desarrollo del Pensamiento, para el primer curso; Biología, Lengua y Literatura, Físico-Química, para segundo curso; y Lengua y Literatura, Matemática, Educación para la Ciudadanía, para tercer curso. Adicionalmente, se entregará material para el estudiante (texto y libro de trabajo) y material para el docente (guía docente y CD de audio) del área de inglés a los tres cursos de BGU.

El libro de texto tiene como principal objetivo brindar apoyo, tanto a los docentes como a los estudiantes y representantes, en la consecución de los estándares de aprendizaje, referidos a los mínimos que los estudiantes deben alcanzar al culminar el tercer año del Bachillerato. Por lo tanto, brinda información científica sobre los temas en estudio, propone actividades de investigación y aplicación del nuevo conocimiento, invita al lector a aplicar estrategias de autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación, enseña a citar fuentes de consulta y enlista la bibliografía en la que sustenta la información.

Por todo lo anterior, se ha puesto especial cuidado en la selección de este texto, aplicando un estricto proceso de evaluación del rigor científico y curricular que el Ministerio de Educación exige en este material.

Siendo un material de apoyo básico, esperamos que los docentes y sobre todo los estudiantes no se sujeten exclusivamente a la información vertida en él, sino que este libro despierte las ganas de investigar, de ampliar su información, de acudir a otras fuentes que los lleven hacia una mayor comprensión y aplicación en la vida diaria de lo que aprenden.

Éxitos en este nuevo año y a escribir nuestra nueva historia…

Ministerio de Educación

Ministerio de **Educación**

Presentación

El libro de **Matemática** de **primer año** de **Bachillerato** es una propuesta pedagógica que busca potenciar las capacidades de los estudiantes para aplicar los conocimientos y destrezas como analizar, razonar, interpretar y resolver problemas en distintas situaciones.

El desarrollo de los bloques guarda relación con la propuesta curricular del Ministerio de Educación y propone actividades que amplían el conocimiento y promueven un pensamiento reflexivo, crítico y científico.

Cada bloque curricular está organizado en unidades. Estas arrancan con una imagen, con base en la cual se proponen actividades de motivación que preparan a los estudiantes para trabajar con la temática del bloque. En estas páginas se incluyen los objetivos educativos.

El desarrollo de las destrezas dentro de cada unidad incluye una serie de actividades que permiten observar el avance de los estudiantes y evaluar el aprendizaje por medio de tareas, trabajos individuales, lecciones y trabajos cooperativos.

Para motivar a trabajar con las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) se presentan actividades con las cuales podrán poner en práctica los conocimientos informáticos. Estas actividades se identifican con el logo @.

Al término de cada bloque se proponen actividades que permiten la revisión activa de todos los conocimientos, la resolución de problemas y la búsqueda de soluciones. Cada bloque cierra con una evaluación de destrezas que responde a los indicadores esenciales de evaluación y una sección que se articula con algunos aspectos de la ciudadanía y el Buen Vivir.

Índice

BECU_M1_B0_P01_05.indd 4 4/22/14 11:49 AM

Bloque 2

Unidad 3

Bloque 3

Unidad 4

Bloque 4

Unidad 5

Unidad 6

Bloque 1

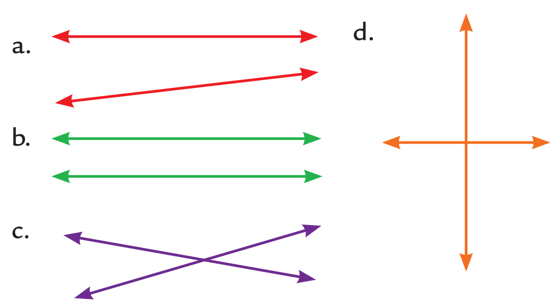
Unidad 1

Funciones y ecuaciones lineales

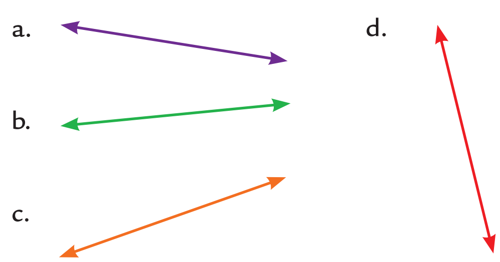
BECU_M1_B1_P06_61.indd 6 4/22/14 11:49 AM

Antes de empezar

1. Dados A = {1, 2, 3} y B = {3, 4, 5, 6}, escribe por extensión cada uno de los siguientes conjuntos.
   a. $R_1 = \{(a, b)/a \in A \text{ y } b \in B, a = b\}$
   b. $R_2 = \{a, b)/a \in A \text{ y } b \in B, a + b = 7\}$
   c. $R_3 = \{a, b)/a \in A \text{ y } b \in B, a = 2b\}$
2. Ubica las siguientes parejas ordenadas en el plano cartesiano.
   a. $(-1, 3)$ c. $\left(0, -\frac{7}{3}\right)$
   b. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}\right)$ d. $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$
3. Identifica las rectas paralelas.



4. Traza una recta perpendicular a cada recta dada.



5. Encuentra dos números consecutivos cuya suma sea 45.

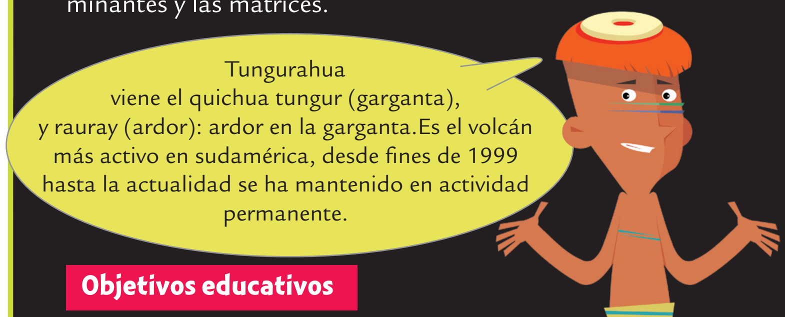
Sistemas y más sistemas

Desde la antigüedad el problema de resolver ecuaciones lineales simultáneas ya era objeto de interés entre los matemáticos.

Por ejemplo, en un texto de la época babilónica antigua se encuentra un sistema de dos ecuaciones lineales simultáneas con dos incógnitas, llamadas respectivamente *el primer anillo de plata y el segundo anillo de plata*.

En la cultura china, la contribución algebraica más importante fue, sin duda, el perfeccionamiento alcanzado en la regla de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, según consta en el libro Los nueve capítulos sobre el arte matemático (año 250 a. de C.). En esta obra, se establece un método genérico de resolución para todos los sistemas, muy similar al que hoy conocemos como método de Gauss, expresando los coeficientes en forma matricial y transformándolos en ceros de manera escalonada.

En el siglo XIX, la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales dio origen a lo que hoy se conoce como el álgebra lineal, la cual está relacionada con la teoría de los determinantes y las matrices.



Objetivos educativos

- Comprender que el conjunto solución de ecuaciones lineales y cuadráticas es un subconjunto de los números reales.
- Comprender el concepto de «función» mediante la utilización de tablas, gráficas, una ley de asignación y relaciones matemáticas (por ejemplo, ecuaciones algebraicas) para representar funciones reales.
- Determinar el comportamiento local y global de la función (de una variable) lineal del análisis de su dominio, recorrido, monotonía, simetrías, e intersecciones con los ejes y sus ceros.
- Utilizar TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación):
  a. para graficar funciones lineales;
  b. para manipular el dominio y el rango a fin de generar gráficas;
  c. para analizar las características geométricas de la función lineal (pendiente e intersecciones).

Rondador. Instrumento musical andino.

BECU_M1_B1_P06_61.indd 7 4/22/14 11:49 AM

Destrezas con criterio de desempeño:
Reconocer el **comportamiento local y global** de funciones elementales de una variable a través del análisis de su dominio, recorrido, monotonía y simetría (paridad). (**C**)

Conocimientos previos

Representa con una ecuación la siguiente situación.

Para obtener el precio de venta al público (y) de una camiseta, es necesario tomar en cuenta el costo de su producción ($ 4,50), la ganancia que se desea tener, y el número de camisetas (x) que se van a producir.

Toma en cuenta

Evaluar una función es encontrar la imagen de un valor x.

- $f(x) = x + 3$

Si $x = 2$, entonces

$f(2) = 2 + 3$

$f(2) = 5$

CONCEPTO DE FUNCIÓN

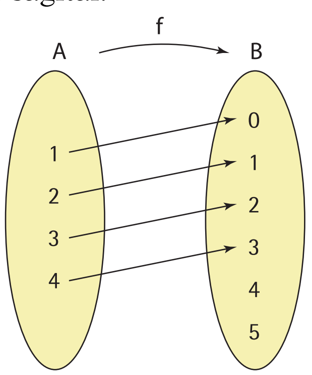
*Sean A y B conjuntos. Una **función** definida del conjunto A en el conjunto B, es una correspondencia que asigna a cada elemento de A un único elemento de B.*

Las funciones se simbolizan por letras tales como f, g, h, i, j, entre otras. Así, para notar la función f definida de A (conjunto de salida) en B (conjunto de llegada), se escribe:

$f: A \rightarrow B$ y se lee "efe" de A en B.

Supóngase que $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y f es la correspondencia mediante la cual cada elemento de A debe ser asociado con su anterior en B. Entonces, f es una función de A en B, pues a cada elemento del conjunto de salida le corresponde solo un elemento del conjunto de llegada.

Una forma de representar esta función, se muestra en el siguiente diagrama sagital.



Conjunto de salida

Conjunto de llegada

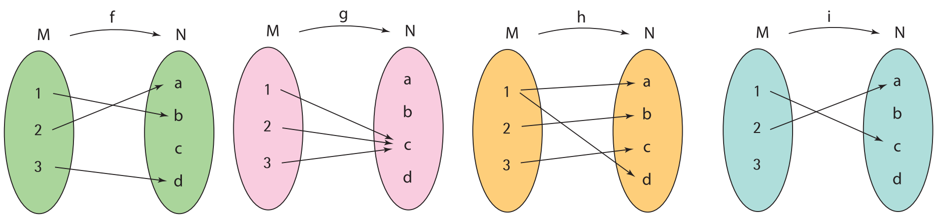
En general, si x es cualquier elemento del conjunto de salida y y es el elemento del conjunto de llegada que le corresponde a x mediante la función f, se dice que y es la **imagen** de x a través de f.

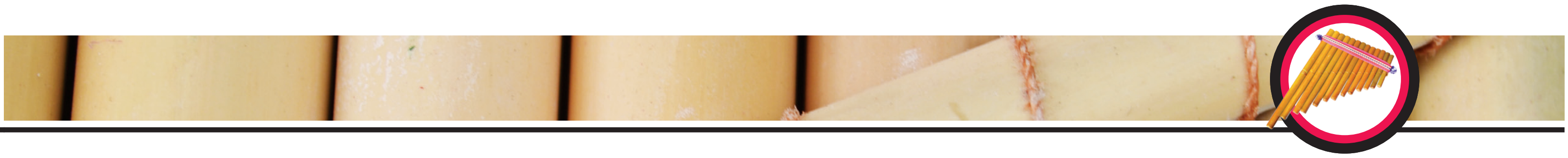
Esto se simboliza por $\boldsymbol{y = f(x)}$ y se lee y igual a «efe» de x.

En el ejemplo anterior se tiene que $0 = f(1)$, $1 = f(2)$, $2 = f(3)$ y $3 = f(4)$.

Ejemplo

A continuación se han representado cuatro correspondencias entre los conjuntos $M = \{1, 2, 3\}$ y $N = \{a, b, c, d\}$. Determinar cuáles de estas correspondencias son funciones y cuáles no.



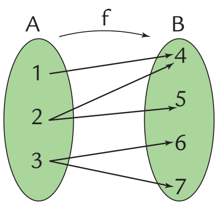


Recuerda

Las funciones constituyen una poderosa herramienta para describir fenómenos. Son usadas por biólogos, físicos, ingenieros y economistas para analizar, por ejemplo, la variación del precio de un producto a través de los años, el crecimiento de la población en un período de tiempo y la resistencia de un material a distintas temperaturas, entre otras.

Tarea

Determina el dominio y el recorrido de la función.



Solución

f y g sí son funciones porque en cada caso cada elemento de M está relacionado con un único elemento de N.

h e i no son funciones, pues en la correspondencia h, 1 tiene dos imágenes, y en la correspondencia i, 3 no tiene imagen.

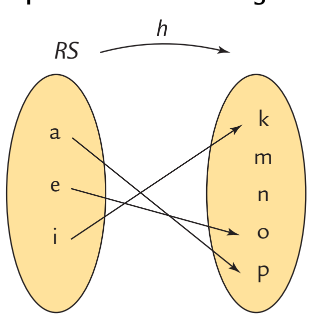
DOMINIO, CODOMINIO, RECORRIDO Y GRAFO DE UNA FUNCIÓN

Dada una función f establecida entre dos conjuntos, se identifican los siguientes elementos:

- **Dominio**: es el conjunto de salida o conjunto de *preimágenes*. Se nota **Dom** f.
- **Codominio**: es el conjunto de llegada.
- **Recorrido (rango)**: es el subconjunto del codominio, formado por las imágenes de los elementos del dominio. Se nota **Rec**.
- **Grafo**: es el conjunto formado por todas las parejas ordenadas en las cuales la primera componente es un elemento del dominio y la segunda componente es un elemento del rango. Esto es $\{(x, y)/y = f(x)\}$.

Ejemplo

Determinar el dominio, el codominio, el recorrido y el grafo de la función representada en el siguiente diagrama sagital.



Solución

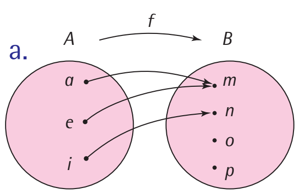
Dom h = {a, e, i};
Codominio de h: = {k, m, n, o, p}
Rec h = {k, o, p};
Grafo de h = {(a, p), (e, o), (i, k)}

Actividades

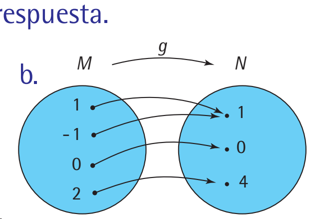
Identifica funciones en un diagrama sagital.

1. Indica cuáles de los diagramas sagitales representan funciones. Justifica cada respuesta.

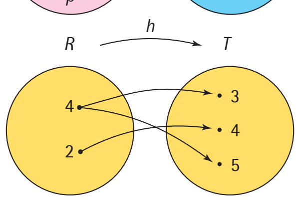
a.



b.



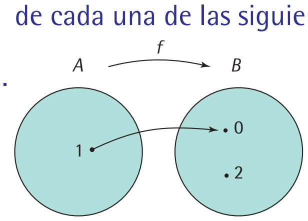
c.



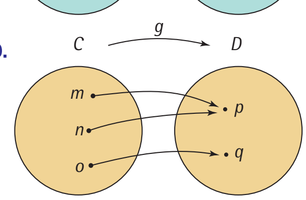
Identifica el dominio, codominio y recorrido de una función.

2. Escribe el dominio, codominio, recorrido y grafo de cada una de las siguientes funciones.

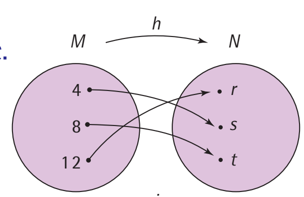
a.



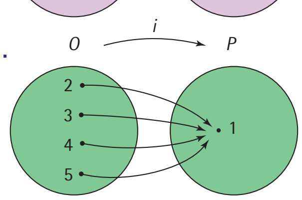
b.



c.



d.



BECU_M1_B1_P06_61.indd 9 4/22/14 11:50 AM

3. El grafo de cierta función f es {(2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)}.

Responde las siguientes preguntas:

a. ¿Qué elementos pertenecen al dominio de la función?

b. ¿Cuáles números forman el recorrido de la función?

c. ¿5 pertenece al codominio de la función? ¿Por qué?

d. ¿Cuántos elementos tiene el dominio de la función?

e. ¿Se podría representar el grafo anterior en un diagrama sagital? ¿Cómo?

4. Indica cuáles de los conjuntos de parejas ordenadas corresponden a grafos de funciones.

a. {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}

b. {(2, 3), (1, 3), (2, 1), (1, 2)}

c. {(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8)}

d. {(5, 6), (3, 6), (4, 6)}

e. {(0, 2), (−1, 1), (−3, −1), (−6, −4)}

f. {(0, 0), (1, 0), (2, 0)}

g. {(3, 5), (6, 8), (4, 5), (7, 8)}

Formas para representar una función

Destreza con criterio de desempeño:

Representar **funciones lineales, cuadráticas y definidas a trozos**, mediante funciones de los dos tipos mencionados, por medio de tablas, gráficas, una ley de asignación y ecuaciones algebraicas. (**P**)

Conocimientos previos

Un automóvil circula a una velocidad constante de 90 km/h, en una carretera, elabora una tabla en la que se observe cuántos kilómetros recorre en 2, 3, 4 h. Si tiene que cubrir 280 km en cuántas horas aproximadamente llegará.

Además del diagrama sagital, para representar una función se utilizan otras formas, tales como el diagrama cartesiano, la fórmula o la tabla de valores.

- En el **diagrama cartesiano**, el eje horizontal representa el dominio y el eje vertical, el codominio. En este diagrama se representan las parejas ordenadas que pertenecen al grafo de la función.
- La **fórmula** es la expresión algebraica de la función, en la cual los elementos de los conjuntos se simbolizan, de manera general, mediante variables.

  Las fórmulas de las funciones son de la forma $y = f(x)$, en la cual $f(x)$ es una expresión en términos de x; x es la **variable independiente** y representa los elementos de Dom f; y es la **variable dependiente** y representa los elementos de Rec f.
- La **tabla de valores** está formada por dos filas de casillas. En la fila superior se ubican los valores que toma la variable independiente y en la fila inferior se ubican los valores que se obtienen para la variable dependiente.

Ejemplo

Dados los conjuntos $x = \{0, 1, 2, 3\}$ y $y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, y la función $f: x \to y$ tal que a cada elemento de x le asigna su doble en y, presentar la función f mediante:

a. El diagrama sagital

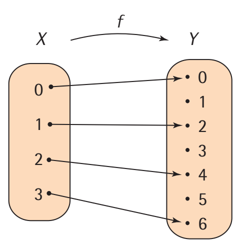
b. El diagrama cartesiano

c. La fórmula

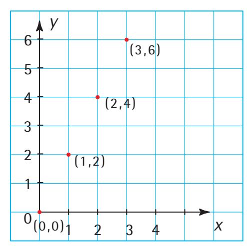
d. La tabla de valores

Solución

a. El diagrama sagital



b. El diagrama cartesiano



c. La fórmula

$y = 2x$

$y = f(x) = 2x$

d. La tabla de valores

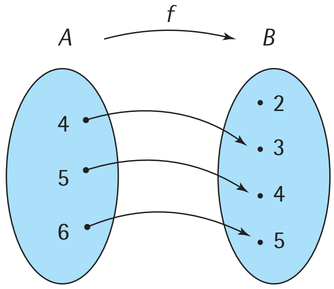
x	0	1	2	3
y	0	2	4	6

Actividades

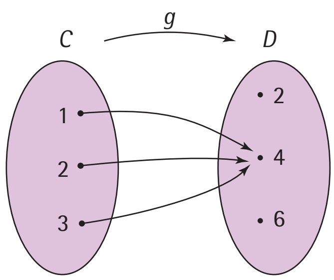
Representa en un plano y mediante una tabla una función.

1. Define cada una de las siguientes funciones mediante un diagrama cartesiano y una tabla de valores.

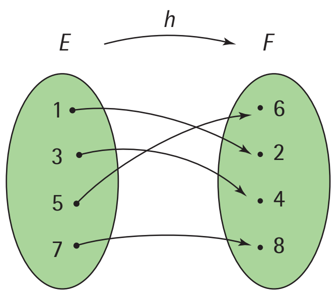
a.



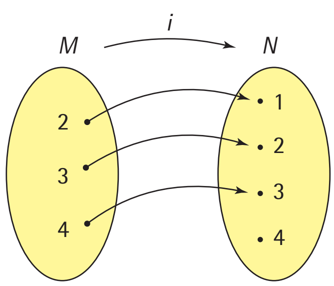
b.



c.



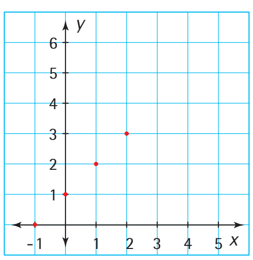
d.



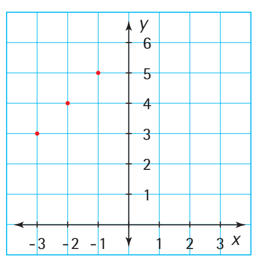
Escribe la tabla que representa a una función.

2. A partir del diagrama cartesiano, escribe la tabla de valores para cada función.

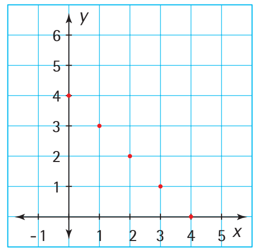
a.



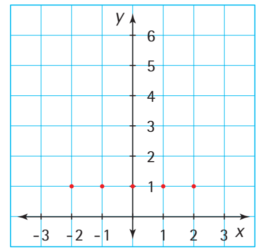
b.



c.



d.

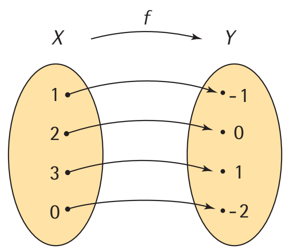


Analiza representaciones de una función y determina el valor de verdad.

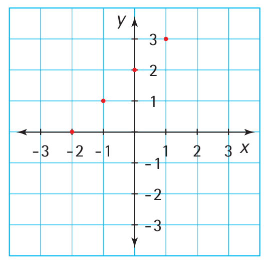
3. De acuerdo con la siguiente tabla de valores, escribe V si la afirmación dada es verdadera o F si es falsa.

x	3	2	1	0
y	1	0	–1	–2

a. El diagrama sagital que define esta función es:



b. El diagrama cartesiano que corresponde a esta tabla de valores es:



c. La fórmula que corresponde a la función definida en la tabla de valores es:

$$y = x - 2$$

Realiza diferentes representaciones de una función.

4. Sean los conjuntos $A = \{2, 3, 4\}$ y

$B = \{0, 4, 6, 8, 10, 12\}$, y la función $f: A \rightarrow B$ tal que a cada elemento de A se asocia su doble en B.

Define la función f mediante.

a. Diagrama sagital

b. Diagrama cartesiano

c. Fórmula

d. Tabla de valores

Representa una función mediante una tabla.

5. Para la fórmula de cada función, haz una tabla con cinco valores que pertenezcan al dominio de la función.

a. $y = x + 3$

b. $y = \frac{1}{2}x$

c. $y = 5x$

d. $y = 2x - 1$

e. $y = \frac{1}{3}x$

f. $y = 9x - 5$

Funciones reales

Destrezas con criterio de desempeño:

- Representar **funciones lineales, cuadráticas y definidas a trozos**, mediante funciones de los dos tipos mencionados, por medio de tablas, gráficas, una ley de asignación y ecuaciones algebraicas. (**P**)
- Evaluar una **función** en valores numéricos y simbólicos. **(P)**

Una función f es una **función real** cuando su dominio y su recorrido son el conjunto de los números reales o un subconjunto del mismo.

Como no es posible enumerar todas las parejas ordenadas que constituyen una función real, entonces se utiliza la notación $y = f(x)$ para referirse a este tipo de funciones.

Algunos ejemplos de funciones reales son:

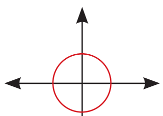
$$y = f(x) = 3x + 1,\ f(x) = x^2 - 10 \text{ y } y = \frac{3x}{4}, \text{ entre otras.}$$

La gráfica de una función real f es el conjunto de puntos (x, y) del plano cartesiano cuyas coordenadas satisfacen la fórmula de la ecuación. Como no es posible representar todos los puntos (pues son infinitos), entonces solo se ubican algunos de ellos y se unen mediante un trazo continuo. Así se obtiene una aproximación de la gráfica.

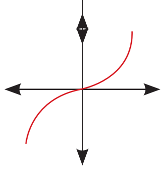
Conocimientos previos

Identifica cuáles de los siguientes gráficos representan una función.

a.



b.



Ejemplos

1. Construir la gráfica de la función $y = f(x) = x^2 + 1$.

Solución

Se elabora una tabla con algunos valores reales, asignados arbitrariamente a la variable x.

Cada valor se remplaza en la función para obtener los correspondientes valores de y. Así:

si $x = -2$, $y = (-2)^2 + 1 = 5$

si $x = -\frac{1}{2}$, $y = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{5}{4}$

si $x = 0$, $y = (0)^2 + 1 = 1$

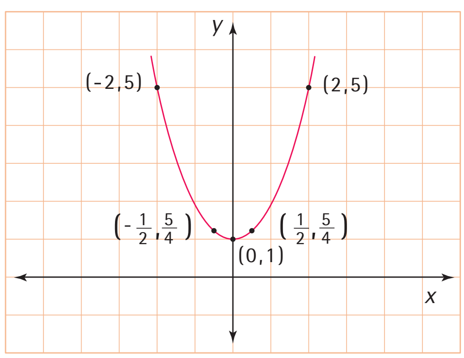
si $x = \frac{1}{2}$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{5}{4}$

si $x = 2$, $y = (-2)^2 + 1 = 5$

x	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2
y	5	$\frac{5}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	5

Tabla de valores

Se ubican los puntos y se unen mediante una línea continua.

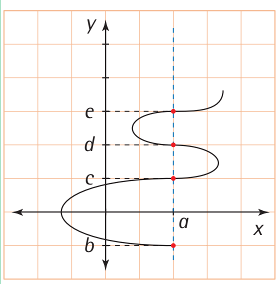


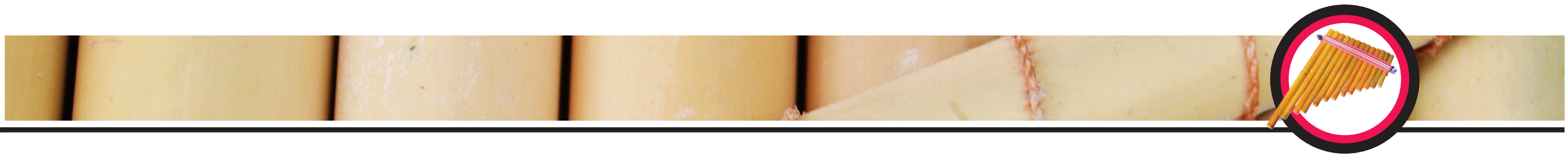
Toma en cuenta

Método gráfico para identificar funciones

Para comprobar que una gráfica describe una función, es útil trazar una recta paralela al eje y, y verificar que esta recta toca solamente un punto de la gráfica.

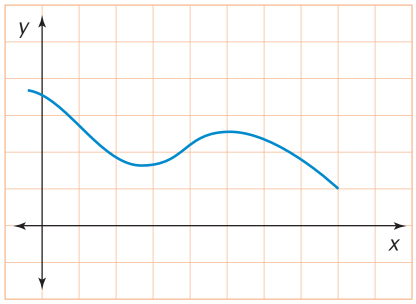
Si la recta toca más de un punto de la gráfica, se puede afirmar que no es una función.



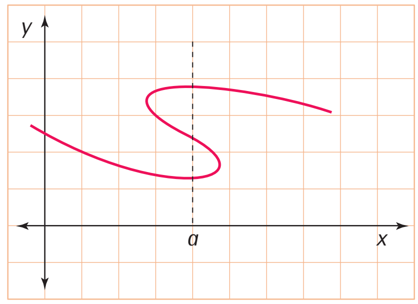


2. **Determinar si las siguientes gráficas representan funciones o no.**

a.



b.



Solución

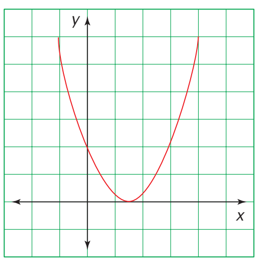
a. Sí es función, pues cada elemento del dominio tiene una única imagen.
b. No es función, porque el elemento a del dominio tiene más de una imagen.

Actividades

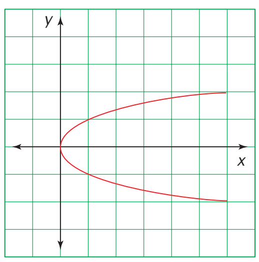
Identifica una función gráficamente.

1. Identifica cuáles de las siguientes gráficas corresponden a funciones y cuáles no. Justifica la respuesta.

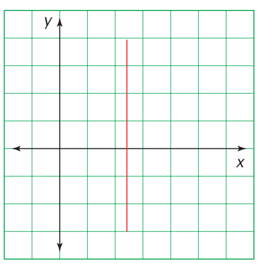
a.



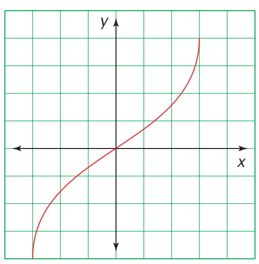
d.



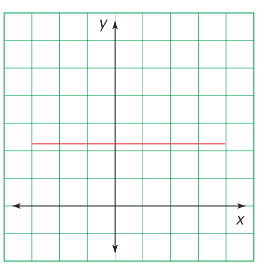
b.



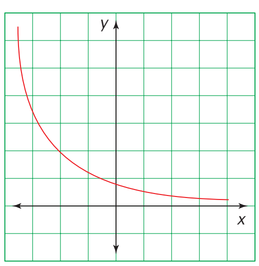
e.



c.



f.



Realiza la representación gráfica de una función.

2. Obtén la gráfica aproximada de cada función de acuerdo con la tabla de valores.

a.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-8	-1	0	1	8	27

b.

x	0	1	4	9	16	25
y	0	1	2	3	4	5

c.

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	8	3	0	-1	0	3

Evalúa una función.

3. Completa la tabla de valores para cada función. Luego, grafica.

a. $f(x) = x^2 + 2$

x	-3	-2	-1	0	1	2
y						

b. $f(x) = x^3$

x	-2	-1	0	1	2
y					

c. $f(x) = 5x + 1$

x	0	1	2	-1	-2
y					

d. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$

x	0	1	4	9	25
y					

e. $f(x) = \frac{3}{5}$

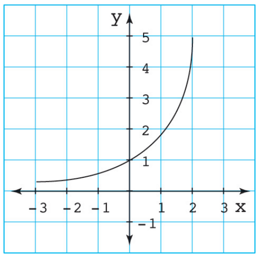
x	-1	-2	0	1	3
y					

BECU_M1_B1_P06_61.indd 13 4/22/14 11:50 AM

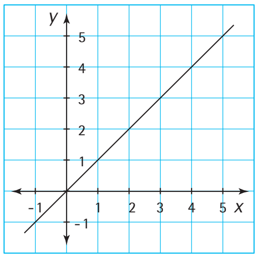
Determina una tabla de valores conocido el gráfico.

4. Construye la tabla de valores para cada gráfico.

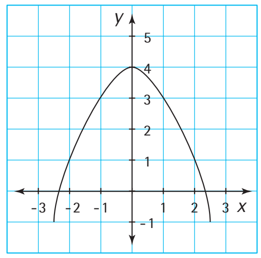
a.



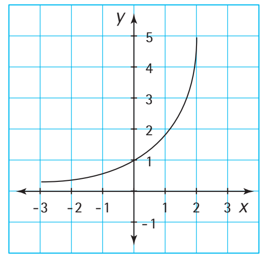
b.



c.



d.



Función lineal

Destrezas con criterio de desempeño:

- Representar **funciones lineales**, cuadráticas y definidas a trozos, mediante funciones de los dos tipos mencionados, por medio de tablas, gráficas, una ley de asignación y ecuaciones algebraicas. (**P**)
- Reconocer el **comportamiento local y global** de funciones elementales de una variable a través del análisis de su dominio, recorrido, monotonía y simetría (paridad). (**C**)
- Determinar la **intersección de una recta con el eje horizontal** a partir de la resolución de la ecuación f (x) = 0, donde f es la función cuya gráfica es la recta. (**P**)
- Determinar la **intersección de una recta con el eje vertical**, a partir de la evaluación de la función en x = 0 (f (0)). (**P**)
- Reconocer la gráfica de una función **lineal** como una recta, a partir del significado geométrico de los parámetros que definen a la función lineal. **(C)**

Conocimientos previos

Dibuja los puntos y traza la recta que pasa por los puntos.

A(2, 5), B(−3,0)

Toda función de la forma $y = mx$ *donde* m *es una constante diferente de cero, es una* ***función lineal***.

Por ejemplo, $y = f(x) = 3x$, $f(x) = -\frac{5}{3}x$ y $y = -7x$ son algunas funciones lineales.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

La función lineal es una función real cuya principal característica consiste en que su representación gráfica es una recta que pasa por el origen del plano cartesiano.

Ejemplo

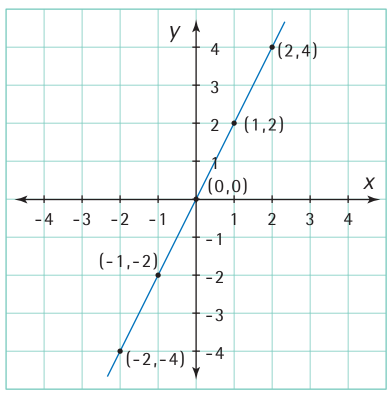
Construir la gráfica de la función $y = 2x$.

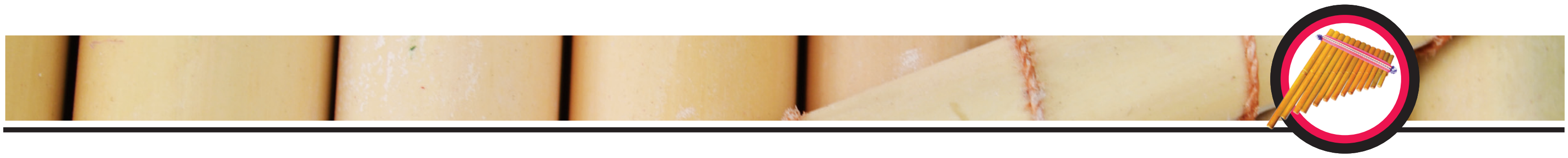
Solución

La tabla de valores para la función $y = 2x$ es:

x	−2	−1	0	1	2
y	−4	−2	0	2	4

Y se obtiene la siguiente gráfica.





Representación gráfica de la función $y = 3x - 1$.

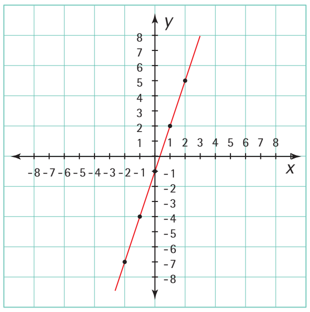


Figura 1.

Puntos de corte de la gráfica de la función $y = 2x - 1$

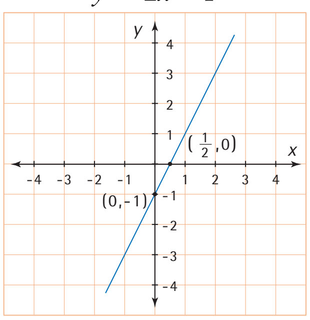


Figura 2.

FUNCIÓN AFÍN

Se denomina **función afín** a toda función de la forma $y = mx + b$ donde m y b son constantes no nulas.

Este tipo de funciones tienen como representación gráfica una recta que no pasa por el origen del plano cartesiano.

Por ejemplo, la gráfica de la función $y = 3x - 1$ es una recta que corta el eje y en el punto $(0, -1)$ (fig. 1).

Puntos de corte con los ejes

Es posible encontrar los puntos de corte de la recta correspondiente a la gráfica de una función afín, con los ejes coordenados, mediante una sencilla sustitución algebraica.

Para hallar el punto $(x, 0)$ o punto de corte de la recta con el eje x, en la expresión $y = f(x)$, se hace $y = 0$ y se despeja x.

Para hallar el punto $(0, y)$ o punto de corte de la recta con el eje y, se hace $x = 0$ y se despeja y.

Ejemplo

Hallar los puntos de corte de la gráfica $y = 2x - 1$ con los ejes coordenados.

Solución

Para hallar $(x, 0)$ se hace $0 = 2x - 1$, luego $x = \frac{1}{2}$.

Así, $(x, 0) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ es el punto de corte con el eje x.

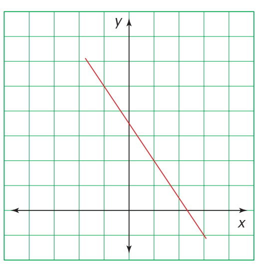
Para hallar $(0, y)$ se hace $y = 2(0) - 1$, es decir $y = -1$.
Por tanto, $(0, y) = (0, -1)$ es el punto de corte con el eje y (fig. 2).

Actividades

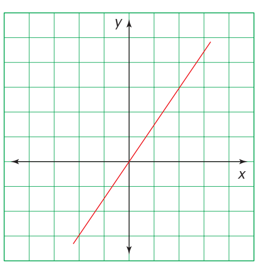
Diferencia entre función lineal y afín.

1. Clasifica las gráficas de cada función como lineales o afines.

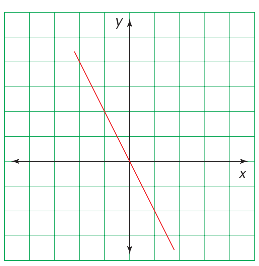
a.



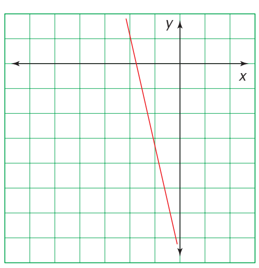
b.



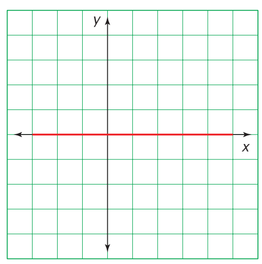
c.



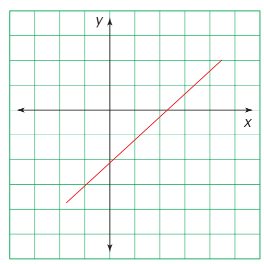
d.



e.



f.



Graficas funciones lineales.

2. Grafica cada tabla de valores en el plano cartesiano. Escoge una escala apropiada para el eje y.

a.

Nº de libros	Costo en $
1	10,50
2	21,00
3	31,50
4	42,00

b.

Nº de manzanas	Peso en gramos
1	200
2	400
3	600
4	800

BECU_M1_B1_P06_61.indd 15 4/22/14 11:50 AM

c.

Nº de horas	Cantidad de minutos
1	60
1.5	90
2	120
2.5	150
3	180

d.

Nº de artículos vendidos	Comisión por ventas en $
1	5
2	10
3	15
4	20

Analiza relaciones e identifica funciones.

3. Indica cuáles de las siguientes relaciones representan funciones lineales o afines. Justifica la respuesta.

a. Cierta población de bacterias se duplica en cada minuto.

Relación: crecimiento de una población de bacterias y el tiempo.

b. Para reparar la instalación de una casa, el servicio técnico cobra $25 más $10 por hora adicional.

Relación: tiempo trabajado y costo

Grafica funciones lineales y afines.

4. Realiza la gráfica de las siguientes funciones.

a. $f(x) = 2x$

b. $f(x) = 4x$

c. $f(x) = -6x$

d. $f(x) = \frac{1}{2}x$

f. $f(x) = x + 5$

g. $f(x) = -x - 2$

h. $f(x) = -3x + 6$

i. $f(x) = -\frac{1}{4}x + 1$

Determina los cortes con los ejes de las funciones lineales.

5. Halla los puntos de corte de la gráfica de cada función, con los ejes coordenados, sin representarlo en el plano.

a. $f(x) = 3x$

b. $f(x) = -5x$

c. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$

d. $y = -3x + 2$

e. $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$

f. $f(x) = \frac{3}{4}x - 2$

La recta

Destrezas con criterio de desempeño:

- Calcular la **pendiente** de una recta si se conocen dos puntos de dicha recta. **(C, P)**
- Determinar la **monotonía** de una función lineal a partir de la pendiente de la recta que representa dicha función. **(C, P)**

PENDIENTE DE UNA RECTA

La pendiente está directamente relacionada con la inclinación de la recta.

Si $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ son dos puntos distintos de dicha recta, la pendiente m se calcula mediante las igualdades

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \text{ o } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

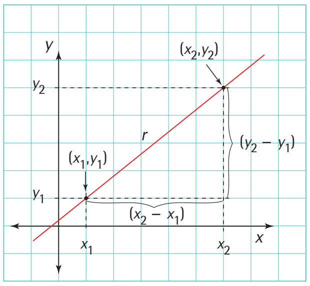


Figura 3

las cuales se interpretan como la razón del incremento vertical con respecto al incremento horizontal en la recta (fig. 3).

Conocimientos previos

Grafica la recta que pasa por los puntos A(3, 2) y B(4, 5), e indica las coordenadas de otro punto que se encuentre sobre la misma.

Ejemplo

Calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(3, 5)$ y $B(2, 3)$.

Solución

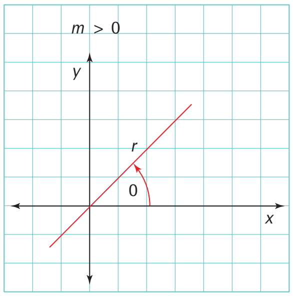
Si se consideran $A(3, 5) = (x_1, y_1)$ y $B(2, 3) = (x_2, y_2)$ al remplazar en la fórmula anterior, se obtiene:

$$m = \frac{5 - 3}{3 - 2} = \frac{2}{1} = 2 \text{ o } m = \frac{3 - 5}{2 - 3} = \frac{-2}{-1} = 2$$

Signo de la pendiente de una recta

El signo de la pendiente de una recta depende del ángulo de inclinación de dicha recta con respecto al eje x.

Se pueden distinguir cuatro casos.



Caso 1.

Si la recta forma un ángulo agudo con el eje x, la pendiente es positiva.

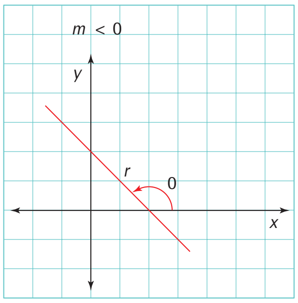
Tarea

Determina la pendiente de las rectas que pasan por los puntos dados.

a. A(−4, 3) y B(0, −5)

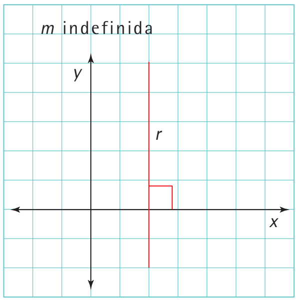
b. P(7, −3) y B(6, 0)

c. M(1, −1) y N(−2, −3)



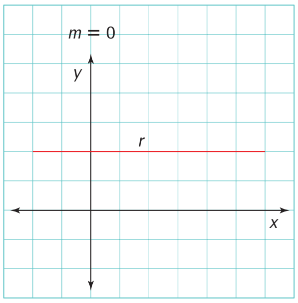
Caso 2.

Si la recta forma un ángulo obtuso con el eje x, la pendiente es negativa.



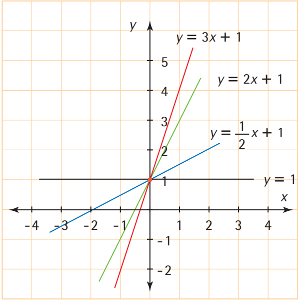
Caso 3.

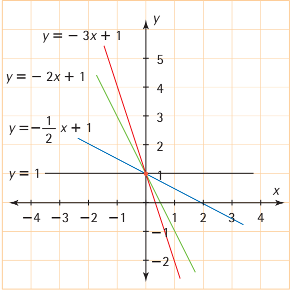
Si la recta es vertical (paralela al eje y), se dice que la pendiente *no está definida*.



Caso 4.

Si la recta es horizontal (paralela al eje x), la pendiente es cero.





Por ejemplo, en las gráficas de la izquierda se han representado algunas funciones de la forma $y = ax + 1$. En ellas se puede observar la relación entre el signo de la pendiente y la inclinación de cada recta.

BECU_M1_B1_P06_61.indd 17 4/22/14 11:50 AM

Actividades

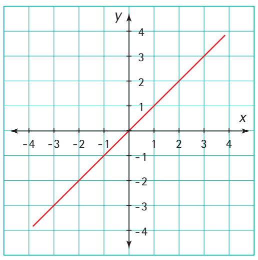
Calcula la pendiente de una recta.

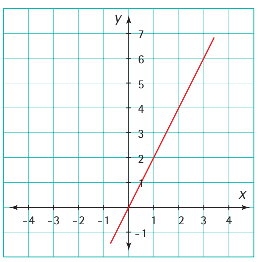
1. Halla la pendiente de la recta que pasa por cada par de puntos.

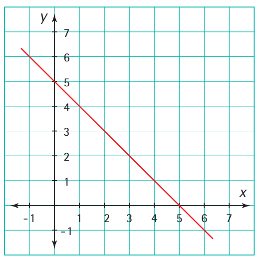
a. (5, 5) y (6, 6)
b. (4, 3) y (5, 3)
c. (−2, −3) y (6, 5)
d. (−3, −5) y (−2, −5)
e. $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ y $\left(-4, 5\right)$
f. (4, 8) y (−4, 16)

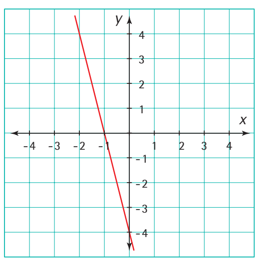
Determina dos puntos y la pendiente de una recta.

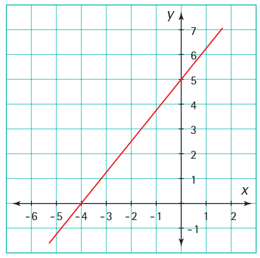
2. Encuentra dos puntos de la gráfica de cada recta. Luego, halla la pendiente de las rectas.

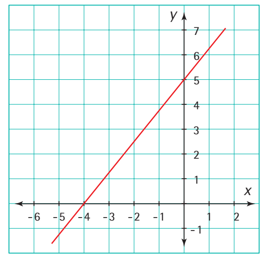
a.


b.


c.


d.


e.


f.


Analiza procedimientos.

3. Indica el error cometido al encontrar la pendiente de la recta que pasa por cada par de puntos. Justifica la respuesta.

a. (4, 3) y (−2, 6)

$$m = \frac{4-(-2)}{3-6} = \quad = \quad = \frac{6}{-3} - 2$$

b. (−5, 2) y (−4, 5)

$$m = \quad = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}$$

c. (−1, −2) y (−2, 6)

$$m = \frac{6-2}{-2-1} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

Determina puntos que cumplan con determinadas condiciones.

4. Halla dos puntos que pertenezcan a una recta que tenga:

a. pendiente positiva.
b. pendiente negativa.
c. pendiente nula.
d. pendiente indefinida.

Ecuación explícita de la recta

Destrezas con criterio de desempeño:

- Determinar la **ecuación de una recta**, dados dos parámetros (dos puntos, o un punto y la pendiente). **(P)**
- Determinar la **pendiente de una recta** a partir de su ecuación escrita en sus diferentes formas. **(P)**
- Graficar una **recta**, dada su ecuación en sus diferentes formas. **(P)**

La ecuación de la forma $y = mx + b$ es denominada **ecuación explícita** de la recta.

A partir de la ecuación explícita de la recta se puede determinar la pendiente m de la recta y la ordenada del punto de corte de la recta con el eje y, que corresponde a $(0, b)$.

Por ejemplo, para la recta cuya ecuación explícita es $y = 3x - 2$, la pendiente es $m = 3$ y el punto de corte con el eje y es $(0, -2)$.

Determinación de la ecuación explícita de la recta

En la determinación de la ecuación explícita de una recta se pueden presentar dos casos:

Caso 1. Se conoce la pendiente y un punto. Cuando se conoce la pendiente y un punto de la recta, basta remplazar dichos valores en la expresión general $y = mx + b$, con el fin de determinar el valor de b, de manera algebraica.

BECU_M1_B1_P06_61.indd 18 4/22/14 11:50 AM

Ejemplo

Encontrar la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto $(-3, 2)$ y cuya pendiente es $m = -2$.

Solución

Dado que $m = -2$ y $(x, y) = (-3, 2)$ al remplazar los valores conocidos en la expresión $y = mx + b$ se obtiene:

$$y = m \cdot x + b$$
$$2 = -2 \cdot (-3) + b$$

Luego, $b = -4$

Por lo tanto, la ecuación pedida es $y = -2x - 4$.

Lección

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por $(3, -5)$ y tiene como pendiente $m = 4$.

Caso 2. Se conocen dos puntos. Cuando se conocen dos puntos que pertenecen a la recta, primero se halla su pendiente mediante la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Luego, se remplazan m y las coordenadas de cualquiera de los puntos conocidos en la expresión $y = mx + b$, y se procede como en el caso anterior.

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(4, -2)$ y $(5, -4)$.

Solución

Se determina la pendiente de la recta según la fórmula.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4 - (-2)}{5 - 4} = \frac{-2}{1} = -2$$

Luego, se toma la pendiente y la coordenada de cualquiera de los puntos conocidos.

$$m = -2 \text{ y } (x, y) = (4, -2)$$

Se remplaza en:

$$y = m \cdot x + b$$
$$-2 = -2 \cdot 4 + b$$
$$-2 = -8 + b$$
$$b = 6$$

Así, la ecuación pedida es $y = -2x + 6$.

Trabajo individual

Escribe las ecuaciones de las rectas conocidos los siguientes datos:

a. $m = -3$; $b = -8$

b. $m = 4$; $b = 3$

c. $m = -2$; $A(-3, 4)$

Actividades

Determina la pendiente y la intercepción con el eje y.

1. Indica la pendiente y el intercepto con el eje y de cada una de las siguientes rectas.

a. $y = 3x + 5$

b. $5x = y - 2$

c. $3x - y = 4$

d. $9x - y = 6$

e. $2x + 6 = 3y$

f. $5x - 4y = 6$

g. $9x - 8y = 2$

h. $4x + 6y = 3$

Escribe la ecuación explícita de la recta.

2. Encuentra la ecuación explícita de la recta que tiene el punto y la pendiente indicados.

a. Punto(1, 4), pendiente 2.

b. Punto (3, 2), pendiente -3.

c. Punto (5, 6), pendiente 0.

d. Punto $(-1, 2)$, pendiente 4.

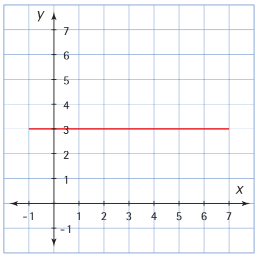
e. Punto $(-3, -1)$, pendiente -2.

BECU_M1_B1_P06_61.indd 19 4/22/14 11:50 AM

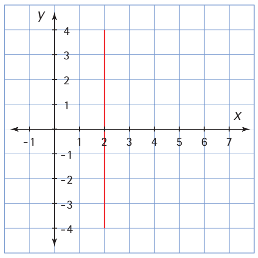
Analiza el valor de verdad de proposiciones.

3. Escribe las coordenadas de dos puntos que pertenezcan a la gráfica de cada recta. Luego, encuentra la ecuación explícita de la recta.

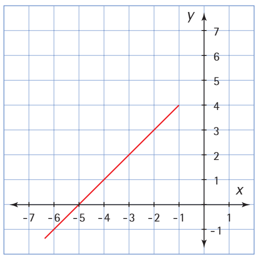
a.



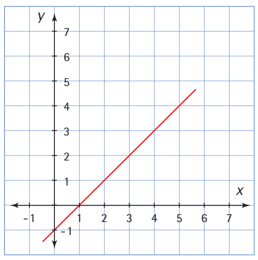
c.



b.



d.



4. Escribe V en cada afirmación si es verdadera, o F si es falsa. Justifica la respuesta.

a. La ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos (1, 2) y (2, 3) es $y = x + 2$.

b. La recta cuya ecuación es $3x - y = 2$ contiene el punto $(0, -2)$ y su pendiente es 3.

c. La ecuación de una recta cuya pendiente es indefinida es $x = 6$.

d. La ecuación $x = 5$ corresponde a una recta cuya intersección con el eje y es 5 y su pendiente es nula.

e. La recta que pasa por los puntos (1, 1) y (4, 4) tiene la misma pendiente que la recta que pasa por los puntos (7, 7) y (10, 10).

f. La ecuación de la recta $y = 3x + 5$ corta el eje y en 5.

g. La expresión $y = -\frac{3}{4}x + \frac{1}{5}$ corresponde a una recta cuya pendiente es $\frac{1}{5}$.

ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA

La ecuación general de la recta está dada de la forma

$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0$ *donde* $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathbb{R}$.

Si la ecuación de una recta está dada en forma explícita, basta realizar algunas operaciones algebraicas para obtener la forma general.

Ejemplo

Expresar la ecuación $y = -\dfrac{4}{7}x + \dfrac{5}{2}$ en forma general.

Solución

Se multiplica ambos miembros de la igualdad por el m. c. m. (7, 2) = 14.

$$14y = 14\left(-\frac{4}{7}x + \frac{5}{2}\right)$$

$$y = -8x + \quad 35$$

Luego, $8x + 14y - 35 = 0$ es la forma general de la ecuación dada.

De igual forma, a partir de la ecuación general de una recta, es posible obtener la ecuación explícita.

Tc Trabajo cooperativo

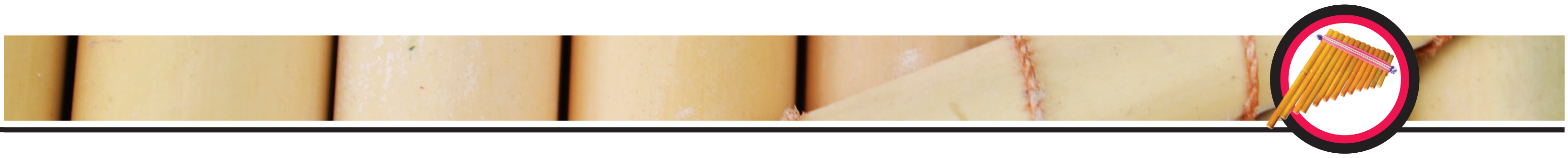
Indiquen la pendiente y la ordenada al origen de las siguientes rectas.

a. $6x + 2y - 3 = 0$

b. $-2x + y + 5 = 0$

c. $3x + y - 8 = 0$

d. $-4x - 8y + 10 = 0$



Ejemplo

Expresar la ecuación $-5x + 3y - 4 = 0$ en forma explícita. Luego, determinar la pendiente y el punto de corte con el eje y.

Solución

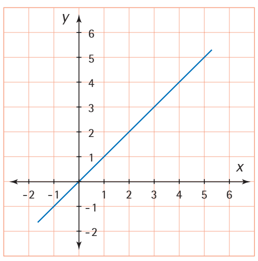
Al despejar y en la ecuación dada, se obtiene: $y = \frac{5x}{3} + \frac{4}{3}$

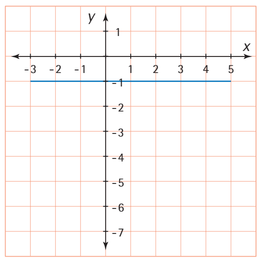
Por lo tanto, $m = \frac{5}{3}$ y el punto de corte con el eje y es $\left(0, \frac{4}{3}\right)$.

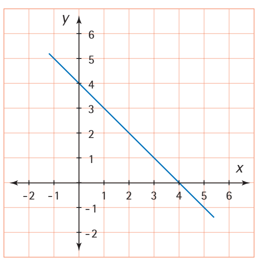
Actividades

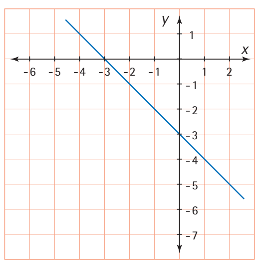
Escribe la ecuación de la recta en forma explícita.

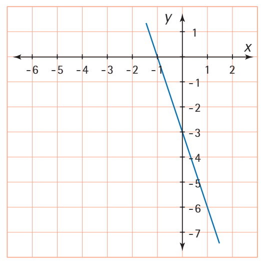
1. Halla la ecuación, en forma explícita, de las rectas que pasan por los puntos que se muestran a continuación. Luego, escríbelas en forma general.

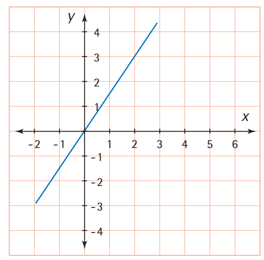
a. 

c. 

b. 

d. 

e. 

f. 

Determina la forma general de la recta.

2. Escribe cada ecuación en su forma general.

a. $9 - x = y$

b. $3x + 4 = y$

c. $-2y = 5x - 1$

d. $3x + 2y = \frac{4}{3}$

e. $\frac{9}{5}x + 3 = \frac{y}{6}$

f. $12x = 3y + 8$

g. $y = 5x - 2$

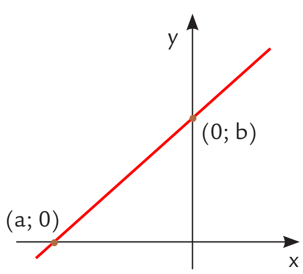
h. $3x + y = 2x - 1$

i. $4x - 2y = -3x + 6$

j. $\frac{5}{3}x + 2 = \frac{1}{3}x + 4y$

Cortes con los ejes

Observa en el gráfico los cortes con los ejes de una recta.



ECUACIÓN PARAMÉTRICA DE LA RECTA

Los cortes con los ejes (abscisa y ordenada en el origen) permiten determinar la ecuación de la recta conocida como forma simétrica o canónica, que se utiliza para resolver problemas que involucren datos con los ejes, como áreas, perímetros, etc.

La pendiente de esta recta es:

$$m = \frac{b - 0}{0 - a} = -\frac{b}{a}$$

Remplazándola en la ecuación explícita obtenida anteriormente, se tiene:

$$y = -\left(\frac{b}{a}\right)(x - a) \quad \rightarrow \quad ay = -bx + ab$$

$$bx + ay = ab \quad (\div ab) \quad \rightarrow \quad \frac{bx}{ab} + \frac{ay}{ab} = \frac{ab}{ab} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Destrezas con criterio de desempeño:

- Calcular la **pendiente de una recta si se conoce su posición relativa (paralela o perpendicular)** respecto a otra recta y la pendiente de esta. **(C, P)**
- Determinar la **relación entre dos rectas** a partir de la comparación de sus pendientes respectivas (rectas paralelas, perpendiculares, oblicuas). **(P)**

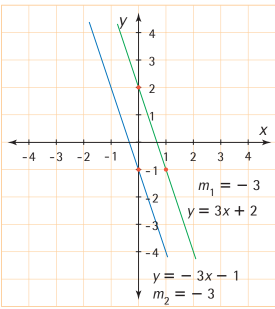


Figura 4.

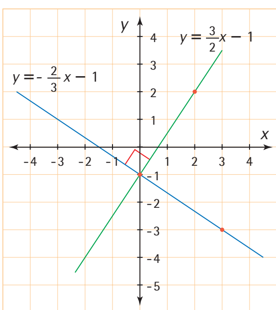


Figura 5.

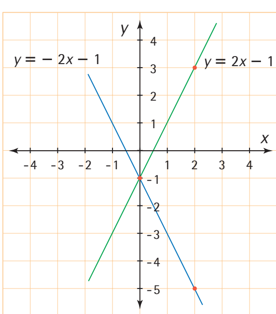


Figura 6.

Ejemplos

1. Determinar la ecuación de la recta en su forma simétrica, sabiendo que su ecuación general es $3x + 2y - 6 = 0$.

- Primero, se pasa el término independiente al otro lado del signo igual.
  $3x + 2y = 6$
- Luego, se divide toda la ecuación para el valor del término independiente.

$$\frac{3x}{6} + \frac{2y}{6} = \frac{6}{6}$$

- Finalmente, se simplifica cada término.

Solución

La ecuación simétrica es: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

2. La recta $5x - 3y + 15 = 0$ determina un triángulo con los ejes coordenados. Calcular el área del triángulo.

- Primero, se pasa la ecuación de la recta de la forma general a la forma simétrica.

$$5x - 3y = -15 \rightarrow \frac{5x}{-15} - \frac{3y}{-15} = 1 \rightarrow \frac{x}{-3} + \frac{y}{5} = 1$$

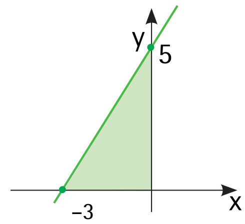
- Luego, se realiza un gráfico.
- El valor absoluto de *a* es la base del triángulo (3) y el valor absoluto de *b* es la altura del triángulo (5).

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$$

$$A = \frac{3 \cdot 5}{2} = 7{,}5$$

Solución

El área es: 7,5 u^2



POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS EN EL PLANO

Dadas dos rectas diferentes en el plano, se pueden presentar tres casos: las rectas son paralelas, las rectas son perpendiculares o las rectas son secantes.

Caso 1. Dos rectas son paralelas si y solo si sus pendientes son iguales. Por ejemplo, las rectas l_1: $y = -3x - 1$, l_2: $y = -3x + 2$ son paralelas (figura 4), pues se observa que sus pendientes son iguales.

$$m_1 = -3 \text{ y } m_2 = -3$$

$$m_1 = m_2$$

Caso 2. Dos rectas son perpendiculares si y solo si el producto de sus pendientes es igual a -1.

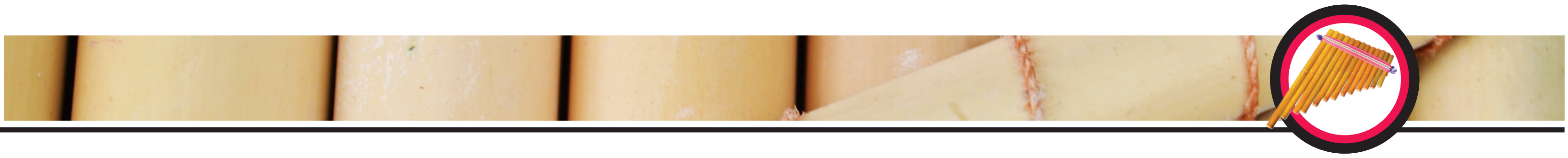
Así, la pendiente de la recta $y = \frac{-2}{3}x - 1$ es $m_1 = -\frac{2}{3}$

y la pendiente de la recta $y = \frac{3}{2}x - 1$ es $m_2 = \frac{3}{2}$, es decir,

$$m_1 \cdot m_2 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = -1,$$

luego las rectas son perpendiculares (figura 5).

BECU_M1_B1_P06_61.indd 22 4/22/14 11:50 AM



Caso 3. Dos rectas que se cortan en un único punto sin formar ángulo recto son secantes.

Por ejemplo, las rectas $y = 2x - 1$ y $y = -2x - 1$ no son ni paralelas, ni perpendiculares y se cortan en el punto $(0, -1)$, por lo tanto, son secantes (figura 6).

Actividades

Identifica rectas paralelas y perpendiculares.

1. Determina la posición relativa de cada par de rectas. Luego, grafícalas en el plano cartesiano.

a. $\begin{cases} 5x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} -2x + y = 3 \\ y = 2x + 6 \end{cases}$

c. $\begin{cases} -15x = 3y + 9 \\ x = 5y \end{cases}$

d. $\begin{cases} 9x - 18 = 6y \\ -5x - 6 = -3y \end{cases}$

e. $\begin{cases} 4x = 2y + 5 \\ 2x = y - 3 \end{cases}$

f. $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 1 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$

g. $\begin{cases} y = -6x + 4 \\ -2y = 5 + 12x \end{cases}$

h. $\begin{cases} 5y - 3 = -10x \\ 2y - x = 0 \end{cases}$

i. $\begin{cases} 9x - 3y = 4 \\ 5x + y = 6 \end{cases}$

j. $\begin{cases} 5 = x \\ y = 3 \end{cases}$

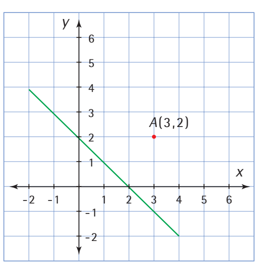
k. $\begin{cases} 4y = 3x + 8 \\ 3y = -4x - 3 \end{cases}$

l. $\begin{cases} y = \frac{1}{6}x + 1 \\ y - 6x - 2 = 0 \end{cases}$

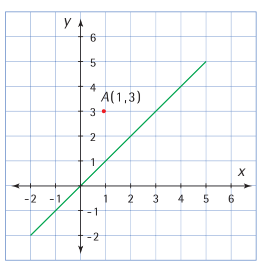
Determina ecuaciones de rectas paralelas.

2. En cada caso, encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto A, que sea paralela a la recta representada en el plano.

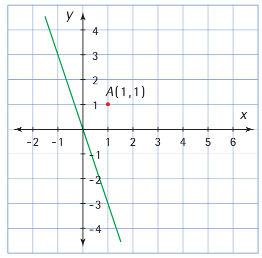
a.



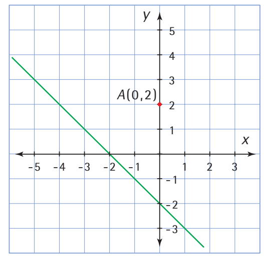
b.



c.



d.



Determina ecuaciones de rectas perpendiculares.

3. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto dado y es perpendicular a la recta dada.

a. $y = -9x + 6$ — Punto $(0, 0)$

b. $y = -8x - 2$ — Punto $(1, 1)$

c. $5x + y = 1$ — Punto $(-2, 3)$

d. $4x - 2y = 6$ — Punto $(-4, -1)$

e. $\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y = 6$ — Punto $(-3, 0)$

f. $\frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y = 10$ — Punto $(0, -4)$

g. $1 + 3y = x$ — Punto $(3, 6)$

h. $y = 5$ — Punto $(1, 2)$

i. $x = 2$ — Punto $(4, 3)$

Analiza el valor de verdad de proposiciones.

4. Escribe V si la afirmación es verdadera o F si es falsa. Justifica tu respuesta.

Sean l y s dos rectas cuyas pendientes son m_1 y m_2, respectivamente.

a. Si l y s son paralelas, entonces sus pendientes cumplen: $m_1 + m_2 = 2m_1$

b. Si l y s son perpendiculares: $m_1 = \frac{1}{m_2}$

c. Si l es secante a s puede cumplir: $m_1 = 5m_2$

d. Si l y s son paralelas, se cumple: $m_1 - m_2 = 0$

e. Si l tiene pendiente $m = \frac{1}{3}$, entonces una recta perpendicular a ella debe tener pendiente positiva.

1. FÍSICA. La interacción gravitacional es una de las fuerzas básicas de la naturaleza. La Tierra ejerce atracción gravitacional sobre los objetos que se encuentran a su alrededor, esta es la razón por la cual los objetos que se encuentran próximos a su superficie, caen hacia ella.

La fuerza que aplica la Tierra sobre un cuerpo se denomina **peso**.

Aunque el peso y la masa están muy relacionados, son conceptos diferentes. La masa de un cuerpo es siempre la misma, mientras que el peso de un cuerpo en la Luna es la sexta parte de su peso en la Tierra.

En la Tierra, la relación entre el peso y la masa está bien definida: el peso de un cuerpo equivale a 10 veces su masa.

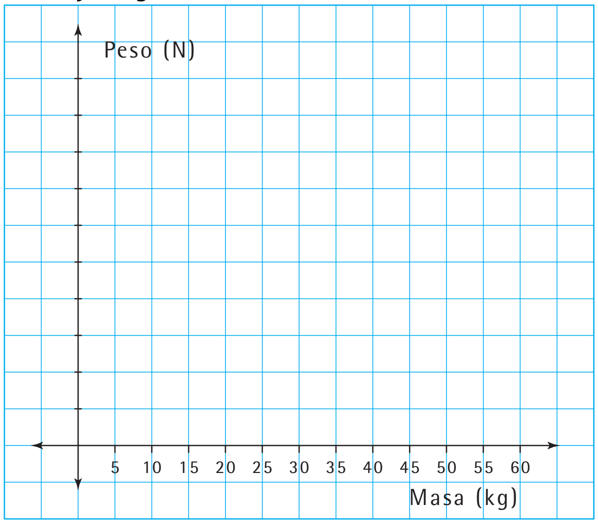
a. Escribe una función que relacione el peso de un cuerpo con el de su masa.

b. ¿Es esta una función lineal? ¿Por qué?

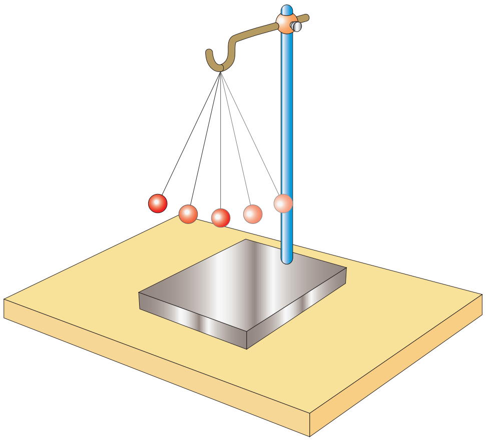
c. Completa la tabla de valores para la función.

Masa (kg)	10	15	20	25	30	35	40	50
Peso (N)								

d. Dibuja la gráfica.



2. FÍSICA. Un péndulo se construye con una pesa y una cuerda. Cuando se suspende la pesa de la cuerda y se deja quieta, la cuerda permanece vertical; en este caso se dice que la pesa está en la posición de equilibrio. Si con la cuerda tensa, se aleja la pesa de su posición de equilibrio y se suelta, la pesa realiza un movimiento de vaivén. A uno solo de los movimientos de ida y regreso a la posición desde la cual se soltó, se le denomina *oscilación*.

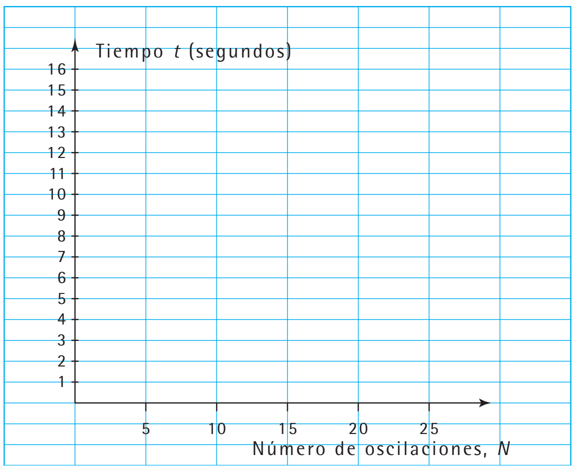


BECU_M1_B1_P06_61.indd 24 4/22/14 11:50 AM

En una experiencia realizada con un péndulo, se tomaron los siguientes datos:

Número de oscilaciones, N	Tiempo, t (s)
5	2,5
10	5,0
15	7,5
20	10,0
25	12,5

a. Representa gráficamente los anteriores datos.



b. Encuentra la pendiente de la recta obtenida.

c. Escribe en forma explícita la ecuación de dicha recta.

3. Contesta.

a. La cantidad de calorías que necesita una persona para mantenerse diariamente es menor cuando aumenta la temperatura. Por cada grado centígrado de aumento en la temperatura ambiente, un adulto necesita 30 calorías menos.

Determina la función que hace corresponder a cada temperatura la cantidad de calorías necesarias, partiendo de que, a una temperatura de 0°C, la persona necesita 3 600 calorías.

b. La función que relaciona la temperatura en grados Farenheit T_F con la temperatura en grados Celcius T_C tiene gráfica lineal.

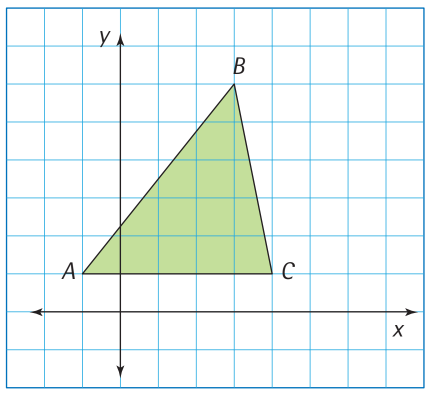
Una temperatura de 0°C equivale a 32°F, la temperatura de 50°C corresponde a 112°F. Encuentra la función lineal que muestra la temperatura en grados Farenheit en función de los grados Celsius.

4. Contesta.

a. Si p es un punto del plano cartesiano tal que P: $(5, 3k + 7)$, determina el valor de k para que pertenezca al eje de las abscisas.

b. Considera un cuadrilátero $ABCD$ cuyos vértices son $A(-1, 2)$, $B(2, 3)$, $C(1, 1)$, $D(-2, 0)$. Demuestra qué es un paralelogramo usando el concepto de pendiente.

5. Observa el triángulo.



a. Determina la ecuación de la recta que contiene al segmento $\overline{AB}$.

b. Determina la ecuación de la recta que contiene al segmento $\overline{BC}$.

c. Determina la ecuación de la recta que contiene al segmento $\overline{AC}$.

d. La altura de un triángulo es el segmento que se traza perpendicularmente desde uno de los vértices hasta su respectivo lado opuesto. Halla la ecuación de la recta que contenga una de las alturas del triángulo.

e. Traza en el cuaderno las alturas del triángulo de la figura.

f. Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto B y es perpendicular al segmento AC. Responde ¿Cómo se denomina esta recta?

BECU_M1_B1_P06_61.indd 25 4/22/14 11:50 AM

Sistemas de ecuaciones lineales

Destrezas con criterio de desempeño:

- Resolver un **sistema de dos ecuaciones** con dos variables de forma gráfica y analítica. **(P)**
- Identificar la **intersección de dos rectas** con la igualdad de las imágenes de dos números respecto de dos funciones lineales. **(C)**

Conocimientos previos

De las siguientes ecuaciones, indica las que son lineales y explica por qué.

a. $x^2 + 3x - y = 0$

b. $x + 2y - z = 0$

c. $3x - 5y + 6 = 0$

d. $xy + y - 3x = 0$

Investiga

¿Qué son sistemas de ecuaciones lineales equivalentes?

Toda igualdad de la forma $ax + by = c$ donde $a, b \in \mathbb{R}$ es una ecuación lineal con dos incógnitas.

Cada pareja ordenada de números reales que satisface esta ecuación es una solución de ella.

Por ejemplo, para encontrar las soluciones de la ecuación $y - 3x = 2$, se despeja y, y luego se asignan valores arbitrarios a x.

De esta forma, dando valores a x, se pueden obtener infinitos valores para y. Así, se dice que la ecuación lineal $y - 3x = 2$ es una ecuación **indeterminada**.

Toda ecuación lineal con dos incógnitas es una ecuación indeterminada.

Un conjunto formado por dos o más ecuaciones lineales es llamado **sistema de ecuaciones lineales** o **sistema de ecuaciones simultáneas**.

Por ejemplo, el conjunto

$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

Es un **sistema 2 × 2**, pues está formado por dos ecuaciones con dos incógnitas.

La solución de este sistema es la pareja (3, 2) ya que satisface las dos ecuaciones simultáneamente.

El conjunto:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 3z = 16 \\ x + 3y - 6z = -23 \\ 5x + 4y - 2z = -9 \end{cases}$$

es un **sistema 3 × 3**, pues está formado por tres ecuaciones con tres incógnitas. La solución de este sistema está dada por la terna $(1, -2, 3)$.

Actividades

Identifica sistema de ecuaciones lineales.

1. Determina cuáles de los siguientes conjuntos de ecuaciones son sistemas de ecuaciones lineales.

a. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x = 3y \end{cases}$

b. $\begin{cases} x^2 = y \\ y + x = 5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + y = -2 \\ xy = 3 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y - x = 2 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x + 7 = -2y \\ x - y = 4 \end{cases}$

f. $\begin{cases} x^2 + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Determina sistemas de ecuaciones lineales equivalentes.

2. Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes cuando ambos tienen la misma solución. Utiliza la solución dada para determinar si los sistemas de ecuaciones son equivalentes o no.

a. $\begin{cases} x + 3 = y \\ 2x + y = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 2y = -6 \\ -2x + y = 6 - 4x \end{cases}$

Solución $x = -3$, $y = 0$

b. $\begin{cases} x + 4 = 1 \\ y + x = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = -12 \\ x + 3 = 0 \end{cases}$

Solución $x = -3$, $y = 5$

BECU_M1_B1_P06_61.indd 26 4/22/14 11:50 AM

c. $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 5x + y = 24 \end{cases}$

Solución $x = 4$, $y = 4$

d. $\begin{cases} x = -y \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x - 5y = 0 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

Solución $x = 1$, $y = 1$

e. $\begin{cases} 3x - 11y = 5 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - 12y = 6 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$

Solución $x = 0$, $y = 1$

f. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 4y = 15 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

Solución $x = 1$, $y = 3$

MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE SISTEMAS 2×2

Un sistema de ecuaciones lineales puede tener una solución, infinitas soluciones o ninguna solución.

Para determinar la solución o soluciones de un sistema 2×2 se emplean métodos tales como: el método gráfico, el método de sustitución, el método de igualación, el método de reducción y el método por determinantes.

Método gráfico

Este método consiste en graficar las rectas que corresponden a las ecuaciones que forman el sistema, para determinar las coordenadas del punto (x, y) en el que se cortan dichas rectas.

Cuando se utiliza el método gráfico para resolver un sistema 2×2, se presentan tres casos:

Caso 1. Las rectas se cortan en un solo punto (x, y). Esto significa que el sistema tiene una única solución, dada por los valores x, y que son coordenadas del punto de corte.

Caso 2. Las rectas coinciden en todos sus puntos. Por lo tanto, el sistema tiene infinitas soluciones, es decir, es indeterminado.

Caso 3. Las rectas son paralelas, no tienen puntos en común. Es decir, el sistema no tiene solución.

T Tarea

Resuelve los siguientes sistemas mediante el método gráfico.

a. $\begin{cases} x - 3y - 6 = 0 \\ 2x - 6y - 4 = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x - 4y + 12 = 0 \\ 5x + 10y - 15 = 0 \end{cases}$

Ejemplo

Encontrar la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, por método gráfico.

a. $\begin{cases} y - 3x = 1 \\ y - x = 3 \end{cases}$ b. $\begin{cases} y + 3x = 2 \\ y + 3x = 4 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$

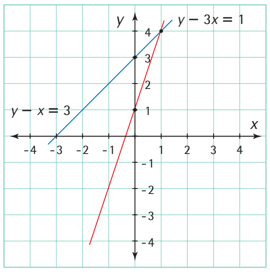
Solución

Al graficar las rectas de cada sistema en un plano cartesiano, se obtiene:

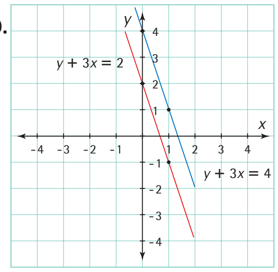
BECU_M1_B1_P06_61.indd 27 4/22/14 11:50 AM

Investiga

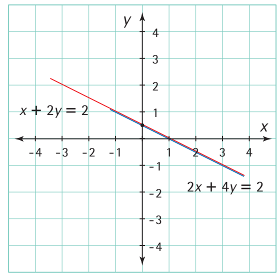
¿Cómo se determina algebraicamente que un sistema de ecuaciones tiene una solución, infinitas soluciones o ninguna solución?

a.


Una solución (1, 4)

b.


Ninguna solución

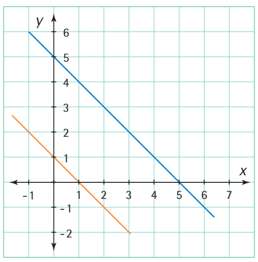
c.


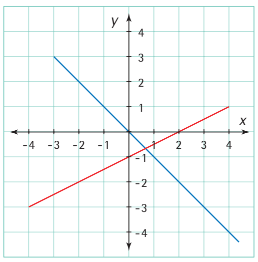
Infinitas soluciones

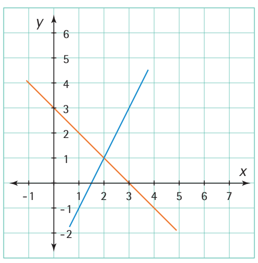
Actividades

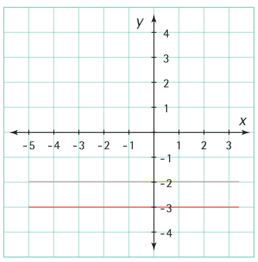
Determina el tipo de solución de un sistema de ecuaciones lineales.

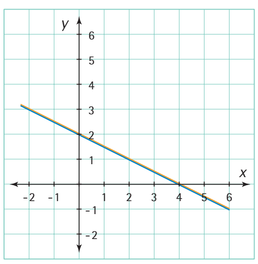
1. Indica qué tipo de solución tiene cada sistema de ecuaciones de acuerdo con su representación.

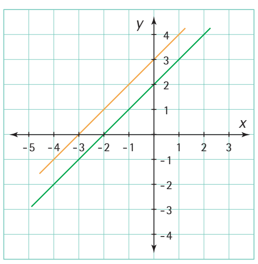
a.


d.


b.


e.


c.


f.


Determina gráficamente la solución de un sistema lineal.

2. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones.

a. $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

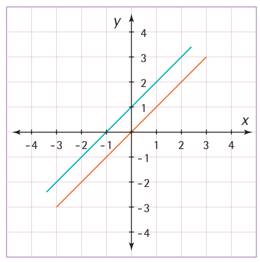
c. $\begin{cases} 4x - y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

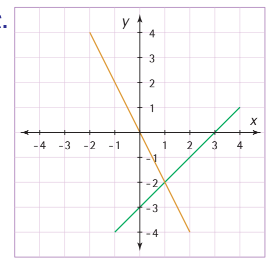
e. $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 8 \end{cases}$ f. $\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - 16 = -2y \end{cases}$

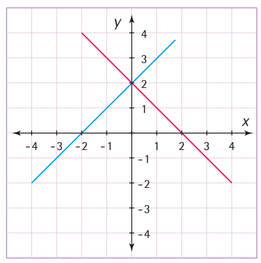
g. $\begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$ h. $\begin{cases} x = -y \\ x + y = 4 \end{cases}$

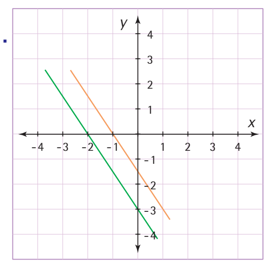
Determina las ecuaciones que representan un sistema lineal.

3. Escribe el sistema de ecuaciones que corresponde a cada gráfico.

a.


c.


b.


d.


Resuelve problemas.

4. Sociales. En economía se denomina *punto de equilibrio* a aquel en el que coinciden la oferta y la demanda de un producto determinado.

Las ecuaciones que dan la oferta y la demanda sobre cierto producto son:

Oferta: $y = 3x + 10$ Demanda $y = -2x + 50$

donde x es el precio en dólares y y la cantidad de productos.

Halla gráficamente el punto de equilibrio para este producto.

BECU_M1_B1_P06_61.indd 28 4/22/14 11:50 AM

Solución por método de sustitución

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método de sustitución, se despeja una de las variables en cualquiera de las ecuaciones dadas. Luego se remplaza dicho valor en la otra ecuación y se despeja nuevamente la otra variable. Este valor se sustituye en cualquiera de las ecuaciones del sistema para hallar la variable inicial.

Ejemplo

Resolver por el método de sustitución el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 11 & \text{①} \\ -2x + 2y = -8 & \text{②} \end{cases}$$

Solución

En la ecuación ① se despeja la variable x.

$$3x - 2y = 11$$
$$3x = 11 + 2y$$
$$x = \frac{11 + 2y}{3}$$

Luego, se remplaza dicho valor en la ecuación ② y se despeja la variable y.

$$-2\left(\frac{11 + 2y}{3}\right) + 2y = -8$$
$$-\frac{22}{3} - \frac{4y}{3} + 2y = -8$$
$$-\frac{4y}{3} + 2y = -8 + \frac{22}{3}$$
$$\frac{-4y + 6y}{\cancel{3}} = \frac{-24 + 22}{\cancel{3}}$$
$$2y = -2$$
$$\boxed{y = -1}$$

El valor encontrado se remplaza en la ecuación ① y luego se despeja x.

$$3x - 2y = 11$$
$$3x - (2)(-1) = 11$$
$$3x + 2 = 11$$
$$x = \frac{11 - 2}{3} = \frac{9}{3}$$
$$\boxed{x = 3}$$

Así, la solución del sistema es la pareja ordenada

$(3, -1)$.

L Lección

Resuelve el sistema.

$3x - y = 2$

$x + y = 5$

T Tarea

Determina la solución de los sistemas.

a. $\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 2y = 20 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 5x + y = 2 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$

BECU_M1_B1_P06_61.indd 29 4/22/14 11:50 AM

Actividades

Determina la solución de un sistema mediante el método de igualación.

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de sustitución.

a. $\begin{cases} 3x - 5y = 0 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2m + n = 9 \\ m - n = 3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3w - z = 1 \\ 2w + z = 9 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2n - z = -1 \\ 5n - 2z = 1 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x - 1 = 2(y + 6) \\ x + 6 = 3(1 - 2y) \end{cases}$

f. $\begin{cases} m + 8 = n + 2 \\ n - 4 = m + 2 \end{cases}$

g. $\begin{cases} w + t = 12 \\ 2w - t = 9 \end{cases}$

h. $\begin{cases} 2s - t = 4 \\ 3s + t = 11 \end{cases}$

i. $\begin{cases} 8x - 3y = 7 \\ 8y - 3x = 18 \end{cases}$

j. $\begin{cases} 10a - 3b = 36 \\ 2a + 5b = -4 \end{cases}$

Analiza el valor de verdad de proposición.

2. Encuentra el error cometido en la solución de cada sistema de ecuaciones.

a. $\begin{cases} -x - y = -1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

$-x - y = -1$

$x = -1 + y$

$1 + y + 2y = 0$

$3y = -1$

$y = -\frac{1}{3}$

$x + 2y = 0$

$x + 2 \times -\frac{1}{3} = 0$

$x - \frac{2}{3} = 0$

$x = \frac{2}{3}$

b. $\begin{cases} x - 9 = 2y \\ y - 2x = -1 \end{cases}$

$x - 9 = 2y$

$x = 2y + 9$

$y - 2x = -1$

$y - 2(2y + 9) = -1$

$y - 4y - 18 = -1$

$-3y = -1 + 18$

$y = \frac{17}{3}$

Trabajo individual

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando el método de igualación.

a. $\begin{cases} 4x - 5y = 10 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + 4y = 5 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

Solución por método de igualación

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método de igualación, se despeja la misma variable en las dos ecuaciones dadas. Luego se igualan las expresiones obtenidas y se despeja la otra variable. Este valor se sustituye en cualquiera de las ecuaciones del sistema para encontrar el valor faltante.

Ejemplo

Resolver por el método de igualación el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 4x - y = 2 \\ 3x + 5y = -10 \end{cases}$$

Solución

Se despeja la variable x en las dos ecuaciones y se igualan las expresiones obtenidas.

$4x - y = 2$

$4x = 2 + y$

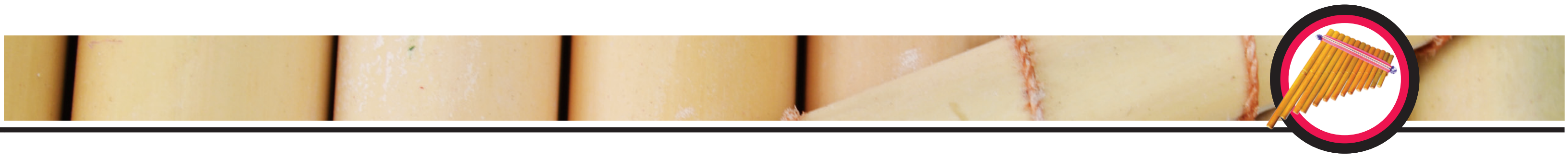
$x = \frac{2 + y}{4}$

$3x + 5y = -10$

$3x = -10 - 5y$

$x = \frac{-10 - 5y}{3}$

$$\frac{2 + y}{4} = \frac{-10 - 5y}{3}$$



Trabajo cooperativo

Resuelvan los sistemas de ecuaciones lineales.

a. $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + 4y = 2 \end{cases}$

$$\frac{6 + 3y}{12} = \frac{-40 - 20y}{12}$$

Se despeja y en la ecuación resultante.

$$6 + 3y = -40 - 20y$$
$$3y + 20y = -40 - 6$$
$$23y = -46$$
$$y = -\frac{46}{23}$$
$$\boxed{y = -2}$$

Este valor se remplaza en cualquiera de las ecuaciones del sistema.

$$4x - y = 2$$
$$4x - (-2) = 2$$
$$4x + 2 = 2$$
$$4x = 2 - 2$$
$$4x = 0$$
$$\boxed{x = 0}$$

La solución del sistema es la pareja $(0, -2)$.

Actividades

Determina la solución de un sistema mediante el método de igualación.

1. Resuelve por el método de igualación los siguientes sistemas de ecuaciones.

a. $\begin{cases} 4x + y = 0 \\ -4x - y = -2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} m + 3n = 6 \\ 5m + 2n = 13 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2z + t = 1 \\ 3z + 2t = 2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} m - n = 5 \\ m + n = 25 \end{cases}$

e. $\begin{cases} \frac{y}{2} - \frac{x}{3} = 2 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = -1 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 3a - 11b = 5 \\ 2a + 4b = 1 \end{cases}$

g. $\begin{cases} p - 2q = 3 \\ 3p + 6q = 4 \end{cases}$

h. $\begin{cases} 30 - (8 - x) = 2y + 30 \\ 5x - 29 = x - (5 - 4y) \end{cases}$

i. $\begin{cases} 6v - 2w = 2 \\ 4v + 2w = 18 \end{cases}$

j. $\begin{cases} \frac{w - 4}{2} + \frac{t + 2}{5} = 3 \\ \frac{w - 3}{3} - \frac{t + 4}{4} = 0 \end{cases}$

Analiza el valor de verdad de proposición.

2. Escribe V si la afirmación es verdadera o F si es falsa.

a. Al resolver el sistema de ecuaciones

$\begin{cases} -5x = 10 \\ x + y = -10 \end{cases}$

por el método de igualación, primero se encuentra el valor de la variable y.

b. El sistema de ecuaciones

$\begin{cases} x + y = 5 \\ x = 5 + y \end{cases}$

no tiene solución.

c. Al despejar la x en las dos ecuaciones del sistema

$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases}$

y luego igualarlas, se obtiene la expresión: $3 - 2y = -y$

Lección

Resuelve los sistemas lineales.

a. $\begin{cases} 4x + 5y = 15 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$

Solución por método de reducción

En la solución de un sistema de ecuaciones por el método de **reducción**, se reducen las dos ecuaciones del sistema a una sola sumándolas. Para esto, es necesario amplificar convenientemente una de las dos, de modo que los coeficientes en una de las variables sean opuestos. Al sumar las ecuaciones transformadas, la variable se elimina y es posible despejar la otra. Luego se procede como en los métodos anteriores.

Ejemplo

Resolver por el método de reducción el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 2 & (1) \\ -3x - 2y = -1 & (2) \end{cases}$$

Solución

Al multiplicar por 3 la ecuación (1) y por 4 la ecuación (2) y súmalas miembro a miembro, se puede cancelar la variable x.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 2 & \text{(por 3)} \\ -3x - 2y = -1 & \text{(por 4)} \end{cases}$$

$$(3)\,(1) + (2)\,(4)$$

$$\begin{array}{r} \cancel{12x} + 9y = 6 \\ \cancel{-12x} - 8y = -4 \\ \hline \boxed{y = 2} \end{array}$$

Posteriormente, dicho valor de y se remplaza en cualquiera de las dos ecuaciones lineales y se despeja la variable x.

$$y \text{ en } (1)$$

$$\begin{aligned} 4x + 3 \cdot 2 &= 2 \\ 4x + 6 &= 2 \\ 4x &= 2 - 6 \\ 4x &= -4 \\ x &= -\frac{4}{4} = -1 \\ \boxed{x = -1} \end{aligned}$$

El conjunto solución es $(-1, 2)$.

Cuando se resuelve un sistema por método de reducción, al transformar las dos ecuaciones en una sola se presentan dos casos especiales.

Caso 1. Se obtiene la expresión *0 = constante* (diferente de cero). En este caso, el sistema no tiene solución y se denomina **inconsistente**.

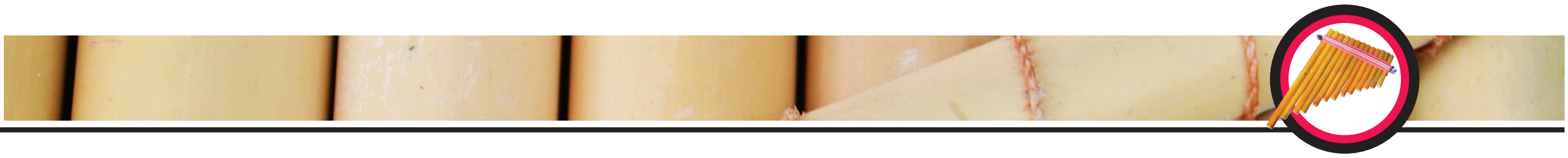
Caso 2. Se obtiene la expresión *0 = 0*. Esto significa que el sistema tiene infinitas soluciones y es llamado **dependiente** o **indeterminado**.

Tarea

Resuelve el problema.

Se donarán 60 ctvs. por cada entrada de mayores y 40 ctvs. por cada una de niños. Si asistieron 250 personas y la donación fue de $ 128, calcula cuántas entradas de mayores y cuántas de niños se vendieron.

BECU_M1_B1_P06_61.indd 32 4/22/14 11:50 AM



Actividades

Iguala coeficientes de ecuaciones.

1. Escribe el número por el cual debe ser multiplicada la ecuación para eliminar la variable x al sumar las ecuaciones y resuelve los sistemas.

a. $\begin{cases} 2x - 12y = 6 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + y = 12 \\ -y + 2x = 9 \end{cases}$

c. $\begin{cases} -2y + 5x = 29 \\ 2x + 5y = 29 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 3x - y = 9 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x + 6y = 4 \end{cases}$

Resuelve sistemas lineales.

2. Resuelve por el método de reducción las siguientes ecuaciones. Luego, comprueba la solución obtenida en cada caso.

a. $\begin{cases} 6x - 4y = 12 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$

b. $\begin{cases} m - 2n = 4 \\ 2m + 3n = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3w - 2z = 7 \\ 2w + z = 14 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3p - 11q = 5 \\ 3p + 4q = 1 \end{cases}$

e. $\begin{cases} 2a - b = 4 \\ 3a + b = 11 \end{cases}$

f. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 4x - 6y = 6 \end{cases}$

g. $\begin{cases} -2m - 4n = -10 \\ 2m - 3n = 3 \end{cases}$

h. $\begin{cases} r + 3t = 7 \\ r + t = 3 \end{cases}$

Resuelve sistemas lineales mediante un cambio de variable.

3. Un sistema de la forma

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = -1 \\ \frac{5}{y} + \frac{2}{x} = 1 \end{cases}$$

no es un sistema lineal, pero puede transformarse en un sistema lineal con el cambio de variables.

$u = \dfrac{1}{x}$, $v = \dfrac{1}{y}$, quedando

$$\begin{cases} u - 2v = -1 \\ 5v + 2u = 1 \end{cases}$$

Al resolver este sistema se obtiene que,

$u = -\dfrac{1}{3}$ y $v = \dfrac{1}{3}$

Cambiando nuevamente u y v por las expresiones se tiene,

$\dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{3}$ y $\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}$

Despejando $x = -3$ y $y = 3$.

El conjunto solución es $(-3, 3)$

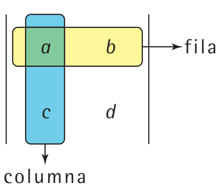
Resuelve los siguientes sistemas siguiendo el proceso anterior y utilizando el método de reducción.

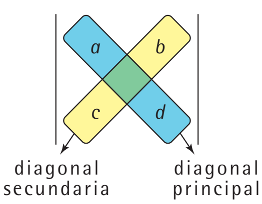
a. $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -6 \end{cases}$

b. $\begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 13 \\ \frac{8}{y} - \frac{5}{x} = -49 \end{cases}$

Toma en cuenta

Elementos de una determinante 2 · 2.





Solución por el método de determinantes

Un **determinante** es un número asociado a un arreglo de números reales en igual cantidad de filas y de columnas.

Por ejemplo, la notación.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

corresponde a la determinante 2×2 o de orden dos, asociado a un arreglo de dos filas y dos columnas.

En esta determinante, a y d forman la **diagonal principal** y c y b forman la **diagonal secundaria**.

Para calcular el valor de un determinante 2 × 2, al producto de los números de la diagonal principal se le resta el producto de los números en la diagonal secundaria.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Ejemplo

Evaluar los siguientes determinantes:

a. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} -5 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$

Solución

a. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 3(9) - 2(6) = 27 - 12 = 15$

b. $\begin{vmatrix} -5 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -5(0) - \left(-\frac{1}{2}\right)(-1) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

Sabías que...

Historia de la Matemáticas

Cardan, en «Ars Magna» (1545), da una regla para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales que llama *regla de modo*. Esta regla corresponde en esencia a la conocida Regla de Cramer para la resolución de un sistema 2 × 2.

Es posible resolver un sistema de ecuaciones lineales utilizando determinantes, mediante un método denominado **Regla de Cramer**. Este método se resume de la siguiente forma.

Sea $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ un sistema de ecuaciones

Se cumple que:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}_{\text{Determinante del sistema}}} = \frac{ce - bf}{ae - bd} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}_{\text{Determinante del sistema}}} = \frac{af - cd}{ae - bd}$$

Ejemplo

Resolver mediante la Regla de Cramer el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -3x + 4y = 5 \\ x - 9y = -2 \end{cases}$$

Solución

Se organizan las determinantes necesarios y se resuelven.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -9 \end{vmatrix}} = \frac{(-45) - (-8)}{27 - 4} = -\frac{37}{23} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -9 \end{vmatrix}} = \frac{6 - 5}{27 - 4} = \frac{1}{23}$$

Luego, la solución del sistema es $\left(-\frac{37}{23}, \frac{1}{23}\right)$

Actividades

Calcula un determinante.

1. Halla el valor de cada determinante.

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}$

e. $\begin{vmatrix} -\frac{2}{5} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{6} & -\frac{7}{2} \end{vmatrix}$

f. $\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$

g. $\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -6 & -9 \end{vmatrix}$

h. $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}$

i. $\begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{vmatrix}$

j. $\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{7}{5} & -\frac{3}{4} \end{vmatrix}$

Resuelve sistemas lineales mediante Cramer.

2. Resuelve cada sistema de ecuaciones por la Regla de Cramer.

a. $\begin{cases} x - 5y = 8 \\ -7x + 8y = 25 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3a - 2b = 13 \\ 2a + 4b = 3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} \frac{6}{5}m - \frac{2}{3}n = 4 \\ \frac{3}{4}m + \frac{5}{6}n = 2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} \frac{2}{3}q + 1 = -p \\ \frac{5p}{2} - q = -\frac{21}{2} \end{cases}$

e. $\begin{cases} 3w + z = 1 \\ w + 3z = -1 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 2a - b = 3 \\ 3a - 2b = 2 \end{cases}$

g. $\begin{cases} \frac{2}{3}w - 4z = 1 \\ \frac{1}{4}w - 3z = 2 \end{cases}$

h. $\begin{cases} \frac{4}{3}x - 2y = 12 \\ 3x + \frac{4y}{5} = 27 \end{cases}$

Forma sistemas lineales.

3. Plantea un sistema de ecuaciones que corresponda a cada determinante.

a. $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & 4 \\ 2 & \frac{5}{4} \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{vmatrix}$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En el proceso de resolución de problemas se deben realizar los siguientes pasos.

Paso 1. Comprender el problema:

- Leer con atención el problema, primero en forma general y luego parte por parte.

BECU_M1_B1_P06_61.indd 35 4/22/14 11:50 AM

- Realizar un dibujo, esquema o tabla que facilite la comprensión del problema.
- Identificar los datos necesarios para aplicar la mejor estrategia a utilizar.

Paso 2. Planear la solución:

- Adecuar un plan de trabajo que permita anticipar una respuesta razonable.
- Escoger las operaciones a realizar.

Paso 3. Desarrollar el plan:

- Resolver las operaciones en el orden establecido.
- Verificar si todas las preguntas han sido resueltas.

Paso 4. Revisar y reflexionar sobre la solución:

- Verificar si la solución encontrada es válida.
- Reflexionar sobre el proceso seguido para hallar la solución.
- Analizar si existen otras maneras de solucionar el problema.

Ti Trabajo individual

Escribe en símbolos las siguientes frases.

- El doble de un número.
- El triple de un cuadrado de un número.

Ejemplo

Resolver el problema. La suma de las cifras de un número es 7. Si al número se le resta 9, las cifras se invierten. Hallar el número.

Solución

- Una vez realizada la lectura atenta, se determinan las incógnitas.

  x: cifra de las decenas.

  y: cifra de las unidades.

- Se plantean dos ecuaciones, según las condiciones del problema.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 10x + y - 9 = 10y + x \end{cases}$$

- Se resuelve el sistema por cualquier método. En este caso se ha elegido el método de reducción.

$$\begin{cases} x + y = 7 \quad (9) \\ 9x - 9y = 9 \end{cases}$$

  Para sumar las dos ecuaciones se ha transformado la primera ecuación.

$$\begin{array}{l} 9x + 9y = 63 \\ 9x - 9y = 9 \\ \hline 18x \qquad = 72 \end{array}$$

$$x = \frac{72}{18} = 4$$

  Si $x = 4$ se tiene que $y = 3$. Por tanto, el número pedido es 43.

- Se verifica la solución de acuerdo con las condiciones dadas en el problema.

  $4 + 3 = 7$ y $43 - 9 = 34$

Actividades

Resuelve problemas mediante sistemas lineales.

1. Escribe cada enunciado en lenguaje algebraico utilizando letras.

a. La suma de dos números es 10.

b. La diferencia entre dos números equivale a 12.

c. El cociente entre dos números es igual a $\frac{1}{4}$.

d. El triple de un número aumentado en otro número equivale a 9.

e. El triple de la suma de dos números es 9.

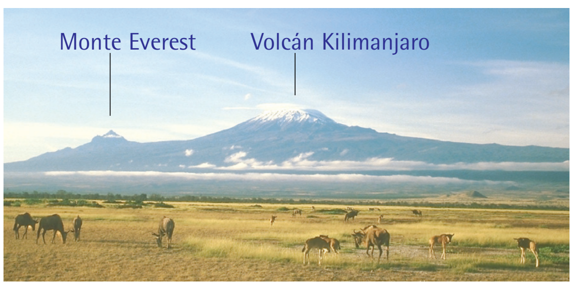
f. Un tercio de la diferencia entre dos números equivale a 10.

g. Si el mayor de dos números se divide entre el menor, el cociente es 3 y el residuo es 1.

h. El triple de un número aumentado en 2 equivale al doble de otro número disminuido en 5.

2. Sociales. Los accidentes naturales más grandes del mundo, las grandes montañas, dejan a los edificios más altos a un bajo nivel. La montaña más alta de todas es el monte Everest en la cordillera del Himalaya. El aire en la cima del Everest tiene una densidad tres veces inferior que a nivel del mar.

a.



Si la suma de las alturas del monte Everest y el volcán Kilimanjaro equivale a 14 744 m, y la altura del monte Everest es $\frac{3}{2}$ de la altura del Kilimanjaro aumentada en 4 metros. Encontrar las alturas en metros del monte Everest y el volcán Kilimanjaro.

b. El Mauna Kea es un volcán de Hawai. Tiene la base en el fondo del mar. Si se midiera desde ahí en lugar de medirlo desde el nivel del mar, sería 1 355 m más alto que el monte Everest. ¿Qué altura tiene el Mauna Kea medido desde su base?

c. El volcán más alto del sistema solar es el monte Olimpo ubicado en Marte. Es tres veces más alto que el Everest y nueve veces más alto que el monte Olimpo de Grecia. ¿Cuál es la altura del monte Olimpo en Marte? ¿Cuál es la altura del monte Olimpo de Grecia?

3. Para los siguientes problemas, plantea un sistema de ecuaciones y, luego, resuélvelos.

a. La suma de dos números es 73 y su diferencia es 33. Halla los números.

b. El perímetro de una sala rectangular es 18 metros y 4 veces el largo equivale a 5 veces el ancho. Halla las dimensiones de la sala.

c. En un teatro, 10 entradas de adulto y 9 de niños cuestan $81,50; 17 entradas de niños y 14 de adultos cuestan $134,50. Halla el precio de una entrada de adulto y de una de niño.

d. La edad de Antonio hace 8 años era el triple de la edad de su hija María. Dentro de 4 años la edad de María será $\frac{5}{9}$ de la edad de su padre.

¿Cuál es la edad actual de Antonio y de María?

e. La diferencia entre dos números es 17. Si el mayor se divide entre el menor, el cociente es 2 y el residuo es 4. Halla los números.

f. La diferencia entre dos números es 4. Si el mayor se divide entre el menor, el cociente es 1 y el residuo es 4. Halla los números.

BECU_M1_B1_P06_61.indd 37 4/22/14 11:50 AM

Métodos de solución de sistemas 3 × 3

Destreza con criterio de desempeño:
Resolver un **sistema de tres ecuaciones** con tres variables de forma analítica. **(P)**

Conocimientos previos

Comprueba si los valores de x y y son solución del sistema.

$x = 3;\ y = -1$

$2x - 4y = 8$

$x - 5y = 5$

Un conjunto de la forma $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ ex + fy + gz = h \\ ix + jy + kz = l \end{cases}$

es un sistema de ecuaciones 3×3. Es decir, tiene tres ecuaciones con tres incógnitas.

Cada una de las ecuaciones que forman un sistema 3×3 se interpreta como un plano en el espacio tridimensional.

Por ejemplo, la ecuación $4x + 5y + 8z = 20$ se representa como se muestra en la figura 7.

Por lo tanto, la solución de un sistema de ecuaciones 3×3, si existe, es un punto de la forma (x, y, z) que resulta del corte de tres planos diferentes en el espacio. Las coordenadas de dicho punto satisfacen las tres ecuaciones del sistema simultáneamente.

Para resolver un sistema de ecuaciones 3×3, resulta práctico utilizar el método de reducción, como se muestra en el siguiente ejemplo.

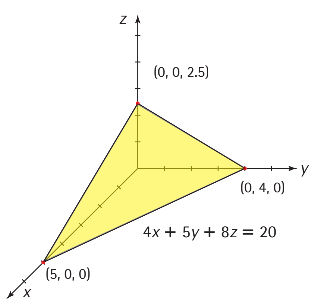


Figura 7.

Ejemplo

Resolver el sistema de ecuaciones lineales con tres variables.

$$\begin{cases} 3x - y + z = 7 & ① \\ -2x + y - 2z = -5 & ② \\ 4x + 7y + 5z = 1 & ③ \end{cases}$$

Solución

De manera análoga a la solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, se combinan las ecuaciones ① y ② para cancelar la variable y.

$$\begin{array}{r} 3x - \cancel{y} + z = 7 \\ -2x + \cancel{y} - 2z = -5 \\ \hline x \qquad - z = 2 \quad ④ \end{array}$$

Se combinan las ecuaciones ① y ③ para cancelar la variable y.

$$\begin{array}{lcr} 3x - y + z = 7 & (\text{por } 7) \rightarrow & 21x - \cancel{7y} + 7z = 49 \\ 4x + 7y + 5z = 1 & & 4x + \cancel{7y} + 5z = 1 \\ \cline{3-3} & & 25x \qquad + 12z = 50 \quad ⑤ \end{array}$$

Se aplica el método de reducción con las ecuaciones ④ y ⑤ para cancelar z.

$$\begin{array}{lcr} x - z = 2 & (\text{por } 12) \rightarrow & 12x - 12z = 24 \\ 25x + 12z = 48 & & 25x + 12z = 50 \\ \cline{3-3} & & 37x \qquad = 74 \end{array}$$

Luego,

$$x = \frac{74}{37} = 2.$$

Se remplaza en ④ o ⑤ para hallar el valor de z.
Luego se remplazan x y z en cualquiera de las ecuaciones originales, con lo cual se obtiene la solución $(2, -1, 0)$.

BECU_M1_B1_P06_61.indd 38 4/22/14 11:50 AM

Actividades

Resuelve sistemas lineales con tres incógnitas.

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones 3 × 3.

a. $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 5 \\ x - y - 3z = -10 \end{cases}$

b. $\begin{cases} m + n + r = 3 \\ 2m - n + r = 2 \\ 3m + 3n - r = 5 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2p - r = 14 \\ 4p + q - r = 41 \\ 3p - q + 5r = 53 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 3a - 2b + c = 2 \\ a + 4b - c = 6 \\ 2a + 5b - 7c = -9 \end{cases}$

e. $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} - \dfrac{z}{3} = 3 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{6} - \dfrac{z}{2} = -5 \\ \dfrac{x}{6} - \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{6} = 0 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 6a + 3b + 2c = 12 \\ 9a - b + 4c = 37 \\ 10a + 5b + 3c = 21 \end{cases}$

g. $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 3y - 4z = 25 \\ -5x + z = -14 \end{cases}$

h. $\begin{cases} m + n + p = 11 \\ 2m + 2n - 2p = 7 \\ m - n + 3p = 13 \end{cases}$

i. $\begin{cases} a + 4b + 5c = 11 \\ 3a - 2b + c = 5 \\ 4a + b - 37 = -26 \end{cases}$

j. $\begin{cases} \dfrac{x + y}{7} = \dfrac{y + 4}{5} \\ \dfrac{x + 2}{10} = \dfrac{y - z}{3} \\ \dfrac{y - 4}{2} = \dfrac{y - z}{5} \end{cases}$

Resuelve problemas mediante sistemas lineales

2. QUÍMICA. Los químicos utilizan símbolos para representar elementos fórmulas para compuestos; y ecuaciones para las reacciones químicas.

El químico francés Lavoisier fue quien planteó la primera ecuación para una reacción química, a partir de sus estudios sobre la fermentación del mosto de la uva. En este proceso, el azúcar, en forma de glucosa, se transforma en alcohol etílico y dióxido de carbono.

Esta transformación se representa mediante la ecuación:

$$\underbrace{\overset{\text{Glucosa}}{a\,C_6H_{12}O_6}}_{\substack{\text{Lado izquierdo}\\ \text{(reactivos)}}} \rightarrow \underbrace{\overset{\substack{\text{Alcohol}\\ \text{etílico}}}{b\,C_2H_5OH} + \overset{\substack{\text{Dióxido}\\ \text{de carbono}}}{c\,CO_2}}_{\substack{\text{Lado derecho}\\ \text{(productos)}}}$$

La reacción anterior no está *balanceada.*

Para balancear una reacción química se utilizan los *coeficientes estequiométricos*, que son unos números (a, b, c) que se anotan delante de las fórmulas y que indican el número de átomos y moléculas de cada sustancia que intervienen en dicha reacción química. El proceso para conseguir los coeficientes estequiométricos es el siguiente:

- Se escribe la ecuación química, representando los coeficientes con letras.

$$a\,C_6H_{12}O_6 \rightarrow b\,C_2H_5OH + c\,CO_2$$

- Se comprueba el número de átomos de cada elemento que hay en los reactivos y en los productos.

	Reactivos	Productos
Átomo de carbono	$6a$	$2b + c$
Átomo de hidrógeno	$12a$	$6b$
Átomo de oxígeno	$6a$	$b + 2c$

- Se escribe una ecuación para cada elemento, con lo cual se forma un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 6a = 2b + c \\ 12a = 6b \\ 6a = b + 2c \end{cases}$$

- Se resuelve el sistema de ecuaciones asignando un valor arbitrario a uno de los coeficientes. Por ejemplo, si $a = 1$ entonces $b = 2$ y $c = 2$.
- Se escriben los coeficientes calculados en la ecuación química y esta queda balanceada.

$$C_6H_{12}O_6 \rightarrow 2C_2H_5OH + 2CO_2$$

Balancea las siguientes reacciones químicas.

a. Hidrógeno + Oxígeno → Agua
$H_2 + O_2 \rightarrow H_2O$

b. Hidrógeno + Nitrógeno → Amoniaco
$H_2 + N_2 \rightarrow NH_3$

c. Hierro + Oxígeno → Óxido férrico
$Fe + O_2 \rightarrow Fe_2O_3$

BECU_M1_B1_P06_61.indd 39 4/22/14 11:50 AM

Solución de sistemas 3 × 3 por el método de determinantes

Una determinante que consta de tres filas y tres columnas, se denomina *determinante de tercer orden*, o de orden 3.

Para determinar el valor de una determinante de tercer orden, se aplica un método conocido como la **Regla de Sarrus**.

En forma general, la Regla de Sarrus se aplica así:

$$\left|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{array}\right| = (aei + dhc + gbf) - (ceg + fha + ibd)$$

Trabajo cooperativo

Determina el valor de los determinantes.

a. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

Ejemplo

Hallar el valor de la determinante.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Solución

En la práctica, para facilitar el cálculo de los productos de los números en las diagonales, en la parte inferior de la determinante se repiten las dos primeras filas, luego se trazan las diagonales y finalmente se realizan las operaciones.

$$\left|\begin{array}{ccc} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{array}\right|$$

$$\underline{-6 + 1 + 16} - \underline{8 - 6 + 2} = 11 - 4 = 7$$

Para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas por determinantes se aplica la regla de Cramer que, de manera general, se enuncia así:

Dado el sistema:

$$\begin{cases} ax + by + cz = m \\ dx + ey + fz = n \\ gx + hy + iz = r \end{cases}$$

Se cumple que:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & b & c \\ n & e & f \\ r & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}} \; ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} a & m & c \\ d & n & f \\ g & r & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}} \; ; \; z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & m \\ d & e & n \\ g & h & r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

Determinante del sistema

Investiga

¿Cuáles son los tipos de soluciones que se pueden presentar en un sistema lineal de tus varibles?

Ejemplo

Resolver, por determinantes, el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 3x - y + z = 7 \\ -2x + y - z = -5 \\ 4x + 7y + 5z = 1 \end{cases}$$

Solución

Aplicando la regla de Cramer y luego la regla de Sarros para hallar el valor de cada determinante.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & -1 \\ 1 & 7 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{24}{12} = 2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ -2 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-12}{12} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -2 & 1 & -5 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{0}{12} = 0$$

La solución del sistema de ecuaciones lineales con tres variables es la terna ordenada $(2, -1, 0)$.

Actividades

Determina el valor del determinante.

1. Halla el valor de cada determinante.

a. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{4} \\ -2 & \frac{1}{2} & 3 \\ -4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

e. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

f. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

g. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix}$

h. $\begin{vmatrix} \frac{3}{5} & -2 & 4 \\ -1 & 6 & -4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{vmatrix}$

Determina el conjunto solución de un sistema lineal.

2. Resuelve cada sistema de ecuaciones por el método de determinantes.

a. $\begin{cases} -x + 2y + 4z = 1 \\ 4x + 6y - 2z = 2 \\ x - y + 6z = 3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = -2 \\ x + 3y + z = 10 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + 3y - z = -9 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x + 3y = 28 \\ 5x - 3z = 16 \\ -y + z = -3 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + y - z = 5 \\ x + 3y - 2z = 19 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 2x + y - z = -3 \\ 3x - y + z = 3 \\ 5x + 4z = 12 \end{cases}$

g. $\begin{cases} 8x - 5y + z = -2 \\ 3x + 6y + 2z = 15 \\ -2x + 3y + 4z = 4 \end{cases}$

h. $\begin{cases} x + y + z = -5 \\ x - y + 6z = -11 \\ 5x + y + z = -9 \end{cases}$

i. $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y = 6 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$

j. $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - 3y + 5z = -5 \\ 3x + 4y + 7z = 10 \end{cases}$

Problemas de aplicación

Destrezas con criterio de desempeño:

- Reconocer **problemas que pueden ser modelados mediante funciones lineales** (costos, ingresos, velocidad, etc.) identificando las variables significativas y las relaciones entre ellas. **(M)**
- Resolver **problemas** con ayuda de modelos lineales. **(P,M)**

Para resolver problemas que conducen al planteamiento de sistemas 3×3, se siguen los mismos pasos explicados anteriormente.

Ejemplo

Resolver el siguiente problema.

Una multinacional de seguros tiene delegaciones en Quito, Guayaquil y Cuenca. El número total de altos ejecutivos de las tres delegaciones asciende a 31. Para que el número de altos ejecutivos radicados en Guayaquil sea igual a la de Quito, deben trasladarse tres de Quito a Guayaquil. Además, el número de delegados en Quito excede en 1 a los delegados ubicados en otras ciudades. ¿Cuántos altos ejecutivos están radicados en cada ciudad?

Solución

Al leer atentamente el problema, se identifican las siguientes incógnitas:

x: número de delegados en Quito.

y: número de delegados en Guayaquil.

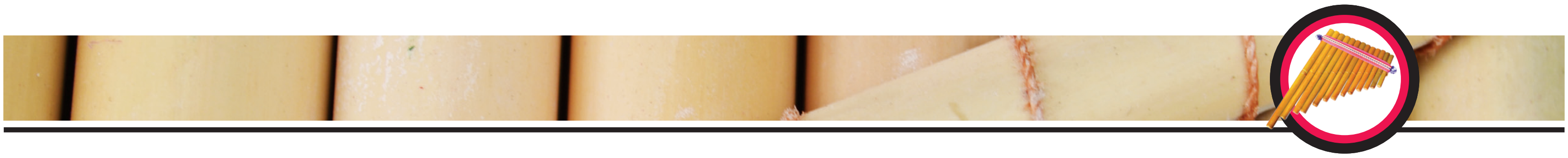
z: número de delegados en Cuenca.

Conocimientos previos

Escribe en símbolos la expresión:

La suma de tres números pares consecutivos es 10.

BECU_M1_B1_P06_61.indd 42 4/22/14 11:50 AM



Actualidad

Pasos para resolver problemas:

Comprensión
↓
Planteamiento
↓
Resolución
↓
Comprobación

El planteamiento del problema está representado en el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 31 \\ x - 3 = y \\ y + z + 1 = x \end{cases} \quad \text{equivale a} \quad \begin{cases} x + y + z = 31 & ① \\ x - y = 3 & ② \\ -x + y + z = -1 & ③ \end{cases}$$

Si se suman ② y ③, se eliminan x y y.

$$\begin{array}{r} x - y \qquad = \ \ 3 \\ -x + y + z = -1 \\ \hline z = \ \ 2 \quad ④ \end{array}$$

Al sumar ① y ② se elimina y.

$$\begin{array}{r} x + y + z = 31 \\ x - y \qquad = \ \ 3 \\ \hline 2x \qquad + z = 34 \quad ⑤ \end{array}$$

Luego

$$\begin{aligned} 2x + z &= 34 \\ 2x + 2 &= 34 \\ x &= 16 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $y = 13$.

Así, el número de delegados en cada ciudad es: 16 en Quito, 13 en Guayaquil y 2 en Cuenca. Pues,

$$\begin{aligned} 16 + 13 + 2 &= 31 \\ 16 - 3 &= 13 \\ 13 + 2 + 1 &= 16 \end{aligned}$$

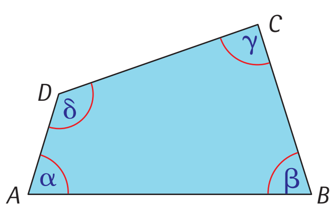
Actividades

Resuelve problemas con sistemas lineales.

Resuelve los siguientes problemas.

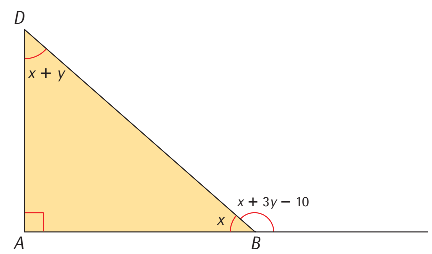
1. La suma de tres números es 12. El tercero es el cuádruple del segundo y el segundo es igual a 6 veces el primero. ¿Cuáles son los números?

2. En el cuadrilátero de la figura, α es igual a β, el ángulo γ es 30° mayor que el ángulo α y $\delta = 105°$. Calcular el valor de los ángulos restantes.



3. La suma de las tres cifras de un número es 18. La suma de la cifra de las centenas y la cifra de las decenas excede en 10 a la cifra de las unidades, y la suma de la cifra de las centenas con la cifra de las unidades excede en 2 a la cifra de las decenas. ¿Cuál es el número?

4. Determina la medida de x y y y la de los ángulos en la figura.



5. 4 kg de arroz, 5 de azúcar y 3 de lenteja cuestan $14,50 y 3 de azúcar, 5 de arroz y 4 de lenteja cuestan $11,80; 2 de lenteja, 1 de azúcar y 2 de arroz cuestan $4,60. Halla el precio de un kilogramo de cada uno de los productos.

6. Se quiere repartir un premio de $ 500 entre tres personas, la primera persona debe recibir el doble de la segunda, la segunda debe recibir el triple de la tercera. ¿Cuánto dinero recibirá cada persona?

BECU_M1_B1_P06_61.indd 43 4/22/14 11:51 AM

Problemas de ampliación

1. LITERATURA. En el siglo XIX, el autor inglés Lewis Carroll, famoso por su libro *Alicia en el país de las maravillas*, haciendo uso de sus cualidades de lógico y matemático propone en su obra dos problemas matemáticos.

El primero de ellos es: Tweedledum dice a Tweedledee: «Tu peso y el doble del mío suman 361 libras». Luego Tweedledee responde: «Por el contrario, tu peso y el doble del mío suman 362 libras».

Y el segundo, despojado de todo ropaje literario, se cita así en su original:

«El consumo en una cafetería de un vaso de limonada, 3 sandwiches y 7 bizcochos ha costado un chelín y dos peniques, mientras que un vaso de limonada, 4 sandwiches y 10 bizcochos vale un chelín y cinco peniques».

a. Encuentra el peso de Tweedledum y Tweedledee.

b. Si un chelín equivale a 5 peniques. Halla el valor en peniques de un sandwich y un bizcocho.

2. Existe un método distinto al de Sarrus para encontrar el valor de un determinante 3 × 3, denominado el método de los menores complementarios. Este método consiste básicamente en transformar un determinante de tercer orden en la suma de tres determinantes de segundo orden, tachando adecuadamente una fila y una columna en cada caso.

Por ejemplo, para el determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Los menores complementarios se obtienen formando determinantes 2 × 2 con los elementos de la determinante original, así:

- Se tacha la primera fila y la primera columna.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

La primera determinante 2 × 2 es:

$$\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}$$

- Se tacha la primera fila y la segunda columna.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

La segunda determinante 2 × 2 es:

$$\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}$$

- Se tacha la primera fila y la tercera columna.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

La tercera determinante 2 × 2 es:

$$\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Los elementos a, b y c se asignan como factores a las determinantes 2 × 2 de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Así, para hallar el valor de la determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

se realiza:

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot 12 - 2 \cdot 18 + 3 \cdot 3 \\ &= 12 - 36 + 9 \\ &= -15 \end{aligned}$$

Halla el valor de las determinantes por el método de menores complementarios.

a. $\begin{vmatrix} -4 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

b. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ d. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -5 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

3. Para qué valores de k, el sistema:

$$\begin{cases} kx + y = 1 \\ x + ky = 1 \end{cases}$$

a. No tiene solución.

b. Tiene única solución.

c. Tiene infinitas soluciones.

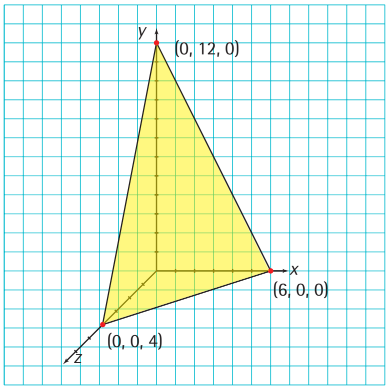
Explica cada respuesta.

4. Toda ecuación de primer grado con tres variables representa un plano en el espacio. Este plano se grafica en una figura tridimensional, con tres ejes de coordenadas, el eje de abscisas, el eje de ordenadas y un eje más denominado cota.

Para graficar la ecuación $2x + y + 3z = 12$ se procede así:

- Se remplazan y, z por 0 y se despeja x en la ecuación, así, $x = 6$, el primer punto a graficar es (6, 0, 0).
- Se remplazan en la ecuación x, z por 0 y se despeja y, entonces, $y = 12$, el segundo punto a graficar es (0, 12, 0).
- Se remplazan x, y por 0 y se despeja z en la ecuación, luego $z = 4$, el tercer punto a graficar es (0, 0, 4).

La gráfica de la ecuación es:



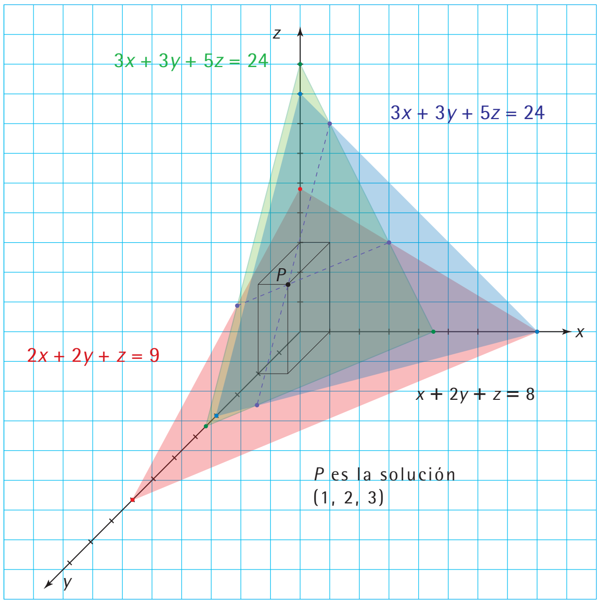
Para obtener gráficamente la solución de un sistema de ecuaciones 3 × 3 se hace lo siguiente:

- Se dibujan los tres planos que representan las ecuaciones por el método anteriormente descrito.
- Se traza la intersección de dos planos, que es una línea recta.
- Se traza la intersección del plano restante con cualquiera de los planos anteriores, es una recta.
- Se busca el punto corte de las dos rectas. Este punto es la solución del sistema.

La solución del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 2x + 2y + z = 9 \\ 3x + 3y + 5z = 24 \end{cases}$$

en forma gráfica es:



Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones:

a. $\begin{cases} x + y + z = 8 \\ 2x + 2y + z = 12 \\ 3x + 2y + z = 30 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x + 3y + z = 7 \\ 3x + 6y - z = -1 \\ 2x + 4y + z = -9 \end{cases}$

Verifica las soluciones obtenidas en el ejercicio gráfico utilizando algún método de los vistos en la unidad.

BECU_M1_B1_P06_61.indd 45 4/22/14 11:51 AM

Inecuaciones

Destreza con criterio de desempeño:
Resolver **inecuaciones** en forma analítica y gráfica. **(P)**

Conocimientos previos

Escribe como intervalos las desigualdades.

a. $x > 3$

b. $x \leq -2$

c. $2 < x \leq 5$

Una inecuación es una desigualdad que se compone de dos expresiones algebraicas separadas por uno de los signos: $<$, $>$, $\leq$ o $\geq$.
Su solución está formada por todos los valores que hacen que la desigualdad numérica sea cierta.

Ejemplo

Determinar si $x = -1$ y $x = 6$ son soluciones de estas inecuaciones.

a. $x + 2 < 5 \xrightarrow{x=-1} -1 + 2 < 5 \rightarrow x = -1$ es solución de la inecuación.

$\xrightarrow{x=6} 6 + 2 < 5 \rightarrow x = 6$ no es solución de la inecuación.

b. $x - 3 \geq 2 \xrightarrow{x=-1} -1 - 3 \geq 2 \rightarrow x = -1$ no es solución de la inecuación.

$\xrightarrow{x=6} 6 - 3 \geq 2 \rightarrow x = 6$ es solución de la inecuación.

INECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Una inecuación de primer grado con una incógnita se resuelve como si fuera una ecuación, y se determina el intervalo solución mediante tanteo.

Toma en cuenta

- Si multiplicamos una desigualdad por un número negativo, el signo de la desigualdad varía.

$2x \leq 2$

$-1(2x) \geq -1 \cdot 2$

- Si en la inecuación la desigualdad es $\leq$ o $\geq$, el extremo común de los intervalos siempre pertenece a la solución.

Ejemplo

Resolver esta inecuación con una incógnita: $2x - 30 \leq 5x + 3$.

Primero. Se toma la inecuación como una ecuación, sustituyendo la desigualdad por una igualdad, y la resolvemos.

$2x - 30 = 5x + 3 \rightarrow 3x + 33 = 0 \rightarrow x = -\frac{33}{3} = -11$

Segundo. La solución divide la recta real en dos intervalos. Se toma un punto cualquiera de cada intervalo.

Tomamos $x = -12$ de $]-\infty, -11[$ y $x = 0$ de $]-11, +\infty[$.

Tercero. Se comprueba si estos puntos son soluciones de la inecuación. Si un punto verifica la desigualdad, entonces todo el intervalo es solución.

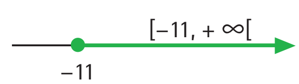
Si $x = -12 \rightarrow 0 \leq 3 \rightarrow (-12) + 33 \rightarrow 0 \nleq -3 \rightarrow]-\infty, -11[$ no es solución

Si $x = 0 \rightarrow 0 \leq 3 \rightarrow 0 + 33 \rightarrow 0 \leq 33 \rightarrow]-11, +\infty[$ es solución

Cuarto. Se comprueba si el extremo común de los intervalos es solución de la inecuación.

Si $x = -11 \rightarrow 0 \qquad \leq 3 \rightarrow (-11) + 33 \rightarrow 0 \leq 0 \rightarrow x = -11$ es solución

La solución de la inecuación es $[-11, +\infty[$.



Trabajo individual

Resuelve la siguiente inecuación.

$\frac{1}{2}x - 4 \leq 3x + 1$

Razona los pasos realizados para resolverla.

INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

Una inecuación de segundo grado con una incógnita se resuelve como si fuera una ecuación y se determinan los intervalos solución mediante tanteo.

Ejemplo

Resolver esta inecuación de segundo grado: $x^2 - x + 4 \geq 5x - 4$.

Primero. Se aplica las propiedades de las inecuaciones hasta obtener una expresión algebraica en un miembro, y cero en el otro.

$x^2 - x + 4 \geq 5x - 4 \rightarrow x^2 - x + 4 - 5x + 4 \geq 0 \rightarrow x^2 - 6x + 8 \geq 0$

Segundo. Se transforma la inecuación resultante en una ecuación. Para ello, se sustituye la desigualdad por una igualdad y se la resuelve como una ecuación de segundo grado.

Resolvemos la ecuación $x^2 - 6x + 8 = 0$.

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Tercero. Las soluciones dividen la recta real en intervalos. Se toma un punto de cada intervalo.

El punto $x = 0$ pertenece al intervalo $]-\infty, 2[$.

El punto $x = 3$ pertenece al intervalo $]2, 4[$.

El punto $x = 5$ pertenece al intervalo $]4, +\infty[$.

Cuarto. Se comprueba si estos puntos son soluciones de la inecuación. Si un punto verifica la desigualdad, entonces todo el intervalo es solución.

Si $x = 0$, se cumple que: $0^2 - 6 \cdot 0 + 8 \geq 0 \rightarrow 8 \geq 0 \rightarrow]-\infty, 2[$ es solución.

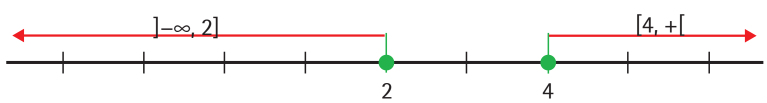
Si $x = 3$, se cumple que: $3^2 - 6 \cdot 3 + 8 \geq 0 \rightarrow -1 \geq 0 \rightarrow]2, 4[$ no es solución.

Si $x = 5$, se cumple que: $5^2 - 6 \cdot 5 + 8 \geq 0 \rightarrow 3 \geq 0 \rightarrow]4, +\infty[$ es solución.

Quinto. Se comprueba si las soluciones de la ecuación, $x = 2$ y $x = 4$, son soluciones de la inecuación.

Si $x = 2 \rightarrow 2^2 - 6 \cdot 2 + 8 \geq 0 \rightarrow 0 \geq 0 \rightarrow 2$ es solución

Si $x = 4 \rightarrow 4^2 - 6 \cdot 4 + 8 \geq 0 \rightarrow 0 \geq 0 \rightarrow 4$ es solución



Por tanto, la solución de la inecuación es la unión de dos intervalos: $]-\infty, 2] \cup [4, +\infty[$

Trabajo individual

Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado con una incógnita.

a. $x^2 - 3x + 2 \leq 0$

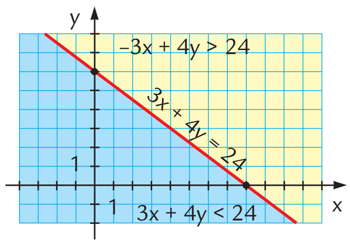
b. $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

c. $x^2 - 9x > 0$

d. $x^2 - 9 < 0$

e. $x^2 + 2 \leq 0$

BECU_M1_B1_P06_61.indd 47 4/22/14 11:51 AM



INECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS

Para resolver inecuaciones con dos incógnitas, primero consideramos la inecuación como una ecuación y representamos en el plano la recta que expresa.
Como esta recta divide el plano en dos partes, tomamos un punto de cada una y determinamos la región del plano que es la solución de la inecuación.
Las soluciones de estas inecuaciones se expresan en forma de regiones del plano que están delimitadas por una recta.

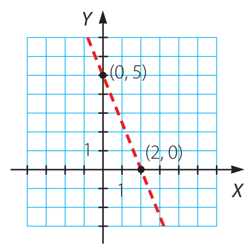
Ejemplo

Resolver esta inecuación con dos incógnitas: $5x + 2y > 10$.

Primero. Se considera la desigualdad como una igualdad, y dando valores a x e y, se representa la recta que expresa.

$5x + 2y = 10 \xrightarrow{x = 0} y = 5 \rightarrow$ Punto (0, 5)

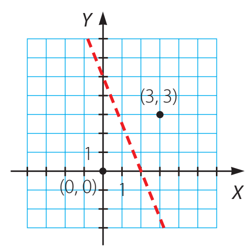
$5x + 2y = 10 \xrightarrow{y = 0} x = 2 \rightarrow$ Punto (2, 0)



Segundo. La recta divide el plano en dos regiones. Se toma dos puntos, uno de cada región del plano.

El punto (0, 0) pertenece a la parte inferior del plano.

El punto (3, 3) pertenece a la parte superior.



Tercero. Se comprueba si esos puntos son soluciones de la inecuación.

Si un punto verifica la desigualdad, entonces toda la región es solución. del plano.

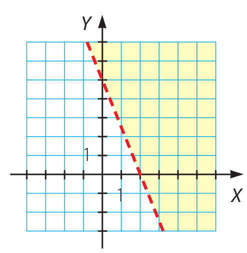
Si $x = 0, y = 0 \rightarrow 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 > 10 \rightarrow 0 > 10$

(0, 0) no es solución.

Si $x = 3, y = 3 \rightarrow 5 \cdot 3 + 2 \cdot 3 > 10 \rightarrow 21 > 10$

(3, 3) es solución.

La solución de la inecuación es la parte del plano que ocupan todos los puntos situados en la misma región que (3, 3).



Como la desigualdad no contiene el signo =, la recta no forma parte de la solución.

Toma en cuenta

Si en la inecuación la desigualdad es ≤ o ≥, la recta forma parte de la región solución.

Tarea

Representa en el plano la solución de estas inecuaciones.

a. $x + y < 0$

b. $x - y \leq 0$

c. $2x - y > 1$

d. $y - 2 \geq 0$

Sistemas de inecuaciones

Destreza con criterio de desempeño:
Resolver **sistemas de inecuaciones** lineales gráficamente. **(P)**

Un sistema de inecuaciones es un conjunto de inecuaciones del que se quiere calcular la solución común.
Para hallar la solución de un sistema de inecuaciones, se resuelve por separado cada una de las inecuaciones y luego se eligen las soluciones comunes.

Ejemplo

Conocimientos previos

Resuelve las inecuaciones.

a. $x + 5 < 2x + 2$

b. $2x - 3 \geq 5x - 1$

¿Cómo se resuelven los sistemas de inecuaciones con una incógnita?

Calcular la solución de estos sistemas de inecuaciones.

a. $\left.\begin{array}{l} x + 2 > 1 \\ 3x - 2 < 1 \end{array}\right\}$ b. $\left.\begin{array}{l} x^2 + x \leq 2 \\ 2x^2 + 3x \leq 2 \end{array}\right\}$

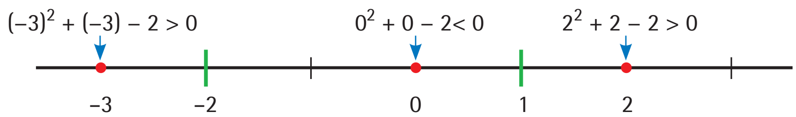
Primero. Se aplican las propiedades de las inecuaciones hasta obtener una expresión algebraica en un miembro, y cero en el otro.

a. $\left.\begin{array}{l} x + 2 > 1 \\ 3x - 2 < 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow x > -1 \longrightarrow \text{Solución: }]-1, +\infty[\\ \rightarrow 3x < 3 \rightarrow x < 1 \longrightarrow \text{Solución: }]-\infty, 1[\end{array}$

b. $x^2 + x \leq 2 \rightarrow x^2 + x - 2 \leq 0$

Se resuelve la ecuación correspondiente.

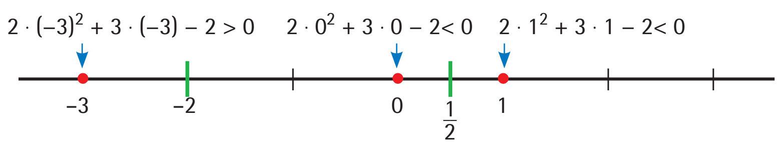
$$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases} \rightarrow \text{solución } [-2, 1]$$



$2x^2 + 3x \leq 2 \rightarrow 2x^2 + 3x - 2 \leq 0$

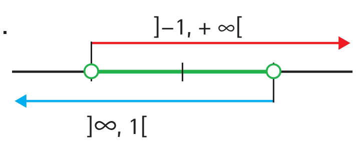
Se resuelve la ecuación correspondiente.

$$2x^2 + 3x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -2 \end{cases} \rightarrow \text{solución } \left[-2, \frac{1}{2}\right]$$

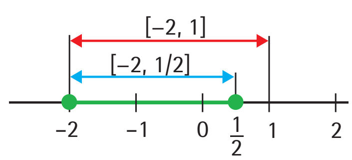


Segundo. Se elige el intervalo que cumple las dos inecuaciones.

a.



b.



Solución: $]-1, 1[$ Solución: $\left]-2, \frac{1}{2}\right[$

Actividades

1. Calcula las soluciones de estos sistemas de inecuaciones.

a. $\left.\begin{array}{r} x + 3 > 5 \\ 2x - 1 > 11 \end{array}\right\}$ b. $\left.\begin{array}{r} 15 + 7x \geq 8 \\ 3x < 14x + 6 \end{array}\right\}$

2. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita.

a. $\left.\begin{array}{r} x^2 + 3x < 6 \\ 6x^2 + 4x \geq 3 \end{array}\right\}$ b. $\left.\begin{array}{r} 2x + x^2 < 3x^2 + 4 \\ 7x^2 + x \geq 2x - 6 \end{array}\right\}$

BECU_M1_B1_P06_61.indd 49 4/22/14 11:51 AM

Ejemplo

Calcular la solución de este sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas.

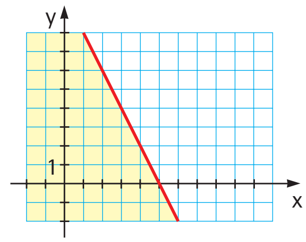
$$\begin{cases} 2x + y \leq 10 \\ 2x + 3y \leq 18 \end{cases}$$

Primero. Se resuelve cada una de las inecuaciones por separado, y se representa la parte del plano que es solución de cada una de las inecuaciones.

Para la inecuación $2x + y \leq 10$ tenemos que:

$2x + y = 10 \xrightarrow{x = 0} y = 10 \to$ Punto $(0, 10)$

$2x + y = 10 \xrightarrow{y = 0} x = 5 \to$ Punto $(5, 0)$



Para el punto (0, 0) se cumple que:

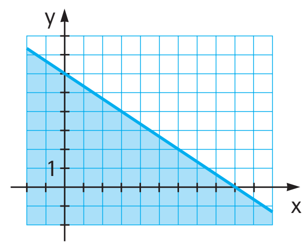
$2x + y \leq 10 \qquad 2 \to 0 + 0 \leq 10$

(0, 0) es solución.

Para la inecuación $2x + 3y \leq 18$ tenemos que:

$2x + 3y = 18 \xrightarrow{x = 0} y = 6 \to$ Punto $(0, 6)$

$2x + 3y = 18 \xrightarrow{y = 0} x = 9 \to$ Punto $(9, 0)$

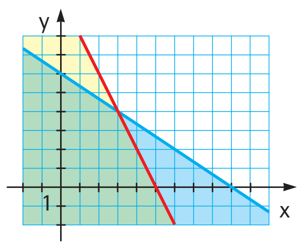


Para el punto (0, 0) se cumple que:

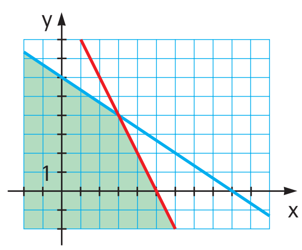
$2x + 3y \leq 18 \xrightarrow{x = 0,\, y = 0} 2 \to 0 + 3 \to 0 \leq 18$

(0, 0) es solución.

Segundo. Representamos, en los mismos ejes, la parte del plano que es solución de cada inecuación.



Tercero. Se elige la región del plano que cumple ambas inecuaciones.



La solución del sistema es la parte del plano que está coloreada.

Trabajo individual

Calcula las soluciones de estos sistemas de inecuaciones.

a. $\left.\begin{array}{r} x + 2y < 4 \\ -2x + y \geq 3 \end{array}\right\}$

b. $\left.\begin{array}{r} 12x - 3y \geq 7 \\ -x + 2y \leq 12 \end{array}\right\}$

BECU_M1_B1_P06_61.indd 50 4/22/14 11:51 AM

Actividades

Determinar el conjunto solución de las inecuaciones.

1. Resuelve las inecuaciones.

a. $-x + 15 \leq 3 - 7x$

b. $x + 11 \geq 3 - 4x$

c. $-x - 13 \leq 3 + 7x$

d. $2x + 11 \geq 6 + 5x$

2. Encuentra la solución de las inecuaciones.

a. $\frac{1 - 5x}{4} - 2\frac{4 + 3x}{5} \leq \frac{1}{2}$

b. $\frac{-2 + 3x}{5} + \frac{6 - 4x}{3} + \frac{1}{2} \geq 0$

c. $1 - \frac{2x - 5}{6} + \frac{1 - 4x}{2} - \frac{x - 1}{3} < 0$

3. Determina las soluciones de estas inecuaciones.

a. $\frac{x + 2}{3} + x\frac{(x - 1)}{5} > 0$

b. $\frac{3x - 1}{2} - \frac{x - x^2}{3} + 1 < 0$

c. $x - \frac{1 - 2x}{3} - 2\frac{x^2 + 1}{4} \geq 5$

d. $3 - \frac{2x - 3}{2} + \frac{16x + x^2}{3} \geq 0$

e. $\frac{x - 1}{4} - \frac{12x - x^2}{3} \geq \frac{2x^2 + 1}{3} - x$

4. ¿Cuál es la solución de estas inecuaciones?

a. $x^2 - x - 6 < 0$

b. $-x^2 - 2x + 8 < 0$

c. $2x^2 + 5x + 6 < 0$

d. $-x^2 + 3x - 4 < 0$

e. $2x^2 + 5x - 3 > 0$

f. $6x^2 + 31x + 18 \leq 0$

5. Resuelve estas inecuaciones que contienen fracciones algebraicas.

a. $\frac{x + 3}{x - 5} < 0$

b. $\frac{2x - 3}{x + 3} < 0$

c. $\frac{-x + 1}{2 - 3x} > 0$

d. $\frac{2 - x}{2x + 5} - 1 > 0$

6. Resuelve estos sistemas de inecuaciones.

a. $\left.\begin{array}{r} 2(x - 5) - 3(2 - 2x) < 0 \\ -x + 3(2 + x) > 3 \end{array}\right\}$

b. $\left.\begin{array}{r} 4(2x - 5) + 2(8 - 2x) + 7 \geq 0 \\ 3(1 - 2x) - 3(2x - 1) + 1 \geq 0 \end{array}\right\}$

c. $\left.\begin{array}{l} \frac{x - 2}{5} + \frac{1 - x}{3} < 0 \\ \frac{2 - 3x}{6} - \frac{3 - 3x}{2} > 0 \end{array}\right\}$

d. $\left.\begin{array}{r} -3(x + 1) \cdot 2 - \frac{2 + 5x}{3} > 1 \\ 2 \cdot \frac{2x - 1}{5} + \frac{1}{5} < 0 \end{array}\right\}$

7. Obtén las soluciones de estos sistemas.

a. $\begin{array}{r} x^2 - 3x - 4 > 0 \\ 2x - 3 < 0 \end{array}$

b. $\begin{array}{r} x^2 - 3x - 4 < 0 \\ 2x - 3 < 0 \end{array}$

c. $\begin{array}{r} x^2 - 3x - 4 > 0 \\ 2x - 3 > 0 \end{array}$

d. $\begin{array}{r} x^2 - 3x - 4 < 0 \\ 2x - 3 > 0 \end{array}$

8. Resuelve estos sistemas de inecuaciones.

a. $\begin{cases} 10 - 3x - x^2 < 0 \\ 3x + 5 > -16 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 10 - 3x - x^2 < 0 \\ 2x - 3 > 13 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x^2 + 4x - 5 > 0 \\ 3x - 2 < 10 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x^2 + 4x - 5 < 0 \\ 3x - 2 > 10 \end{cases}$

9. Obtén gráficamente las soluciones de los siguientes sistemas de inecuaciones.

a. $\begin{cases} 2x - 3y + 6 < 0 \\ x + 2y > 11 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x - 3y + 6 > 0 \\ X + 2y > 11 \end{cases}$

10. Calcula las soluciones de estos sistemas.

a. $\begin{cases} 2x - y + 6 < 0 \\ -4x + 2y < 2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x - y + 6 < 0 \\ -4x + 2y > 2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x - y + 6 > 0 \\ -4x + 2y < 2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x - y + 6 > 0 \\ -4x + 2y > 2 \end{cases}$

11. Resuelve los sistemas.

a. $\begin{cases} \frac{2x + y}{3} < \frac{y + 6}{5} \\ \frac{4 - x}{3} + \frac{2 - y}{5} < 2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{x - 2y + 3}{2} \geq \frac{x - y + 1}{2} \\ 1 - \frac{2x - 4 - y}{3} + \frac{2x + 3y}{2} \geq 0 \end{cases}$

Definición analítica del valor absoluto. Propiedades

Destreza con criterio de desempeño:
Identificar y analizar la definición analítica del **valor absoluto** y sus propiedades. **(C)**

Para todo número real x, el valor absoluto de x, $|x|$, se define como:

x, si $x \geq 0$
$-x$, si $x < 0$

Esto quiere decir que:

- Si el número es positivo o cero ($x \geq 0$), entonces ese número es el valor absoluto.
- Si el número es negativo ($x < 0$), entonces el valor absoluto es el opuesto (negativo) de ese número.

Conocimientos previos

Determina los resultados.

a. $|5| + |-2|$

b. $|-2| - |-8|$

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

- Para todo número real x, el valor absoluto de x siempre es positivo.
  $|x| \geq 0$
- El valor absoluto de 0 siempre es 0.
  $|x| = 0$ si y solo si $x = 0$
- El valor absoluto de todo número real x elevado al cuadrado es igual al número elevado al cuadrado.
  $|x|^2 = x^2$
- La raíz cuadrada de un número real x elevado al cuadrado es igual al valor absoluto de ese número.
  $\sqrt{x^2} = |x|$
- Sea $a > 0$, entonces $|x| = a$ se cumple si y solo si $x = a$ o $x = -a$.
- Sean b y x elementos de los números reales, donde $b > 0$, se cumple que:
  $|x| \leq b$ si y solo si $-b \leq x \leq b$.
- Sean b y x elementos de los números reales, donde $b > 0$, se cumple que:
  $|x| \geq b$ si y solo si $x \leq -b$ o $x \geq b$.

Toma en cuenta

- Sean *a* y *b* elementos de los números reales, se cumple que el valor absoluto de la suma de dos números reales *a* y *b* es menor o igual que la suma de sus valores absolutos.

  $|a + b| \leq |a| + |b|$

- Sean *a* y *b* elementos de los números reales, se cumple que el valor absoluto del producto de dos números a y b es igual al producto de sus valores absolutos.

  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

- Sean *a* y *b* elementos de los números reales, se cumple que el valor absoluto del cociente de dos números *a* y *b* es igual al valor absoluto de *a* sobre el valor absoluto de *b*, siempre que *b* sea distinto de cero.

  $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$; $b \neq 0$

Ejemplo

Indicar las propiedades utilizadas para obtener los resultados.

$|-5| = 5$ Respuesta: Se cumple la propiedad $|x| \geq 0$.

$|3|^2 = 3^2$ Respuesta: Se cumple la propiedad $|x|^2 = x^2$.

$\sqrt{4^2} = |4|$ Respuesta: Se cumple la propiedad $\sqrt{x^2} = |x|$.

Actividades

1. Verifica que se cumplan las propiedades.

a. $|(-2) + 3| \leq |-2| + |3|$ b. $|(-4)(-5)| = |-4||-5|$ c. $\left|\frac{-40}{5}\right| = \left|\frac{-40}{5}\right|$

BECU_M1_B1_P06_61.indd 52 4/22/14 11:51 AM

Ecuaciones lineales con valor absoluto

Destreza con criterio de desempeño:

Resolver **ecuaciones e inecuaciones lineales** con valor absoluto en forma analítica utilizando las propiedades del valor absoluto. **(P)**

Para resolver expresiones como $|x| = a$, se utiliza la siguiente propiedad del valor absoluto.
Sea $a > 0$, entonces $|x| = a$ se cumple si y solo si $x = a$ o $x = -a$.

Conocimientos previos

Encuentra el valor absoluto de:

a. $|-5| + |6|$

b. $-|-4| - |8|$

Ejemplo

1. Determinar cuál es el número cuyo valor absoluto es igual a 6.

- Primero se representa a la incógnita con x y se plantea la ecuación.
  $|x| = 6$
- Para resolver la ecuación, se debe recordar la propiedad mencionada anteriormente.
  $|x| = a$ se cumple si y solo si $x = a$ o $x = -a$.
  $|x| = 6$ se cumple si y solo si $x = 6$ o $x = -6$.

Solución

La solución de la ecuación anterior se puede expresar como un conjunto:
C. S. = $\{-6, 6\}$.

2. Resuelve la siguiente ecuación: $|x - 8| = 5$.

- Se aplica el teorema y se resuelven las ecuaciones que se forman.
  $x - 8 = 5$ o $x - 8 = -5$

Parte I

Se resuelve la ecuación. $x - 8 = 5$
Se despeja la variable x. $x = 5 + 8$; $x = 13$
C. $S._{I} = \{13\}$

Parte II

Se resuelve la ecuación. $x - 8 = -5$
Se despeja la variable x. $x = (-5) + 8$; $x = 3$
C. $S._{II} = \{3\}$

Solución

El conjunto solución de la ecuación $|x - 8| = 5$ es la unión de las dos soluciones parciales encontradas.

C. $S._{T} = \{3\} \cup \{13\}$

C. $S._{T} = \{3, 13\}$

Recuerda

Es necesario que, cuando se resuelvan ecuaciones con valor absoluto, se tome en consideración el teorema $|x| = a$. De esta forma se asegura que los resultados obtenidos cumplan con la ecuación dada.

Toma en cuenta

El conjunto solución (C. S.) total de una ecuación con valor absoluto está dado por la unión de los conjuntos solución parciales.

Actividades

1. Resuelve estas inecuaciones que contienen fracciones algebraicas.

a. $|x - 5| = 20$

b. $3x - 6| = 1$

c. $|2x - 3| = 10$

d. $|4x - 2| = 5$

BECU_M1_B1_P06_61.indd 53 4/22/14 11:51 AM

Inecuaciones lineales con valor absoluto

Destreza con criterio de desempeño:
Resolver **inecuaciones lineales con valor absoluto** en forma analítica, utilizando las propiedades del valor absoluto. **(P)**

Para resolver inecuaciones con valor absoluto, se deben aplicar las propiedades de las desigualdades del valor absoluto.

- $|x| \geq a$ si y solo si $x \leq -a$ o $x \geq a$
- $|x| \leq a$ si y solo si $-a \leq x \leq a$

Conocimientos previos

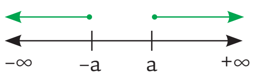
Resuelve.

a. $x > 2$

b. $x \leq 7$

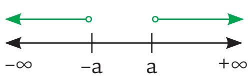
Recuerda

$x \leq -a$ o $x \geq a$



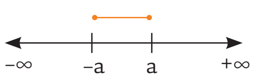
C. S. = $]-\infty; -a] \cup [a; +\infty[$

$x < -a$ o $x > a$



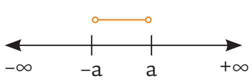
C. S. = $]-\infty; -a[\cup]a; +\infty[$

$-a \leq x \leq a$



C. S. = $[-a; a]$

$-a < x < a$



C. S. = $]-a; +a[$

Ejemplos

1. Resolver la inecuación $|4x - 2| \geq 6$.

- Se aplica la propiedad del valor absoluto $|x| \geq a$ si y solo si $x \leq -a$ o $x \geq a$, y se obtienen dos inecuaciones lineales.
  $4x - 2 \leq -6$ $\quad\quad$ $4x - 2 > 6$
- Se resuelve cada desigualdad por separado.

Parte I	Parte II
$4x - 2 \leq -6$	$4x - 2 \geq 6$
$4x \leq -6 + 2$	$4x \geq 6 + 2$
$4x \leq -4$	$4x \geq 8$
$x \leq -1$	$x \geq 2$

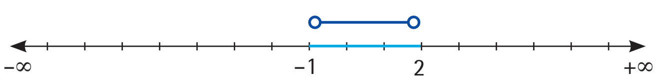
C. $S._I$ = $]-\infty; -1]$ $\quad\quad$ C. $S._{II}$ = $[2; +\infty[$

- El conjunto solución total está dado por la unión de las dos soluciones parciales, pues todos los valores comprendidos en estos intervalos cumplen con la desigualdad propuesta.

Solución
C. $S._T$ = $]-\infty; -1] \cup [2; -\infty[$

2. Solucionar la inecuación: $-10 + 2|2x - 1| < -4$.

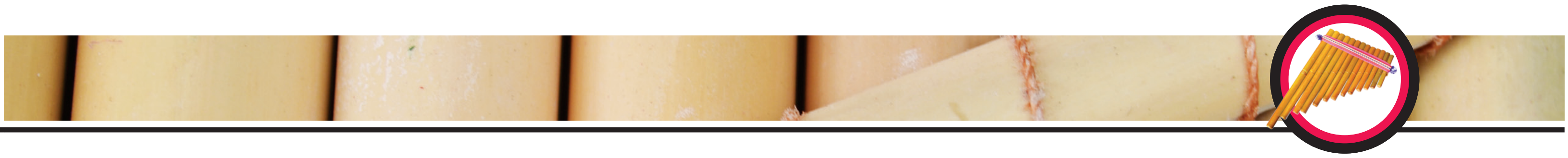
- Se despeja el valor absoluto.
  $|2x - 1| < 3$
- Se aplica la propiedad del valor absoluto $|x| \leq a$ si y solo si $-a \leq x \leq a$.
  $|2x - 1| < 3$
  $-3 < 2x - 1 < 3$
- Se despeja la variable x.
  $-3 + 1 < 2x < 3 + 1$
  $-2 < 2x < 4$
  $-\frac{2}{2} < x < \frac{4}{2}$



$-1 < x < 2$

Solución
C. $S._T$ = $]-1; 2[$

BECU_M1_B1_P06_61.indd 54 4/22/14 11:51 AM



Toma en cuenta

Para encontrar el valor absoluto utilizando un programa de hoja de cálculo de Excel, debes usar la función =ABS(x), en donde x puede ser una operación matemática o el número del cual deseas obtener el valor absoluto.

3. Determinar el conjunto solución.

$$|3x - 2| - 4 > 5 - 3.$$

- Para solucionar la inecuación, primero se deja el valor absoluto por sí solo en un lado de la inecuación.
  $|3x - 2| > 5 - 3 + 4$
- Luego, se simplifica el lado de la derecha.
  $|3x - 2| > 6$
- Después, se aplica la propiedad.
  $3x - 2 < -6$ $\qquad$ $3x - 2 > 6$
- Se resuelve cada parte.

Parte I	Parte II
$3x - 2 < -6$	$3x - 2 > 6$
$3x < -6 + 2$	$3x > 6 + 2$
$3x < -4$	$3x > 8$
$x < -\frac{4}{3}$	$x > \frac{8}{3}$

Solución

$$C.\ S._T = \left]-\infty; \frac{4}{3}\right[\cup \left]\frac{8}{3}; +\infty\right[$$

Reflexiona

$-1 < x < 2$

Esto quiere decir que todas las x (números) son mayores a -1 y menores a 2. Estos son extremos abiertos.

4. Resolver la inecuación.

$$|x - 2| \leq 7.$$

Se aplica la propiedad de valor absoluto

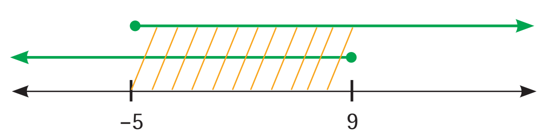
$-7 \leq x - 2 \leq 7$

Se aplica la propiedad de valor variable

$-5 \leq x \leq 9$

Solución

$C.\ S._T = [-5; 9]$



Actividades

1. Resuelve las siguientes inecuaciones.

a. $|x - 4| \leq 2$ $\qquad$ b. $|x + 3| > 2$ $\qquad$ c. $|3 - x| < 4$ $\qquad$ d. $|5x - 7| < 3$

Destreza con criterio de desempeño:
Utilizar **TIC** en la graficación y análisis de funciones.

Sitio oficial. Se puede obtener mayor información de GeoGebra en www.geogebra.at.

Descarga de GeoGebra. www.geogebra.org/download

Teleinicio GeoGebra. El teleinicio es una versión del *software* que no requiere de instalación. Se puede acceder a él en el sitio: www.geogebra.at/webstart.

Idioma. Para elegir idioma, seleccionar en:

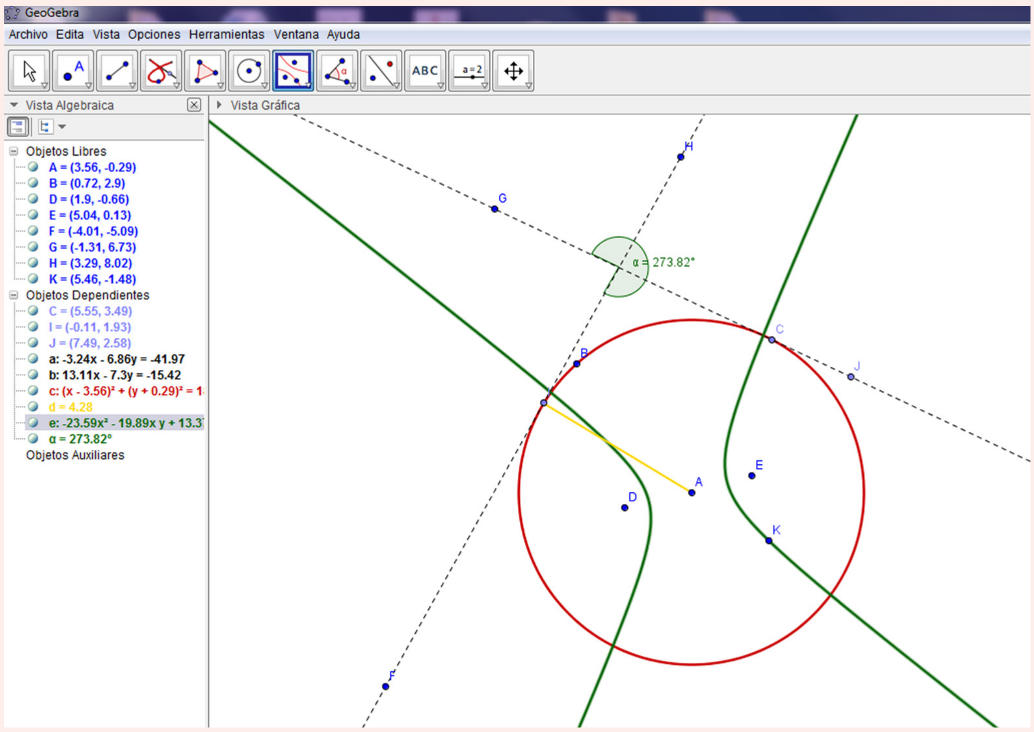
Menú ▶ Opciones ▶ Idioma.

Softwares geométricos: GeoGebra

Introducción

GeoGebra es un *software* destinado a la creación de construcciones geométricas dinámicas y altamente interactivas.

Con una interfaz especialmente intuitiva, este entorno facilita la exploración de situaciones geométricas y la verificación de conjeturas, a partir de la interacción con el mouse, mediciones y cálculos realizados por el usuario.



Interfaz de GeoGebra

La ventana de GeoGebra se divide en cuatro regiones:

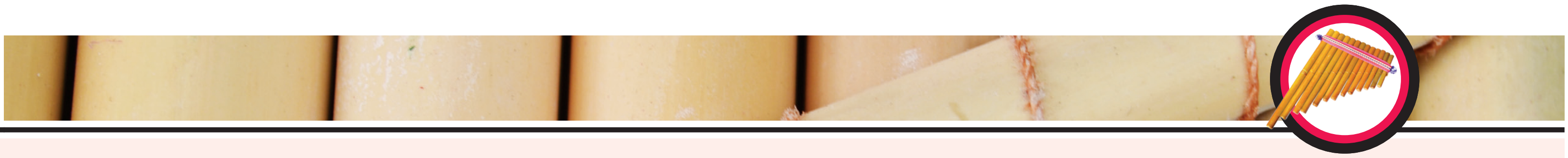
1° **Zona gráfica: región donde se muestran las construcciones realizadas.**

2° **Barra de herramientas: barra con nueve grupos de herramientas destinadas principalmente para construir.**

3° **Ventana de álgebra: región donde se muestran los nombres y valores de todos los objetos construidos. Se clasifican en tres categorías:**

- Objetos libres: objetos construidos con total independencia (por
- ejemplo, puntos).
- Objetos dependientes: objetos construidos dependiendo de otros
- objetos (por ejemplo, rectas).
- Objetos auxiliares: objetos de cualquier clase que el usuario
- puede convertir en auxiliares.

4° **Entrada de comandos: campo destinado al ingreso de comandos y fórmulas.**



Barra de herramientas

En la barra de herramientas, se cuenta con una gran cantidad de opciones que permiten construir objetos geométricos (puntos, rectas, vectores, etc.), realizar construcciones (bisectrices, simetrales, triángulos, etc.) o modificar la visualización de los objetos construidos (ocultar, mostrar, copiar estilo, borrar, etc.).

Grupos de herramientas

Punteros: permite manipular los objetos de una construcción.

Puntos: construcción de puntos libres, intersecciones y punto medio o centro.

Líneas: construcción de rectas, segmentos, semirrectas, vectores, etc., a partir de puntos libres.

Construcción de rectas: rectas que satisfacen ciertas condiciones, por ejemplo, tangentes, paralelas, perpendiculares, simetrales, bisectrices, etc.

Construcción de curvas: circunferencias, semicircunferencias, arcos, sectores circulares y cónicas.

Medidas: construcción de ángulos, cálculo de distancias, lugares geométricos y puntos deslizantes.

Transformaciones: construcción de objetos generados por traslación, rotación, simetría central y axial, y dilataciones (homotecia).

Objetos especiales: inserción de textos e imágenes.

Atributos: modificación de visibilidad (visible/oculto).

Uso genérico de las herramientas de construcción

En términos generales, para utilizar cualquier herramienta es necesario seleccionarla y luego hacer clic libremente en la zona gráfica, o en los objetos a los que esta herramienta se aplica.

Ejemplos

- Puntos libres

  Seleccionando previamente la herramienta nuevo punto, se debe hacer clic en la zona gráfica.

- Recta AB

  Seleccionando previamente la herramienta recta, se debe hacer clic en dos puntos diferentes (A y B).

Ayuda. Un buen recurso para acceder a descripciones completas de cada una de las herramientas es el **índice de materias** de GeoGebra, al que se puede acceder desde el **menú «Ayuda»**.

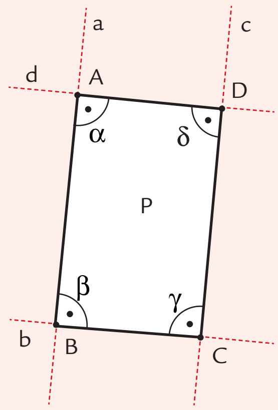
Tener presente. Para efectos de este capítulo, **«Recta a»** se refiere a una recta que pasa por dos puntos dados (el programa denomina los elementos en orden alfabético).

Construcción de líneas. Las rectas, segmentos, semirrectas y vectores se construyen utilizando el mismo procedimiento:

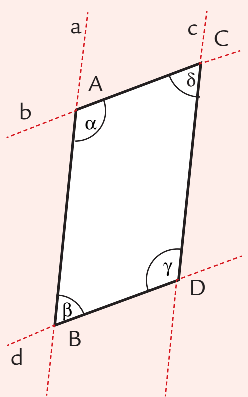
1º Seleccionar herramienta.
2º Marcar dos puntos.

BECU_M1_B1_P06_61.indd 57 4/22/14 11:51 AM

Al mover A, B o C. Se puede observar que las medidas de los ángulos no cambian, además las medidas de los lados opuestos siempre son equivalentes.



Al mover A, B o C. Se puede observar que las medidas de los lados y de los ángulos varían, sin embargo, los lados opuestos siguen siendo paralelos.



Ejemplos de construcciones con GeoGebra

Para cada una de las siguientes construcciones se especifican los pasos a seguir. Al realizar las construcciones se pueden verificar muchas de las propiedades geométricas estudiadas.

Construcción de un rectángulo

Se construirá un rectángulo de dimensiones variables, a partir de dos puntos A y B.

Pasos de la construcción

1° **Puntos A, B**: puntos libres.

2° **Recta a**: recta que pasa por A y B.

3° **Recta b**: perpendicular a la recta a, que pasa por B.

4° **Punto C**: punto sobre la recta b.

5° **Recta c**: perpendicular a la recta b, que pasa por C.

6° **Recta d**: perpendicular a la recta a, que pasa por A.

7° **Punto D**: intersección de las rectas c y d.

8° **Polígono P**: polígono con vértices A, B, C y D.

9° **Ángulos** α, β, γ, δ: ángulos internos del polígono P.

Construcción de un paralelogramo

Se construirá un paralelogramo a partir de tres puntos cualesquiera.

Pasos de la construcción

1° **Puntos A, B y C**: puntos libres.

2° **Recta a**: recta que pasa por A y B.

3° **Recta b**: recta que pasa por A y C.

4° **Recta c**: paralela a la recta a, que pasa por C.

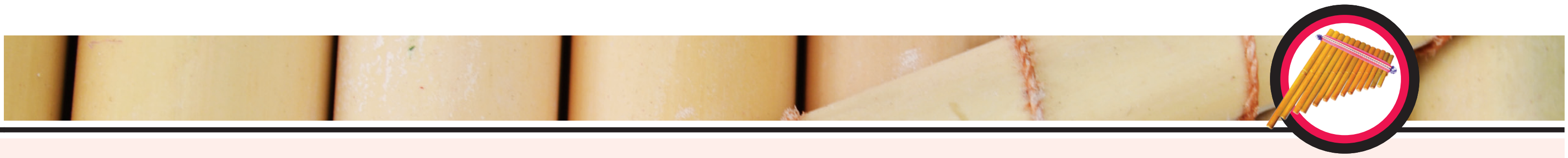
5° **Recta d**: paralela a la recta b, que pasa por B.

6° **Punto D**: intersección entre las rectas c y d.

7° **Polígono P**: polígono con vértices A, B, C y D.

8° **Ángulos** α, β, γ, δ: ángulos internos del polígono P.

BECU_M1_B1_P06_61.indd 58 4/22/14 11:51 AM



Cálculo de la pendiente dados dos puntos

Se calculará el valor de la pendiente entre dos puntos dados en el plano cartesiano.

Pasos de la construcción

1° **Puntos A, B**: puntos libres.

2° **Recta a:** perpendicular al eje X, que pasa por A.

3° **Recta b:** perpendicular al eje Y, que pasa por B.

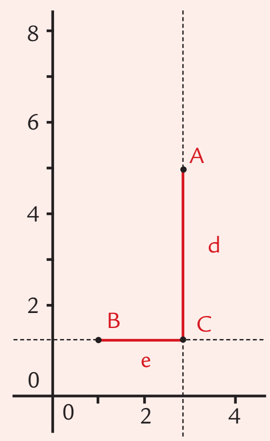
4° **Punto C:** intersección de a y b.

5° **Segmento e:** segmento que pasa por B y C.

6° **Segmento d:** segmento que pasa por A y C.

7° **Texto T1:** texto con la siguiente fórmula Pendiente: + (d / e).

Observa que en este caso el valor de la pendiente es siempre positiva, pues para su cálculo se han considerado las longitudes de dos segmentos; sin embargo, si el punto **B** se encuentra a la derecha de $\overline{AC}$, el valor de la pendiente dados **A** y **B** es negativo.



Construcción de puntos simétricos en el plano cartesiano

Se construirá un punto simétrico a un punto dado (A) respecto a los ejes coordenados y el origen.

Pasos de la construcción

1° **Puntos A:** punto libre.

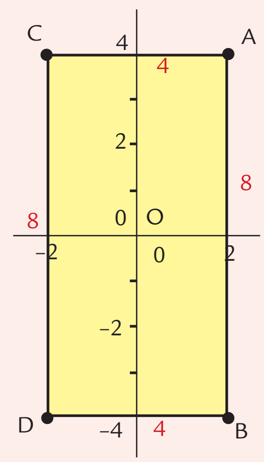
2° **Punto O:** punto de intersección entre el eje Y y el eje X (origen).

3° **Punto B:** simétrico de A, respecto al eje X.

4° **Punto C:** simétrico de A, respecto al eje Y.

5° **Punto D:** simétrico de A, respecto al origen (punto O).

6° **Polígono P:** polígono con vértices A, B, C, D.



Al mover A. En la ventana de álgebra se puede ver las coordenadas de los puntos simétricos a **A**. Observa que estos siempre corresponden a los vértices de un rectángulo.

Evaluación

- Reconoce el comportamiento de funciones elementales de una variable a través del análisis de su dominio, recorrido, monotonía y simetría (paridad).

1 punto

1. Si A = (1, 2, 3, 4) y B = (x, y, z) una de las siguientes relaciones no corresponde a una función.

a. $r_1 = \{(1, x), (2, x), (3, x), (4, x)\}$

b. $r_2 = \{(1, y), (2, x), (3, z), (4, y)\}$

c. $r_3 = \{(1, x), (1, y), (2, z), (3, y), (4, y)\}$

d. $r_4 = \{(1, x), (2, y), (3, z), (4, z)\}$

- Representa funciones lineales por medio de tablas, gráficas, intersección con los ejes, una ley de asignación y ecuaciones algebraicas.

1 punto

2. Indica el dominio, recorrido, monotonía y simetría de la función $f(x) = x^2 + 2$.

- Analiza funciones lineales por medio de sus coeficientes.

1 punto

3. Calcula la pendiente m de la recta $2x - 3y - 1 = 0$.

1 punto

4. La ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos (25, 1) y (28, 21).

1 punto

5. Una recta perpendicular a la recta $3x - y = 4$ es:

a. $y = \frac{3}{5}x + 7$ c. $y = \frac{3}{5}x + 2$

b. $y = \frac{5}{3}x + 2$ d. $y = \frac{5}{3}x - 3$

- Resuelve sistemas de dos ecuaciones con dos variables de forma gráfica y analítica.

1 punto

6. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} 4x - 3y - 14 \\ -2x + 5y = -14 \end{cases}$$

utilizando cualquier método es:

1 punto

7. En el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x - 3y = 4 \end{cases}$$

escribe el determinante para hallar x.

Coevaluación

Con un compañero, resuelvan el siguiente valor absoluto y luego veriquen sus conjuntos solución.

$|x - 2| + |x + 3| \geq 5$

- Resuelve problemas con ayuda de modelos lineales.

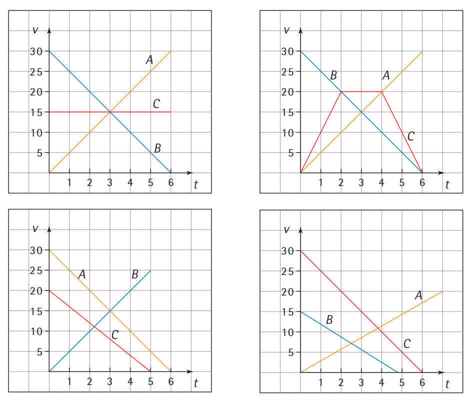
3 puntos

8. Es posible calcular el peso de una ballena jorobada P en toneladas a partir de su longitud L en pies, mediante la fórmula $P = 1{,}70L - 42{,}8$ para $30 \leq L \leq 50$.

a. Completa la siguiente tabla.

Longitud L (pies)	Peso P(toneladas)
30	
34	
38	
42	
45	
48	
50	

b. La gráfica representa el peso de la ballena jorobada respecto a su longitud es:



c. Respecto al peso de la ballena jorobada se puede afirmar que:

- Entre más longitud tenga la ballena jorobada, menor será su peso.
- Entre más longitud tenga la ballena jorobada, mayor será su peso.
- Entre menos longitud tenga la ballena jorobada, mayor será su peso.
- Entre menor longitud tenga la ballena jorobada, menor será su peso.

Autoevaluación (Metacognición)

Mediante un ejemplo, explica a un compañero como se debe realizar la gráfica de la siguiente función con valor absoluto.

$|x - 5| + 2 = y$

- **Indicador esencial de evaluación**

Salud

Dosis en los medicamentos

La elaboración de los medicamentos debe seguir etapas muy rigurosas de control cálculo. En la etapa de preparación es indispensable reunir todos los materiales para los diferentes procedimientos, y sobretodo es importante calcular y verificar siempre la dosis que se deberá administrar para evitar errores, sobredosis, o que la dosis sea insuficiente para atender la necesidad médica. Aquí radica la importancia de no automedicarse. Si necesitas algún tipo de medicina, un doctor es la persona autorizada para recetar algún medicamento.

Actividades

Para responder las preguntas 1 y 2 se utiliza la siguiente información.

Existen dos fórmulas que permiten especificar las dosis de productos farmacéuticos recomendadas para adultos y niños. Estas son:

Regla de Cowling: $d = \frac{1}{24}(t+1)\cdot a$

Regla de Friend: $d = \frac{2}{25}\, t \cdot a$

Donde a denota la dosis para adultos en mℓ, y t la edad en años.

1. Completa las siguientes tablas.

a. Regla de Cowling

a(mℓ)	t(años)	$d = \frac{1}{24}(t+1)\cdot a$
100	2	
100	4	
100	6	
100	8	
100	12	

b. Regla de Friend

a(mℓ)	t(años)	$d = \frac{2}{25}\, t \cdot a$
100	2	
100	4	
100	6	
100	8	
100	12	

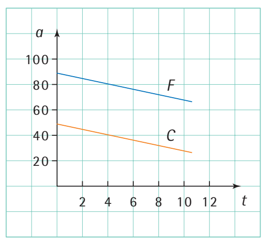
2. ¿Cuál de las gráficas de la columna siguiente representan las reglas de Cowling y de Friend para

a = 100 mℓ y

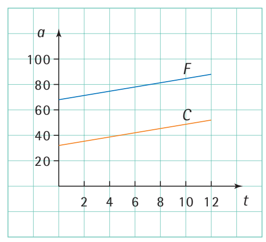
t = 2, 4, 6, 8 y 12 años?

Explica la respuesta y determinar por qué las otras gráficas no representan estas rectas.

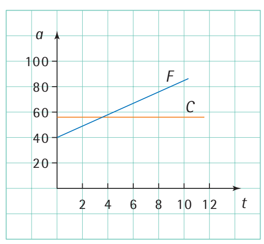
a.



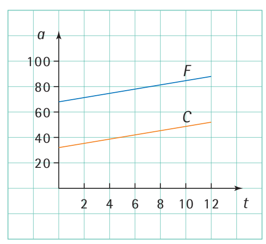
c.



b.



d.



Bloque 1

Unidad 2

Funciones y ecuaciones cuadráticas

BECU_M1_B2_P62_107.indd 62 4/22/14 11:52 AM

Ecuaciones en la antiguedad

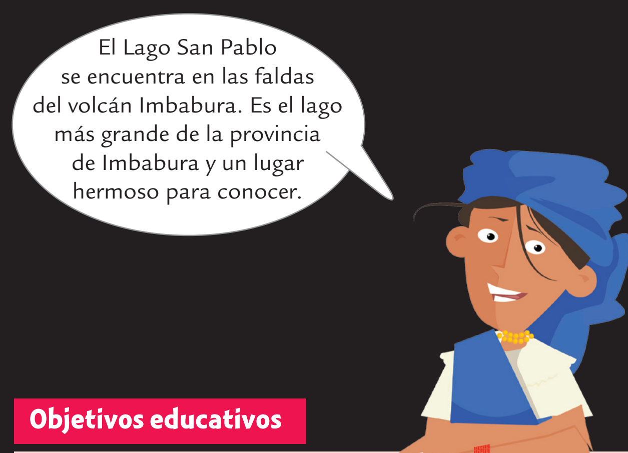
Los documentos que se conocen de la época babilónica antigua ponen de manifiesto que los antiguos babilonios resolvían cualquier ecuación cuadrática empleando esencialmente los mismos métodos que hoy se enseñan.

Por ejemplo, en la época antigua y medieval, e incluso a comienzos de la edad moderna, las ecuaciones cuadráticas se clasificaron en tres tipos que, reducidos a sus formas canónicas, son:

$x^2 + px = q \qquad x^2 = px + q \qquad x^2 + q = px$

Pero todos estos tipos de ecuaciones ya se encontraban en los viejos textos babilónicos desde hace unos 4 000 años.

Más tarde, en Grecia, el filósofo y matemático Pitágoras encontró el equivalente geométrico de la resolución algebraica de una ecuación cuadrática, utilizando áreas y segmentos. Pero la resolución aritmética de las ecuaciones vuelve a surgir en manos de Diofanto. A diferencia de los babilonios, Diofanto no dio soluciones aproximadas a los problemas, ya que la notación le permitió dar soluciones exactas.



Antes de empezar

1. Resuelve las siguientes ecuaciones.

   a. $4x = 60$ c. $5x - 15 = 65$

   b. $\frac{5}{3}x = 7$ d. $\frac{3x - 7}{9} = 21$

2. Selecciona la ecuación en la cual la pareja $(x, y) = (2, 1)$ es solución.

   a. $2x + 1 = 5$ c. $6x + 3 = 15$

   b. $\frac{4}{8}x + y = 6$ d. $\frac{2x - 5}{3} = 18$

3. Halla el valor numérico de la expresión $\sqrt{b^2 - 4ac}$ si

   a. $a = 1$; $b = 24$; $c = 24$

   b. $a = 21$; $b = 1$; $c = 6$

4. Si la suma de dos números es 8 y la suma de sus cuadrados es 50, halla los números.

Objetivos educativos

- Comprender que el conjunto solución de ecuaciones lineales y cuadráticas es un subconjunto de los números reales.
- Reconocer cuándo un problema puede ser modelado, utilizando una función lineal o cuadrática.
- Determinar el comportamiento local y global de la función (de una variable) cuadrática, a través del análisis de su dominio, recorrido, monotonía, simetrías, e intersecciones con los ejes y sus ceros.
- Utilizar TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación):

  d. para analizar las características geométricas de la función cuadrática (intersecciones, monotonía, concavidad

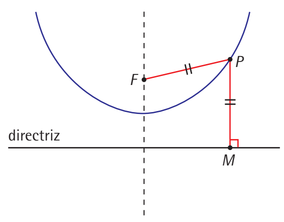
Rondador. Instrumento musical andino.

Las TIC en el aula

Destreza con criterio de desempeño:

Utilizar **TIC** para graficar funciones lineales y cuadráticas, y analizar las características geométricas. **(P)**

La parábola



d(P, F) = d(P, M)

Construcción de la parábola con escuadras

La construcción de la parábola se puede llevar a cabo de la siguiente manera:

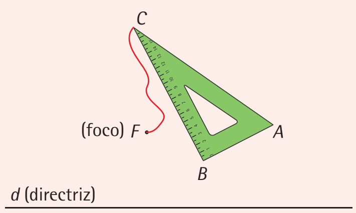
Sobre la hoja de papel se trazan una recta fija *d* (directriz) y un punto fijo *F* (foco). *F* es exterior a la recta *d*.

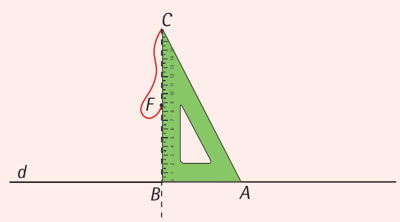
(foco) *F*

d (directriz)

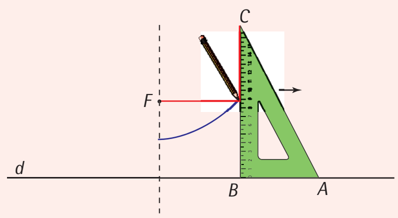
En una escuadra *ABC*, con ángulo recto en *B*, se sujeta el extremo de una cuerda en el punto *C*. La cuerda debe tener longitud igual a $\overline{BC}$. El otro extremo de la cuerda se fija al punto *F* de la hoja de papel.

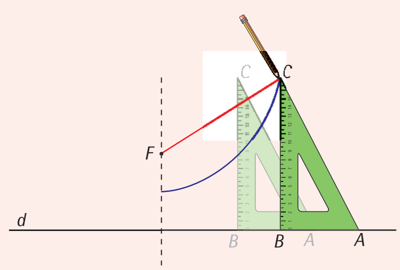
Luego, se apoya el cateto $\overline{AB}$ de la escuadra en la directriz *d*, de modo que el cateto $\overline{BC}$ pase por *F*.



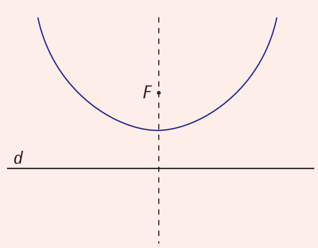


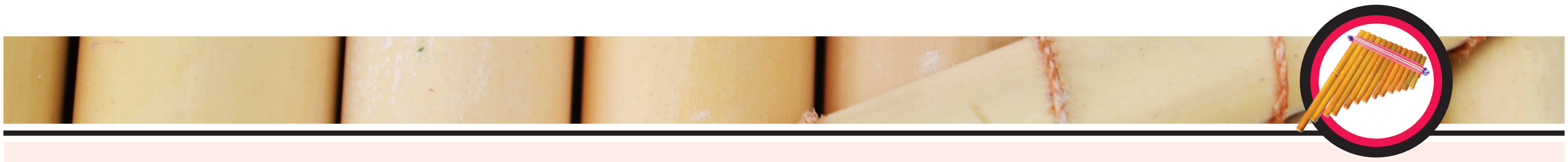
Con la punta de un lápiz, se mantiene tensa la cuerda y se hace un trazo sobre el papel, a medida que la escuadra se desplaza hacia la derecha sobre la directriz. El trazo obtenido es una parte (o rama) de la parábola.





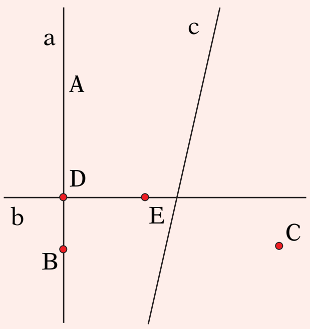
Se repite el proceso para completar la parábola, pero esta vez se hace el desplazamiento hacia la izquierda de *F*. Así se traza la otra rama de la figura.

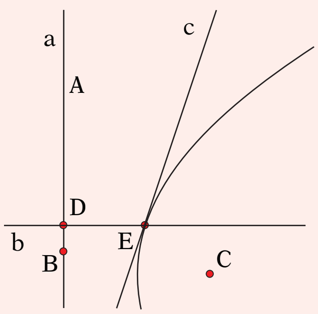




Recuerda

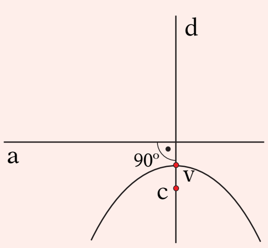
La parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo en el plano llamado foco y de una recta fija llamada directriz.





Toma en cuenta

Es posible construir el eje de la parábola **(d)** como una perpendicular a la directriz **(a)** que pasa por el foco **(C)**. La intersección de ambas rectas corresponde al vértice de la parábola **(V)**.



Construcción de una parábola con Geogebra

Se construirá una parábola como un lugar geométrico a partir de tres puntos libres.

Pasos de la construcción

1° **Puntos A**, **B**, **C**: puntos libres.

2° **Recta a**: recta que pasa por **A** y **B**.

3° **Punto D**: punto en la recta **a**.

4° **Recta b**: perpendicular a la recta a, que pasa por **D**.

5° **Recta c**: simetral entre los puntos **C** y **D**.

6° **Punto E**: intersección entre las rectas **b** y **c**.

Al arrastrar el punto **D**, se observa que **E** describe una parábola. Se construirá dicho lugar geométrico, según el siguiente procedimiento:

Seleccionando la herramienta (lugar geométrico), hacer clic en **D** y **E** (en ese orden).

Nótese que al mover el punto **D**, la recta c se mantiene tangente a la parábola. Del mismo modo, al acercar el punto **C** a la recta a, la parábola tiende a cerrarse.

El punto **C** corresponde al foco de esta parábola y la recta a, a su directriz.

Posiciones relativas entre el foco y la directriz

El foco de la parábola (**C**) puede ubicarse en la directriz (**a**) (figura a) o a un costado de esta (figura b y figura c).

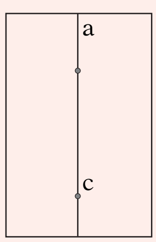


Figura a

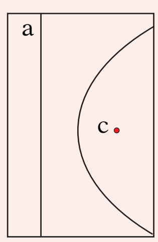


Figura b

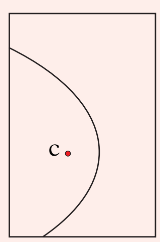


Figura c

BECU_M1_B2_P62_107.indd 65 4/22/14 11:52 AM

Función cuadrática

Destrezas con criterio de desempeño:

- Reconocer la gráfica de una **función cuadrática** como una parábola a través del significado geométrico de los parámetros que la definen. **(P)**
- Comprender que el **vértice de una parábola** es un máximo o un mínimo de la función cuadrática cuya gráfica es la parábola. **(C)**
- Comprender que la determinación del **recorrido de una función cuadrática** f es equivalente a construir la imagen y a partir de x, elemento del dominio. **(C)**
- Determinar el **comportamiento local y global** de la función cuadrática a través del análisis de su dominio, recorrido, crecimiento, decrecimiento, concavidad y simetría, y de la interpretación geométrica de los parámetros que la definen. **(C, P)**

Conocimientos previos

Realiza el gráfico de la función $y = x^2$, e indica qué figura se ha formado y qué características observas.

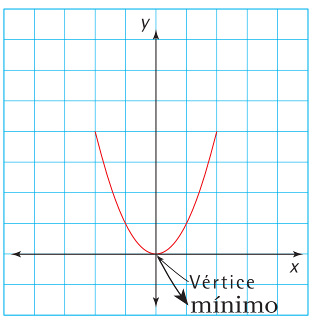


Figura 1.

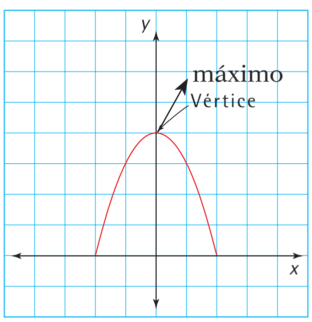


Figura 2.

CONCEPTO

Una **función cuadrática** es aquella función de la forma $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

Por ejemplo, las funciones $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$ y $f(x) = \frac{2}{5}x^2 + 3x$ son funciones cuadráticas.

Las funciones cuadráticas también reciben el nombre de **funciones de segundo grado**, debido a que el exponente del término ax^2 es 2.

DOMINIO Y RECORRIDO DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

El dominio de una función cuadrática son los números reales, y el recorrido se toma desde el punto máximo o mínimo (Vértice da la parábola) hacia $+\infty$ o $-\infty$, según corresponda.

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Al representar gráficamente una función cuadrática se obtiene una curva llamada **parábola**.

La parábola que representa una función cuadrática se puede abrir hacia arriba o hacia abajo.

- Si en la función $y = ax^2 + bx + c$, $a > 0$, entonces, la parábola abre hacia arriba (figura 1).
  En este caso, el vértice es un punto **mínimo**.
- Si en la función $y = ax^2 + bx + c$, $a < 0$, entonces, la parábola abre hacia abajo (figura 2).
  En este caso, el vértice es un punto **máximo**.

*La recta paralela al eje y que pasa por el vértice de la parábola se denomina **eje de simetría**.*

El valor de a en la función $y = ax^2 + bx + c$ también indica la abertura de la parábola. Así, si:

- $|a| > 1$, la parábola es más estrecha en relación con la parábola donde $a = 1$.
- $0 < a < 1$, la parábola es más ancha en relación con la parábola donde $a = 1$.

Representación gráfica de la función cuadrática

Al graficar una función cuadrática se tienen en cuenta cuatro casos: $f(x) = ax^2$, $f(x) = ax^2 + c$, $f(x) = ax^2 + bx$ y $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Además, para cada función, se identifica el vértice y se elabora una tabla de valores que determine la forma de la parábola.

BECU_M1_B2_P62_107.indd 66 4/22/14 11:52 AM

x	1	2	−1	−2
$2x^2$	2	8	2	8
$\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	2

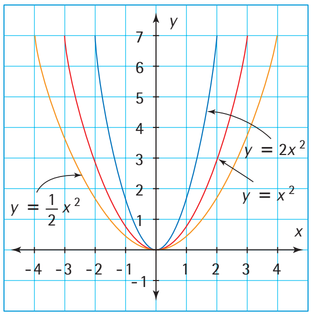


Figura 3.

x	1	2	−1	−2
$-2x^2$	−2	−8	−2	−8
$-\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{1}{2}$	−2	$-\frac{1}{2}$	−2

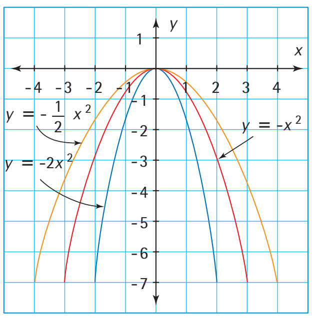


Figura 4.

Actualízate

El estudio de las funciones cuadráticas se aplica en la ingeniería civil, para resolver problemas específicos como la construcción de puentes colgantes que se encuentran suspendidos por cables amarrados a dos torres.

Los biólogos utilizan las funciones cuadráticas para estudiar los efectos nutricionales de los organismos.

- **Caso 1**. $f(x) = ax^2$, donde $b = 0$ y $c = 0$.
  Este tipo de parábola tiene vértice en el punto (0, 0). El eje de simetría es el eje y.

  Si $a > 0$, abre hacia arriba, y si $a < 0$, abre hacia abajo.

  Además, si $|a| > 0$, entonces, la parábola se cierra en relación con la parábola $y = x^2$; y si $|a| < 1$, entonces, la parábola se abre en relación con la parábola $y = x^2$.

  Por ejemplo, las parábolas

  $$y = 2x^2,\ y = \frac{1}{2}x^2 \text{ (figura 3) y } y = -2x^2,\ y = -\frac{1}{2}x^2 \text{ (figura 4).}$$

- **Caso 2**. $f(x) = ax^2 + c$, donde $b = 0$.
  La gráfica de la función $ax^2 + c$ se obtiene trasladando c unidades a la gráfica de la función ax^2.

  Si $c > 0$, la traslación es hacia arriba.

  Si $c < 0$, la traslación es hacia abajo.

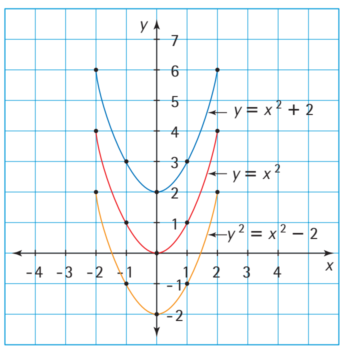
  El eje de simetría es el eje y y el vértice de la parábola es el punto $(0, c)$ o el punto $(0, -c)$, según sea la traslación.

Ejemplo

Graficar las funciones $y = x^2 + 2$ y $y = x^2 - 2$.

Solución

Se grafica la parábola $y = x^2$; luego, para graficar $y = x^2 + 2$, se traslada 2 unidades arriba; y para graficar $y = x^2 - 2$, se traslada 2 unidades abajo.



x	0	1	2	−1	−2
$x^2 + 2$	2	3	6	3	6

x	0	1	2	−1	−2
$x^2 - 2$	−2	−1	2	−2	2

- **Caso 3**. $f(x) = ax^2 + bx$, donde $c = 0$.
  En este caso el eje de simetría de la parábola es una recta paralela al eje y.

  Para representar gráficamente esta función, se elabora una tabla de valores, teniendo en cuenta que las coordenadas del vértice se hallan haciendo $x = \frac{-b}{2a}$ y remplazando dicho valor en la función dada.

Toma en cuenta

- Dominio y recorrido de la función cuadrática
- El dominio de la función del ejemplo son los reales.
- El recorrido de la función del ejemplo es el intervalo]– ∞, 2]

Trabajo individual

Grafica las siguientes funciones.

$f(x) = 3x - x^2$

$f(x) = 2x^2 + 11x + 5$

Ejemplos

1. Representar gráficamente la función $y = -2x^2 + 4x$.

Solución

Como $a = -2$, la parábola abre hacia abajo.

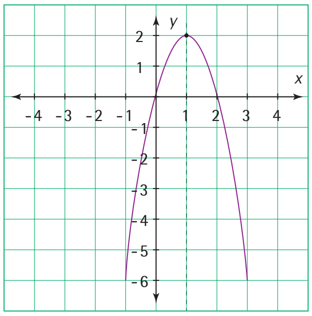
Para determinar las coordenadas del vértice, se remplazan los valores de $a = -2$ y $b = 4$ en la fórmula, así:

$$x = \frac{-b}{2a} = -\frac{4}{2(-2)} = 1$$

El valor de y es:

$$y = -2x^2 + 4x = -2(1)^2 + 4(1) = 2$$

Luego, el vértice está en el punto (1, 2).



x	-1	0	1	2	3
y	-6	0	2	0	-6

Eje de simetría, recta $x = 1$.

2. Encontrar, sin hacer la gráfica, hacia dónde abre la parábola, el vértice y los puntos de corte con el eje x, de la parábola $f(x) = 3x^2 + 6x$.

Solución

- En la función $f(x) = 3x^2 + 6x$, $a = 3 > 0$, entonces la parábola abre hacia arriba.
- Para determinar las coordenadas del vértice, se remplaza $a = 3$ y $b = 6$ en $x = -\frac{b}{2}a$, así:

$$x = -\frac{6}{2(3)} = \frac{-6}{6} = -1 \qquad y = 3x^2 + 6x = 3(-1)^2 + 6(-1) = -3$$

Luego, el vértice está ubicado en el punto $(-1, -3)$.

- Para determinar los puntos de corte, y debe ser igual a cero, es decir: si $y = 0$, entonces $3x^2 + 6x = 0$, de donde

$3x^2 + 6x = 0$

$3x(x + 2) = 0$

$3x = 0$ o $x + 2 = 0$

$x = 0$ o $x = -2$

Luego, los puntos de corte son (0, 0) y $(-2, 0)$.

- **Caso 4**. $f(x) = ax^2 + bx + c$.

La gráfica de una función $y = ax^2 + bx + c$ se puede obtener a partir de la parábola que representa la función $y = ax^2 + bx$, trasladando la gráfica c unidades hacia arriba si $c > 0$, o c unidades hacia abajo si $c < 0$.

Por ejemplo, la función $y = x^2 - 2x + 4$ es una traslación de la función $y = x^2 - 2x$ (figura 5).

Gráfica de $y = x^2 - 2x + 4$

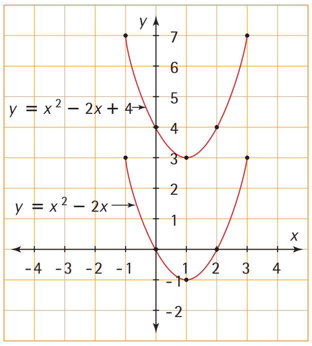


Figura 5.

Actividades

Analiza funciones cuadráticas por medio de sus coeficientes.

1. Identifica cuáles de las siguientes expresiones corresponden a funciones cuadráticas.

a. $y = x^2 + 2x + 5$ d. $y = 4x + 6x^4$

b. $f(x) = x + 2$ c. $y = 2x^3 + 5x$

2. Indica hacia dónde abre la parábola que representa cada función cuadrática.

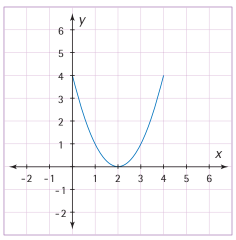
a. $f(x) = -x + x^2$ d. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

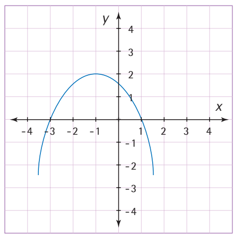
b. $y = 3x^2 + 6x - 2$ e. $y = -5x^2 + 6x - 2$

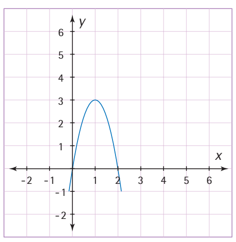
c. $f(x) = 4 - 2x^2$ f. $f(x) = -7x^2 + 4$

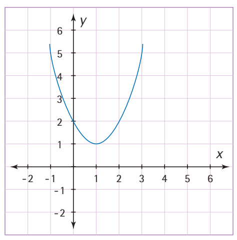
Determina el eje de simetría.

3. Traza el eje de simetría de cada parábola. Luego, escribe la ecuación de dicho eje.

a. 

c. 

b. 

d. 

Analiza el valor de verdad de proposiciones.

4. Escribe V (verdadero) o F (falso). Justifica.

a. La función $y = x - 3x^2$ se representa con una parábola que abre hacia abajo y sobre su eje de simetría se ubica el máximo.

b. La gráfica de la función $f(x) = 2x^2$ tiene un máximo sobre el eje x.

c. La función cuadrática $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ abre hacia abajo, ya que el coeficiente de x^2 es una fracción.

Grafica funciones cuadráticas.

5. Grafica los siguientes conjuntos de funciones cuadráticas. Utiliza un plano para cada conjunto.

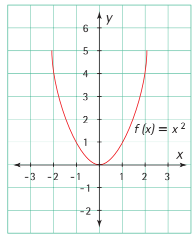
a. $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 3x^2$, $y = 4x^2$.

b. $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{3}x^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$.

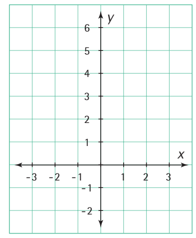
c. $y = -x^2$, $y = -2x^2$, $y = -3x^2$, $y = -4x^2$.

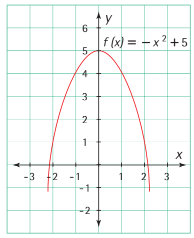
Grafica funciones cuadráticas mediante traslaciones.

6. Para cada función cuadrática, dibuja otra función cuadrática con la condición indicada. Luego, escribe su ecuación correspondiente.

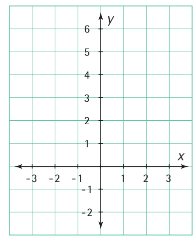
a. 

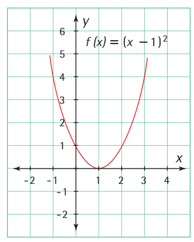
Trasladar la gráfica una unidad hacia arriba.



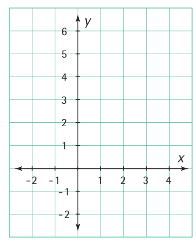
b. 

Trasladar la gráfica 3 unidades hacia abajo.



c. 

Trasladar la gráfica 2 unidades hacia arriba.



Determina el vértice y los cortes con el eje x.

7. Halla el vértice y los puntos de corte con el eje x de las siguientes parábolas. Luego, grafica.

a. $f(x) = 5x^2 - 10x$ f. $y = x^2 - 6x$

b. $y = -x^2 + 4x$ g. $f(x) = -x^2 - 8x$

c. $f(x) = 3x^2 + 6x$ h. $y = -4x^2 - 16x$

d. $y = -2x^2 + 8x$ i. $f(x) = -x^2 - 5x$

e. $f(x) = x^2 - 2x$ j. $f(x) = -7x^2 - 14x$

8. Toma como referencia las parábolas del ejercicio anterior, para construir la gráfica de las siguientes parábolas.

a. $f(x) = 5x^2 - 10x + 1$ f. $y = x^2 - 6x + 3$

b. $y = -x^2 + 4x - 3$ g. $f(x) = -x^2 - 8x + 16$

c. $f(x) = 3x^2 + 6x + 2$ h. $y = -4x^2 - 16x - 1$

d. $y = -2x^2 + 8x + 4$ i. $f(x) = -x^2 - 5x - 2$

e. $f(x) = x^2 - 2x + 6$ j. $f(x) = -7x^2 - 14x + 1$

Resuelve problemas por medio de parábolas.

9. FÍSICA. Cuando un cuerpo se deja caer en el vacío, se desplaza verticalmente con una aceleración constante, lo que hace que su velocidad aumente uniformemente en la medida en que transcurre el tiempo de caída.

Cuando se suelta una piedra, por ejemplo, su velocidad aumenta continuamente mientras desciende. Esto se debe a que los cuerpos que se encuentran cerca de la superficie terrestre experimentan una atracción que les imprime aceleración, llamada **aceleración de la gravedad**; esta se representa con la letra g y su valor promedio es 9,8 m/s^2.

Por lo tanto, un cuerpo que se mueve en el vacío, en dirección vertical, cambia su velocidad en 9,8 m/s cada vez que transcurre un segundo.

Las ecuaciones que rigen el movimiento de caída libre de los cuerpos son:

$$V = V_o + gt \qquad \text{y} \qquad Y = V_o t + \frac{gt^2}{2}$$

La letra Y indica el desplazamiento con respecto al punto desde el cual se considera el movimiento.

V_o es la velocidad inicial del cuerpo.

V es la velocidad que lleva el cuerpo en determinado instante.

t es el tiempo medido en segundos.

g es la aceleración de la gravedad.

a. La ecuación de un cuerpo que se lanza verticalmente hacia arriba es

$$Y = 4{,}9t - \frac{9{,}8}{2}t^2.$$

Construye la gráfica de este movimiento.

b. ¿En qué momento este cuerpo alcanza la altura máxima?

c. ¿A qué altura se encuentra este cuerpo a los 0,5 segundos?

d. ¿A qué altura se encuentra este cuerpo a los 4 segundos?

Ceros, raíces o soluciones de la función cuadrática

Destreza con criterio de desempeño:

Determinar **las intersecciones de una parábola con el eje horizontal** a través de la solución de la ecuación cuadrática $f(x)=0$, donde f es la función cuadrática cuya gráfica es la parábola. **(P)**

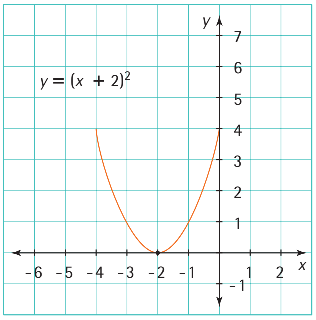


Figura 6.

En la gráfica se observa que la solución es $x = -2$

Se denominan ceros, raíces o soluciones de una función cuadrática a los puntos de corte de la gráfica con el eje x.

Dependiendo de los puntos de corte (si existen), se presentan tres casos.

Caso 1. La parábola corta el eje x en un solo punto.

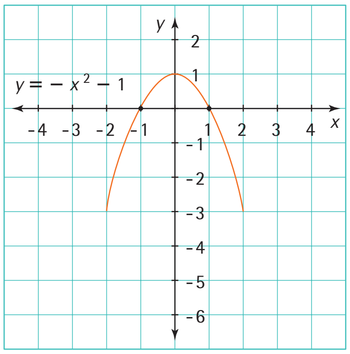
Esto significa que el vértice está sobre el eje x. En este caso se dice que la solución es un único valor real.

Por ejemplo, $y = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ de la (figura 6).

Caso 2. La parábola corta el eje x en dos puntos.

En este caso se dice que la función tiene dos soluciones reales y diferentes.

Por ejemplo, $y = -x^2 + 1$.



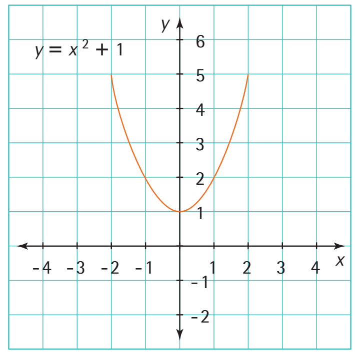
Solución $x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$

BECU_M1_B2_P62_107.indd 70 4/22/14 11:52 AM

Caso 3. La parábola no corta el eje x.

En este caso se dice que la función no tiene solución en los números reales. Sus raíces o soluciones pertenecen al conjunto de los números complejos.

Por ejemplo, $y = x^2 + 1$.



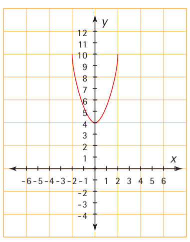
No tiene soluciones reales.

Actividades

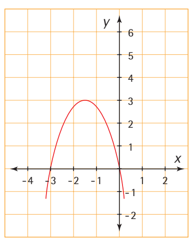
Determinar las raíces de la función cuadrática.

1. Observa las gráficas y determina las soluciones de cada función si es posible.

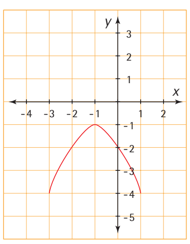
a.



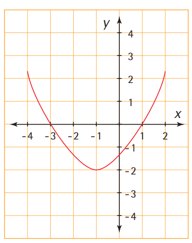
d.



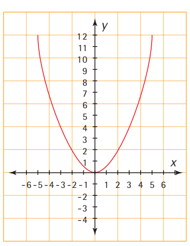
b.



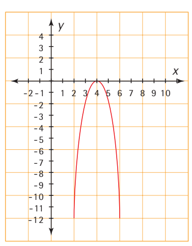
e.



c.



f.



2. Grafica las siguientes funciones y halla los ceros o soluciones de cada uno.

a. $y = 2x^2$

b. $f(x) = -3x^2$

c. $f(x) = 4x^2$

d. $y = -\frac{1}{2}x^2$

e. $f(x) = -x^2 + 3$

f. $y = -5x^2 + 10$

g. $y = 7x^2 + 14$

h. $f(x) = 3x^2 - 3$

i. $y = 7x^2 - 14$

j. $y = x^2 + 4x + 2$

k. $y = 2x^2 + 4x - 1$

l. $y = -x^2 + 2x - 1$

Resuelve problemas por medio de parábolas.

3. Inventa los elementos que hacen falta para construir la gráfica de una función cuadrática que cumpla cada condición.

a. Una de sus soluciones es el punto $(3, 0)$.

b. No tiene soluciones reales.

c. Tiene como única solución el punto $(-1, 0)$.

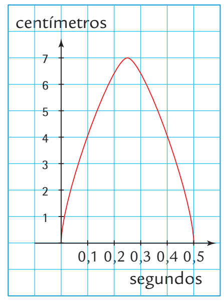
d. Tiene una solución real y abre hacia abajo.

4. CIENCIAS. En la naturaleza existen muchos animales que tienen la capacidad de hacer saltos de gran altura. Por ejemplo, el antílope de África meridional puede saltar 15 veces su propia altura, el canguro rojo, que mide 2 metros, puede saltar hasta los 3 m de alto, la pulga común puede saltar hasta una altura de 130 veces su tamaño corporal.

Este tipo de saltos se pueden mostrar usando gráficas que suponen una parábola; y su análisis se hace a partir del estudio de las características de ese tipo de gráficas.

La gráfica de la derecha representa la altura alcanzada por una pulga en un salto.

a. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pulga?
b. ¿A los cuántos segundos la pulga alcanza el punto más alto?
c. ¿En qué momento la pulga está a 5 centímetros de altura?



Ecuación cuadrática

Destreza con criterio de desempeño:

Resolver una **ecuación cuadrática** por factorización o usando la fórmula general de la ecuación de segundo grado o completando el cuadrado. **(P)**

Conocimientos previos

Factoriza los siguientes trinomios.

$x^2 + 5x + 6$

$x^2 + 6x + 9$

Actualízate

Otro importante descubrimiento del mundo antiguo, que se puede encontrar en los escritos del griego Herón de Alejandría en el siglo I, es un método aproximado a la raíz positiva de la ecuación $x^2 = 2$.

Utilizando un método de aproximaciones y cálculos repetidos denominado iteraciones, obtuvo en la fracción:

$\frac{577}{408} = 1,414215686$
una buena aproximación de $\sqrt{2}$.

Una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, se denomina **ecuación cuadrática** o **ecuación de segundo grado**.

Dependiendo del valor de las constantes b y c, las ecuaciones cuadráticas se clasifican en incompletas y completas.

- **Ecuaciones incompletas**
  Son aquellas en las cuales $b = 0$ o $c = 0$.
  Por ejemplo, $3x^2 - 5x = 0$, $-2x^2 + 7 = 0$, $-4x^2 = 0$, son ecuaciones incompletas.
- **Ecuaciones completas**
  Son aquellas en las cuales $b \neq 0$ y $c \neq 0$.
  Por ejemplo, $4x^2 + 5x - 1 = 0$ es una ecuación completa.

Solucionar una ecuación cuadrática consiste en encontrar los valores de la incógnita que hacen verdadera la igualdad. Gráficamente, la solución representa los cortes, si los hay, de la parábola con el eje x.

SOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS INCOMPLETAS

En la solución de una ecuación incompleta, se pueden distinguir tres casos.

Caso 1. Ecuación de la forma $ax^2 = 0$.

En este caso, al despejar la variable x, la única solución es $x = 0$. Es decir, la ecuación tiene una solución real.

Caso 2. Ecuación de la forma $ax^2 + bx = 0$.

Se factoriza la variable x y se iguala a cero cada uno de los factores determinados.

Soluciones de una ecuación incompleta con c = 0

$ax^2 + bx = 0$ $c = 0$

$x(ax + b) = 0$

$x = 0$ $ax + b = 0$

$x_1 = 0$ $x_2 = \frac{-b}{a}$

Ejemplo

Resolver la ecuación $x^2 + 3x = 0$.

Solución

Se extrae el factor común y se despeja así,

$$x^2 + 3x = 0$$
$$x(x + 3) = 0$$

Por tanto, $x_1 = 0$ o $x_2 + 3 = 0$

$$x_2 = -3$$

Luego, las soluciones son $x_1 = 0$ y $x_2 = -3$. Soluciones reales.

Caso 3. Ecuación de la forma $ax^2 + c = 0$.

Se despeja la variable x y se extrae la raíz cuadrada en ambos miembros. Se obtienen dos soluciones diferentes y, dependiendo del tipo de raíz, las soluciones pueden ser reales o complejas.

Soluciones de una ecuación incompleta con bx = 0

Fórmula

$ax^2 + c = 0$ $b = 0$

$x^2 = -\frac{c}{a}$

$x_1 = +\sqrt{\frac{-c}{a}}$ $x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$

Ejemplo

Resolver las ecuaciones:

a. $5x^2 - 20 = 0$ **b. $4x^2 + 16 = 0$**

Solución

Al despejar x y extraer la raíz cuadrada, se tiene:

a. $5x^2 - 20 = 0$

$$x^2 = \frac{20}{5}$$
$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{4}$$
$$x = \pm 2$$

Luego, las soluciones son $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$. Soluciones reales.

b. $4x^2 + 16 = 0$

$$x^2 = \frac{-16}{4}$$
$$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{-4} = \pm\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = \pm\sqrt{4}\, i$$
$$x = \pm 2i$$

Luego, las soluciones son $x_1 = 2i$ y $x_2 = -2i$. Soluciones complejas.

Actividades

Identifica ecuaciones cuadráticas incompletas.

1. Subraya las ecuaciones que sean cuadráticas incompletas.

a. $4x^2 - 5x = 0$
b. $12x^2 + 4 = 5x$
c. $3x = -6x$
d. $x^3 = 2 + 3x$
e. $4x^2 + 7x = 5$
f. $3x^2 + 12x = 0$
g. $8x = 2x^2$
h. $-5 = x^2 + 4x$
i. $7x^2 + 5x = 3x + 2x^2$
j. $9x^2 + 3x = -2x$

Resuelve ecuaciones cuadráticas.

2. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas incompletas.

a. $x^2 - 25 = 0$
b. $4x^2 - 64 = 0$
c. $3x^2 - 9 = 0$
d. $8x^2 + 64 = 0$
e. $x^2 - 3 = 0$
f. $4x - 2x^2 = 0$
g. $6x^2 = -3x$
h. $9x^2 - 3x = 0$
i. $8x - 6x^2 = 0$
j. $12x^2 = 60x$

BECU_M1_B2_P62_107.indd 73   4/22/14 11:52 AM

3. Dada la ecuación $5x^2 + k = 0$, cambia k por una expresión tal que la ecuación tenga:

a. Una solución entera.

b. Dos soluciones no negativas.

c. Dos soluciones reales.

b. Dos soluciones no negativas.

SOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS COMPLETAS

Para resolver una ecuación completa, de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, se utilizan tres métodos de solución: factorización, completación de cuadrados, fórmula general.

Actualízate

La descripción de la trayectoria de un proyectil desde su salida hasta el punto en donde toca el suelo, fue uno de los grandes problemas de la ingeniería militar medieval.

En la Edad Media se creía que los proyectiles ascendían oblicuamente hasta que se gastaba su provisión de ímpetus, una especie de fuerza que le imprimía la pólvora a la bala. Agotado el ímpetus, el proyectil caía perpendicularmente al suelo.

Esta teoría del movimiento entraba en desacuerdo con la observación: los proyectiles parecían describir una curva y no una línea quebrada.

La teoría moderna del movimiento, que aparece con Galileo, debe muchos de sus logros al problema del movimiento del proyectil. Desde el siglo XVII, se sabe que la trayectoria de un proyectil es una curva de segundo grado. A partir de entonces, muchos de los problemas relacionados con estas trayectorias se resuelven usando ecuaciones cuadráticas.

Solución por factorización

Para solucionar la ecuación completa $ax^2 + bx + c = 0$, se factoriza, si es posible, la expresión $ax^2 + bx + c$ y se igualan a cero cada uno de los factores. A continuación, se despeja la incógnita para encontrar las soluciones.

Ejemplo

Hallar la solución de la ecuación cuadrática
$6x^2 + 7x + 2 = 0.$

Solución

Al factorizar el trinomio $6x^2 + 7x + 2$, se obtiene $(3x + 2)(2x + 1)$.
Al igualar cada factor a cero y despejar la incógnita, se encuentran las soluciones deseadas.

$3x + 2 = 0$ de donde $x_1 = -\frac{2}{3}$ y

$2x + 1 = 0$ de donde $x_2 = -\frac{1}{2}$

Luego, las soluciones son $x_1 = -\frac{2}{3}$ y $x_2 = -\frac{1}{2}$

Solución por completación de cuadrados

No todos los trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ son factorizables en los números enteros, por ejemplo, el trinomio $x^2 + 2x + 2$.

El método de completar cuadrados consiste en transformar un trinomio como $x^2 + 2x + 2$ en un trinomio cuadrado perfecto.

El proceso para hacerlo es el siguiente:

1. Toda expresión de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se puede escribir de la forma $ax^2 + bx = c$.

   Así, la expresión $x^2 + 2x + 2 = 0$ es equivalente a la expresión $x^2 + 2x = -2$.

2. Para que la expresión $ax^2 + bx$ se convierta en un trinomio cuadrado perfecto, sabiendo que a es cuadrado perfecto, se le debe sumar el término $\frac{b^2}{4a}$.

BECU_M1_B2_P62_107.indd 74 4/22/14 12:31 PM

Así, la expresión $x^2 + 2x$ se convierte en un trinomio cuadrado perfecto si se le suma $\frac{2^2}{4} = 1$, pues $x^2 + 2x + 1$ es un trinomio cuadrado perfecto.

Ahora bien, la ecuación $x^2 + 2x + 2 = 0$ es equivalente a $x^2 + 2x + 1 = -2 + 1$, de donde

$$x^2 + 2x + 1 = -1$$
$$(x + 1)^2 = -1$$
$$\sqrt{(x + 1)^2} = \pm\sqrt{-1}$$
$$x + 1 = \pm i$$
$$x_1 = i - 1 \qquad \text{y} \qquad x_2 = -i - 1$$

Luego, las soluciones son $i - 1$ y $-i - 1$. Estas soluciones son números complejos.

L Lección

Resuelve las ecuaciones cuadráticas.

- $16x^2 - 25 = 0$
- $3(x^2 - 1) + 2(x - 5) - 20 = 0$

Solución por fórmula general

Una generalización del procedimiento de completación de cuadrados se hace utilizando una expresión llamada **fórmula general** o **fórmula de la ecuación cuadrática**. La deducción de la fórmula es la siguiente:

Si se considera la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$, para hallar el valor de x, se tiene que:

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ Dividiendo entre a toda la ecuación.

$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ Transponiendo $\frac{c}{a}$.

Al sumar $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, la expresión $x^2 + \frac{b}{a}x$ se convierte en un trinomio cuadrado perfecto.

$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ Se suma $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ Se factoriza.

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ Se suma $= -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$ Se obtiene raíz cuadrada.

$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ Se desarrolla.

$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ Se despeja x.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ Se suma fracciones.

T Tarea

Resuelve las ecuaciones cuadráticas y grafica.

- $3x^2 + 4x - 4 = 0$
- $x^2 - 10x + 21 = 0$

A esta última ecuación, se le denomina fórmula general de la ecuación cuadrática.

Si $ax^2 + bx + c = 0$ el valor de x está determinado así:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo

Determinar las soluciones de la ecuación $2x^2 - 3x - 6 = 0$, utilizando la fórmula general de la ecuación cuadrática.

Solución

Se tiene que en la ecuación $2x^2 - 3x - 6 = 0$,
$a = 2$, $b = -3$, $c = -6$.

Se aplica la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times (2) \times (-6)}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 48}}{4}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{57}}{4}$$

Luego, las soluciones son $x_1 = \dfrac{3 + \sqrt{57}}{4}$ y $x_2 = \dfrac{3 - \sqrt{57}}{4}$

Dos soluciones distintas y reales.

Actividades

Encuentra el conjunto solución de ecuaciones cuadráticas.

1. Halla la solución de las ecuaciones cuadráticas utilizando el método de factorización.

a. $x^2 - 10x + 25 = 0$

b. $4x^2 - 20x + 25 = 0$

c. $x^2 - 14x + 49 = 0$

d. $4x^2 + 9 - 12x = 0$

e. $30x + 25 = -9x^2$

f. $25x^2 + 40x + 16 = 0$

g. $2x^2 - 2 = -3x$

h. $x^2 - 6x = 7$

i. $48 + 2x = x^2$

j. $6x^2 - 13x = 15$

k. $5x^2 - 17x = -6$

l. $x^2 - 12x = -36$

Identifica el término que completa el cuadrado perfecto.

2. Escribe en la tabla el término que se debe sumar a ambos lados de la ecuación, para resolverla por completación de cuadrados, e indica la solución de cada una.

Ecuación	Término	Solución
$x^2 + 6x + 10 = 0$		
$4x^2 + 3x + 5 = 0$		
$x^2 + 10x + 7 = 0$		
$4x + x^2 = 5$		
$9x + 9x^2 - 4 = 0$		

Determina la solución de una ecuación cuadrática mediante la fórmula.

3. Resuelve cada una de las ecuaciones cuadráticas, usando la fórmula general.

a. $x^2 + 10x + 3 = 0$
b. $2x^2 + 6x - 1 = 0$
c. $4x^2 = x - 3$
d. $3x^2 + 6x + 4 = 0$
e. $2x^2 - 4x = -1$
f. $2x^2 + 2 = +5x$
g. $2x^2 - 3x + 1 = 0$
h. $6x^2 - x - 12 = 0$

Analiza un procedimiento y corrige errores.

4. Encuentra el error cometido en la solución de cada ecuación. Luego, resuelve las ecuaciones correctamente.

a. $9x^2 + 4x = 12$

Completando cuadrados se suma $\frac{4^2}{4} = \frac{16}{4} = 4$

$9x^2 + 12x + 4 = 12 + 4$

$(3x + 2)^2 = 16$

$\sqrt{(3x + 2)^2} = \pm\sqrt{16}$

$3x + 2 = \pm 4$

$3x + 2 = 4$ | $3x + 2 = -4$

$x_1 = \frac{4 - 2}{3}$ | $x_2 = \frac{-4 - 2}{3}$

$x_1 = \frac{2}{3}$ | $x_2 = \frac{-6}{3} = -2$

b. $5x^2 + 6x + 1 = 0$

Por fórmula general

$a = 5. \quad b = 6. \quad c = 1$

$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (5)(1)}}{2 \cdot 5}$

$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{10}$

$x = \frac{-6 \pm \sqrt{14}}{10}$

$x_1 = \frac{-6 \pm \sqrt{14}}{10}$ | $x_2 = \frac{-6 \pm \sqrt{14}}{10}$

c. $6x^2 + 5x = -6$

Por factorización

$6x^2 + 5x - 6 = 0$

$\frac{36x^2 + 5x \cdot 6 - 36}{6} = 0$

$\frac{(6x - 9) \cdot (6x + 4)}{6} = 0$

$\frac{3(2x - 3) \cdot 2(3x + 2)}{6} = 0$

$(2x - 3) \cdot 2(3x + 2) = 0$

$2x - 3 = 0$

$x_1 = \frac{3}{2}$

$3x + 2 = 0$

$x_2 = \frac{-2}{3}$

Resuelve problemas.

5. Escribe las ecuaciones de segundo grado a partir de sus raíces.

a. $x_1 = 5,\ x_2 = -6$
b. $x_1 = 43\ ,\ x_2 = -2$
c. $x_1 = 5,\ x_2 = -1$
d. $x_1 = m + n,\ x_2 = m - n$

6. Determina el o los valores de k para que las raíces cumplan la condición dada.

a. $x^2 + kx + 25 = 0$; que tenga una sola solución.
b. $x^2 - 4x + k = 0$; que no tenga soluciones reales.
c. $kx^2 + 8x + 5 = 0$; que tenga dos soluciones reales diferentes.
d. $2x^2 + 5x + k = 0$; $x_1 = 2$; $x_2 = 3$
e. $kx^2 - 5x + 1 = 0$; que tenga dos soluciones reales iguales.
f. $ax^2 + kx - 30 = 0$; $x_1 = 5$, $x_2 = -3$
g. $x^2 + mx + n = 0$; que el producto de las raíces sea el doble que su suma.
h. $x^2 + kx - 9 = 0$; que tenga sus raíces opuestas.

7. Resuelve los problemas.

a. En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide 2 cm más que el otro y 4 cm menos que la hipotenusa, calcula las longitudes de los lados.

b. En un rectángulo cuya superficie es 240 m^2, el largo es 6 m mayor que el triple del ancho, encuentra las dimensiones.

c. El producto de dos números enteros consecutivos es 182. Determina cuáles son dichos números.

d. El área de un rectángulo es 108 m^2 y el largo mide el triple que el ancho. Halla cuánto miden su largo y su ancho.

e. En una hoja A4 (29,7 cm · 21 cm), el área de impresión es de 355,5 cm^2. Calcula el ancho de la zona en blanco, si esta es igual en todos los márgenes.

f. Una lata de gaseosa debe tener 14 cm de altura y capacidad para 2 250 cm^3. Indica cuánto debe medir el radio del envase cilíndrico.

BECU_M1_B2_P62_107.indd 77 4/22/14 11:52 AM

Propiedades de las raíces de la ecuación cuadrática

Destreza con criterio de desempeño:
Reconocer las propiedades de las **raíces** de la ecuación cuadrática. **(P)**

Conocimientos previos

Determina las raíces de la ecuación $x^2 + 4x + 4 = 0$.

Actualízate

Bhaskara (1114-1160), matemático hindú, fue un destacado representante de la escuela Ujjain, uno de los centros del renacimiento de las matemáticas indias durante la Edad Media.

En una de sus obras llamada Bijagunta, analiza expresiones algebraicas e investiga soluciones de las ecuaciones cuadráticas.

En toda ecuación cuadrática, se verifican las siguientes propiedades.

Propiedad 1
La suma de las raíces es igual al cociente entre el coeficiente de x y el coeficiente de x^2 con signo contrario.
Es decir, si x_1 y x_2 son raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, entonces,

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Propiedad 2
El producto de las raíces es igual al cociente entre el término independiente y el coeficiente x^2.
Es decir, si x_1 y x_2 son raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, entonces,

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Ejemplo

1. **Escribir una ecuación cuadrática para la función cuyas raíces son $x_1 = 5$ y $x_2 = -7$.**

   Solución

   Sea $ax^2 + bx + c = 0$ la ecuación buscada.

   $x_1 + x_2 = 5 + (-7) = -2 = -\frac{b}{a}$ — Propiedad 1

   $-2 - \frac{b}{a}$ entonces $\frac{b}{a} = 2$ — $b = 2$ $a = 1$

   $x_1 \cdot x_2 = (5)(-7) = -35 = \frac{c}{a}$ — Propiedad 2

   $\frac{c}{a} = -35$ — $c = -35$ $a = 1$

   En conclusión, la ecuación buscada es:

   $$x^2 + 2x - 35 = 0$$

2. **Escribir una ecuación cuadrática para la función cuyas raíces son 3 y -3.**

   Solución

   Sea $ax^2 + bx + c = 0$ la ecuación buscada.

   $x_1 + x_2 = 3 + (-3) = 0 = -\frac{b}{a}$ — Propiedad 1

   como $0 = -\frac{b}{a}$, entonces $\frac{b}{a} = 0$ — $b = 0$ $a = 1$

   $x_1 \cdot x_2 = (3) \cdot (-3)$ — Propiedad 2

   $= -9$

   $= 9 = \frac{c}{a}$ — $c = 9$ $a = 1$

   En conclusión, la ecuación buscada es:

   $$x^2 - 9 = 0$$

BECU_M1_B2_P62_107.indd 78 4/22/14 11:52 AM

Gráfica de $y = x^2 - x - 6$

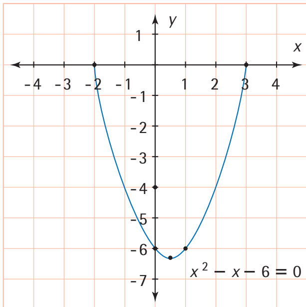


Figura 7

Gráfica de $y = x^2 + 4x + 4$

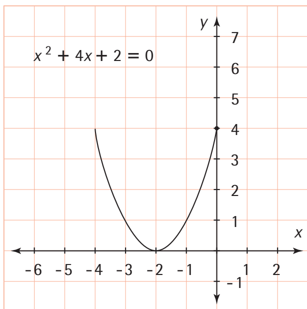


Figura 8

Gráfica de $y = x^2 + 2$

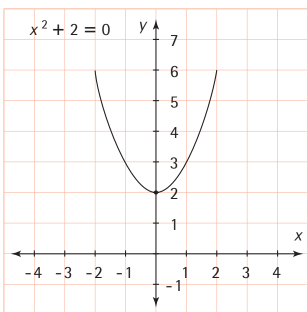


Figura 9

NATURALEZA DE LAS RAÍCES EN UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA

En la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

la expresión $b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** de la ecuación.

El discriminante de una ecuación cuadrática permite determinar la naturaleza de sus soluciones.

Así, dependiendo del resultado del discriminante, se presentan tres casos:

- **Caso 1.** $b^2 - 4ac > 0$

  En este caso, se dice que la ecuación tiene dos soluciones reales diferentes; y al graficar la función, se observa que tiene dos puntos de corte con el eje x.

  Por ejemplo, en la ecuación $x^2 - x - 6 = 0$ el discriminante es:

  $$b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 1^2 + 24 = 25.$$

  Como $b^2 - 4ac > 0$, entonces la ecuación $x^2 + 2x - 35 = 0$ tiene dos raíces (ceros o soluciones) reales diferentes (fig. 7).

- **Caso 2.** $b^2 - 4ac = 0$

  En este caso, se dice que la ecuación tiene una única solución y es un número real.

  Al graficar la función cuadrática, su vértice está sobre el eje x.

  Por ejemplo, en la ecuación $x^2 + 4x + 4 = 0$ el discriminante es:

  $$b^2 - 4ac = 4^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0.$$

  Como $b^2 - 4ac = 0$, entonces la ecuación $x^2 + 4x + 4 = 0$ tiene una única solución real (fig. 8).

- **Caso 3.** $b^2 - 4ac < 0$

  En este caso, la ecuación tiene dos soluciones complejas diferentes. La gráfica de la función no corta el eje x (fig. 9).

  Por ejemplo, en la ecuación $x^2 + 2 = 0$ el discriminante es:

  $$b^2 - 4ac = 0^2 - 4(1)(2) = -8.$$

  Como $b^2 - 4ac < 0$, entonces la ecuación $x^2 + 2 = 0$ tiene dos raíces complejas diferentes.

Actividades

Determina la ecuación cuadrática que tiene las raíces indicadas.

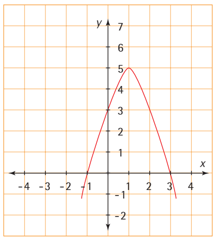
1. Escribe una ecuación cuadrática para cada par de raíces.

   a. $x_1 = -2;\ x_2 = 3$
   b. $x_1 = -5;\ x_2 = -6$
   c. $x_1 = 3;\ x_2 = -4$
   d. $x_1 = 3 + i;\ x_2 = 3 - i$
   e. $x_1 = 4;\ x_2 = -\frac{3}{2}$
   f. $x_1 = 4 + \sqrt{15};\ x_2 = 4 - \sqrt{15}$
   g. $x_1 = 5 - i;\ x_2 = 5 + i$
   h. $x_1 = 1 + \sqrt{3}\ ;\ x_2 = 1 - \sqrt{3}$
   i. $x_1 = 3 + 2;\ x_2 = 3 - 2$
   j. $x_1 = \frac{4}{3};\ x_2 = \frac{4}{3}$

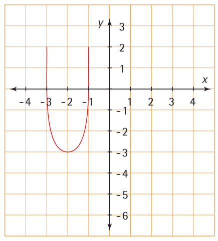
Determina la ecuación cuadrática que corresponde a cada gráfico.

2. Observa las siguientes gráficas. Luego, a partir de un sistema de ecuaciones, escribe la ecuación correspondiente a cada una.

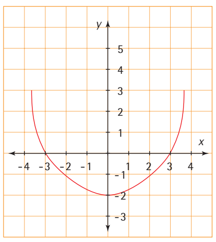
a.



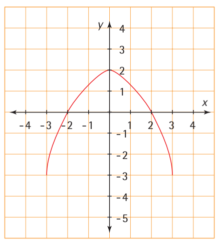
c.



b.



d.



Opera con las propiedades de las raíces de la ecuación cuadrática.

3. Calcula la suma y el producto de las raíces de cada ecuación, sin hallar la solución.

a. $3x(x+6)=0$ c. $\sqrt{3}x^2-\sqrt{5}x+1=0$

b. $9x^2-2x=0$ d. $5x^2-8x+4=0$

Resuelve problemas.

4. Determina el valor que debe tener k, para que la condición dada se cumpla.

a. $x^2-kx+27=0$, una raíz es el triple de la otra.

b. $4x^2-3x+k=0$, tiene una raíz igual a 3.

c. $2kx^2-4kx+5k=3x^2+x-8$, el producto de sus raíces sea igual al doble de su suma.

d. $x^2-3(x-k)-2=0$, una raíz sea igual al doble de la otra menos 3.

Analiza las raíces de las ecuaciones cuadráticas.

5. Determina la naturaleza de las raíces haciendo uso del discriminante.

a. $5x^2-4x-2=0$ f. $9x^2-3x-2=0$

b. $x^2+2x-12=0$ g. $3x^2+3=0$

c. $-x^2-9=0$ h. $12x^2+5x-3=0$

d. $x^2+2x+4=0$ i. $5x^2-4x-1=0$

e. $-x^2+2x+8=0$ j. $x^2+10x+25=0$

ECUACIONES QUE SE PUEDEN REDUCIR A ECUACIONES CUADRÁTICAS

Existen dos tipos de ecuaciones que aparentemente no son ecuaciones cuadráticas. Estas son las ecuaciones con radicales y las ecuaciones bicuadráticas.

ECUACIONES CON RADICALES DE ÍNDICE DOS

Una ecuación radical es aquella que tiene una variable en un radicando. Por ejemplo, $\sqrt{3x}=7$ y $\sqrt{x+1}-3=\sqrt{x}$ son ecuaciones radicales de índice dos.

Para solucionar estas ecuaciones, se realizan los siguientes pasos:

- Se deja en uno de los miembros de la ecuación un solo radical. Si hay varios radicales, se escoge uno de ellos.
- Se reducen términos semejantes.
- Se eleva al cuadrado los dos miembros de la ecuación.
- Se reducen nuevamente términos semejantes.
- Si la ecuación resultante tiene términos con radicales, se repite el proceso anterior hasta obtener una ecuación cuadrática de la forma $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$.

- Se resuelve la ecuación obtenida por cualquiera de los métodos conocidos.
- Se verifican los resultados obtenidos. En ocasiones, al elevar al cuadrado en ambos miembros, se introducen **soluciones extrañas**, es decir, que no son solución de la ecuación original.

Ejemplo

Resolver la ecuación $\sqrt{x+1} + 5 = x$.

Solución

De acuerdo al proceso presentado, se deja en uno de los miembros de la ecuación el radical y se eleva al cuadrado.

$\sqrt{x+1} = x - 5$	Se despeja el radical.
$(\sqrt{x+1})^2 = (x-5)^2$	Se eleva al cuadrado.
$x + 1 = x^2 - 10x + 25$	
$x^2 - 11x + 24 = 0$	Se plantea la ecuación.
$(x-8)(x-3) = 0$	Se factoriza.

Luego, las soluciones son:

$$x - 8 = 0 \quad \text{y} \quad x - 3 = 0$$
$$x_1 = 8 \qquad\qquad x_2 = 3$$

Al verificar las soluciones, se tiene que si $x_2 = 3$, en la ecuación se presenta que $7 = 3$.

Por lo tanto, $x_2 = 3$ no es solución de la ecuación.

Luego, la solución es $x = 8$.

Trabajo cooperativo

Determinen la solución de las siguientes ecuaciones.

a. $8x^4 + 26x^2 - 15 = 0$

b. $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$

ECUACIONES BICUADRÁTICAS

Una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ se denomina ecuación bicuadrática.

Para solucionar una ecuación bicuadrática, es necesario convertirla en una ecuación de segundo grado.

Para ello, se hacen las siguientes sustituciones.

$$x^2 = u \longrightarrow x^4 = u^2$$

Al ser remplazadas en la ecuación original, se tiene:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$
$$au^2 + bu + c = 0$$

Como al resolver la ecuación cuadrática se obtienen dos valores para u, al hacerse $u = x^2$, se obtienen dos nuevos valores.

Por lo tanto, una ecuación bicuadrática tiene cuatro posibles soluciones.

Tarea

Resuelvan las ecuaciones siguientes.

$3x - 16\sqrt{x} + 5 = 0$

$x^4 - 11x^2 = 0$

BECU_M1_B2_P62_107.indd 81 4/22/14 11:52 AM

Ejemplo

Resolver la ecuación bicuadrática $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Solución

Al efectuar las sustituciones $u = x^2$ y $u^2 = x^4$ y resolver para u, se tiene:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$
$$u^2 - 5u + 4 = 0$$
$$(u - 4)(u - 1) = 0$$
$$u = 4 \quad \text{y} \quad u = 1$$

Al efectuar nuevamente la sustitución y resolver para x, se tiene:

$u = 4$	$u = 1$
Luego, $x^2 = 4$	Luego, $x^2 = 1$
$x = \pm\sqrt{4}$	$x = \pm\sqrt{1}$
$x = \pm 2$	$x = \pm 1$

Así, la ecuación bicuadrática $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ tiene cuatro soluciones para x: -2, 2, -1 y 1.

Actividades

Encuentra la solución de ecuaciones con radicales.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales. Verifica las respuestas.

a. $\sqrt{x + 2} = 3 + x$
b. $x - 2 = \sqrt{x}$
c. $\sqrt{x - 3} + 5 = x$
d. $\sqrt{x - 8} = 2$
e. $\sqrt{3x + 1} = 3x + 11$
f. $\sqrt{x + 7} = x + 2$
g. $\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x + 1} = 1$
h. $-1 - \sqrt{x + 5} + 2\sqrt{x} = 0$
i. $\sqrt{3x - 14} + \sqrt{3x + 5} = 9$
j. $-10 + \sqrt{x + 9} = 2 - 2x$
k. $\sqrt{2x + 8} + \sqrt{2x + 5} = \sqrt{8x + 25}$
l. $\sqrt{2 + x} - 4 = -\sqrt{10 - 3x}$

Resuelve ecuaciones y las comprueba.

2. Halla la solución de la ecuación y verifica las respuestas.

a. $x^4 - 3x^2 + 36 = 0$
b. $x^4 + x^2 = 0$
c. $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$
d. $9x^4 = 40x^2 - 16$
e. $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
f. $25x^4 + 9x^2 - 16 = 0$
g. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
h. $2x^4 + 6x^2 - 8 = 0$
i. $25x^4 - 16 = -9x^2$
j. $4x^4 + 9 = 37x^2$
k. $3x^4 + x^2 = 6$
l. $2x^4 - 5 = -x^2$

Analiza el procedimiento de resolución y lo corrige.

3. Indica el error cometido en la solución de la ecuación. Luego, corrígela.

$$x + \sqrt{4x + 1} = 5$$
$$\sqrt{4x + 1} = 5 - x$$
$$(\sqrt{4x + 1})^2 = (5 - x)^2$$
$$4x + 9 = 25 + 10x - x^2$$
$$0 = 16 + 6x - x^2$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4(6)(-1)}}{2}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{60}}{2}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{15}}{2}$$

$$x_1 = -3 + \sqrt{15}$$
$$x_2 = -3 - \sqrt{15}$$

Problemas con ecuaciones de segundo grado

Destrezas con criterio de desempeño:

- Reconocer **problemas** que pueden ser modelados mediante funciones cuadráticas (ingresos, tiro parabólico, etc.), identificando las variables significativas presentes en los problemas y las relaciones entre ellas. **(M)**
- Resolver **problemas** mediante modelos cuadráticos. **(P, M)**

En ocasiones, al plantear problemas se obtienen ecuaciones de segundo grado.

Al resolver la ecuación, el problema se soluciona, pero es importante verificar la solución obtenida con el contexto del problema.

Ejemplo

Solucionar los siguientes problemas.

1. **Dos números naturales se diferencian en 3 unidades. Si la suma de sus cuadrados es 369, hallar los números.**

   Solución

   Se representan las incógnitas:

   Número mayor $= x$

   Número menor $= x - 3$

   Al plantear la ecuación se tiene que:

   $x^2 + (x - 3)^2 = 369$

   $x^2 + x^2 - 6x + 9 = 369$ Se resuelve el binomio.

   $2x^2 - 6x + 9 = 369$ Se reducen términos semejantes.

   $x^2 - 3x - 180 = 0$ Se simplifica la ecuación.

   $(x - 15)(x + 12) = 0$ Se factoriza.

   Luego, las soluciones obtenidas son $x = 15$ y $x = -12$.

   Como en las condiciones del problema se enuncia que son números naturales, la solución $x = -12$ se descarta.

   Por lo tanto, $x - 3 = 15 - 3 = 12$, es decir, los números pedidos son 15 y 12.

2. **Claudia es cuatro años mayor que Paola. Si dentro de cuatro años el producto de sus edades es 252, determinar las edades actuales.**

   Solución

   Edad de Claudia $= x + 4$

   Edad de Paola $= x$

   Dentro de cuatro años:

   Claudia $= x + 8$

   Paola $= x + 4$

   Como el producto de estas edades, dentro de cuatro años, es 252, se plantea la ecuación:

   $(x + 8)(x + 4) = 252$

Conocimientos previos

Escribe en símbolos los siguientes enunciados.

- El doble de un número al cuadrado más tres.
- Dos números consecutivos.
- La suma de los cuadrados de dos números pares.

BECU_M1_B2_P62_107.indd 83 4/22/14 11:52 AM

Se resuelve para x, y se tiene:

$x^2 + 8x + 4x + 32 = 252$

$x^2 + 12x - 220 = 0$

$(x + 22)(x - 10) = 0$

Así, las soluciones son $x_1 = -22$ y $x_2 = 10$.

Como no se determinan edades negativas, la solución $x_1 = -22$ se descarta.

Luego, las edades actuales de las niñas son:

Paola 10 años.

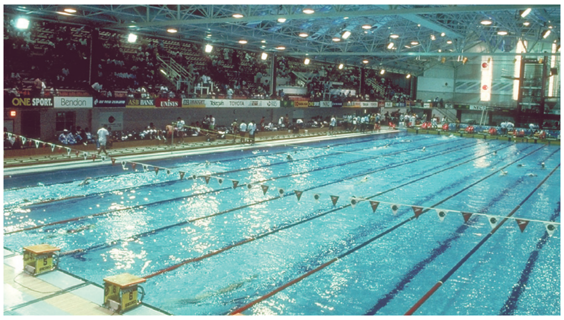
Claudia 14 años.

Actividades

Soluciona problemas mediante ecuaciones cuadráticas.

1. Resuelve los siguientes problemas.

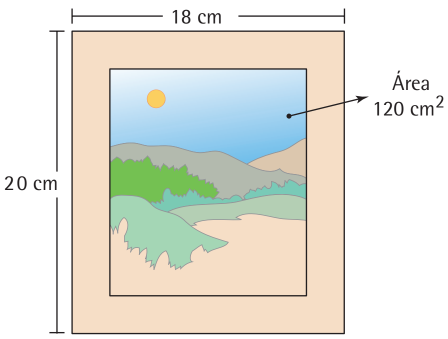
a. El largo de la piscina de la foto excede su ancho en 4 m.



Si cada dimensión se aumenta en 4 m, ¿el área será el doble?

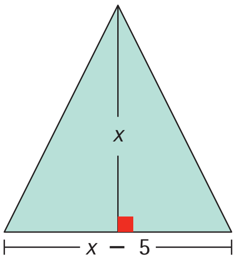
b. La suma de las edades de Juana y Margarita es 23 años y su producto es 102. Halla las edades.

c. Las dimensiones del marco de la pintura son 18 cm de ancho por 20 cm de largo. Si la pintura ocupa 120 cm^2, determina el ancho de la pintura.



d. Ricardo tiene 3 años más que Diego y el cuadrado de la edad de Ricardo disminuido en el cuadrado de la edad de Diego es equivalente a 129 años. Halla las edades de ambos.

e. Encuentra las dimensiones del triángulo de la figura.



Área del triángulo
250 m^2

f. Si se resta 2 cm del lado de un cuadrado, el área del cuadrado resultante es igual a 25 cm^2, entonces, ¿cuánto mide el lado del cuadrado grande?

g. Andrea compró cierto número de libros por $180. Si hubiera comprado 6 libros menos por el mismo dinero, cada libro le habría costado $1 más. ¿Cuántos libros compró y cuánto le costó cada uno?

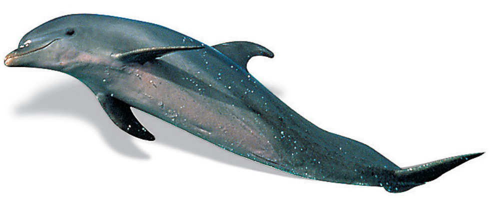
2. CIENCIAS. Algunos animales pueden desarrollar grandes velocidades para perseguir a sus presas o para escapar de los predadores. Otros animales llevan una vida más relajada. Así, un guepardo es 2 000 veces más veloz que un caracol.

BECU_M1_B2_P62_107.indd 84 4/22/14 11:52 AM

Encuentra las velocidades que pueden alcanzar cada par de animales de acuerdo con los datos suministrados.

a. La suma de las velocidades que pueden alcanzar un caballo de pura raza y un elefante africano equivale a 110 km/h y el producto de sus velocidades es 2 800.

b. La suma de las velocidades de nado de un delfín y una trucha marina es de 72 km/h. El producto de sus velocidades de nado es 1 152.



3. Resuelve los problemas.

a. La masa de un lobo marino en sus primeros dos años de vida está dada por la fórmula $P = \frac{m^2}{4} - m + 68$, donde *m* es el número de meses que tiene el lobo marino. Determina a qué edad un lobo marino llega a pesar 83 kilogramos.

b. El número total de diagonales que se pueden trazar en un polígono de *n* lados está dado por la fórmula $d = \frac{n^2 - 3n}{2}$. ¿De cuántos lados es un polígono en el que se pueden trazar 54 diagonales en total?

c. Un abuelo tiene 67 años y sus dos nietos tienen 3 y 4 años. ¿En cuántos años más, la edad del abuelo será igual al producto de las edades de ambos nietos?

d. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 17 cm y las medidas de los catetos tienen 7 cm de diferencia. Determina las medidas de los catetos.

e. El área de un triángulo equilátero es 400 mm^2, ¿cuánto miden los lados del triángulo?

f. La suma de los cuadrados de tres enteros pares consecutivos es 596. Determina el mayor entero del trío.

g. La arista de un cubo es 4 cm más corta que la arista de un segundo cubo. Determina la superficie de cada cubo, si la diferencia de sus volúmenes es 1 216 cm^3.

h. Encuentra los tres lados de un triángulo rectángulo si se sabe que sus medidas corresponden a tres múltiplos consecutivos de 10.

i. El ancho de un rectángulo mide 5 cm menos que el largo. Si el área del rectángulo es 104 cm^2, determina sus medidas.

j. Un curso organiza un asado de fin de año, para el cual una persona se encarga de las compras y gasta $ 450, dinero que será devuelto mediante una cuota que pagará cada participante del asado. Pero seis personas que habían dicho que no irían, cambian de opinión y asisten al asado. Entonces, la cuota por persona disminuye $ 25. ¿Cuántas personas asistieron al asado?

k. El largo de un rectángulo es el triple de su ancho. Si el rectángulo tiene 72 metros más de largo y 4 metros más de ancho, su área se cuadriplica. Determina el largo del rectángulo.

BECU_M1_B2_P62_107.indd 85 4/22/14 11:52 AM

Problemas de ampliación

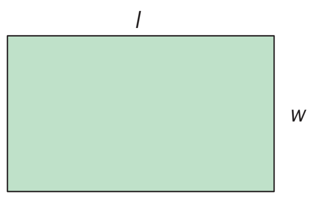
1. **Tecnología.** Distintos fenómenos de la ciencia, la ingeniería y el comercio pueden describirse por medio de funciones cuadráticas. En algunas ocasiones, es necesario encontrar el máximo o el mínimo de este tipo de funciones.

   Por ejemplo:

   Un ganadero desea construir un corral rectangular con 1 000 m de cercado. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del corral para que el área cercada sea máxima?

   Para resolver este problema, se deben determinar las dimensiones del corral para que el área sea máxima.

   Si se denota el ancho con w y el largo con l, entonces el área A se expresa como $A = l \cdot w$.



   Como el perímetro es de 1 000 m, entonces satisface la ecuación

$$2w + 2l = 1\,000.$$

   Se despeja l en esta ecuación

$$l = \frac{1\,000 - 2w}{2}$$
$$l = 500 - w$$

   Luego, se sustituye l por $500 - w$ en la fórmula

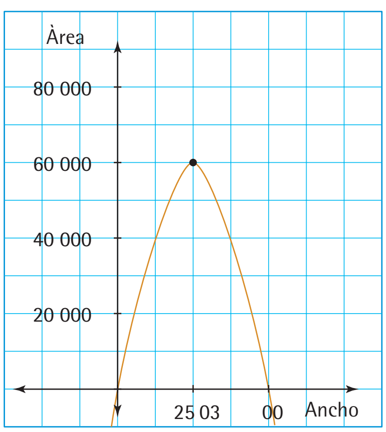
$$A = l \cdot w$$

   Así $A = (500 - w)w$, es decir, $A = 500w - w^2$.

   De esta manera se expresa el área del rectángulo en función del ancho.

   Para determinar el área máxima, se grafica

$$A = 500w - w^2$$



   Es una parábola que abre hacia abajo, el máximo valor de A se da en el vértice (250, 62 500).

   Es decir, cuando $w = 250$ m.

   Por lo tanto, el largo correspondiente es:

   $l = 500 - w$
   $l = 500 - 250$
   $l = 250$ m

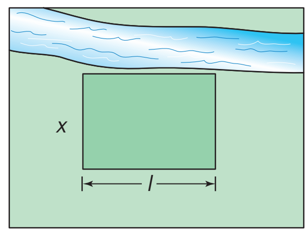
   Así, las dimensiones del corral, para que su área sea máxima, son de 250 m por 250 m.

   Usa el método explicado anteriormente para solucionar los siguientes problemas.

   a. Halla dos números reales tales que su suma sea 6 y su producto sea el máximo.

   b. Un vitral está compuesto por un rectángulo y un semicírculo de radio r. Si el perímetro del vitral debe ser 400 cm, encuentra las dimensiones del vitral de mayor área.

   c. Se necesita doblar un pedazo de alambre de 60 cm para formar un rectángulo. Demuestra que el rectángulo de mayor área A es un cuadrado.



   d. Un ranchero quiere cercar un corral rectangular a lo largo de una corriente de agua rectilínea (ver la figura). Si la longitud de cerca disponible es 3 000 pies, halla el valor máximo de la función del área. ¿Cuáles son las dimensiones del área máxima del corral?

2. **Ciencias.** El agua es el compuesto que más ampliamente se encuentra distribuido en la naturaleza. Existe en los tres estados: **sólido**, en las cumbres de las montañas y en los casquetes polares, en forma de nieve y de hielo.

   Líquida, en los océanos, mares, ríos, lagos, etc.

   Gaseosa, en la atmósfera, a la cual llega por evaporación.

Químicamente el agua es un compuesto cuya molécula está formada por dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno.

Las moléculas de agua se atraen entre sí debido a su naturaleza bipolar: el extremo negativo de una molécula es atraído por el extremo positivo de otra. Esta fuerza de atracción hace que el agua hierva a determinada temperatura de acuerdo con la altitud o elevación sobre el nivel del mar.

La siguiente fórmula relaciona la temperatura a la cual hierve el agua con la altitud en metros sobre el nivel del mar.

$$h = 580(100 - T)^2 + 1\,000(100 - T)$$

Encuentra la temperatura a la cual hierve el agua en algunos de los sitios indicados.

a.

Antisana 5 704 m

b.

Cotopaxi 5 897 m

c.

Cayambe 5 790 m

d.

Chimborazo 6 310 m

3. Un sistema de ecuaciones puede tener una ecuación lineal y una cuadrática.

Para solucionar un sistema de este tipo, se utilizan los métodos algebraicos vistos anteriormente.

Por ejemplo, el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ y = x^2 - 2x + 4 \end{cases}$$

Primero se despeja y en la ecuación.

$$x + y = 4$$

así,

$$y = 4 - x$$

Luego se remplaza la y por la expresión anteriormente encontrada, en la otra ecuación, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4x + 4 \\ 4 - x &= x^2 - 4x + 4 \end{aligned}$$

Se resuelve esta última ecuación cuadrática, por alguno de los métodos vistos.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 - 4 + x &= 0 \\ x^2 - 3x &= 0 \\ x(x - 3) &= 0 \\ x = 0 \qquad x - 3 &= 0 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

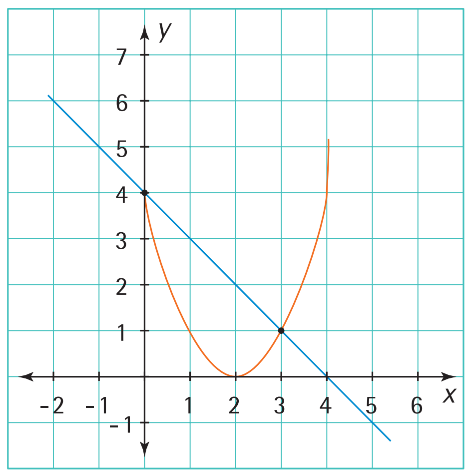
Se remplazan los valores de x para encontrar los de y.

Para $x = 0$ $\quad x + y = 4$ $\quad 0 + y = 4$ $\quad y = 4$

Para $x = 3$ $\quad x + y = 4$ $\quad 3 + y = 4$ $\quad y = 1$

Así, las soluciones son (0, 4) y (3, 1).

La gráfica es:



Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

a. $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 6 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + 8xy = 4 \end{cases}$

BECU_M1_B2_P62_107.indd 87 4/22/14 11:53 AM

Posiciones relativas entre una recta y una parábola

Destreza con criterio de desempeño:

Identificar la **intersección gráfica** de una **parábola y una recta** como solución de un sistema de dos ecuaciones: una cuadrática y otra lineal. **(C, P)**

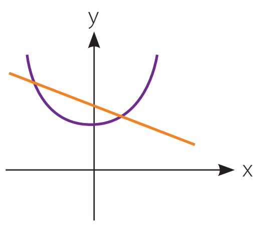
Conocimientos previos

Menciona la posición relativa que se pueden dar entre dos rectas.

Recuerda

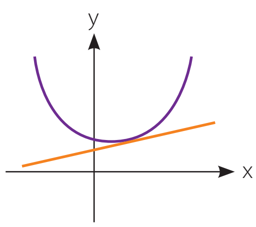
Recta secante a una parábola

La recta y la parábola tienen dos puntos en común.



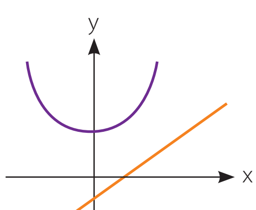
Recta tangente a una parábola

La recta y la parábola tienen un punto en común.



Recta y parábola

La recta y la parábola no tienen puntos en común.



Con respecto a una parábola, una recta puede ser: secante, si la corta en dos puntos; tangente, si la corta en un solo punto; o puede no cortarla en ningún punto. Para cada una de ellas, se deben cumplir diferentes condiciones.

Para determinar las posiciones relativas entre una recta y una parábola, se remplaza la ecuación de la recta en la de la parábola; es decir, se resuelve un sistema cuadrático entre las siguientes ecuaciones.

$$\begin{cases} Ax^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ y = mx + b \end{cases} \qquad \begin{cases} Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ y = mx + b \end{cases}$$

Ejemplos

1. Las ecuaciones dadas representan la oferta y la demanda de un producto en el mercado. Determinar el punto de equilibrio y trazar las gráficas.

$$\begin{cases} x^2 + 3x - y - 2 = 0 & (1) \\ 2x + y - 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

Solución

- Se despeja *y* en ◯: $y = 4 - 2x$.
- Se remplaza el valor de *y* en la primera ecuación.

$$x^2 + 3x - (4 - 2x) - 2 = 0$$
$$x^2 + 3x - 4 + 2x - 2 = 0$$
$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

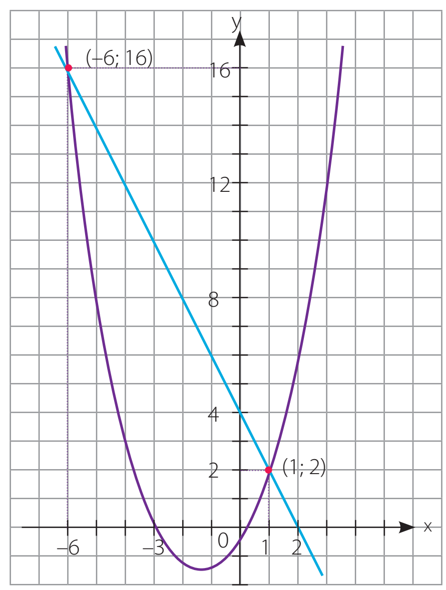
- Se resuelve la ecuación que se obtuvo.

$x_1 = -6$ $\quad y_1 = 4 - 2(-6) = 16$ $\quad P_1\ (-6, 16)$

$x_2 = 1$ $\quad y_2 = 4 - 2(1) = 2$ $\quad P_2\ (1, 2)$

El punto de equilibrio es P_2 (1, 2), puesto que el otro punto tiene valores negativos, que no son válidos, pues no se pueden producir u ofertar −6 unidades.

Para realizar el gráfico, se elabora la tabla de valores tanto para la recta como para la parábola.



BECU_M1_B2_P62_107.indd 88 4/22/14 11:53 AM

2. Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 = 4x$, sabiendo que pasa por el punto T (0, 3).

Toma en cuenta

Condiciones del discriminante

$b^2 - 4ac$

- $b^2 - 4ac > 0$
  Si el discriminante es mayor que cero, que es la condición para que la recta y la parábola sean secantes (dos raíces reales diferentes), se establecen dos cortes de la recta con la parábola.
- $b^2 - 4ac = 0$
  Si el discriminante es igual a cero, que es la condición de tangencia (una raíz real), hay solo un punto de corte.
- $b^2 - 4ac < 0$
  Si el discriminante es menor que cero, no existen cortes (es decir, hay raíces imaginarias).

Glosario

punto de equilibrio. El mercado de un producto está conformado por la industria y por los consumidores de ese bien. El punto de equilibrio se presenta cuando la cantidad del bien demandado es igual a la cantidad del producto ofertado, a un determinado precio.

Solución

- Para resolver este ejercicio, primero se debe determinar la pendiente de la recta que es tangente a la parábola.
- Luego, se determina la ecuación de la recta que pasa por el punto T, utilizando la forma punto-pendiente; m es el valor de la pendiente que se necesita determinar.

$$y - 3 = m(x - 0)$$

- Después, se despeja la variable y de la ecuación y se tiene esta.

$$y = mx + 3 \quad (1)$$

- Finalmente, la ecuación (1) se remplaza en la de la parábola, $y^2 = 4x$. Se realizan las operaciones y se ordena la ecuación a partir de la variable x.

$$(mx + 3)^2 = 4x$$

$$m^2x^2 + 6mx + 9 - 4x = 0$$

$$m^2x^2 + x(6m - 4) + 9 = 0$$

- Para que exista tangencia, en esta ecuación se debe cumplir que $b^2 - 4ac = 0$.

$a = m^2$

$b = 6m - 4$

$c = 9$

$b^2 - 4ac = 0$

$(6m - 4)^2 - 4(m^2)(9) = 0$

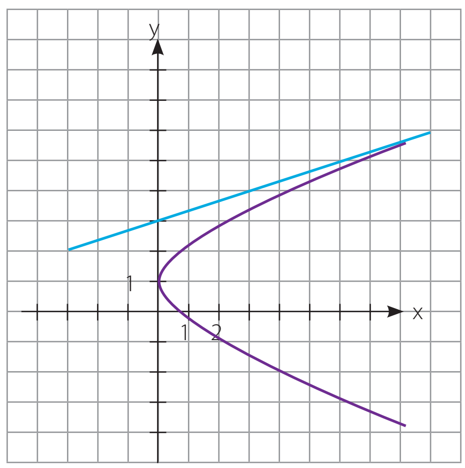
$36m^2 - 48m + 16 - 36m^2 = 0$

$-48m + 16 = 0$

$m = \frac{1}{3}$

$y = \frac{1}{3}x + 3$

$x - 3y + 9 = 0$



La tangente es la recta de la ecuación $x - 3y + 9 = 0$.

Actividades

1. Determina los puntos de corte entre las siguientes ecuaciones.

a. $\begin{cases} y - x^2 - 5x + 3 = 0 \\ y = 6x - 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 - x = 0 \\ y = x + 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 4 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$

BECU_M1_B2_P62_107.indd 89 4/22/14 11:53 AM

Sistemas cuadráticos

Destreza con criterio de desempeño:

Identificar la **intersección de dos parábolas** como la igualdad de las imágenes de dos números respecto de dos funciones cuadráticas. **(C, P)**

Conocimientos previos

Grafica las siguientes parábolas en un mismo plano e indica qué relación hay entre sus gráficas.

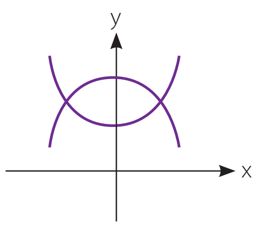
$y = x^2 - 3$

$y = x^2 + 3$

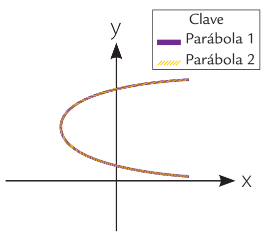
Recuerda

Los sistemas cuadráticos pueden ser:

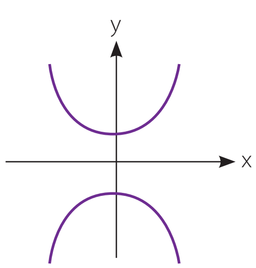
Compatible determinado



Compatible indeterminado



Incompatible



Un sistema de ecuaciones de segundo grado o cuadrático es aquel en el que aparece al menos una ecuación de grado 2. De igual manera que en las ecuaciones lineales, un sistema cuadrático es compatible determinado cuando hay uno o dos cortes entre las ecuaciones participantes; es compatible indeterminado si las parábolas son coincidentes e incompatible si las parábolas no se cortan en ningún punto.

Ejemplos

1. Encontrar los puntos de intersección de las siguientes parábolas.

$$x^2 + y - 1 = 0 \qquad (1) \quad y = 1 - x^2$$

$$x^2 - y - 1 = 0 \qquad (2) \quad y = x^2 - 1$$

Solución

- Para resolver este sistema en particular, primero debemos despejar la variable *y* de las dos ecuaciones:

$$(1) \quad y = 1 - x^2$$

$$(2) \quad y = x^2 - 1$$

- Luego, se debe igualar la variable *y* que se encuentra ya despejada en las dos ecuaciones.

$$x^2 - 1 = 1 - x^2$$

- Una vez que se igualó, se resuelve esta ecuación con los principios ya estudiados en la resolución de ecuaciones de segundo grado.

$$x^2 + x^2 = 1 + 1$$
$$2x^2 = 2$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

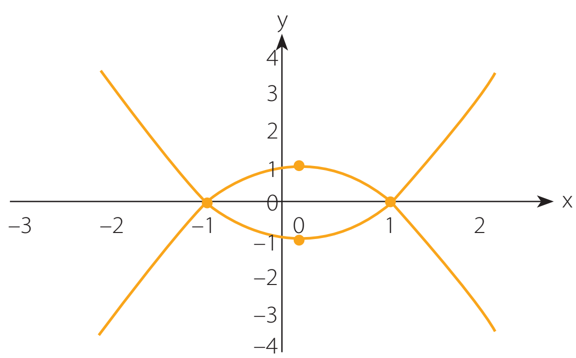
- Para finalizar, se remplaza estos valores en cualquiera de las ecuaciones iniciales, para encontrar los valores de *y* correspondientes.

$$y_1 = (+1)^2 - 1$$
$$y_1 = 1 - 1 = 0$$
$$y_2 = (-1)^2 - 1$$
$$y_2 = 1 - 1 = 0$$

Lo cual quiere decir que tenemos dos puntos de corte que son:
$P_1(1; 0)$ y $P_2(-1; 0)$ y, por lo tanto, es un sistema compatible determinado.

Gráficamente la solución quedaría de la siguiente manera:

Intersección de dos parábolas



BECU_M1_B2_P62_107.indd 90 4/22/14 11:53 AM

2. Calcula analítica y gráficamente la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 + 5x - 8 & \text{①} \\ y = -x^2 + 1 & \text{②} \end{cases}$$

Recuerda

Al resolver un sistema gráficamente, los valores que se obtienen para los puntos de intersección pueden escribirse como valores aproximados, especialmente si alguna de las raíces del sistema pertenece al conjunto de los irracionales, o son decimales periódicos.

Solución

- Para resolver el sistema, se verifica que la variable de exponente uno se encuentre despejada. En este caso, se igualan las ecuaciones ① y ② que tienen despejada la variable y se resuelve la ecuación.

$$x^2 + 5x - 8 = -x^2 + 4$$

$$x^2 + x^2 + 5x - 8 - 4 = 0$$

$$2x^2 + 5x - 12 = 0$$

- Aplicando el factoreo, se obtiene que:

$$\frac{(2x + 8)(2x - 3)}{2} = 0$$

$$(x + 4)(2x - 3) = 0$$

Los valores de x son: $x_1 = -4$ y $x_2 = \frac{3}{2}$

- Remplazando en la segunda ecuación, se tiene los valores de *y*:

$$y_1 = -(4)^2 + 4 = -16 + 4 = -12$$

$$y_2 = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4 = -\frac{9}{4} + 4 = \frac{7}{4}$$

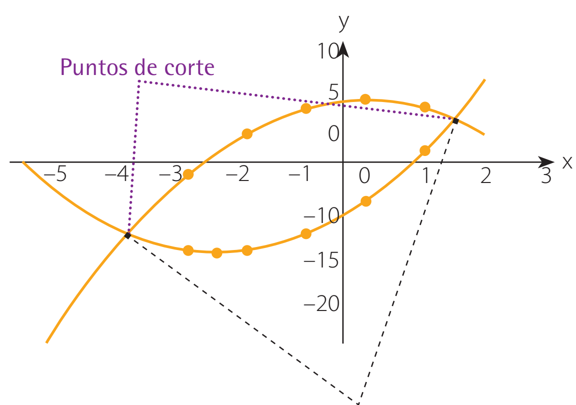
Así los puntos de corte son:

$P_1(-4, -12)$ y $P_2\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right)$

Toma en cuenta

En Excel, para graficar parábolas, en la primera columna colocas los valores de x, por ejemplo: –2, –1, 0, 1 y 2; y en la segunda columna colocas los valores calculados de y según la ecuación. Luego para graficar, marcas las dos columnas de datos y presionas el botón de insertar gráficas. Eliges dispersión y seleccionas una de las opciones; luego, presionas finalizar.

Gráficamente, la solución es:



Intersección de dos parábolas

Actividades

1. Resuelve el sistema de ecuaciones planteado y grafícalo.

a. $\begin{cases} x^2 - 5xy = 0 \\ -x^2 + 4y = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x - y^2 = 5 \\ 2x - y^2 = 2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} y - 2 = x^2 + 3 \\ y = -x^2 - 2 \end{cases}$

Inecuaciones cuadráticas

Destrezas con criterio de desempeño:

- Resolver **inecuaciones cuadráticas** analíticamente, mediante el uso de las propiedades de las funciones cuadráticas asociadas a dichas inecuaciones. **(P)**
- Resolver **problemas** mediante modelos cuadráticos. **(P, M)**

Conocimientos previos

Determina el conjunto solución de la siguiente inecuación.

$3x - 5x - 3 > 4x - 2$

Toma en cuenta

- Al resolver inecuaciones cuadráticas, es necesario que estén comparadas con cero, y recordar que se va a trabajar con los dos factores lineales que se forman.
- Se ubican los ceros del polinomio en la tabla formada.

Atención

- Es necesario analizar los signos en los intervalos que quedan determinados.
- Una vez que se hayan colocado los signos en los intervalos, se los multiplica y se obtiene el signo resultante de cada intervalo.

	$-\infty$ a 2	2 a 3	3 a $+\infty$
$x - 3$	–	–	+
$x - 2$	–	+	+
signo resultante	+	–	+

Tabla 1

Resolver inecuaciones cuadráticas consiste en encontrar los intervalos en los que se cumple la desigualdad dada. Para esto, se sigue el proceso de los ejemplos.

Ejemplos

1. Determinar el conjunto solución de esta inecuación.

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

Solución

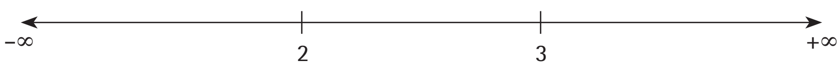
- Primero, se factoriza el trinomio.

$$(x - 3)(x - 2) \geq 0$$

- Luego, cada factor se iguala a cero y se despeja la variable.

$$x - 3 = 0 \qquad x = 3$$
$$x - 2 = 0 \qquad x = 2$$

- En la recta numérica, y ordenados, se ubican los valores que se obtuvieron y se observa que la recta queda dividida en tres intervalos.



- Después, se realiza una tabla para evaluar los factores que resultaron del trinomio factorizado.

	$-\infty$ a 2	2 a 3	3 a $+\infty$
$x - 3$			0
$x - 2$		0	
signo			

- Para completar la tabla de signos, es necesario tomar un valor que se encuentre en cada intervalo, remplazarlo en las expresiones de la primera columna y verificar el signo que se obtiene. Después, se ubica este signo en el espacio correspondiente.
- En el primer intervalo se toma, por ejemplo, el cero. Se remplaza este valor en $x - 3$, $0 - 3 = -3$. El signo es negativo, así que se coloca el signo (–) en el espacio del primer intervalo.
- Luego, se toma un valor del siguiente intervalo (en este caso, puede ser 2,5) y se verifica el signo: $2{,}5 - 3 = -0{,}5$. Es negativo, así que se lo coloca en la tabla.
- Después, se toma un valor del tercer intervalo (para el ejemplo, se toma el 4) y se verifica el signo: $4 - 3 = 1$. Se obtiene el signo positivo y se lo coloca en la tabla.
- Se repite el procedimiento para la expresión $x - 2$ y se completa la tabla.
- Al final, se multiplican los signos de cada columna y se obtienen los signos resultantes (Tabla 1).
- Para seleccionar el o los intervalos que son parte del conjunto solución, se debe observar el signo de la inecuación original. En el ejemplo, se tiene el signo $\geq$. Este nos indica que se deben tomar los intervalos positivos (por ser el signo mayor) y que el extremo es cerrado (por ser mayor o igual).

Por lo tanto el conjunto solución de la inecuación es C. S.: $]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$.

Toma en cuenta

1 ha = 1 hm^2

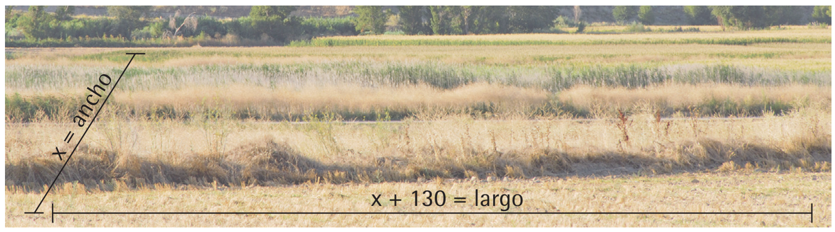
1 hm^2 = 10 000 m^2

1 ha = 10 000 m^2

2. Una empresa constructora debe lotizar un terreno destinado a viviendas que tiene una superficie utilizable de 30 000 m^2 (3 ha). Si el terreno es de forma rectangular y el largo mide 130 m más que el ancho, encontrar cuáles pueden ser sus máximas medidas.

Solución

- Primero, se plantean las condiciones del problema.



- Luego, se plantea la inecuación.

$$x(x + 130) \leq 30\,000$$

$$x^2 + 130x - 30\,000 \leq 0$$

- Se factoriza.

$$(x + 250)(x - 120) \leq 0$$

$-\infty$ | -250 | 120 | $+\infty$

x + 250	–	0 +	+
x – 120	–	–	0 +
signo resultante	+	–	+

El ancho del terreno debe estar entre [–250, 120], pero como no puede ser negativo, entonces, estará entre [0, 120]. Por lo tanto, su máxima medida será 120 m. El largo deberá medir entre [0, 250]. Su máxima medida será 250 m.

3. Analizar y resolver la siguiente inecuación.

$$3x^2 + 5x + 9 \geq 0$$

Solución

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(9)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{-83}}{6}$$

Al ser raíces imaginarias, significa que para cualquier valor real con que se remplace, el resultado será positivo. Asimismo, al ser la condición mayor o igual a cero, esta se cumple para todo número real. Entonces, el conjunto solución es los números reales.

Recuerda

Para resolver una inecuación cuadrática por cualquiera de los métodos, debe estar relacionada con el cero mediante alguno de estos signos: >, <, ≥ o ≤.

Atención

- Si la inecuación tiene los signos > o <, los extremos de los intervalos van abiertos.
- Si la inecuación tiene los signos ≥ o ≤, los extremos de los intervalos van cerrados.
- Es necesario tomar en cuenta que los intervalos en que intervenga el infinito (∞) van abiertos.

Actividades

1. Determina el conjunto solución de esta inecuación.

a. $x^2 + 3x - 9 \leq 0$

b. $x^2 - 8x + 16 \geq 0$

BECU_M1_B2_P62_107.indd 93 4/22/14 11:53 AM

Inecuaciones cuadráticas con dos variables

Destrezas con criterio de desempeño:

- Resolver **inecuaciones cuadráticas** con dos variables. **(P)**
- Resolver **problemas** mediante modelos matemáticos. **(M)**

Conocimientos previos

Determina el área que corresponde a la solución gráfica de la siguiente inecuación.

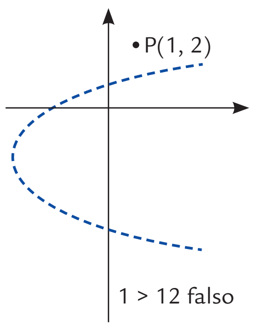
$3x - 2y < 6$

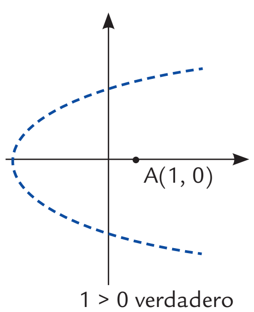
Recuerda

Otra forma de graficar la parábola puede ser elaborando una tabla de valores con, por lo menos, 5 o 6 puntos, de preferencia los cortes con los ejes.

Atención

Se toman puntos de prueba para identificar el área que es solución.





Las inecuaciones cuadráticas con dos variables solamente se pueden resolver gráficamente.

Resolver una inecuación cuadrática con dos variables significa determinar, de entre las dos posibles regiones (dentro y fuera de la parábola), aquella en la que se cumple la condición dada.

- *La gráfica de la inecuación $y \geq Ax^2 + Bx + C$ la componen todos los puntos que están por encima de la relación $y = Ax^2 + Bx + C$.*
- *Si la gráfica de la inecuación fuese $y \leq Ax^2 + Bx + C$, la compondrían todos los puntos por debajo de la relación anterior.*

Ejemplos

1. Determina gráficamente el sector solución de la inecuación cuadrática dada.

$$x > y^2 + 4y$$

Solución

- Primero, se escribe como si fuese una igualdad.

$$x = y^2 + 4y$$

- Se grafica la parábola. Para esto, se completa el trinomio cuadrado perfecto para determinar el vértice, el foco y el lado recto.

$$x + 4 = y^2 + 4y + 4$$

$$x + 4 = (y + 2)^2$$

$$V(-4; -2)$$

- Una vez que se ha graficado la parábola, es recomendable tomar un punto (sea de dentro o de fuera de ella) y reemplazarlo en la inecuación. Si se obtiene una desigualdad verdadera, ese será el sector que se debe pintar como la solución.
- Por ejemplo, se selecciona el punto P(1, 2) y se lo reemplaza.

$$1 > 2^2 + 4(2)$$

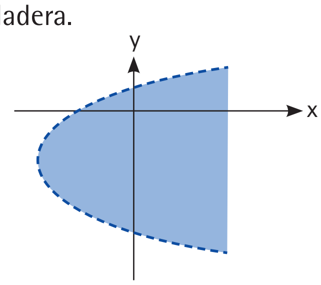
$$1 > 12 \quad \text{falso}$$

- Después, se toma otro punto, pero en el otro lado de la parábola, por ejemplo A(1, 0), y se lo reemplaza.

$$1 > 0^2 + 4(0)$$

$$1 > 0 \text{ verdadero}$$

- Finalmente, para marcar el sector solución, se pinta el sector en el que la desigualdad es verdadera.



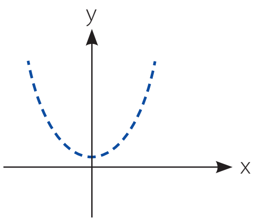
La solución corresponde a la parte sombreada del gráfico.

2. Resolver.

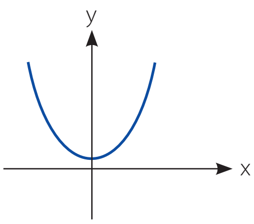
La ecuación de la oferta de un determinado producto es $y = x^2 + 5x - 6$, donde x es el número de unidades ofertadas y y es el precio unitario. El gerente de la empresa desea conocer cuáles son las cantidades que puede ofertar y a qué precio, para que el producto se encuentre sobre y bajo la oferta.

Recuerda

Si el signo de la desigualdad es < o >, el gráfico va con línea entrecortada.



si el signo es ≤ o ≥, la línea es continua.



Solución

- Del problema planteado, se deduce que, para que los datos encontrados sean mayores a la oferta, *y* debe ser mayor que $x^2 + 5x - 6$; en cambio, si *y* es menor que $x^2 + 5x - 6$, dichos datos serán menores a la oferta. Los valores dentro de la gráfica permiten obtener valores mayores; en cambio, aquellos fuera de la gráfica generan datos menores.

$$x^2 + 5x - 6 \leq 0$$

$$(x + 6)(x - 1) = 0$$

$$x_1 = -6 \qquad P_1\,(-6, 0)$$

$$x_2 = 1 \qquad P_2\,(1, 0)$$

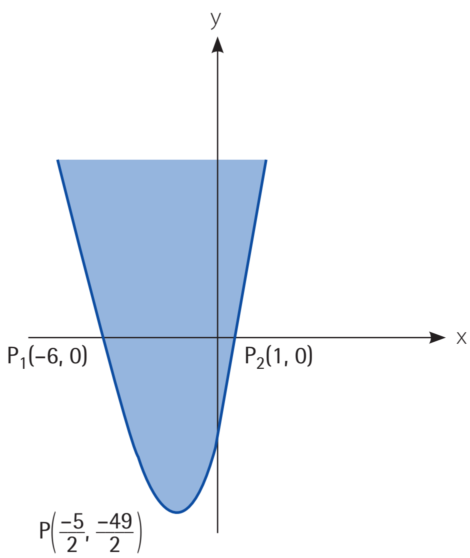
$$x = \frac{-5}{2(1)} = -\frac{5}{2}$$

$$y = \left(\frac{-5}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{-5}{2}\right) - 6 = \frac{-49}{4}$$

$$P\left(\frac{5}{2}, \frac{-49}{2}\right)$$

Atención

Se grafica la parábola $y = x^2 + 5x - 6$ y se representa la solución de la inecuación, que permite encontrar los valores mayores y menores.



La zona pintada corresponde a la primera condición; todo lo sobrante satisface la segunda condición.

Actividades

1. Determina los intervalos que solucionan las siguientes inecuaciones.

a. $x^2 + 4x - 5 \geq y$

b. $y < 3x^2 + 5x - 1$

Sistemas de inecuaciones cuadráticas

Destreza con criterio de desempeño:
Resolver **sistemas de inecuaciones lineales y cuadráticas** gráficamente. **(P)**

Un sistema de inecuaciones es un conjunto de estas del que se quiere calcular la solución común. La solución de un sistema de inecuaciones cuadráticas es el conjunto de puntos que se intersecan en las regiones del plano y que son solución de cada una de las inecuaciones participantes. Los sistemas de inecuaciones cuadráticas se pueden representar en forma gráfica.

Conocimientos previos

Grafica la solución de la siguiente inecuación.

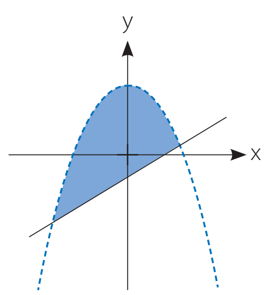
$x^2 - 3y + 6 \geq 0$

Recuerda

En el siguiente sistema, **observa** la solución.

$$\begin{cases} x - y \leq 1 \\ x^2 + y < 5 \end{cases}$$

- Las soluciones del sistema son aquellos puntos que pertenecen al mismo tiempo a la región del plano determinada por la inecuación $x - y \leq 1$ y a la parábola determinada por la ecuación $x^2 + y < 5$. Estos puntos se pueden distinguir en la gráfica y son aquellos en que la parábola está limitada por la recta. Los puntos dentro o fuera de la parábola no son solución.



Ejemplos

1. Resolver el siguiente sistema.

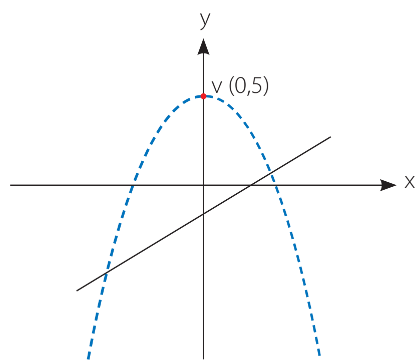
$$\begin{cases} x - y = \leq 1 & (1) \\ x^2 + y < 5 & (2) \end{cases}$$

Solución

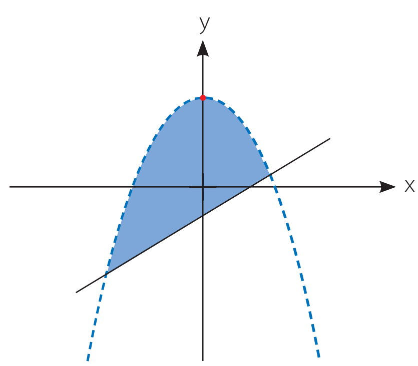
- Primero, se escriben como ecuaciones.

$$x - y = 1$$
$$x^2 + y = 5$$

- Luego, se grafican la ecuación lineal y la parábola.



- Luego, se dan algunos puntos que permiten ubicar la región en que se encuentra la solución. Por ejemplo, al reemplazar el punto (0, 6) en la inecuación (2), se tiene: $0^2 + 6 < 5$. Esta es una proposición falsa; entonces, esta región no soluciona la inecuación. Otro punto puede ser (0, 4): $0^2 + 4 < 5$; esta es una proposición verdadera, lo que significa que toda esa región soluciona la inecuación.



Entonces, la región comprendida entre la parábola y la recta es la solución común y representa la solución del sistema. Los valores ubicados en la línea discontinua no son solución del sistema.

BECU_M1_B2_P62_107.indd 96 4/22/14 11:53 AM

2. Resolver el siguiente sistema.

$$\begin{cases} x^2 - y \leq 4 \\ x^2 + y < 1 \end{cases}$$

Recuerda

Se debe tomar un punto de cada sector para verificar si cumple o no con las inecuaciones dadas.

Solución

- Se escriben las dos inecuaciones como ecuaciones.

$$x^2 - y = 4$$

$$x^2 + y = 1$$

- Se grafican en el mismo plano, tomando en cuenta las características de cada parábola o realizando una tabla de valores para cada una.
- Se toma un punto como valor de prueba, por ejemplo (0; 0), para las dos parábolas, y se realizan el remplazo y la verificación.

$$0^2 - 0 \leq 4$$

$$0 \leq 4 \text{ (verdadero)}$$

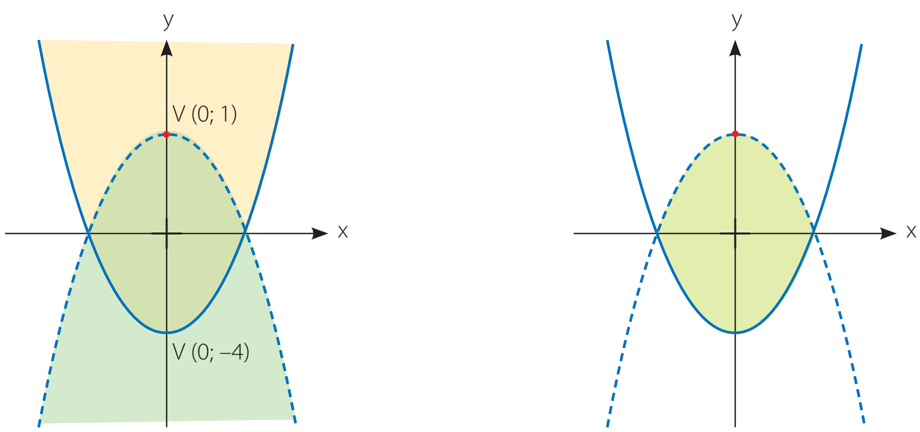
$$0^2 + 0 < 1$$

$$0 < 1 \text{ (verdadero)}$$

Atención

Si las desigualdades tienen los signos $<$ o $>$, la figura va trazada con línea segmentada; si, en cambio, la desigualdad tiene los signos $\leq$ o $\geq$, se traza la figura con línea continua.

- En este caso, se pintan las partes internas de las dos parábolas.



La solución del sistema viene dada por la región común a las dos gráficas, como se aprecia en la representación dada.

Actividades

1. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones.

a. $\begin{cases} 3x - y \leq 5 \\ 2x - y^2 \leq 5 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x - y \leq 3 \\ x^2 - 2y \leq 4 \end{cases}$

Ecuaciones cuadráticas con valor absoluto

Destreza con criterio de desempeño:

Resolver ecuaciones e inecuaciones **cuadráticas con valor absoluto** analíticamente, mediante el uso de las propiedades del valor absoluto y de las funciones cuadráticas. **(P)**

Para resolver ecuaciones cuadráticas con valor absoluto, es necesario aplicar la definición analítica del valor absoluto y revisar los resultados obtenidos aplicando diferentes métodos.

Ejemplos

1. Determinar el conjunto solución de la ecuación.

$$|x^2 - 4x - 5| = 7$$

Solución

- Primero, se aplica esta propiedad del valor absoluto: $|x| = a$, se cumple si y solo si $x = a$ o $x = -a$.
- Se resuelve la ecuación para cada parte.

Parte I

$x^2 - 4x - 5 = 7$

- Se iguala a cero.

$x^2 - 4x - 12 = 0$

- Se encuentran los factores.

$(x - 6)(x + 2) = 0$

$C.\ S._I = \{-2, 6\}$

Parte II

$x^2 - 4x - 5 = -7$

- Se iguala a cero.

$x^2 - 4x - 5 + 7 = 0$

- Se resuelve.

$x^2 - 4x + 2 = 0$

- Se aplica la fórmula.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Se encuentran las raíces de la ecuación.

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

$$C.\ S._{II} = \{2 \pm \sqrt{2}\}$$

- El conjunto solución total es la unión de los conjuntos solución parciales.

$$C.\ S._T = \{-2, 2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}, 6\}$$

2. Encontrar el conjunto solución de esta ecuación.

$$|x^2 - 4| = 21$$

Solución

- Se resuelve aplicando la definición analítica del valor absoluto.

Parte I

$x^2 - 4 = 21$

$x^2 - 4 - 21 = 0$

$x^2 - 25 = 0$

$(x - 5)(x + 5) = 0$

$x = 5;\ x = -5$

$C.\ S._I = \{-5, 5\}$

Parte II

$(x^2 - 4) = -21$

$x^2 + 4 = -21$

$\boxed{x^2 = -17}$

No existen valores de *x* en el conjunto de los reales cuyo cuadrado sea negativo.

Conocimientos previos

Escribe el resultado de los siguientes valores absolutos.

$|x| < 5$

$|x - 2| \geq 3$

Recuerda

Para encontrar las raíces de una ecuación cuadrática, se pueden aplicar diferentes métodos.

- Factoreo

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$(x + 3)(x + 2) = 6$

$x + 3 = 0 \qquad x = -3$

$x + 2 = 0 \qquad x = -2$

- Fórmula general

$ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{(-b) \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$a = 1;\ \ b = 5;\ c =$

$$x = \frac{(-5) \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{(-5) \pm 1}{2}$$

$x = -3;\ x = -2$

- Se puede comprobar que los valores de x encontrados son correctos remplazando cada uno en la ecuación original.

$x = 5$	$x = -5$
$\lvert 5^2 - 4 \rvert = 21$	$\lvert (-5)^2 - 4 \rvert = 21$
$\lvert 25 - 4 \rvert = 21$	$\lvert 25 - 4 \rvert = 21$
$\lvert 21 \rvert = 21$	$\lvert 21 \rvert = 21$
$21 = 21$	$21 = 21$

C. S. = $\{-5, 5\}$

3. Hallar el conjunto solución de esta ecuación.

$\lvert x^2 - 5x + 3 \rvert = 3$

Solución

- Se aplica la definición analítica del valor absoluto.

Parte I	Parte II
$x^2 - 5x + 3 = 3$	$x^2 - 5x + 3 = -3$
$x^2 - 5x + 3 - 3 = 0$	$(-x^2) - 5x + 3 = -3$
$x^2 - 5x = 0$	$x^2 - 5x + 3 - 3 = 0$
$x(x - 5) = 0$	$x^2 - 5x + 6 = 0$
$x = 0; x = 5$	$(x - 3)(x - 2) = 0$
	$x = 3; x = 2$

- Se comprueba que los valores de x encontrados sean correctos. Para eso, se remplaza cada uno en la ecuación original, $\lvert x^2 - 5x + 3 \rvert = 3$.

$x = 0$ $\lvert 0^2 - 5 \cdot 0 + 3 \rvert = 3$ $\lvert 3 \rvert = 3$ $3 = 3$	$x = 5$ $\lvert 5^2 - 5 \cdot 5 + 3 \rvert = 3$ $\lvert 25 - 25 + 3 \rvert = 3$ $\lvert 3 \rvert = 3$ $3 = 3$
$x = 3$ $\lvert 32 - 5 \cdot 3 + 3 \rvert = 3$ $\lvert 9 - 15 + 3 \rvert = 3$ $\lvert -3 \rvert = 3$ $3 = 3$	$x = 2$ $\lvert 22 - 5 \cdot 2 + 3 \rvert = 3$ $\lvert 4 - 10 + 3 \rvert = 3$ $\lvert -3 \rvert = 3$ $3 = 3$

C. S. = $\{0, 2, 3, 5\}$

Recuerda

Para resolver la inecuación $\lvert x^2 - 5x + 3 \rvert = 3$, se debe aplicar la propiedad:

$\lvert x \rvert = a$

$x = -a$ o $x = a$

Atención

Cuando resuelves ecuaciones con valor absoluto, debes comprobar que los valores de x obtenidos cumplan con la ecuación original.

Actividades

1. Encuentra los valores de x que cumplan con $\lvert x^2 - 7 \rvert + 3 = 0$.

BECU_M1_B2_P62_107.indd 99 4/22/14 11:53 AM

Inecuaciones cuadráticas con valor absoluto

Destreza con criterio de desempeño:

Resolver **ecuaciones e inecuaciones cuadráticas con valor absoluto** analíticamente, mediante el uso de las propiedades del valor absoluto y de las funciones cuadráticas. **(P)**

Para resolver inecuaciones cuadráticas con valor absoluto, al igual que con las inecuaciones lineales, se deben considerar las propiedades principales de las desigualdades del valor absoluto.

- $|x| \geq b$ *si y solo si* $x \leq -b$ *o* $x \geq b$
- $|x| \leq b$ *si y solo si* $-b \leq x \leq b$

Conocimientos previos

Determina el conjunto solución de la inecuación $|x^2| < 9$.

Ejemplos

1. Determinar el conjunto solución de $|x^2 - 6x + 4| \geq 4$.

Solución

- Para resolver la inecuación, primero se aplica la propiedad respectiva.

$x^2 - 6x + 4 \leq -4$ o $x^2 - 6x + 4 \geq 4$

- Luego, se resuelve cada ecuación por separado.

Parte I

$x^2 - 6x + 8 \leq 0 \rightarrow (x - 4)(x - 2) \leq 0$

- Se igualan los factores a cero para obtener los valores críticos de la inecuación.

$x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

- Se elabora la tabla para ubicar el intervalo en el que tiene solución la inecuación.

	$-\infty$ a 2	2 a 4	4 a $+\infty$
x – 4	–	– 0	+
x – 2	– 0	+	+
	+	–	+

- Como la inecuación tiene el signo ≤, los extremos 2 y 4 son parte de la solución.

$C.\ S._I = [2; 4]$

Parte II

$x^2 - 6x \geq 0 \rightarrow x(x - 6) \geq 0$

- Se igualan los factores a cero para obtener las raíces de cada intervalo.

$x = 0$

$x - 6 = 0 \rightarrow x = 6$

- Se elabora la tabla para ubicar el intervalo en el que tiene solución la inecuación.

	$-\infty$ a 0	0 a 6	6 a $+\infty$
x	–	+	+
x – 6	–	–	+
	+	–	+

- Como la inecuación tiene el signo ≥, los intervalos que son solución son los positivos con los extremos cerrados.

$C.\ S._{II} =]-\infty, 0] \cup [6, +\infty[$

El conjunto solución total es la unión de $C.\ S._I$ y $C.\ S._{II}$.

$C.\ S._T = C.\ S._I \cup C.\ S._{II}$

$C.\ S._T =]-\infty, 0] \cup [2, 4] \cup [6, +\infty[$

Recuerda

Una vez que se ha elaborado la tabla, en la parte superior se ubican los valores críticos de la inecuación y se prueba el signo que corresponde a cada intervalo. Para esto, se toma un valor de cada intervalo y se lo remplaza en los factores escritos en la primera columna, se verifica el signo que tiene y se lo coloca en la columna que corresponde.

Puntos de prueba del ejemplo:

- En el intervalo de $]-\infty, 2[$, se toma el 0 y se prueba.

$x - 4 \quad 0 - 4 = -4 \rightarrow (-)$

$x - 2 \quad 0 - 2 = -2 \rightarrow (+)$

- En el intervalo de $]2, 4[$, se toma el 3 y se prueba.

$x - 4 \quad 3 - 4 = -1 \rightarrow (-)$

$x - 2 \quad 3 - 2 = 1 \rightarrow (+)$

2. Determinar el conjunto solución de $|x^2 - 8x + 6| < 6$.

Solución

- Primero, se aplica la propiedad.

  $-6 < x^2 - 8x + 6 < 6$
- Se separan las inecuaciones.

  $-6 < x^2 - 8x + 6 \rightarrow x^2 - 8x + 6 > -6$

  $x^2 - 8x + 6 < 6$
- Se resuelve cada inecuación por separado.

Parte I

$x^2 - 8x + 6 > -6$

- Se compara la inecuación con cero y se factoriza.

  $x^2 - 8x + 12 > 0$

  $(x - 6)(x - 2) > 0$

  $x - 6 = 0 \rightarrow x = 6$

  $x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$
- Se elabora la tabla para ubicar el intervalo en el que tiene solución la inecuación.

	−∞	2		6	+∞
x − 6	−		−	0	+
x − 2	−	0	+		+
	+		−		+

- La desigualdad tiene el signo >; por lo tanto, los intervalos solución son aquellos que tienen signo positivo y extremos abiertos.

  $C. S._I =]-\infty; 2[\cup]6; +\infty[$

Parte II

$x^2 - 8x + 6 < 6$

$x^2 - 8x < 0$

$x(x - 8) < 0$

- Se igualan los factores a cero para obtener las raíces de cada intervalo.

  $x = 0$

  $x - 8 = 0 \rightarrow x = 8$
- Se elabora la tabla para ubicar el intervalo en el que tiene solución la inecuación.

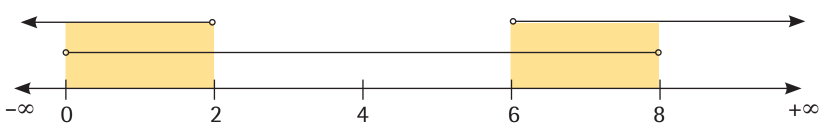
	−∞	0		8	+∞
x	−	0	+		+
x − 8	−		−	0	+
	+		−		+

- La desigualdad tiene el signo <; por lo tanto, el intervalo solución es aquel que tiene el signo menos con los extremos abiertos.

  $C. S._{II} =]0; 8[$

El conjunto solución es la intersección de los conjuntos solución de la parte I y de la parte II.

$C. S._T = C. S._I \cup C. S._{II}$



$C. S._T =]0; 2[\cup]6; 8[$

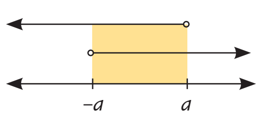
Toma en cuenta

$|x| < a$

$-a < x < a$

Esta ecuación se va a cumplir para los valores de x que son mayores a $-a$ y, al mismo tiempo, menores a a. Por lo tanto, es necesario realizar la intersección de las soluciones cuando esta triple desigualdad se resuelve por separado.

$-a > x$ y $x < a$



Actividades

Encuentra el conjunto solución de un sistema de ecuaciones.

1. Indica el conjunto solución del siguiente sistema.

$$\begin{cases} 3x + y^2 = 5 \\ 2x - y^2 = -6 \end{cases}$$

2. La suma de un número más cinco veces el inverso de otro es 2; y el segundo número más el cuádruple del primero es 9. Indica los números.

3. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones y traza sus gráficos.

a. $\begin{cases} x^2 + y = -4 \\ 3x^2 + 2y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} y - x^2 = 6 \\ x^2 = 2y - 21 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x^2 - y = 5 \\ 4x^2 - 2y = 2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x^2 + y = 3 \\ 4x^2 - 3y = -2 \end{cases}$

4. Resuelve los sistemas y grafica.

a. $\begin{cases} 3x + y^2 = 7 \\ y^2 + 2x = 6 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + y^2 = 3 \\ y^2 - 2x = 3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x^2 - 3y = 0 \\ x^2 + 4y = 7 \end{cases}$

Determina el conjunto solución de inecuaciones cuadráticas.

5. Encuentra el o los intervalos que solucionan la inecuación $x^2 + x + 1 > 0$.

6. Encuentra el o los intervalos que solucionan la inecuación $\dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 4} \geq x$.

7. Dada la parábola $y = x^2 - 2x + 1$, determina el valor de *k* para que la recta $y = 3x + k$ sea tangente a ella.

8. Encuentra la solución gráfica de la inecuación $x^2 + 1 > y$.

9. Resuelve las inecuaciones cuadráticas.

a. $x^2 - 6x + 5 < 0$

b. $x^2 - 4x \geq 0$

c. $x^2 - 4 < 0$

d. $4x^2 - 4x + 1 < 0$

e. $x^2 + 9 \geq 0$

f. $x^2 + x + 1 < 0$

g. $x^2 - 3x < 6$

h. $6x^2 + 4x \geq 3$

i. $2x + x^2 < 3x^2 + 4$

j. $7x^2 + x \geq 2x - 6$

10. Determina el conjunto solución de estas inecuaciones cuadráticas.

a. $y > x^2 + 6x + 8$

b. $y - 2x^2 + 5x - 3 \geq 0$

c. $(3x - 4)^2 \geq y$

d. $y^2 + 3y - 4 < x$

11. Soluciona los siguientes sistemas de inecuaciones y realiza sus gráficos.

a. $y > x^2 + 6x + 8;\ x + y > 1$

b. $y - 2x^2 + 5x - 3 \geq 0;\ 2x - y \leq 2$

c. $(3x - 4)^2 \geq y;\ x - 2y \geq 1$

d. $y^2 + 3y - 4 < x;\ x - y \geq 4$

Resuelve inecuaciones y problemas de inecuaciones.

12. Halla las ecuaciones de las tangentes a la parábola $y = x^2 + 3x - 2$ que pasan por el punto P (1, –6).

13. Dados la parábola $y = x^2 - 4$ y el punto T (2, –5), determina:

a. Las ecuaciones de las tangentes a la parábola desde el punto dado.

b. Los puntos de contacto.

c. La distancia al foco.

14. Si la ecuación de una parábola es $y^2 + 2y + 4x = -9$ y un punto de ella es T (–6, 3), encuentra:

a. Las ecuaciones de las tangentes a la parábola desde T.

b. La distancia $\overline{TV}$; (V es el vértice de la parábola).

15. Conocida la ecuación de la parábola $y = x^2 + x - 2$, halla:

a. La ecuación de la tangente cuya pendiente es –1.

b. El ángulo que forma con el eje.

16. Determina el valor de *k* para que la recta $x - 2y + k = 0$ y la parábola de ecuación $y^2 = 6x - 3$:

a. Sean tangentes.

b. Sean secantes.

c. No se corten en ningún punto.

17. Discute sobre la posición relativa de la parábola $y^2 = 4x$ y la recta que pasa por los puntos A (0, 2) y B (–2; 0).

Resuelve sistemas de inecuaciones.

18. Resuelve los sistemas de inecuaciones.

a. $\begin{cases} y \leq x^2 = 7 \\ x + y - 2 \geq 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} y + x^2 - 7x + 6 \geq 0 \\ x + y + 9 \geq 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x^2 + y \leq 48 \\ x + 2y > -1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x^2 + 2y < 15 \\ x^2 + 3y > 24 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x^2 + 2y \leq 24 \\ y^2 + x \geq 5 \end{cases}$

f. $\begin{cases} x^2 + y < 36 \\ y^2 - 2x < 0 \end{cases}$

BECU_M1_B2_P62_107.indd 102 4/22/14 11:53 AM

Aplica propiedades del valor absoluto.

19. Halla la propiedad del valor absoluto que debes aplicar para resolver cada una de las siguientes inecuaciones.

a. $|x^2 - 5| > 12$
b. $|x^2 + x| < 20$
c. $|2x^2 + 3| < 15$
d. $|a^2 - b| > x$
e. $|z^2 + x| < 5a$
f. $|x^2 - y| \leq z$

Determina el valor de verdad de valores absolutos.

20. Escribe verdadero (V) o (F), según corresponda.

a. $|x^2|$ es siempre mayor que cero.
b. $|x^2 + x|$ puede ser menor a cero.
c. $|2x^2| < 32$ para $-4 < x < 4$
d. $|x^2 - 3x + 5| > -1$ para todo x
e. $|2x^2 - 5| > 10$ para $x > 2$
f. $|3x^2 - 6x + 1| < 12$ para $x < -2$
g. $|x - 3| = -3$
h. $|x - 2| < -2$ para $x \in \mathbb{R}$
i. $|x - 2| > -2$ para $x \in \mathbb{R}$

Resuelve ecuaciones e inecuaciones con valor absoluto.

21. Encuentra los valores de *x* para que se cumplan las siguientes ecuaciones. Demuestra tus respuestas.

a. $|x^2 + 4| = 5$
b. $|x^2 + x - 9| = 3$
c. $|2x^2 - x - 1| = 0$
d. $|x^2 - 2x - 16| = 8$
e. $|x^2 - 5x + 3| = 0$
f. $|x^2 - 1| = x$

22. Resuelve las inecuaciones indicando los intervalos de la solución en la recta numérica. Luego, comprueba tus resultados con un valor para cada intervalo y determina el conjunto solución.

a. $|x^2 - 6x - 2| < 7$
b. $|2x^2 + 6x + 16| > 2$

23. Escribe el conjunto solución de la ecuación $|x - 3| + |11 - 2x| = 5$. Para hacerlo, lee y completa los espacios del desarrollo.

- Primero, se encuentran los ceros de cada valor absoluto. Para esto, se igualan a cero las expresiones que se encuentran dentro de las barras y se despeja la variable.

$x - 3 = 0$ $\qquad$ $\boxed{} = 0$

$x = \boxed{}$ $\qquad$ $x = \boxed{}$

- Luego, se prueba si estos valores son parte o no de la solución. Para esto, se los remplaza en la ecuación dada. Si la igualdad es verdadera, este valor es parte de la solución y se lo marca con un punto en la recta numérica; en caso de que no lo sea, se lo marca en la recta numérica con un pequeño círculo sin pintar.

Se prueba con $x = 3$.

$|\boxed{} - 3| + |11 - 2(\boxed{})| = 5$

$5 = 5 \rightarrow$ verdadero

Se prueba con $x = \frac{11}{2}$.

$|x - 3| + |11 - 2x| = 5$

- Después, se traza una recta numérica y en ella se colocan los ceros de los valores absolutos. Estos puntos dividen a la recta numérica en los intervalos en los que se resolverá la inecuación. En cada parte de la recta numérica dividida, se colocan las expresiones que se encuentran dentro de las barras del valor absoluto.

$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$

$\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$

$\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$

- En cada intervalo, se debe verificar el signo que corresponde a cada término y resolver la inecuación.

- Para establecer el signo de cada término en un intervalo dado, se reemplaza la variable de la expresión con un número que se encuentra dentro del intervalo y se calcula si el valor resultante de cada expresión es positivo o negativo, para establecer el signo con el que se debe aplicar la definición de valor absoluto.

$-\infty$ $\qquad 3 \qquad \frac{11}{2} \qquad$ $+\infty$

$x - 3\ \boxed{}$ $\qquad$ $x - 3\ \boxed{}$ $\qquad$ $x - 3\ \boxed{}$

$11 - 2x\ \boxed{}$ $\qquad$ $11 - 2x\ \boxed{}$ $\qquad$ $11 - 2x\ \boxed{}$

Completa el ejercicio anterior. Halla los conjuntos solución parciales y la solución.

BECU_M1_B2_P62_107.indd 103 4/22/14 11:53 AM

Evaluación

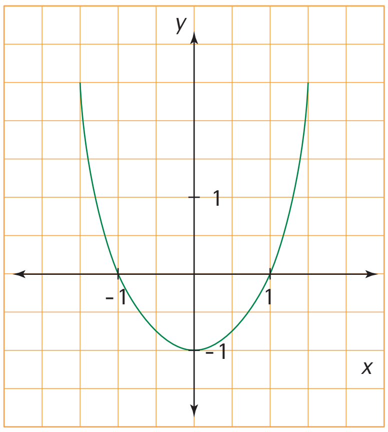
- Representa funciones cuadráticas, por medio de tablas, gráficas, intersección con los ejes, una ley de asignación y ecuaciones algebraicas.

0,5 puntos **1.** El punto $(-2, 1)$ pertenece a la parábola:

a. $y = x^2 - 4$ c. $y = x^2 - 3$

b. $y = -x^2 + 9$ d. $y = x^2 + 3$

1 punto **2.** Dada la gráfica de una función, determina:



a. eje de simetría

b. vértice

c. ceros de la función

d. eje de simetría

e. ley de asignación

1 punto **3.** La parábola más ancha es:

a. $y = x^2$ c. $y = \frac{1}{2}x^2$

b. $y = 2x^2$ d. $y = 4x^2$

0,5 puntos **4.** Indica la parábola cuya coordenada del vértice es $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

a. $x^2 - x - y = 0$ c. $4x^2 - x - y = 0$

b. $2x^2 - x + y = 0$ d. $x^2 - x - y + 2 = 0$

1 punto **5.** Escribe la ecuación cuadrática que tiene por soluciones $x_1 = -4$ y $x_2 = -3$.

- Resuelve ecuaciones cuadráticas.

0,5 puntos **6.** Resuelve la ecuación

$\sqrt{2x - 1} = 5$

0,5 puntos **7.** Resuelve la ecuación

$\sqrt{4x - 1} + \sqrt{12 - x} = 4.$

- Resuelve problemas con ayuda de modelos cuadráticos.

1 punto **8.** Cierto número de dulces costaron \$ 3,6. Si cada dulce costara \$ 0,20 menos, habría comprado 6 dulces más. Escribe la ecuación que corresponde al problema y resuélvelo.

- Reconoce problemas que pueden ser modelados mediante funciones lineales y cuadráticas, identificando las variables significativas y las relaciones entre ellas.

1 punto **9.** La suma de un número entero *x* con su recíproco es $\frac{5}{2}$. Los números son:

a. $2y = -\frac{1}{2}$ c. $2y = \frac{1}{2}$

b. $\frac{3}{2}$ y 1 d. $\frac{5}{2}$ y $\frac{2}{5}$

- Resuelve inecuaciones cuadráticas.

1 punto **10.** Determina el conjunto solución de la siguiente inecuación.

$x^2 + 6x + 9 > 0$

- Resuelve sistemas de inecuaciones lineales gráficamente.

1 punto **11.** Determina el sector que corresponde a la solución del siguiente sistema de inecuaciones.

$$\begin{cases} y < x^2 - 4 \\ y > 4x^2 + 8x + 4 \end{cases}$$

- Resuelve sistemas de dos ecuaciones con dos variables de forma gráfica y analítica.

1 punto **12.** Determina la solución del sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 = y \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

Coevaluación

En parejas, resuelvan el siguiente valor absoluto y, luego, verifiquen los resultados obtenidos.

$|x^2 - 6x + 8| + |x| < 6$

Autoevaluación (Metacognición)

Mediante un ejemplo, demuestra cómo se realiza el gráfico de una función cuadrática que tiene traslaciones horizontales y verticales.

- **Indicador esencial de evaluación**

Salud

La iluminación, un problema numérico

A la hora de trabajar, los oftalmólogos recomiendan escoger sitios con muy buena iluminación. Hoy en día, es bastante difícil encontrar ambientes en los cuales la iluminación sea natural, por lo cual, se usan fuentes artificiales como los focos (lámparas incandescentes).

Los efectos sobre la salud de usar mala iluminación son: trastornos visuales, dolores de cabeza y fatiga en general.

La iluminación que da un foco a una superficie depende de la distancia entre esta y el foco y de la intensidad del mismo.

Cuanto mayor es la distancia de la superficie al foco, menor es la iluminación.

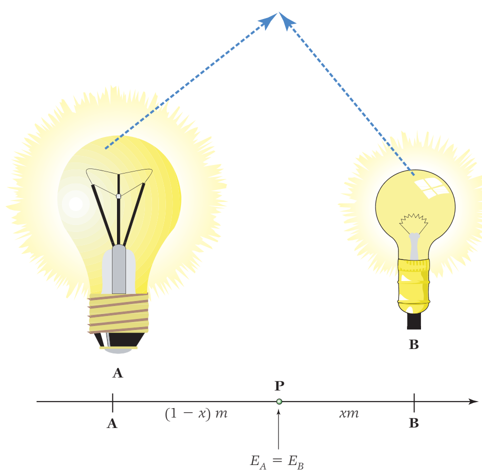
La expresión $E = \frac{1}{d^2}$

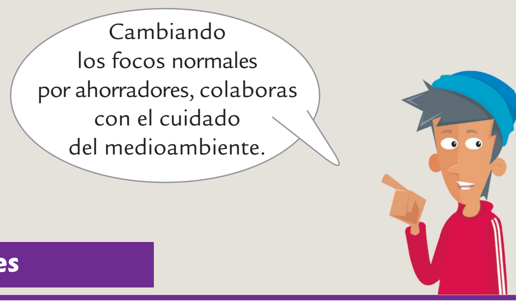
Con E: iluminación

I: intensidad del foco

D: distancia de la fuente a la superficie

Determina la iluminación de un lugar.





Actividades

1. La intensidad de un foco A es de 100 vatios y la del foco B es de 60 vatios.

   Si los bombillos están separados 1 m, como se muestra en el diagrama, ¿qué punto entre los dos está igualmente iluminado por ambos focos?

   Carla estudia en una habitación con dos focos. La distancia entre los dos es de 4 m y tienen 150 vatios, respectivamente.

2. ¿En qué punto debe estar ubicado el escritorio de Carla para que esté igualmente iluminado por ambos focos?
3. Si solo puede encender uno de los focos para ahorrar energía, ¿qué foco deberá encender? Justifica tu respuesta.

Evaluación del primer quimestre

- Reconoce el comportamiento de funciones elementales de una variable a través del análisis de su dominio, recorrido, monotonía y simetría (paridad).

0,5 puntos **1.** Realiza el análisis de las siguientes funciones indicando su dominio, recorrido, monotonía y simetría.

a. $f(x) = x^2 - 4x + 4$

b. $g(x) = x^3 - 4$

- Representa funciones lineales y cuadráticas, por medio de tablas, gráficas, intersección con los ejes, una ley de asignación y ecuaciones algebraicas.

0,5 puntos **2.** Grafica las funciones e indica el dominio y el recorrido.

a. $f(x) = 1 - 5x$

b. $g(x) = \frac{x}{3} - 1$

1 punto **3.** Al preguntarle a Raúl por su edad, este responde: «Los años más los meses que tengo dan un total de 377». ¿Cuántos años tiene Raúl?

1 punto **4.** Encuentra el dominio de las siguientes funciones considerando que son de variable real.

a. $f(x) = \sqrt{2x - 1}$

b. $t(x) = \frac{3}{x^2 - 81}$

c. $g(x) = \frac{3x + 1}{x - 4}$

d. $f(x) = \frac{3x + 7}{2}$

e. $g(x) = x^3 + 2 = \sqrt{x}$

f. $g(x) = \sqrt{x - 2}$

- Analiza funciones lineales y cuadráticas por medio de sus coeficientes.

0,5 puntos **5.** Indica si las expresiones son verdaderas o falsas.

a. -7 y 4 son las raíces de $x^2 - 28 + 3x = 0$

b. Las raíces de $x^2 - 2x + 5 = 0$ son racionales.

c. La ecuación $a^4 - 5a^2 + 4 = 0$ posee cuatro raíces enteras positivas.

- Analiza funciones lineales y cuadráticas por medio de sus coeficientes.

0,5 puntos **6.** Calcula las coordenadas del vértice de la parábola en cada caso.

a. $f(x) = x^2 - 16$

b. $g(x) = x^2 - 2x - 8$

- Resuelve sistemas de dos ecuaciones con dos variables de forma gráfica y analítica.

1 punto **7.** Resuelve los sistemas de ecuaciones.

a. $2x + 10 = -4(4x - y),\ 10y - 22x = 11y$

b. $y(x - 3) = x(y - 2) + 14;\ xy - 6y = 54 + x(y + 9)$

c. $3x - 6 = 2y;\ 2(y + 5) = 7x$

BECU_M1_B2_P62_107.indd 106 4/22/14 12:43 PM

- Resuelve sistemas de inecuaciones lineales gráficamente.

1 punto **8.** Resuelve los siguientes sistemas.

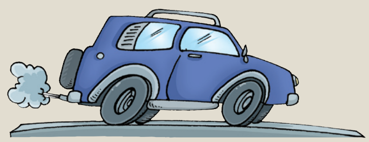
a. $3x - 5y < 3;\ 4x + 2y > 6$

b. $5x + 6y > 3/2;\ 2/3x + 5y > 8$

- Reconoce problemas que pueden ser modelados mediante funciones lineales y cuadráticas, identificando las variables significativas y las relaciones entre ellas.

1 punto **9.** La aceleración constante y el espacio que recorre un móvil en un lapso de tiempo tiene que ver mucho con la siguiente ecuación, siendo $f(t)$ el espacio que recorre el móvil y t el tiempo trascurrido desde el registro temporal del fenómeno.

$f(t) = 2t + 3t^2$



a. A continuación, completa la siguiente tabla que relaciona el espacio en metros que se desplaza el móvil, con el trascurso del tiempo en segundos, ya que este se encuentra en una aceleración constante.

t	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(t)$								

b. Utilizando papel milimetrado, representa gráficamente la función f y explícala.

1 punto **10.** Determina el conjunto solución de la inecuación.
$x^2 - 4x + 4 \leq 0$

- Resuelve problemas con ayuda de modelos lineales o cuadráticos.

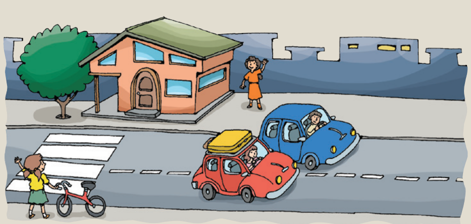
1 punto **11.** Resuelve los problemas.

a. Laura es mayor que Rosa por 5 años. Dentro de 3 años la suma de sus edades será 65 años. Halla la relación entre la edad de Laura y la de Rosa.

b. Si al numerador de una fracción se le resta 2 unidades, el valor de la fracción es la unidad. En cambio, si al mismo numerador se le aumenta 5 unidades, el valor de la fracción es 2. ¿Cuál es el valor de la suma del numerador y denominador?

c. En un rectángulo, seis veces su ancho menos 4 m equivale a su largo. Ahora, si su largo aumenta en 3 m y se divide entre el ancho, tenemos como cociente 5 y residuo 2. Encuentra las dimensiones de dicho rectángulo.

1 punto **12.** Si el espacio que recorre un vehículo con respecto a un tiempo específico, lo determina la ecuación $V(h) = h^2 + 3h - 2$ y el espacio que recorre un aeroplano lo determina la ecuación $A(V) = 3V + 5$, donde V es la función del espacio que recorre el vehículo, determina el espacio que recorre el aeroplano para la siguiente expresión: $(A \circ V)(2)$. Grafica $V(h)$.



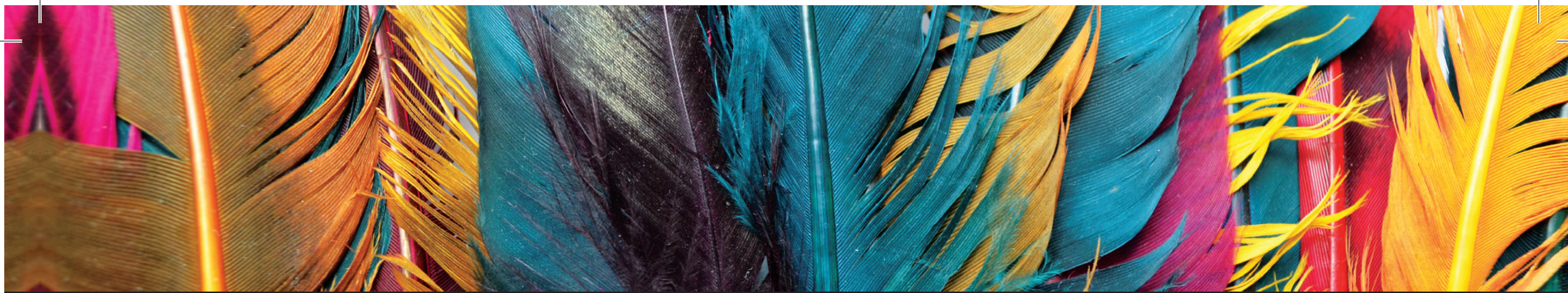
- **Indicador esencial de evaluación**

Bloque 2

Unidad 3

Vectores en el plano

BECU_M1_B2_P108_125.indd 108 4/22/14 11:54 AM



Antes de empezar

1. Halla la distancia entre los puntos A y B, si:
   a. $A(0, 0)$ y $B(3, 4)$
   b. $A(-2, 2)$ y $B(0, 0)$
   c. $A(-8, -6)$ y $B(0, 0)$
   d. $A(5\sqrt{3}, 5)$ y $B(0, 0)$
2. Halla la pendiente de la recta que pasa por:
   a. $A(-4, 3)$ y $B(8, -6)$
   b. $A(-5, 0)$ y $B(2, -4)$
   c. $A(0, -1)$ y $B(-1, 5)$
   d. $A(-2, -3)$ y $B(0, -2)$
3. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos:
   a. $A(-4, 4)$ y $B(-3, 1)$
   b. $A(-1, 5)$ y $B(4, -5)$
   c. $A(8, -2)$ y $B(0, 0)$
   d. $A(-1, 0)$ y $B(0, -3)$

Aviones y vectores

Los antecesores de los vectores son los cuaterniones o cuaternios que era un nuevo sistema de números que los descubrió William Hamilton. Si los números complejos tienen la forma $a + bi$, los cuaterniones tienen la forma $a + bi + cj + dk$ en donde a, b, c, d corresponden a números reales y la i, j , k corresponden a objetos que deben cumplir ciertos tipos de regla. Los físicos de la época especialmente Gibbs tomaron la parte no real del número $bi + cj + dk$ a la que llamó vector. Luego se desarrolló el estudio de los vectores en su forma geométrica, en la que se caracteriza por el módulo, el sentido y la dirección.

Actualmente las aplicaciones de los vectores son muy variadas por ejemplo, en los aeropuertos existen instrumentos que guían o conducen a los aviones para poder efectuar el aterrizaje, Estos instrumentos dan información a los pilotos sobre la ubicación de la pista y la pendiente de planeo.

Objetivos educativos

- Entender los vectores como herramientas para representar magnitudes físicas.
- Desarrollar intuición y comprensión geométricas de las operaciones entre vectores.
- Comprender la geometría del plano mediante el espacio $\mathbb{R}^2$.

Tocado de plumas de los pueblos indígenas amazónicos.

BECU_M1_B2_P108_125.indd 109 4/22/14 11:54 AM

Vectores

Destrezas con criterio de desempeño:

- Reconocer los **elementos de un vector** a partir de su representación gráfica. **(C)**
- Representar **puntos** y **vectores** en $\mathbb{R}^2$. **(P)**

Conocimientos previos

Dibuja en un plano cartesiano los siguientes pares ordenados.

a. A(2, 3)

b. B(–3, 5)

c. C(–2, –5)

d. D(3, –4)

Toma en cuenta

Para representar un vector se utiliza una letra y se traza una flecha sobre ella, por ejemplo $\vec{v}$, $\vec{u}$, etc.

Un vector orientado con origen en **A** y extremo en **B**, se puede representar como $\overrightarrow{AB}$.

CARACTERÍSTICAS DE UN VECTOR

- Origen o punto de aplicación: punto exacto sobre el cual actúa el vector.
- Dirección: está determinada por la recta que contiene al vector y todas sus paralelas.
- Sentido: indica hacia qué lado de la línea de acción se dirige el vector (va desde el origen al extremo). Se indica mediante una flecha en uno de sus extremos.
- Módulo: equivale a la longitud del vector.

$$AB = \sqrt{(b_2 - b_1)^2 + (a_2 - a_1)^2}$$

- Vectores y coordenadas cartesianas: los vectores se pueden trabajar en un sistema de coordenadas cartesianas.

Considera el vector $\vec{v}$ (figura 1); observa que, desde el origen, hay que desplazarse 3 unidades horizontalmente hacia la derecha y 2 verticalmente hacia arriba para llegar a su extremo.

A los números 3 y 2 se los llama *componentes del vector* $\vec{v}$.

Al vector $\vec{v}$ se lo ubica con su origen en el punto O(0, 0), es decir, en el origen de coordenadas del sistema cartesiano, como muestra la figura. De esa manera, su extremo está en el punto P(3, 3).

Al vector que tiene su origen en el origen de coordenadas, se lo llama vector posición. Así, $\overrightarrow{OP}$ es un vector posición.

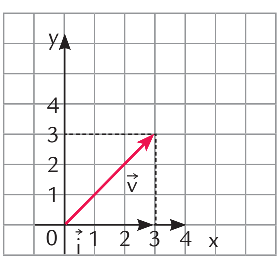
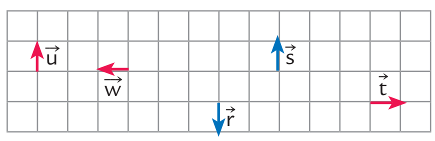


Figura 1.

VECTORES UNITARIOS

Los vectores que tienen su módulo igual a 1 se les llama *unitario*.



$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

En el gráfico, a los vectores unitarios marcados en rojo y azul que tienen la dirección del eje x y la del eje y, se los llama $\vec{i}$ y $\vec{j}$ respectivamente.

A cualquier vector con la dirección del eje x se lo puede expresar utilizando el vector unitario $\vec{i}$ y a cualquier vector con la dirección del eje y se lo puede expresar utilizando el vector $\vec{j}$.

Ejemplo

Al vector $\vec{v}$ = (3, 4) expresarlo como la suma de los vectores unitarios.

$\vec{v} = (3, 4) \rightarrow \vec{v} = 3i + 4j$

Vectores equipolentes y equivalentes

Destreza con criterio de desempeño:
Identificar entre sí los vectores que tienen el mismo sentido, dirección y longitud, a través del concepto de **relación de equivalencia**. **(C)**

Conocimientos previos

Escribe dos operaciones que sean equivalentes a las dadas.

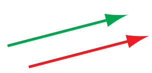
a. $3 + 4 = 5 + 2$

b. $4 \cdot 5 = 40 \div 2$

Toma en cuenta

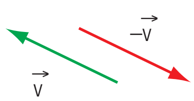
Igualdad de vectores
Dos vectores son iguales si tienen igual magnitud, dirección y sentido.

Ejemplo



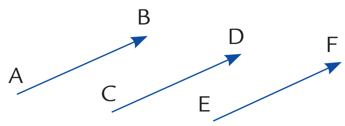
Vectores opuestos
Dos vectores son opuestos si tienen igual módulo y dirección, pero sentido contrario.

El vector opuesto de $\vec{v}$ se denota como $(-\vec{v})$.



Dos vectores son equipolentes si tienen el mismo módulo, dirección y sentido, es decir, que son paralelos y tienen el mismo tamaño.

Los vectores equivalentes tienen incluso el mismo origen. Los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{EF}$ son vectores equipolentes, pues tienen las características especificadas en su definición.

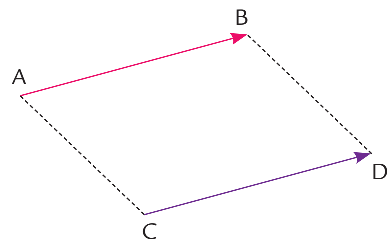


Ejemplos

1. $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes, indicar el tipo de cuadrilátero que es ABCD.

Solución

Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.



2. Completar el siguiente cuadro.

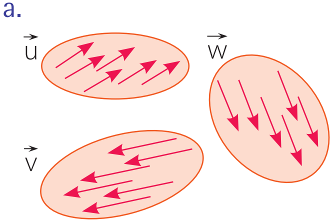
	Origen	Extremo	Vector representante con origen en (0; 0)	Módulo
$\vec{v}_1$	(1, 2)	(3, 3)	(3 – 1, 3 – 2) = (2, 1)	$\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$
$\vec{v}_2$	(1, 4)	(5, 3)	(5 – 1, 3 – 1) = (4, 2)	$\sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$
$\vec{v}_3$	(4, 3)	(–2, –1)	(–2 – 4, –1 – 3) = (–6, –4)	$\sqrt{(-6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$
$\vec{v}_4$	(2, 7)	(3, 1)	(3 – 2, 1 – 7) = (1, –6)	$\sqrt{1^2 + (-6)^2} = \sqrt{1 + 36} = \sqrt{37}$
$\vec{v}_5$	(1, 2)	(–2, –3)	(–2 – 1, –3 – 2) = (–3, –5)	$\sqrt{(-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$
$\vec{v}_6$	(–3, –1)	(2, 1)	(2 – (–3), 1 – (–1)) = (5, 2)	$\sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

Actividades

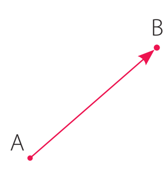
Identifica vectores equivalentes.

1. En las siguientes figuras, identifica cuál de ellas representa a vectores equivalentes y grafica un vector equivalente para uno de ellos.

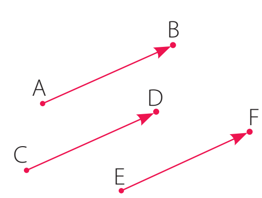
a.



b.



c.



BECU_M1_B2_P108_125.indd 111 4/22/14 11:54 AM

Operaciones entre vectores en forma analítica

Destrezas con criterio de desempeño:

- Representar las **operaciones** entre elementos de $\mathbb{R}^2$ en un sistema de coordenadas, a través de la identificación entre los resultados de las operaciones y vectores geométricos. **(P)**
- Determinar la **longitud de un vector** utilizando las propiedades de las operaciones con vectores. **(P)**

Conocimientos previos

Traza los vectores.

a. $\vec{v} = (1, 4)$

b. $\vec{w} = 5i - 3j$

c. $\vec{p} = (-2, -3)$

SUMA DE VECTORES

Sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dos vectores centrados en el origen y cuyos extremos son (ax, ay) y (bx, by), respectivamente. Entonces, la suma de ambos vectores está dada por:

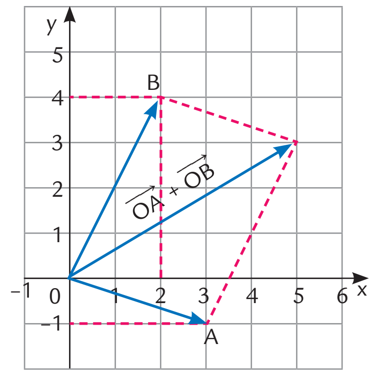
$$\vec{A} + \vec{B} = (ax, ay) + (bx, by) = (ax + bx,\ ay + by)$$

Ejemplo

Observar en el gráfico el vector suma $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Se obtiene las componentes de este vector sumando algebraicamente las componentes de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$:

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (3, -1) + (2, 4) = (3 + 2, -1 + 4)$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (5, 3)$



DIFERENCIA DE VECTORES

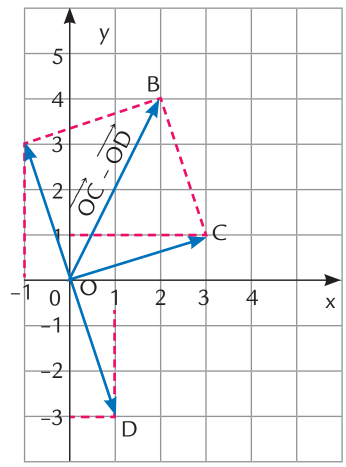
Para obtener el vector diferencia: $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$, se suma a $\overrightarrow{OC}$ el opuesto de OD.

Se obtiene las componentes del vector diferencia, $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$, efectuando la sustracción entre las componentes de $\overrightarrow{OC}$ y $\overrightarrow{OD}$:

$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = (3, 1) - (1, -3) = (3, 1) + (-1, 3)$

$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = (3 - 1, 1 + 3)$

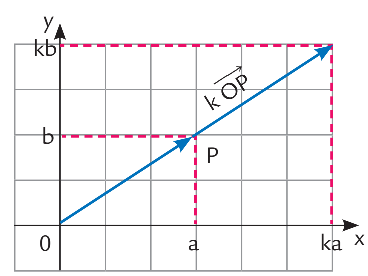
$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = (2, 4)$



PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UN VECTOR

En general, si $\overrightarrow{OP} = (a, b)$ y k es un número real cualquiera, las componentes del vector $k \cdot \overrightarrow{OP}$ se obtienen de la siguiente forma:

$k \cdot \overrightarrow{OP} = k \cdot (a, b) = (k \cdot a, k \cdot b)$



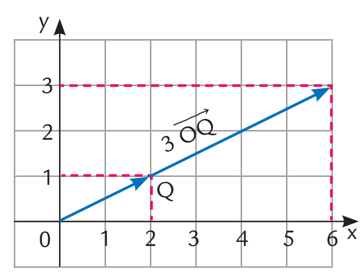
Ejemplo

Si $\overrightarrow{OQ} = (2, -1)$, obtener $3\overrightarrow{OQ}$

Solución

Para obtener las componentes del vector $3 \cdot \overrightarrow{OQ}$, multiplicamos por 3 cada una de las componentes del vector $\overrightarrow{OQ}$.

$3 \cdot \overrightarrow{OQ} = 3(2, 1) = (6, 3)$



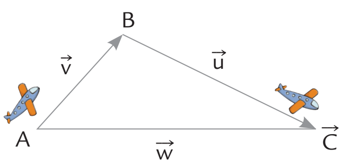
Operaciones con vectores en forma gráfica

Destreza con criterio de desempeño:

Operar con vectores en **forma gráfica** mediante la traslación de los orígenes a un solo punto. **(P)**

Conocimientos previos

- Dibuja dos paralelogramos e indica sus características.
- Traza dos polígonos e indica sus características.



REGLA DEL POLÍGONO

Para realizar la suma mediante el método del polígono, hay que colocar los vectores sumandos uno a continuación del otro, respetando el módulo, la dirección y el sentido, al final se une mediante otro vector el origen del primero y el extremo del último vector sumando, y este corresponderá a la suma de los vectores.

Ejemplo

Un avión sale de la ciudad A, hace una parada técnica en la ciudad B y luego continúa hasta llegar a la ciudad C. El mismo vuelo puede realizarlo yendo directamente, desde A hasta C. En el siguiente esquema, los desplazamientos del avión están indicados con vectores.

Solución

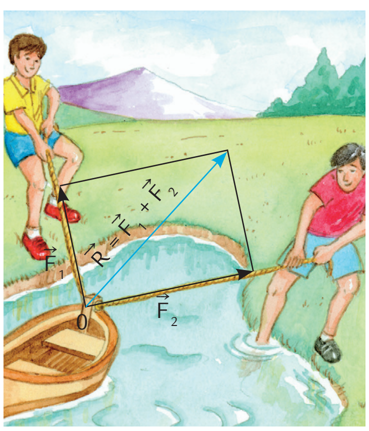
En el esquema de los vuelos del avión, realizar los desplazamientos $\vec{v}$ y $\vec{u}$ es equivalente a despalazarse desde A hasta C: $\vec{v} + \vec{u} = \vec{w}$.

Cuando se suman vectores, se obtiene otro vector. Aplicando el método del polígono se obtiene gráficamente el vector suma.

REGLA DEL PARALELOGRAMO

Para realizar la suma mediante el método del paralelogramo, hay que colocar los orígenes de los vectores sumandos en un mismo punto. Luego, se completa el paralelogramo. El vector suma es el que tiene el mismo origen que los vectores sumandos y su extremo en el vértice opuesto del paralelogramo.

También podemos aplicar la regla del paralelogramo para hallar el vector diferencia: $\vec{u} - \vec{v}$. Para hacerlo, se tiene que sumar a $\vec{u}$ el opuesto de $\vec{v}$: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.



Ejemplo

Para atraer el bote hacia la orilla, los chicos ejercen sobre él dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$. A estas fuerzas se las representa con dos vectores.

El efecto que ambas producen puede ser remplazado por otra fuerza, a la que se llama *resultante*; $\vec{R}$; esta es la suma de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$. Determinar $\vec{R}$.

Solución

Se obtiene el vector suma, $\vec{R}$, sumando gráficamente los vectores $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ mediante el método del paralelogramo. En este ejemplo, los vectores $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ tiene el punto O como origen.

Actividades

Determina analítcamente el vector resultante.

1. Considera los vectores $\vec{v} = (-2, 2)$, $\vec{u} = (4, 3)$ y $\vec{w} = (7, 2)$. Realiza analíticamente las siguientes operaciones.

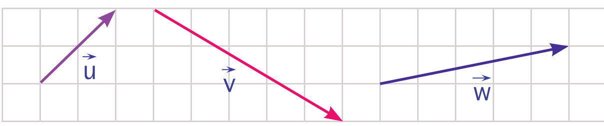
a. $7\vec{v} + \vec{w}$
b. $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
c. $(\vec{u} - \vec{v}) + \vec{w}$
d. $\vec{w} - \vec{v} - \vec{u}$

2. Dados $\vec{u} = (2, -1)$ y $\vec{v} = (0, 3)$, resuelve las siguientes operaciones de vectores.

a. $\vec{u} - 3\vec{v}$
b. $5\vec{u} + \vec{v}$
c. $(-\vec{u}) + 2\vec{v}$

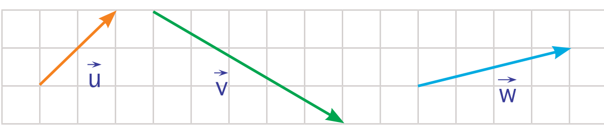
3. Haz las siguientes sumas de vectores.

a. $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ b. $2\vec{v} + \vec{w}$



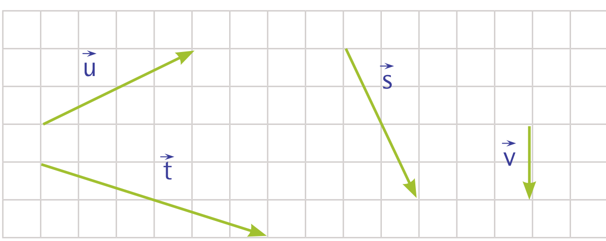
4. Realiza estas sumas de vectores.

a. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ b. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$



Determina el vector resultante mediante el método del polígono.

5. Halla gráficamente, con la regla del polígono, lo siguiente.

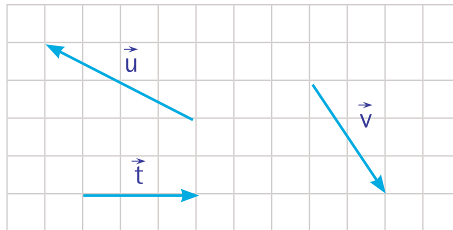


a. $\vec{u} + \vec{v}$
b. $\vec{u} + \vec{v} + \vec{s}$
c. $\vec{v} + \vec{s} + \vec{t}$
d. $\vec{v} - \vec{s}$
e. $2\vec{v} + \vec{t}$

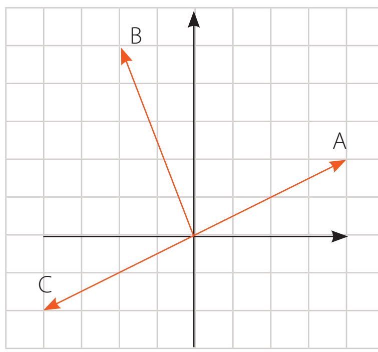
Determina el vector resultante mediante el método del paralelogramo.

6. Resuelve gráficamente y emplea la regla del paralelogramo.

a. $\vec{u} + \vec{t}$
b. $\vec{v} + \vec{t}$
c. $\vec{u} - \vec{v}$
d. $\vec{t} - \vec{u}$

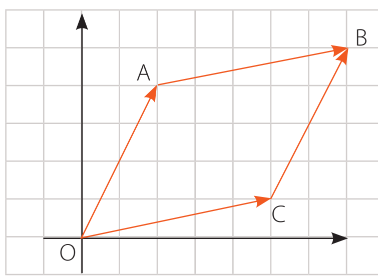


7. Escribe los componentes de los vectores que obtienes al efectuar las operaciones indicadas. Grafica y, mediante la regla del paralelogramo, encuentra esos vectores.



a. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$
b. $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$
c. $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

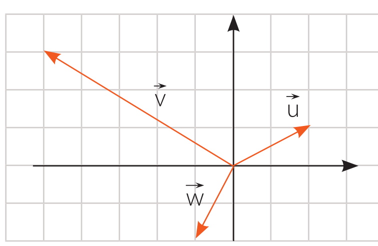
8. En el paralelogramo OABC, averigua los vectores que resultan de cada una de las siguientes operaciones.



a. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$
b. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$
c. $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$
d. $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{CB}$

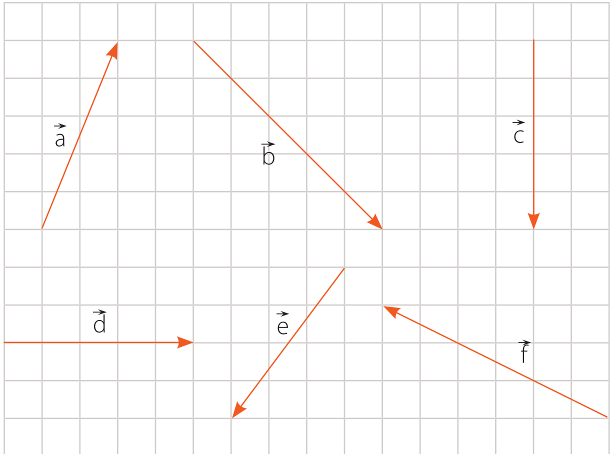
Determina las componentes de un vector luego de realizar el producto de un escalar por un vector.

9.



a. $3\vec{v}$
b. $\frac{1}{2}\vec{u}$
c. $-2\vec{w}$

10. Observa los vectores y dibuja lo que se pide.

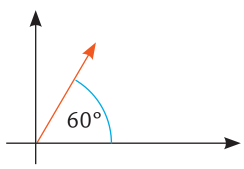


a. $2\vec{a}$ c. $1{,}75\vec{e}$ e. $-3\vec{b}$

b. $1{,}5\vec{c}$ d. $0{,}5\vec{e}$ f. $0{,}41\vec{f}$

Escribe las componentes de un vector.

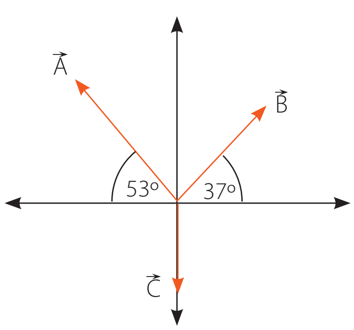
11. Observa el ejemplo de cómo se determina las componentes rectangulares del vector $\vec{B}$, conociendo que el módulo es 30 unidades.



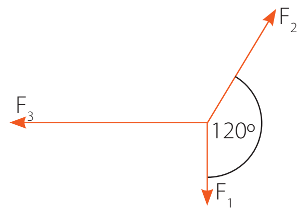
12. Dado el vector $\vec{A}$, de módulo 6 y cuyo ángulo con la horizontal es de 30°, halla los vectores componentes con los ejes *x* y *y*.

Encuentra el módulo del vector resultante.

13. Halla el módulo del vector resultante del sistema mostrado en la figura. Se sabe que $|\vec{A}| = 35$, $|\vec{B}| = 20$ y $|\vec{C}| = 10$. Contesta: ¿En qué cuadrante se hallará la resultante?



14. Una partícula se encuentra en equilibrio por acción de las fuerzas que actúan sobre ella. Calcula F_2 y F_3 si F_1 es 30 N.



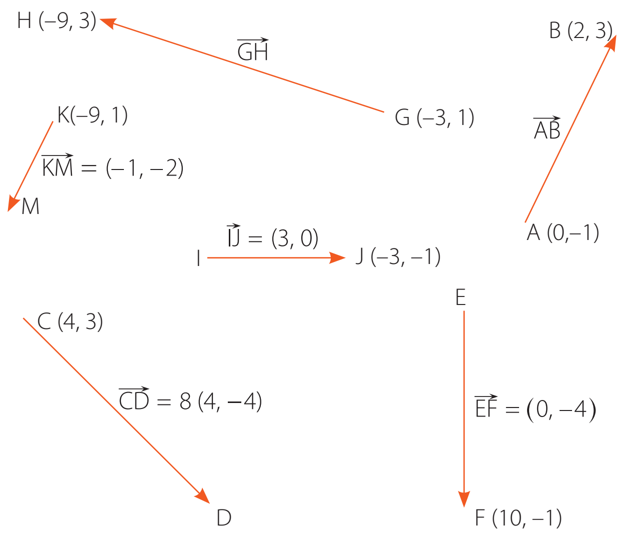
Realiza el producto escalar entre vectores.

15. Sean los vectores $\vec{u} = (0, 2)$, $\vec{v} = (1, -1)$ y $\vec{w} = (0, -1)$, calcula:

..... .

Resuelve problemas entre vectores.

16. Dados estos seis vectores, calcula lo que se pide.



a. Las componentes del vector $\overrightarrow{GH}$.
b. Las coordenadas del punto D.
c. Las coordenadas del punto E.
d. Las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$.
e. Las coordenadas del punto I.
f. Las coordenadas del punto M.

BECU_M1_B2_P108_125.indd 115 4/22/14 11:55 AM

Perímetro y área de un triángulo

Destreza con criterio de desempeño:

Demostrar **teoremas simples de la geometría plana** mediante las operaciones e identificación entre los vectores. **(C, P)**

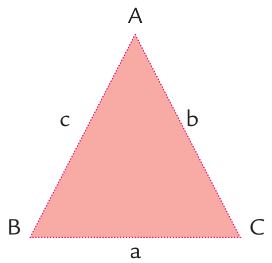
Conocimientos previos

- Indica la clasificación de los triángulos por la medida de sus lados.
- Explica la diferencia entre *perímetro* y *área*.

TIC

Visita esta página web para ver la aplicación de interesantes fórmulas. www.youtube.com/watch?v=ufiy2YCSdTY.

Para calcular el perímetro de un triángulo, se debe sumar la medida de los segmentos correspondientes a sus lados. En el triángulo ABC, los lados son $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$; por lo tanto, su fórmula será:



$$P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$$

El semiperímetro (s) se calcula dividiendo el perímetro para 2, así:

$$s = \frac{P}{2} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}}{2}$$

Cuando se desea calcular el área de un triángulo, se aplican las siguientes fórmulas.

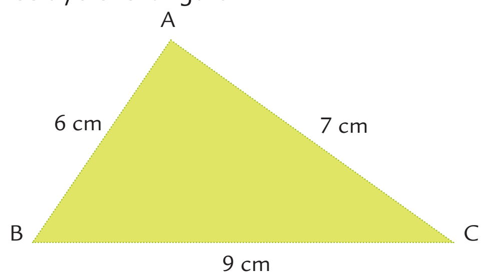
$$A = \frac{b \cdot h}{2} \qquad A = \sqrt{s(s-a)(s-c)(s-b)}$$

Ejemplo

Los lados de un triángulo miden 8 cm, 9 cm y 10 cm. Construir la figura y calcular su perímetro, su semiperímetro y su área.

Solución

Se construye el triángulo.



- Se calcula del perímetro:
  $P = 8\text{ cm} + 9\text{ cm} + 10\text{ cm}$
  $P = 27\text{ cm}$
- Se calcula del semiperímetro:
  $s = \frac{P}{2}$
  $s = \frac{27\text{ cm}}{2} = 13{,}5\text{ cm}$
- Para calcular el área, se aplica la segunda fórmula planteada.
  $A = \sqrt{13{,}5(13{,}5-8)(13{,}5-9)(13{,}5-10)}\ \text{cm}^2$
  $A = \sqrt{13{,}5(5{,}5)(4{,}5)(3{,}5)} = \sqrt{1169{,}44} = 34{,}19\text{ cm}^2 \quad A = 34{,}19\text{ cm}^2$

Actividades

Calcula el perímetro y el área de triángulos.

1. Si los vértices de un triángulo son los puntos indicados, halla su área.

a. A (3, 2), B (1, 4) y C (2, 5)

b. P(–3, 4), Q(0, 5), R(4, 0)

Resuelve problemas de perímetros y áreas.

2. Desde la terraza de un edificio de 60 m de altura, se ve la acera del frente con un ángulo de depresión de 60°. Calcula el área del triángulo que se forma.

BECU_M1_B2_P108_125.indd 116 4/22/14 11:55 AM

Perímetro y área de polígonos regulares

Destreza con criterio de desempeño:
Resolver problemas de la Física (principalmente relacionados con **desplazamiento, fuerza y velocidad**) aplicando vectores. **(C, P, M)**

Conocimientos previos

- Indica las características de los polígonos regulares.
- Dibuja dos polígonos regulares.

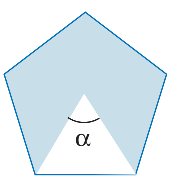
Toma en cuenta

Para calcular el perímetro de un polígono, se suman las medidas de todos los lados.

Recuerda

El ángulo central de un polígono regular se calcula así:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}$$



$\alpha \rightarrow$ ángulo central

$n \rightarrow$ número de lados

Tarea

Calcula el perímetro y el área de un pentágono regular de 6 cm de lado.

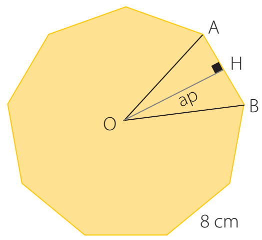
Para calcular el perímetro de un polígono, se suman las medidas de todos sus lados.

Para calcular el área de polígonos regulares se utiliza la fórmula:

$$A = \frac{P \cdot ap}{2}$$

Ejemplo

Calcular el perímetro y el área de la figura dada.



ap → apotema

Solución

- Se calcula el ángulo central.

$$\alpha = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$$

- El triángulo AOB es isósceles, por lo que los ángulos de la base son iguales y su valor es de 70° cada uno. Aplicando la ley de senos, se obtienen las medidas de los lados $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, así:

$$\frac{\overline{AB}}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{\overline{OA}}{\text{sen}\,\measuredangle ABO}$$

$$\frac{8}{\text{sen}\,40^\circ} = \frac{\overline{OA}}{\text{sen}\,70^\circ}$$

$$\overline{OA} = \frac{8 \cdot \text{sen}\,70^\circ}{\text{sen}\,40^\circ} = 11{,}69 \text{ cm}$$

- Una vez encontrado el lado $\overline{OA} = \overline{OB}$, se halla la apotema del triángulo aplicando el teorema de Pitágoras en AOH, así:

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2}$$

$$\overline{OH} = \sqrt{11{,}69^2 - 4^2} = 10{,}98 \text{ cm}$$

- Se calcula el área de la figura aplicando la fórmula adecuada. Para ello, el perímetro se obtiene multiplicando el número de lados por su medida.

$$A = \frac{P \cdot ap}{2}$$

$$A = \frac{n \cdot l \cdot ap}{2} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 11{,}69}{2} \text{ cm}^2$$

$$A = 420{,}84 \text{ cm}^2$$

Solución

$P = 72$ cm; $A = 420{,}84$ cm^2

Perímetro y área de figuras geométricas

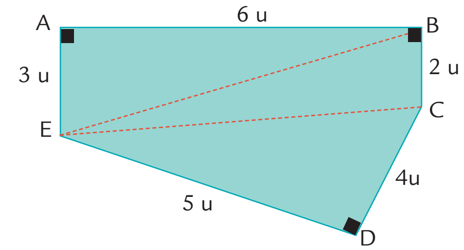
Destrezas con criterio de desempeño:

- Calcular el **perímetro y el área** de una **figura geométrica** mediante el uso de la distancia entre dos puntos y las fórmulas respectivas de la geometría plana. **(P)**
- Demostrar **teoremas simples** de la **geometría plana** mediante las operaciones e identificación entre los vectores. **(C, P)**

Para calcular el área de figuras planas es conveniente dividirlas en triángulos o figuras conocidas y obtener sus respectivas áreas.

Ejemplo

Calcular el perímetro y el área de la siguiente figura.



Solución

- Para hallar el perímetro, se suman la medida de sus lados de frontera, así:
  $P = 5 + 2 + 3 + 4 + 6 = 20$ u
- Para calcular el área de una figura no regular, se usa la triangulación. En la figura, se lo ha hecho con las líneas de color rojo, que forman tres triángulos y, por lo tanto, tres áreas para calcular.
- Para el triángulo ABE:
  $$A_{\triangle ABE} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 4\ u^2$$
- Para el triángulo ECD:
  $$A_{\triangle ECD} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10\ u^2$$
- Para encontrar el área del triángulo BEC, hay que calcular la medida de sus lados, pues no es rectángulo.
  $$\overline{EB} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 6{,}71\ u$$
- Ahora, se calcula el semiperímetro.
  $$s = \frac{6{,}71 + 6{,}4 + 2}{2} = \frac{15{,}11}{2} = 7{,}555\ u$$
- Y, entonces, el área del triángulo BEC:
  $$A_{\triangle BEC} = \sqrt{(7{,}555)(7{,}555 - 6{,}71)(7{,}555 - 6{,}4)(7{,}555 - 2)}$$
  $$A_{\triangle BEC} = \sqrt{40{,}96}\ u^2 = 6{,}399\ u^2$$
- El área total de la figura es la suma de las tres áreas calculadas.
  $$A_{total} = 9\ u^2 + 10\ u^2 + 6{,}399\ u^2 = 25{,}4\ u^2$$
  $P = 20$; $A = 25{,}4\ u^2$

Conocimientos previos

- Indica la clasificación de los polígonos de acuerdo al número y medida de sus lados.
- Dibuja tres ejemplos e indica los elementos que forman los polígonos.

TIC

Visita las siguientes páginas importantes para el cálculo del perímetro y del área de cualquier figura geométrica.

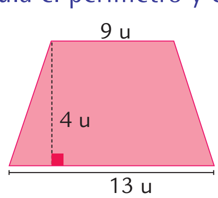
- www.youtube.com/watch?v=S9_uUV6PtJs
- www.youtube.com/watch?v=YmjtbOb6cac&feature=related

Actividades

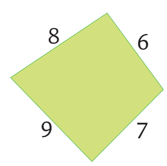
Resuelve problemas relacionados con perímetros y áreas de figuras geométricas.

1. Calcula el perímetro y el área de las siguientes figuras.

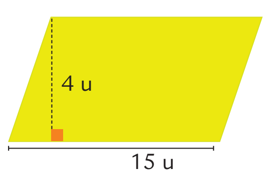
a.



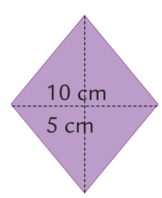
b.



c.



d.



Destreza con criterio de desempeño:

Resolver **problemas de la Física** (principalmente relacionados con desplazamiento, fuerza y velocidad) aplicando vectores. **(C, P, M)**

Conocimientos previos

Con los vectores $\vec{A}=(3, 5)$, y $\vec{B} = (-2, -3)$,realiza las operaciones indicadas gráficamente.

a. $\vec{A} + 2\vec{B}$

b. $\vec{A} - \vec{B}$

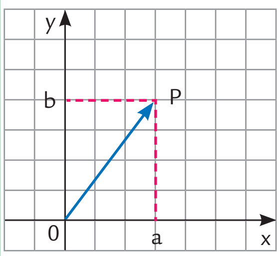
c. $2\vec{B} - 2\vec{A}$

Actualízate

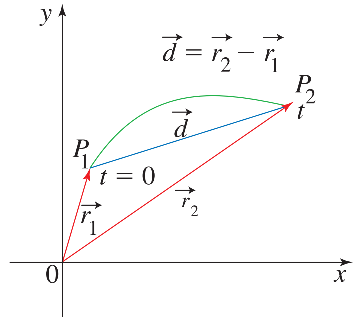
Para hallar el módulo del vector $\overrightarrow{OP}$ de componentes a y b, de acuerdo con el teorema de Pitágoras se calcula así:

$|\overrightarrow{OP}|^2 = a^2 + b^2$

$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{a^2 + b^2}$



EL VECTOR DESPLAZAMIENTO



Se considera que un cuerpo puntual describe una trayectoria y que este cuerpo en su recorrido pasa por los puntos P_1 y P_2 como se muestra en la gráfica.

Las posiciones en los puntos P_1 y P_2 se representan por los vectores $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, respectivamente.

Esta descripción significa que en el tiempo t:

- El móvil se encuentra en el punto P_2.
- Ha recorrido una distancia a lo largo de la trayectoria descrita desde P_1 hasta P_2.
- Se ha desplazado a partir de la posición inicial P_1 hasta P_2 según el vector $\vec{d}$.

Se llama vector desplazamiento $\vec{d} = Dr = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ desde P_1 hasta P_2, al vector que tiene su origen en la posición inicial P_1 y su punto final coincide con la posición final P_2 del móvil.

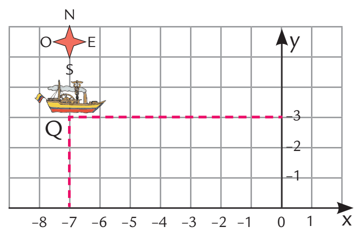
EL VECTOR VELOCIDAD

Velocidad media

Para el movimiento rectilíneo se ha definido la velocidad media adquirida por un objeto como $\vec{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

Ejemplo

Una lancha sale del muelle y navega 7 km hacia el oeste y, luego, 3 km hacia el norte. ¿A qué distancia del muelle se encuentra?



Solución

El muelle se ubica en el origen de un sistema de coordenadas.

Se considera que cada unidad de este sistema representa 1 km.

Se puede marcar el recorrido que sigue la lancha hasta ubicar el punto Q en el que ahora se encuentra.

Se tiene que encontrar la distancia de Q al origen, es decir, se tiene que hallar el módulo del vector $\overrightarrow{OQ}$, es decir, $|\overrightarrow{OQ}|$. Utilizamos el teorema de Pitágoras:

$|\overrightarrow{OQ}|^2 = (-7)^2 + 3^2 \rightarrow |\overrightarrow{OQ}|^2 = 49 + 9 = \sqrt{58}$

$\rightarrow |\overrightarrow{OQ}| \approx 7{,}62$

La lancha se encuentra aproximadamente a 7,62 km del muelle.

BECU_M1_B2_P108_125.indd 119 4/22/14 11:55 AM

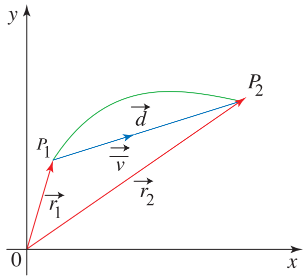


Figura 2.

De manera análoga, como el desplazamiento en el plano se representa por el vector $\Delta \vec{r}$, definimos la velocidad media como:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

La dirección del vector velocidad media coincide con la dirección del vector desplazamiento (figura 2).

VELOCIDAD INSTANTÁNEA

Supongamos que un cuerpo se traslada desde el punto P hasta el punto P_1, en un intervalo de tiempo Δt_1; en este caso, el vector desplazamiento es d_1 (figura 3). Si tomamos intervalos de tiempo cada vez más cortos, los vectores desplazamiento se van «ciñendo» a la trayectoria. Como la velocidad tiene la misma dirección del desplazamiento para intervalos de tiempo cada vez más cortos, la velocidad media se aproxima a la velocidad instantánea, cuya dirección es tangente a la trayectoria.

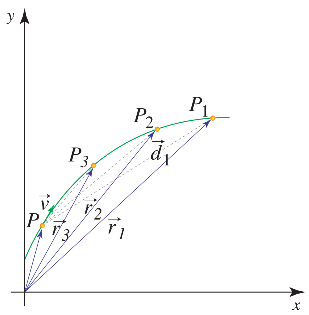


Figura 3.

El vector velocidad instantánea tiene las siguientes características:

- **Norma**. Medida de la velocidad, también llamada *rapidez*.
- **Dirección**. La dirección de la velocidad instantánea está determinada por la tangente a la trayectoria en cada punto. La flecha del vector indica la dirección en la cual se produce el movimiento.

Para cada punto de la trayectoria, el vector velocidad instantánea se representa con origen en dicho punto.

Ejemplo

Un avión vuela hacia el este con velocidad de 650 km/h. Si un viento sopla hacia el norte con velocidad de 100 km/h, ¿cuál es la velocidad del avión respecto a la tierra? Si se sabe que la dirección del avión está dada por la expresión 90° – θ, ¿ cuál es la dirección del avión?

Solución

Los datos del problema se ven reflejados en la figura 4.

La velocidad del viento afecta el curso del avión, razón por la cual el vector $\vec{v}$ representa su velocidad con respecto a la tierra.

La magnitud del v está dada por:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

$$V = \sqrt{650^2 + 100^2} = 657{,}64 \text{ km/h}$$

$$\text{Como } \tan\theta = \frac{|v_2|}{|v_1|} = \frac{100}{650}$$

Tan θ = 0,153, es decir, θ = tan -1(0,153) = 8° 44´46´´

Así la dirección de $\vec{v}$ es 90° – θ = 81° 15´14´´

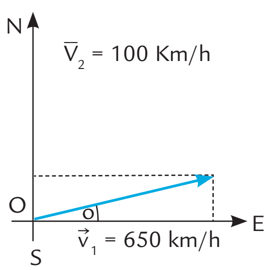
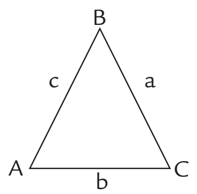


Figura 4.

BECU_M1_B2_P108_125.indd 120 4/22/14 11:55 AM

Recuerda

En el triángulo:



Ley de senos

$\frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}} = \frac{c}{\text{sen C}}$

Ley de cosenos

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc \cos C$

VECTORES DE FUERZA

Un vector fuerza es aquel que representa la dirección y la magnitud de una fuerza aplicada. Si un objeto es sometido a dos fuerzas, produce una fuerza resultante que afecta el objeto de la misma forma en que las dos fuerzas lo hacen simultáneamente.

Ejemplo

Las fuerzas $\vec{F}_1$ de 5 kg y $\vec{F}_2$ de 14 kg actúan sobre un cuerpo formando un ángulo de 60°. Hallar la magnitud de la fuerza resultante $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ y su dirección con respecto a $\vec{F}_1$.

Solución

La situación planteada se representa mediante un esquema llamado **paralelogramo de fuerzas**.

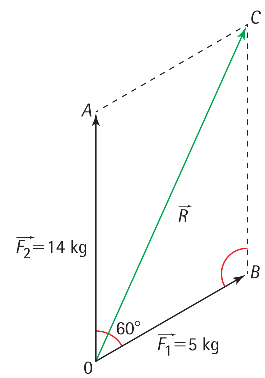


Figura 5.

En el paralelogramo *ACBO*, de la figura 5, las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ son aplicadas simultáneamente sobre el punto *O*.

Como en un paralelogramo la suma de los ángulos interiores es 360°, entonces, en particular, $\measuredangle O + \measuredangle B = 180°$, por lo tanto, $\measuredangle B = 120°$.

Así, se puede aplicar la ley de los cosenos en el triángulo COB para calcular $\vec{R}$, de la siguiente manera:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos B$$

$$\text{luego, } R = \sqrt{5^2 + 14^2 - 2(5)(14)\cos 120°}$$

$$R = 17{,}059 \text{ kg}$$

La dirección de *R* con respecto a F_2, está dada por $\measuredangle COB$. Para calcular esta dirección se emplea la ley de los senos así:

$$\frac{F_2}{\text{sen} \measuredangle COB} = \frac{R}{\text{sen} \measuredangle B}, \text{ luego, } \frac{14}{\text{sen} \measuredangle COB} = \frac{17{,}059}{\text{sen } 120°}$$

$$\text{de donde, sen} \measuredangle COB = \frac{14}{17{,}059} \text{ sen } 120° = 0{,}7107$$

$$\text{Luego, } \measuredangle COB = \text{sen}^{-1}(0{,}7107) = 45°17'30''$$

Entonces, la magnitud de *R* es 17,059 kg y su dirección con respecto a F_1 es 45°17'30''.

Trabajo individual

Dos hombres empujan un objeto sobre el piso, uno de ellos hace una fuerza de 50 libras en dirección N32°O y el otro lo empuja con una fuerza de 100 libras en dirección N30°E. ¿En qué dirección se está moviendo el objeto.

Investiga

¿Qué es la fuerza de rozamiento?

Actividades

Resuelve problemas de velocidad.

1. Desde un mismo punto parten dos móviles con rapidez constante de 15 km/h y 21 km/h, respectivamente. Si llevan la misma dirección y el mismo sentido, y el primero sale 30 minutos antes, halla analítica y gráficamente dónde y cuándo se encontrarán.

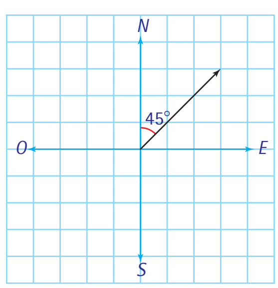
2. Dos puntos A y B están en la misma horizontal. Desde A parte hacia B un móvil con una rapidez constante de 60 km/h. Simultáneamente y desde B, parte hacia A otro móvil con una rapidez constante de 12,5 m/s. Si coinciden a las 3 horas de haber partido, calcula analítica y gráficamente cuál es la distancia entre A y B.

3. Dos puntos A y B están separados por 10 km. Desde A parte hacia B un móvil con una rapidez constante de 4 km/h. Simultáneamente y desde B, parte hacia A otro móvil con una rapidez constante de 3 km/h. Determina analítica y gráficamente dónde y cuándo se encontrarán.

4. Dos puntos A y B están separados por 100 km. Desde A parte hacia B un móvil con una rapidez constante de 50 km/h. Simultáneamente y desde B, parte otro móvil con el mismo sentido que A y con una rapidez constante de 20 km/h. Halla analítica y gráficamente dónde y cuándo se encontrarán.

5. Dos puntos A y B están separados por 1 200 m. Desde A parte hacia B un móvil con una rapidez constante de 35 m/s. Diez segundos después y desde B, parte hacia A otro móvil con una rapidez constante de 63 m/s. Encuentra analítica y gráficamente dónde y cuándo coincidirán.

6. En navegación se utiliza una notación especial para indicar el rumbo de un móvil con respecto a la línea norte-sur. Por ejemplo, un rumbo de N45°E indica un ángulo cuyo lado inicial apunta al norte y cuyo lado final está a 45° al este del norte.



a. Si un barco navega 80 kilómetros en la dirección N40°E y después 60 kilómetros con dirección este, ¿qué distancia recorrió el barco desde el punto de donde partió? ¿Cuál es su rumbo desde el punto de partida?

b. Un avión despega de un aeropuerto y vuela en dirección N30°O. Después de volar 100 km, ¿a qué distancia al norte del aeropuerto se encuentra el avión?

7. Esmeraldas se encuentra a 300 km de Quito en línea recta y está ubicada en dirección N43ºO, mientras que Guayaquil está a 390 km en línea recta de Quito, en dirección S37ºO. Determina los vectores posición de Esmeraldas y Guayaquil con respecto a la capital del Ecuador.

8. Una persona recorre 500 m hacia el norte de su casa y, luego, 150 m al noreste. Realiza un gráfico aproximado y determina la posición final de la persona con respecto al punto de origen.

9. Dados los puntos A (1, 4), B (−5, 2) y C (−4, −3), encuentra sus vectores posición.

10. La posición de una ciudad P con respecto de la ciudad Q es (60 km, S65ºE). Otra ciudad R se halla localizada, con respecto a Q, en la posición (110 km, N15ºO). Identifica los vectores posición de P y R.

BECU_M1_B2_P108_125.indd 122 4/22/14 11:55 AM

11. Una montaña se encuentra en el punto de coordenadas (–3, 2) km con respecto a una persona. La persona gira y divisa un pájaro a 50 m, en dirección S30°E. Determina los vectores posición de la montaña y del pájaro con relación a la persona.

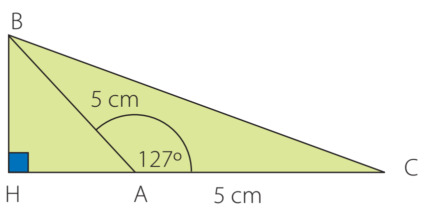
12. Un avión de aeromodelismo está a (4 km, SO) de la torre de control. En ese instante, su dueño desea impactar en un blanco que está ubicado en el punto (6, –4) km. Averigua los vectores posición del avión y del blanco con relación al dueño del avión.

13. Si desde un observatorio instalado en la playa se ve un avión a una distancia de 2,5 km en dirección SE, y un barco a 3,8 km en dirección S72°O, indica cuál es la posición del avión con respecto al barco. Realiza un gráfico a escala.

Resuelve problemas de geometría.

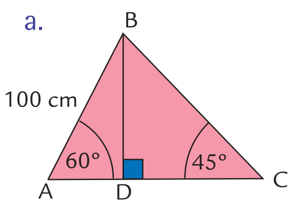
14. Construye un triángulo rectángulo que tenga una hipotenusa que mida 5 cm y un ángulo que mida 45°. Calcula su perímetro y su semiperímetro.

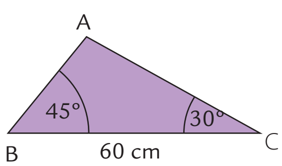
15. En el triángulo ABC de la figura, halla el perímetro y el área.



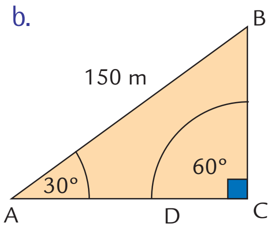
16. Busca el perímetro y el área de los siguientes triángulos.

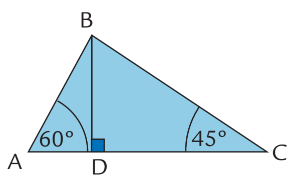
a.



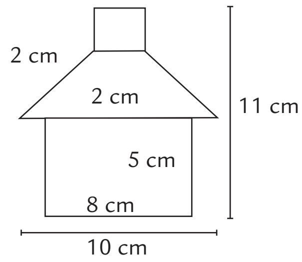


b.





17. Observa la figura y calcula el área total.



18. Halla la longitud de las diagonales de un rombo inscrito en un rectángulo de $210\ cm^2$ de área y 30 cm de largo. Luego, calcula el área del rombo y la relación que existe entre esta y la del rectángulo.

Resuelve problemas de fuerzas.

19. En la figura, si el cuerpo es de 10 kg y $\mu = 0{,}15$, señala el valor que debe tener la fuerza para que el cuerpo se mueva con velocidad constante.

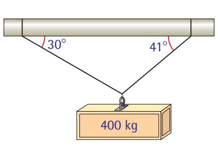
20. Si el bloque de la figura del ejercicio 19 es de 30 kg y $\mu = 0{,}2$, calcula el valor de F para que el bloque se mueva con velocidad constante.

21. Dos fuerzas de 100 kg y 120 kg son aplicadas a un objeto. Si el ángulo entre sus direcciones es de 85°, ¿cuál es la magnitud de la fuerza resultante?

22. Un cuerpo de 250 kg reposa sobre un plano inclinado sin fricción. El plano se inclina 30° con respecto a la horizontal.

Plantea un procedimiento para encontrar la fuerza paralela al plano que evite que el cuerpo se deslice en el plano. Luego, halla esa fuerza.

23. Un cuerpo de 400 kg es soportado por dos alambres que forman ángulos de 30° y 41°, como se muestra en la figura. Encuentra la tensión en cada alambre.



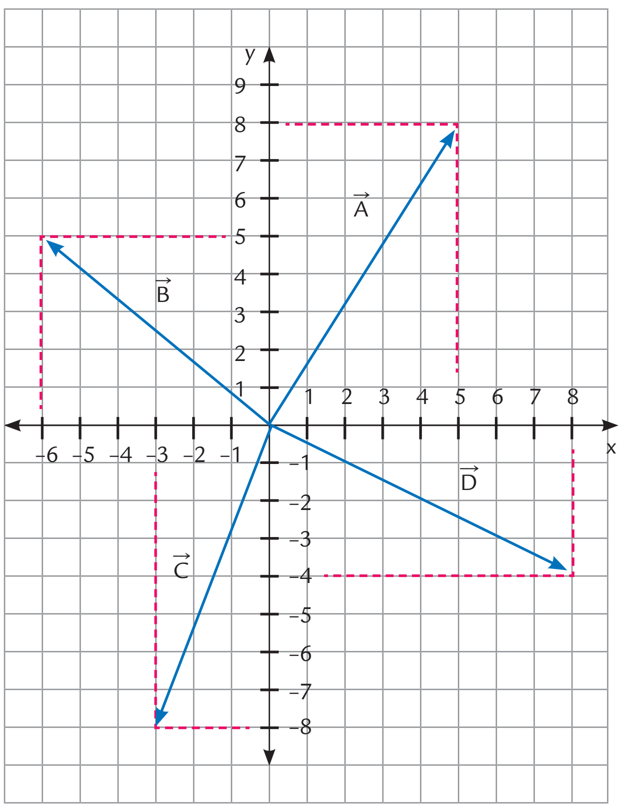
- Reconoce los elementos de un vector en $\mathbb{R}^2$.
- Determina la longitud de un vector.

1,5 puntos **1. Observa el gráfico y encuentra:**

a. Los componentes rectangulares de los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$.

b. Los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$ en función de sus vectores unitarios.

c. El módulo de los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$.



1,5 puntos **2. El vector Sur 68° Este tiene un valor de 87° N en su componente en el eje x. Determina.**

a. La componente en el eje y.

b. El módulo del vector.

c. El vector en función de sus vectores unitarios.

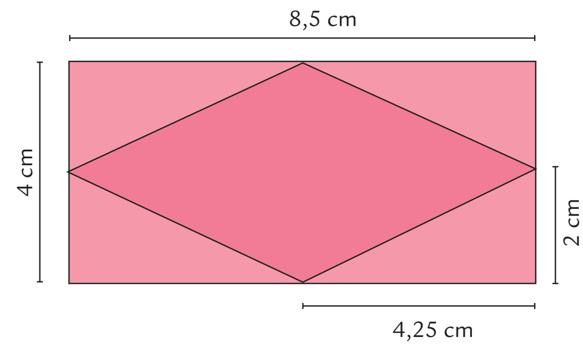
- Opera con vectores de $\mathbb{R}^2$.

1 punto **3. Encuentra el vector resultante de la suma de A (2, 4)m, y B (6i, –3j) m, por el método algebraico.**

1 punto **4. Halla A – B si A (7N, 150°) y B (–4i, –3j) N, por el método del polígono.**

- Calcula el perímetro y el área de una figura geométrica.

3 puntos **5. Observa la figura y calcula el área y el perímetro del rombo.**



- Resuelve problemas.

2 puntos **6. Resuelve los problemas.**

a. En una mesa de billar hay tres bolas, A, B y C. La B se encuentra con respecto a la bola A en la posición (0,4 m, N80°E), y la C está con relación a la A en (0,5m, S75°E). Señala la posición de la bola C con respecto a la B.

b. Se desea cavar un túnel a través de una montaña para lo cual se encuentran las posiciones de los puntos A (entrada del túnel) y B(salida del túnel) respecto a un punto común C. La posición de A con relación a C es (8 km, N70°E), y la de B con respecto a C es (10 km, SO). Determina la posición de la salida del túnel con relación a la entrada.

Coevaluación

- Resuelve problemas de la física aplicando vectores.

7. En parejas resuelvan los problemas, luego intercámbienlos y verifiquen respuestas.

a. Una persona se encuentra en un punto de coordenadas (–2, 4) km con respecto a una montaña. Determinen el vector posición de la persona respecto de la montaña.

b. Si un vehículo se mueve de la ciudad A (–35, 50) km a la ciudad B (–25, –45) km en línea recta y con una rapidez constante en 2 horas, determinen el desplazamiento realizado.

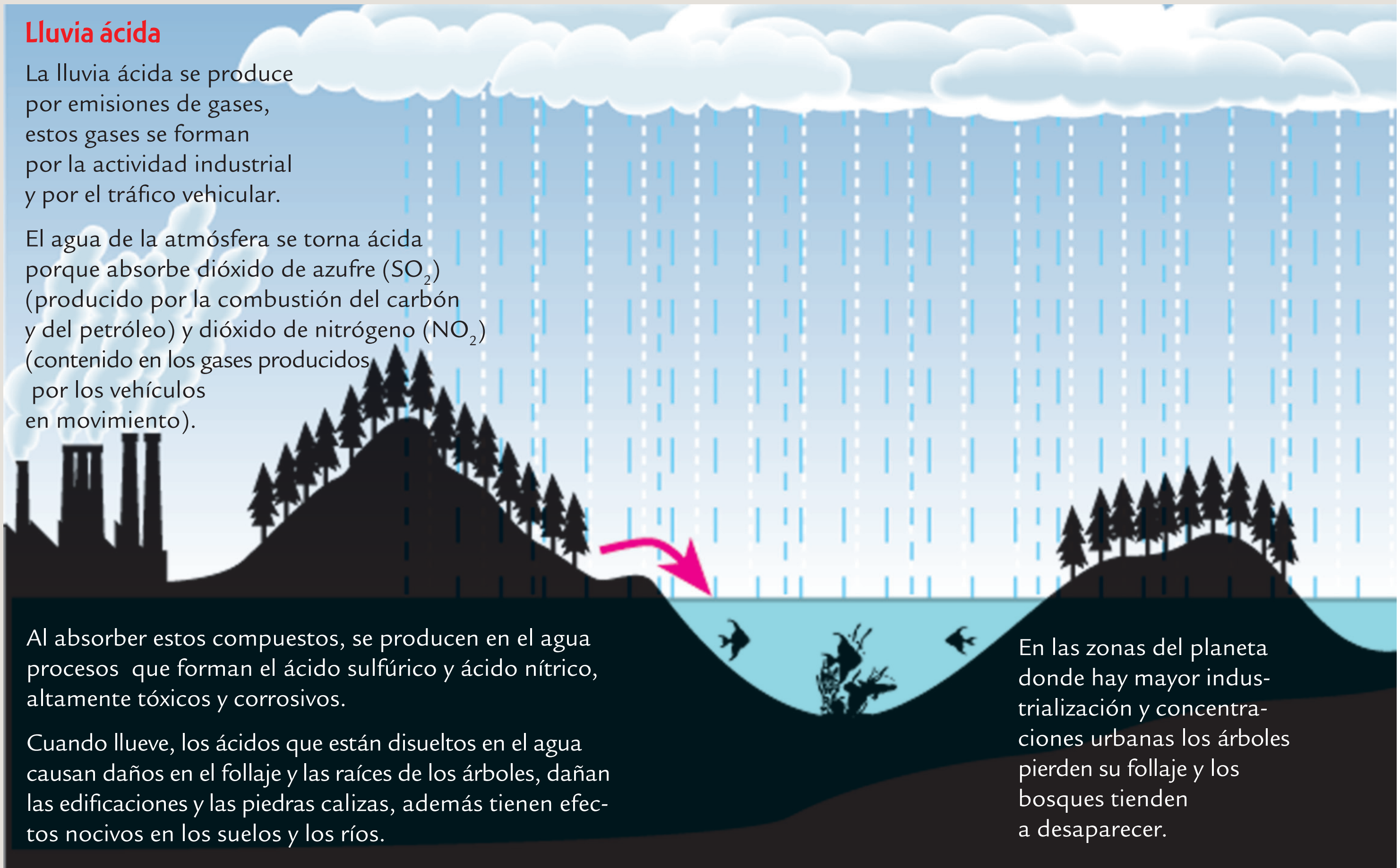
Autoevaluación (Metacognición)

Menciona una ventaja y una desventaja de realizar las operaciones con vectores analítica y gráficamente. Demuéstralo con ejemplos.

- **Indicador esencial de evaluación**

BECU_M1_B2_P108_125.indd 124 4/22/14 11:55 AM

Medioambiente



Lluvia ácida

La lluvia ácida se produce por emisiones de gases, estos gases se forman por la actividad industrial y por el tráfico vehicular.

El agua de la atmósfera se torna ácida porque absorbe dióxido de azufre (SO_2) (producido por la combustión del carbón y del petróleo) y dióxido de nitrógeno (NO_2) (contenido en los gases producidos por los vehículos en movimiento).

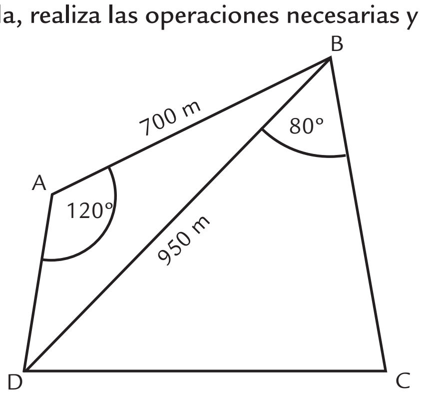
Al absorber estos compuestos, se producen en el agua procesos que forman el ácido sulfúrico y ácido nítrico, altamente tóxicos y corrosivos.

Cuando llueve, los ácidos que están disueltos en el agua causan daños en el follaje y las raíces de los árboles, dañan las edificaciones y las piedras calizas, además tienen efectos nocivos en los suelos y los ríos.

En las zonas del planeta donde hay mayor industrialización y concentraciones urbanas los árboles pierden su follaje y los bosques tienden a desaparecer.

Actividades

1. **El siguiente es el modelo de una finca que sirve para estudiar los efectos de la lluvia ácida, realiza las operaciones necesarias y responde.**



a. ¿Cuál es la medida del ángulo ABD?

b. ¿Cuál es la longitud del segmento BC?

c. Si se utiliza un aparato para medir la acidez del agua cada 30 m², ¿cuántos aparatos se utilizaron aproximadamente para medir la acidez del agua en la finca?

Bloque 3

Unidad 4

Programación lineal

Carihuairazo

BECU_M1_B3_P126_143.indd 126 4/22/14 11:57 AM

Antes de empezar

1. Calcula tres valores de x que sean solución de estas inecuaciones.

   a. $x + 5 < -2$

   b. $\frac{x}{2} - 4 \geq 0$

   c. $-3x - 2 \leq 3$

2. Resuelve la inecuación $\frac{1}{2}x - 4 \leq 3x + 1$.
   Razona los pasos realizados para resolverla.

3. Calcula las soluciones de estos sistemas de inecuaciones.

   a. $x + 3 > 5$
      $2x - 1 > 11$

   b. $15 + 7x \geq 8$
      $3x < 14x + 6$

Optimizar

En las actividades económicas resulta de gran interés analizar y prever los beneficios, así como los costos de cualquier tipo de inversión.

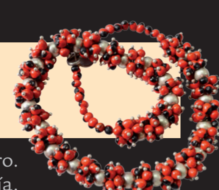
Estos análisis se realizan a partir de una función que se pretende maximizar (beneficios) o minimizar (costos).

Este tipo de problemas, en los que se trata de optimizar (maximizar o minimizar) una función sujeta a unas determinadas restricciones, se resuelve con técnicas de programación lineal.

El **Carihuairazo** es un volcán que se encuentra apagado, tiene una altura de 5 116 m. Su nombre proviene de las palabras quichua *cari* = hombre, *huaira* = viento y *razu* = nieve y de acuerdo a la leyenda del lugar, este perdió una batalla con el Chimborazo, siendo ambos machos al tratar de conseguir el amor del volcán Tungurahua (hembra), y por eso es que el cráter de este se encuentra destruido.

Objetivo educativo

Utilizar la programación lineal para resolver problemas en la administración de recursos.



Collar de semillas de huairuro.
Artesanía de los pueblos indígenas de la Amazonía.

BECU_M1_B3_P126_143.indd 127 4/22/14 11:57 AM

Regiones del plano determinadas por rectas

Destreza con criterio de desempeño:
Graficar el **conjunto solución** de cada desigualdad. **(P)**

Conocimientos previos

Resuelve las inecuaciones:

a. $3x - 4 < 6$

b. $4x - 5x - 4 > 8$

Cuando se representa gráficamente la recta de ecuación $y = x - 1$. (figura 1) El plano queda dividido en dos regiones: una formada por los puntos que están «por encima» de la recta, y otra con los puntos que están «por debajo» de ella. Así:

El punto (3, 2) cumple: $2 = 3 - 1$, está en la recta.

El punto (3, 4) cumple: $4 > 3 - 1$, está «por encima» de la recta.

El punto (3, 1) cumple: $1 < 3 - 1$, está «por debajo» de la recta.

Los puntos (x, y) con $y > x - 1$, tales como (0, 0), (0, 1), … (3, 4), … se encuentran en la región superior y son soluciones de la inecuación $x - y < 1$.

Los puntos (x, y) con $y < x - 1$, tales como (1, −1), (2, 0), … (3, 1), … se encuentran en la región superior, y son soluciones de la inecuación $x - y > 1$.

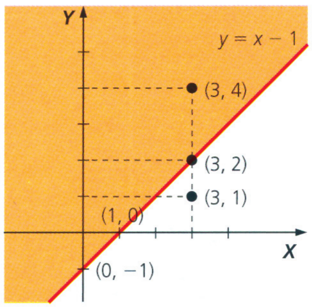


Figura 1.

La gráfica de una función $y = ax + b$ divide al plano en dos regiones: una formada por los puntos que satisfacen la inecuación $y < ax + b$, y otra formada por los puntos que verifican $y > ax + b$.

SOLUCIONES DE UNA INECUACIÓN LINEAL CON DOS VARIABLES

Sea la inecuación con dos variables $5x + 3y \leq 15$. Es fácil comprobar que el punto (0, 0) es una solución, pues $5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 15$. En cambio, el punto (4, 0), verifica $5 \cdot 4 + 3 \cdot 0 = 20 > 15$; no es una solución (figura 2).

Para obtener las soluciones de una inecuación de dos variables hay que representar la recta asociada a ella. Las soluciones son los puntos de uno de los dos semiplanos en que queda dividido el plano, incluida la recta, si la inecuación es del tipo « ≤ » o « ≥ »; y excluida si la inecuación es el tipo « < » o « > ».

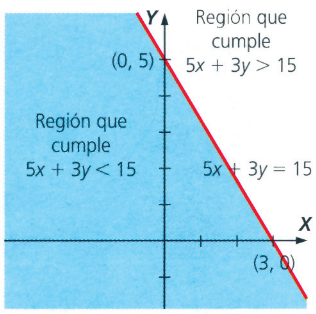


Figura 2.

SOLUCIONES DE UN SISTEMA DE INECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES

Se quiere representar el conjunto de puntos del plano que verifican las siguientes inecuaciones:

$$x - y \leq 1$$
$$5x + 3y \leq 15$$

Para ello, se resuelven ambas inecuaciones y se representan sobre el mismo sistema de ejes coordenados (figura 3).

La solución del sistema es la región del plano cuyos puntos pertenecen a las inecuaciones $x - y \leq 1$ y $5x + 3y \leq 15$ y se llama **región solución** o **región factible**.

Son puntos solución del sistema: (0, 0), (1, 0), (−3, 4), …

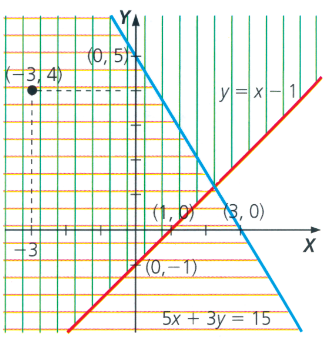


Figura 3.

BECU_M1_B3_P126_143.indd 128 4/22/14 11:57 AM

Función objetivo

Destrezas con criterio de desempeño:

- Identificar la **función objetivo** y escribir una expresión lineal que la modele. (M)
- Graficar la función **lineal objetivo** en el plano cartesiano. (P)
- Identificar las **restricciones** del problema y escribir desigualdades lineales que las modelen. **(M)**

Conocimientos previos

Escribe como una inecuación los siguientes enunciados.

a. El número de lápices y borradores no supera las 1 000 unidades.

b. Lo mínimo que se espera en la producción es 2 000 kg, pero no se superará los 5 000 kg

Toma en cuenta

Origen de la programación lineal

El origen de la programación lineal se encuentra en los trabajos del matemático húngaro John von Neumann, creador e impulsador a su vez de la teoría de juegos.

John von Neumann (1903-1957)

Resolver un problema de programación lineal consiste en optimizar (maximizar o minimizar) una función lineal, denominada función objetivo, estando las variables sujetas a una serie de restricciones expresadas mediante inecuaciones lineales.

El conjunto de todas las soluciones posibles se denomina conjunto de restricción o conjunto solución factible.

Ejemplo

En una confitería se dispone de 24 kg de galletas y 15 kg de helado que se envasan en dos tipos de cajas de la siguiente forma:

- Caja 1: 200 g de galletas y 100 g de helado. Precio: $ 4.

- Caja 2: 200 g de galletas y 300 g de helado. Precio: $ 6.

¿Cuántas cajas de cada tipo se tendrán que preparar y vender para obtener el máximo de ingresos?

Solución

Para resolver este tipo de problemas es fundamental analizar y organizar la información dada.

Del análisis de la información del problema se tiene que:

- Dos cantidades de dos productos (helado y galletas).
- Dos tipos de cajas distintas cantidades de cada producto.
- Un precio para cada tipo de caja.
- Se desea obtener el máximo ingreso por la venta de las cajas.

La información obtenida se puede organizar mediante una tabla:

	N° de cajas	galletas	helado	Ingresos
Caja 1	x	$200x$	$100x$	$400x$
Caja 2	y	$200y$	$300y$	$600y$
Total	$x + y$	$\leq 24\,000$	$\leq 15\,000$	$400x + 600y$

La expresión que da los ingresos totales, I, en relación con el número de cajas de cada tipo es: $I = 400x + 600y$.

Esta expresión recibe el nombre de función objetivo, y está sujeta a unas restricciones, debido a que el número de cajas que se pueden obtener está a su vez limitado por la cantidad disponible de galletas y helado.

El conjunto de restricciones del problema se expresa mediante las desigualdades siguientes:

$$\left.\begin{aligned} 200x + 200y &\leq 24\,000 \\ 100x + 300y &\leq 15\,000 \end{aligned}\right\} \quad \text{o bien} \quad \left.\begin{aligned} x + y &\leq 120 \\ x + 3y &\leq 150 \end{aligned}\right\}$$

Además x e y con números enteros con la condición:

$$x \geq 0 \text{ e } y \geq 0$$

Determinación de la región factible

Destreza con criterio de desempeño:

Determinar el **conjunto factible** a partir de la intersección de las soluciones de cada restricción. **(P)**

Conocimientos previos

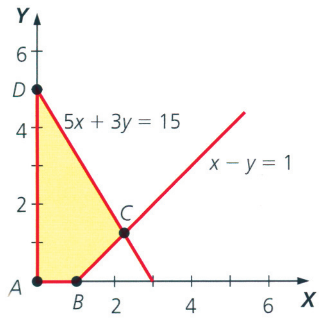
Determina la región en la que se encuentra la solución del siguiente sistema.

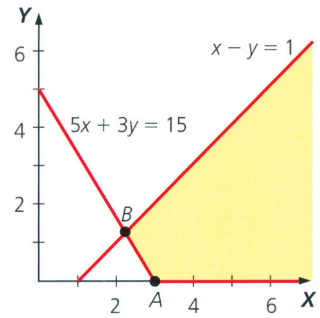
$$\begin{cases} x + 3y < 9 \\ 2x - 3y > 7 \end{cases}$$

*La solución de un problema de programación lineal, en el supuesto de que exista, debe estar en la región determinada por las distintas desigualdades. Esta recibe el nombre de **conjunto o región factible,** y puede estar o no acotada.*

Ejemplo

$$\begin{cases} 5x + 3y \le 15 \\ x - y \le 1 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x + 3y \ge 15 \\ x - y \ge 1 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{cases}$$





Solución

Las regiones factibles para cada uno de estos casos son las zonas que aparecen sombreadas, incluyendo o no los lados y los vértices, según que las desigualdades sean en sentido amplio o en sentido estricto.

Si la región factible está acotada, su representación gráfica es un polígono con un número de lados menor o igual que el número de restricciones.

Así, para la región acotada del ejemplo anterior, además de la zona sombreada pertenecen a la región factible:

- Lados: los segmentos por los que pasan las rectas $x = 0$; $y = 0$; $5x + 3y = 15$; $x - y = 1$.
- Vértices: los puntos $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C\left(\frac{9}{4}, \frac{5}{4}\right)$, $D(0, 5)$.

La **solución óptima** es aquella que maximiza o minimiza la función objetivo. Se encuentra en la frontera de la región factible. Si la solución es uno de los vértices, se llama **punto extremo**.

Si la función objetivo fuese maximiza $f(x, y) = 2x + y$, su máximo para la región acotada del ejemplo anterior estará entre los puntos extremos A, B, C y D.

Para calcular la solución óptima se sustituye los valores de estos puntos en la función objetivo:

$$f(0, 0) = 2 \cdot 0 + 0 = 0 \qquad f(1, 0) = 2 \cdot 1 + 0 = 2$$

$$f\left(\frac{9}{4}, \frac{5}{4}\right) = \frac{18}{4} + \frac{5}{4} = \frac{23}{4} \qquad f(0, 5) = 2 \cdot 0 + 5 = 5$$

La solución óptima se obtiene en el punto C que maximiza $f(x, y)$.

Trabajo individual

Determina la región factible y la solución óptima del problema de la página anterior de la sección *Ejemplo*.

Actualízate

Razona

Para el caso de la región factible no acotada del ejemplo:

- ¿Qué ecuaciones tienen sus lados?
- ¿Cuáles son los puntos de sus vértices?

Métodos de resolución

Destreza con criterio de desempeño:
Aplicar **métodos algebraicos y gráficos** para resolver un problema de programación lineal. **(P)**

Conocimientos previos

Determina el conjunto solución del sistema lineal mediante el método gráfico.

$2x + 3y = 6$

$4x - 6y = 12$

La solución de un problema de programación lineal se puede obtener mediante métodos algebraicos y gráficos.

MÉTODO ALGEBRAICO O DE LOS VÉRTICES

En primer lugar se definen las variables, se plantea las inecuaciones que determinan las restricciones y la ecuación de la función objetivo.

Una empresa aeronáutica construye aviones de dos tipos: *A* y *B*. Para ello dispone de un máximo de 1 800 millones de dólares, siendo el costo de cada tipo de avión de 30 y 20 millones, respectivamente. Además, las condiciones del mercado exigen que el número total de aviones producidos no sea superior a 80.

Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de un avión de tipo *A* es de 4 millones de dólares y de 3 millones el de uno del tipo *B*, ¿cuántas aviones deben construirse de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

Solución

- Sea: x = número de aviones del tipo *A*
  y = número de aviones del tipo *B*
- La primera restricción viene dada por la cantidad total de millones de dólares, 1 800, que se tiene para construir los aviones y el costo de cada uno de los tipos *A* y *B*, 30 y 20 millones, respectivamente. Por tanto:

$$30x + 20y \leq 1\,800$$

Simplificando:

$$3x + 2y \leq 180$$

La segunda restricción impuesta por el mercado viene dada por el número total de aviones, 80, que se pueden construir:

$$x + y \leq 80$$

- La tercera y cuarta restricción vienen dadas por el hecho de que no tiene sentido construir un número negativo de aviones:

$$x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

- La función objetivo viene dada por la ecuación que representa los beneficios obtenidos, que en millones de dólares son:

$$f(x, y) = 4x + 3y$$

En segundo lugar hallamos los vértices de la región factible y el valor máximo de la función objetivo.

- Para averiguar los vértices de la región factible hallamos las soluciones de cada uno de los seis sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas que se pueden formar con las cuatro restricciones:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y = 180 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y = 180 \\ x + y = 80 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 180 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 80 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 2y = 180 \\ x = 0 \end{cases}$$

Razona

¿Cuándo se dice que solución factible es óptima?

BECU_M1_B3_P126_143.indd 131 4/22/14 11:57 AM

Razona

- Si la región factible está acotada, ¿puede tener infinitas soluciones que maximicen o minimicen la función objetivo?
- Si la región factible no está acotada, ¿existe siempre solución óptima?

Las soluciones de cada uno de los seis sistemas, de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, determinan los siguientes puntos:

$A(0, 0)$, $B(60, 0)$, $C(20, 60)$, $D(0, 80)$, $E(80, 0)$ y $F(0, 90)$

Los vértices de la región factible son aquellos puntos que cumplen todas las restricciones.

Si se sustituye los puntos en cada una de las desigualdades tenemos que:

- E no cumple la primera desigualdad (restricción) $3x + 2y \leq 180$, ya que:

$$3 \cdot 80 + 2 \cdot 0 \nleq 180$$

El punto E no es un vértice de la región factible.

- F no cumple la segunda desigualdad (restricción) $x + y \leq 80$, ya que:

$$0 + 90 \cdot 80$$

El punto F no es un vértice de la región factible.

Los puntos, A, B, C y D verifican todas las desigualdades, son los vértices de la región factible.

- Se halla los valores de la función objetivo $f(x, y) = 4x + 3y$ en cada uno de los vértices anteriores:

$f(0, 0) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$ $\qquad$ $f(20, 60) = 4 \cdot 20 + 3 \cdot 60 = 260$

$f(60, 0) = 4 \cdot 60 + 3 \cdot 0 = 240$ $\qquad$ $f(0, 80) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 80 = 240$

La solución óptima corresponde al vértice para el que la función objetivo tomo el valor máximo. En este caso es el vértice $C(20, 60)$. Se han de construir, por tanto, 20 casa del tipo A y 60 del tipo B.

El método algebraico se conoce también como **método de los vértices**.

Trabajo cooperativo

Un agricultor utiliza un invernadero de 300 m^2 para dos tipos de cultivo. Los gastos de cada uno de ellos son de 500 y 200 \$/m^2, respectivamente. Si se dispone de \$ 7 500 para invertir, ¿qué superficie debe dedicar a cada tipo de cultivo para obtener un beneficio máximo?

MÉTODO GRÁFICO O DE LAS RECTAS DE NIVEL

Para aplicar este método se realizan los pasos siguientes:

- Se representa gráficamente el sistema de inecuaciones formado por las restricciones que determinan la región factible.

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y &\leq 180 \\ x + y &\leq 80 \\ x \geq 0;\ y &\geq 0 \end{aligned}\right\}$$

- Se representa rectas de la forma $4x + 3y = k$, **rectas de nivel**, asociadas a la función objetivo $f(x, y) = 4x + 3y$ (figura 4).
- La solución óptima se obtiene en el punto de la región factible que hace máximo k. En nuestro caso es el vértice C(20, 60), para el que k = 260.

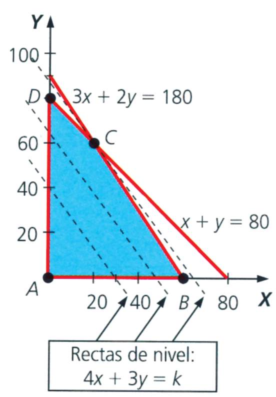


Figura 4.

En la práctica se representa una de las rectas de nivel (en el gráfico son las rectas punteadas), y se desplaza paralelamente a sí misma hasta encontrar el vértice (solución única) o un lado (infinitas soluciones) de la región factible, que cumpla la condición de máximo o mínimo. Cuando la solución es única, es la solución óptima.

El método gráfico se conoce también como **método de las rectas de nivel**.

BECU_M1_B3_P126_143.indd 132 4/22/14 11:57 AM

Tipos de soluciones

Destreza con criterio de desempeño:

- Interpretar la **solución** de un problema de programación lineal. **(C, M)**
- Graficar el **conjunto solución** de cada desigualdad. **(P)**

Conocimientos previos

Explica con ejemplos los tipos de soluciones que se presentan en un sistema de ecuaciones lineales.

Investiga

Solución única y múltiple

Si el conjunto de restricciones de un problema de programación lineal es:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

a. ¿Cómo es la solución con la función objetivo siguiente?

$f(x, y) = y$

b. ¿Cómo es la solución con la función objetivo?

$f(x, y) = x + 2y$

Los problemas de programación lineal con dos variables pueden presentar distintos tipos de soluciones.

SOLUCIÓN ÚNICA

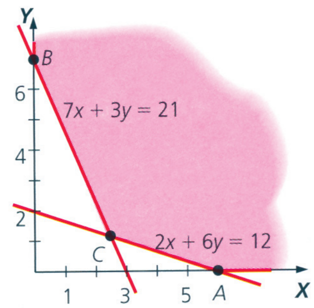
Un ganadero utiliza un balanceado que tiene una composición mínima de 12 unidades de una sustancia P y 21 unidades de una sustancia Q. En el mercado solo encuentra dos tipos: uno con 2 unidades de P y 7 de Q, cuyo precio es de \$ 1,50, y otro con 6 unidades de P y 3 de Q, cuyo precio es de \$ 2,50. ¿Qué cantidad ha de comprar de cada uno, de modo que el costo sea mínimo?

- Función objetivo

Minimizar $f(x, y) = 1{,}50x + 2{,}50y$

- Conjunto de restricciones:

$$\begin{cases} 2x + 6y \geq 12 \\ 7x + 3y \geq 21 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{cases}$$



Tiene por región factible la zona de color.

Si hallamos los valores de la función objetivo en cada uno de los vértices A, B y C:

$f(6, 0) = 1{,}50 \cdot 6 + 2{,}50 \cdot 0 = 9{,}00$

$f(0, 7) = 1{,}50 \cdot 0 + 2{,}50 \cdot 7 = 17{,}50$

$f(5/2, 7/6) = 1{,}50 \cdot \frac{5}{2} + 2{,}50 \cdot \frac{7}{6} = 6{,}66$

La solución es única, solución óptima, y corresponde al vértice para el que la función objetivo tomó el valor mínimo. En este caso es el vértice $C(5/2, 7/6)$. Ha de comprar 5/2 unidades de P y 7/6 de Q para que el costo sea mínimo.

SOLUCIÓN MÚLTIPLE

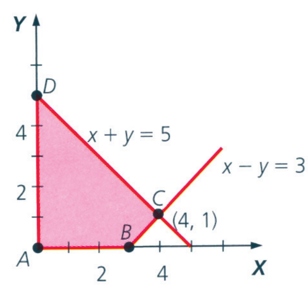
Para un problema en donde:

- Función objetivo:

Maximizar $f(x, y) = x + y$

- Conjunto de restricciones:

$$\begin{cases} x - y \leq 5 \\ x - y \leq 3 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{cases}$$



Tiene por región factible la zona de color.

Los valores de la función objetivo en cada uno de los vértices son:

$f(0, 0) = 0 + 0 = 0$ $\quad$ $f(3, 0) = 3 + 0 = 3$

$f(4, 1) = 4 + 1 = 5$ $\quad$ $f(0, 5) = 0 + 5 = 5$

BECU_M1_B3_P126_143.indd 133 4/22/14 11:57 AM

La función objetivo alcanza el valor máximo en los vértices C y D y, por tanto, en todos los puntos del segmento $\overline{CD}$.

Hay infinitas soluciones, solución múltiple, que corresponden a los puntos del segmento situado entre dos vértices de la región factible.

En estos casos, la función objetivo es paralela a una de las restricciones.

Investiga

Solución no acotada o no factible

En un problema de programación lineal, si la función objetivo es maximizar o minimizar:

$f(x, y) = x + y$

añade una nueva restricción al siguiente conjunto:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Para que la solución sea:

a. No factible.

b. No acotada.

SOLUCIÓN NO ACOTADA

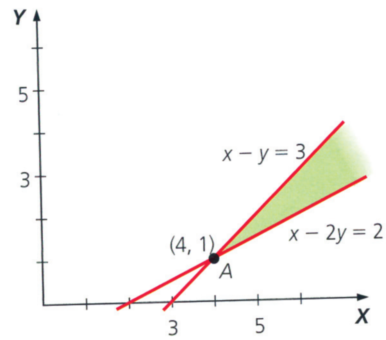
Para un problema de programación lineal en donde:

- Función objetivo:

Maximizar $f(x, y) = x + y$

- Conjunto de restricciones:

$$\begin{cases} x - y \geq 3 \\ x - 2y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Tiene por región factible la zona coloreada que aparece en la figura, que es una región no acotada.

La función objetivo crece indefinidamente para valores crecientes de x e y.

En este caso, no existe un valor extremo para la función objetivo, por lo que puede decirse que el problema carece de solución.

Para que suceda esta situación la región factible debe estar no acotada.

Tarea

Determina la solución de los siguientes problemas de programación lineal.

a. Función objetivo:

Maximizar $f(x, y) = x - 2y$

- Conjunto de restricciones:

$$\begin{cases} x + y \geq 0 \\ x - y \geq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b. Función objetivo:

Maximizar $f(x, y) = x + 2y$

- Conjunto de restricciones:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 6 \\ x - 2y \geq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN NO FACTIBLE

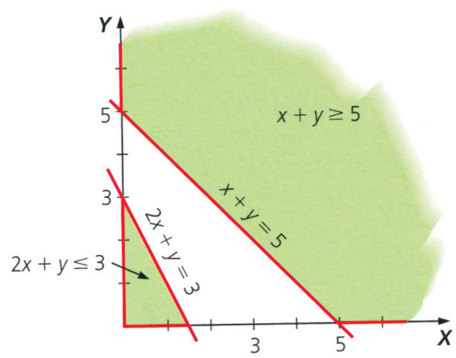
Para el problema en el que tengamos

- Función objetivo:

Maximizar $f(x, y) = 3x + 2y$

- Conjunto de restricciones:

$$\begin{cases} x + y \geq 5 \\ 2x + y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

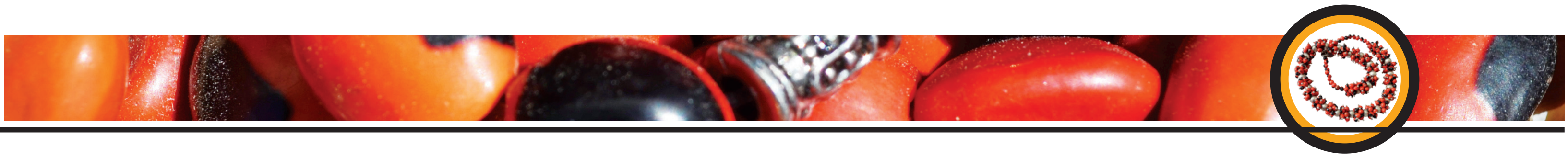


No existe la región factible ya que las zonas coloreadas que aparecen en la figura son únicamente soluciones de alguna de las inecuaciones.

Por tanto, el conjunto de soluciones del sistema de desigualdades no determina ninguna región factible.

Este tipo de problemas **carece de solución**.

BECU_M1_B3_P126_143.indd 134 4/22/14 11:57 AM



Ejemplo

En un taller de carpintería se fabrican mesas de cocina de aglomerado y de madera.

Las de aglomerado se venden a \$ 210 y las de madera a \$ 280. La maquinaria del taller condiciona la producción, por lo que no se pueden fabricar al día más de 40 mesas de aglomerado, ni más de 30 de madera, ni tampoco más de 50 mesas en total. Si se vende todo lo que se fabrica, ¿cuántas mesas de cada tipo les convendría fabricar para ingresar por su venta la máxima cantidad de dinero posible?

Solución

Sean:

x = número de mesas de aglomerado
y = números de mesas de madera

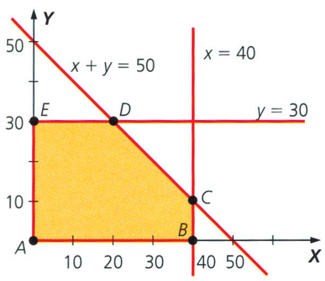
De la lectura del enunciado se deduce las siguientes inecuaciones.

$$\begin{cases} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x \leq 40;\ y \leq 30 \\ x + y \leq 50 \end{cases}$$

La función objetivo que proporciona el valor de la producción, que hay qu maximizar, viene dada por:

$f(x, y) = 210x + 280y$

Representando el área delimitado por las inecuaciones anteriores y calculando los vértices, se obtiene:



$A(0, 0)$, $B(40, 0)$, $C(40, 10)$, $D(20, 30)$, $E(0, 30)$

En A: $f(0, 0) = 210 \cdot 0 + 280 \cdot 0 = 0$

En B: $f(40, 0) = 210 \cdot 40 + 280 \cdot 0 = 8\,400$

En C: $f(40, 10) = 210 \cdot 40 + 280 \cdot 10 = 11\,200$

En D: $f(20, 30) = 210 \cdot 20 + 280 \cdot 30 = 12\,600$

En E: $f(0, 30) = 210 \cdot 0 + 280 \cdot 30 = 8\,400$

La función objetivo se maximiza en el vértice D; por lo tanto, hay que fabricar 20 mesas de aglomerado y 30 de madera.

Actividades

Resuelve problemas de programación lineal.

1. Determina la solución de los siguientes problemas de programación lineal:

a. Función objetivo:

Minimizar $f(x, y) = x - 2y$

Conjunto de restricciones:

$$\begin{cases} 3x + y \geq 0 \\ x - 2y \geq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b. Función objetivo:

Minimizar $f(x, y) = 2x + y$

Conjunto de restricciones:

$$\begin{cases} x + 2y \geq 4 \\ x - y \geq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

BECU_M1_B3_P126_143.indd 135 4/22/14 11:57 AM

SOLUCIÓN DEGENERADA

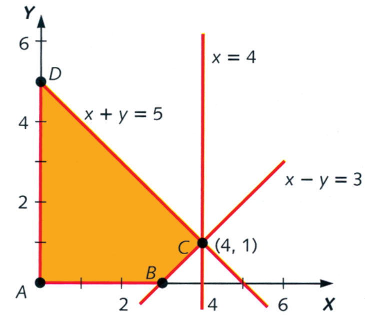
Un problema de programación lineal en el que:

- Función objetivo:

Maximizar $f(x, y) = x + 2y$

- Conjunto de restricciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x - y \leq 3 \\ x \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



tiene por región factible la zona coloreada que aparece en la figura.

El punto $C(4, 1)$, en donde coinciden tres rectas de las que constituyen los límites de la región factible, es un **punto degenerado**.

Los valores de la función objetivo en cada uno de los vértices son:

$f(0, 0) = 2 \cdot 0 + 0 = 0$ $\quad$ $f(3, 0) = 2 \cdot 3 + 0 = 6$

$f(4, 1) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$ $\quad$ $f(0, 5) = 2 \cdot 0 + 5 = 5$

El punto (4, 1) corresponde al vértice para el que la función objetivo toma el valor máximo y es un punto degenerado.

Cuando la solución óptima de un problema se alcanza en un punto degenerado, la solución se denomina **solución degenerada**.

Investiga

Solución degenerada

Si el conjunto de restricciones de un problema de programación lineal es:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ x - y \leq 3 \\ x \geq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

¿cómo es la solución si la función objetivo es la siguiente?

Maximizar $f(x, y) = y$

Actividades

Resuelve problemas de programación lineal.

1. Determina la solución de los siguientes problemas de programación lineal:

a. Función objetivo:

Maximizar $f(x, y) = x - 2y$

Conjunto de restricciones:

$$\begin{cases} x + y \geq 0 \\ x - y \geq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b. Función objetivo:

Maximizar $f(x, y) = x + y$

Conjunto de restricciones:

$$\begin{cases} x + 2y \geq 0 \\ x - 2y \geq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

2. Determina la solución de los siguientes problemas de programación lineal:

a. Función objetivo:

Maximizar $f(x, y) = 2x + y$

Conjunto de restricciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ 2x + y \geq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b. Función objetivo:

Maximizar $f(x, y) = x + 2y$

Conjunto de restricciones:

$$\begin{cases} x + y \geq 5 \\ x \leq y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Problema de la producción

Destreza con criterio de desempeño:
Resolver un **problema de optimización** mediante la evaluación de la función objetivo en los vértices del conjunto factible. **(P, C)**

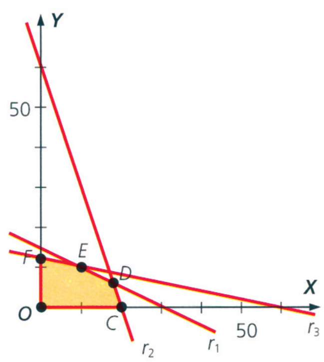
Los problemas de la producción consisten en que: una fábrica o empresa produce diversos artículos cuya producción está limitada o condicionada por ciertas circunstancias y desea averiguar cuál debe ser la producción que tiene que realizar para obtener beneficios máximos en la venta de los citados artículos, o bien, costos mínimos en su producción.

	M_1	M_2	M_3
A	2	3	1
B	4	1	5

Ejemplo

Una empresa fabrica y vende dos artículos A y B. En su producción se utilizan tres tipos de máquinas M_1, M_2 y M_3. El cuadro del margen indica el tiempo, en horas, que necesita cada máquina para fabricar cada uno de los modelos.

Si por la venta de cada uno de los artículos del tipo A obtiene una ganancia de \$ 100, y por cada uno del B, una ganancia de \$ 150, ¿cuántos artículos se deben fabricar de cada tipo para maximizar la ganancia?



Solución

Para resolver este problema: Se determina la función objetivo y el conjunto de restricciones.

Si se producen x artículos del tipo A e y del tipo B, la función objetivo es:
$f(x, y) = 100x + 150y$

y el conjunto de restricciones viene dado por:

$$\begin{cases} 2x + 4y \leq 60 \\ 3x + y \leq 60 \\ x + 5y \geq 60 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{cases}$$

- Se halla la región factible que corresponde al conjunto de restricciones. Es decir, se resuelve el sistema de inecuaciones lineales formado por las restricciones del problema.

  Se representa gráficamente el conjunto de restricciones para determinar la región factible, formada por el polígono de vértices $O(0, 0)$, $C(20, 0)$, $D(18, 6)$, intersección de las rectas r_1: $2x + 4y = 60$ y r_2: $3x + y = 60$; $E(10, 10)$ intersección de las rectas r_1 y r_3: $x + 5y = 60$ y $F(0, 12)$.

- Se calcula el punto o los puntos, si existen, donde la función objetivo alcanza el máximo.

  Se halla los valores de la función objetivo $f(x, y) = 100x + 150y$ en cada uno de los vértices:

  $f(O) = 100 \cdot 0 + 150 \cdot 0 = 0$ $\quad$ $f(E) = 100 \cdot 10 + 150 \cdot 10 = 2\,500$
  $f(C) = 100 \cdot 20 + 150 \cdot 0 = 1\,200$ $\quad$ $f(F) = 100 \cdot 0 + 150 \cdot 12 = 1\,800$
  $f(D) = 100 \cdot 18 + 150 \cdot 6 = 2\,700$

La ganancia máxima, \$ 2 700, se obtiene en el vértice D cuando se producen 18 artículos del tipo A y 6 del tipo B.

Proceso

Proceso de resolución

1. Se determina la función objetivo y el conjunto de restricciones.
2. Se halla la región factible que corresponde al conjunto de restricciones.
3. Se calcula los puntos, si existen, de la región factible en donde la función objetivo alcanza el máximo o el mínimo.

BECU_M1_B3_P126_143.indd 137 4/22/14 11:57 AM

Problemas de la dieta

	A	B	C
P_1	3	4	5
P_2	4	2	6

El problema de la dieta consiste en determinar la cantidad de cada uno de los alimentos que constituyen la dieta diaria de un colectivo (personas o animales) de forma que el costo sea mínimo.

Ejemplo

Un granjero tiene que suministrar al día un mínimo de 30 mg de vitamina A, 20 mg de vitamina B y 30 mg de vitamina C por kilogramo de balanceado a sus animales. Dispone de dos compuestos de balanceado P_1 y P_2, cuyos contenidos en miligramos de vitaminas A, B y C por kilogramo de balanceado vienen dados en la tabla.

El kilogramo de balanceado P_1 vale \$ 1 y el de P_2 \$ 1,20.

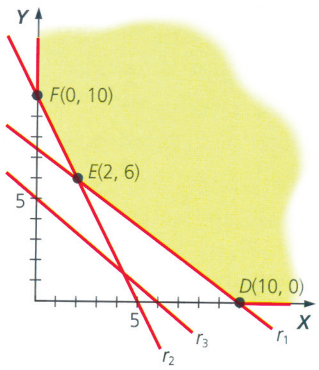
¿Cuántos kilogramos de cada tipo de balanceado debe mezclar para que el costo sea mínimo?

Solución

- Se determina la función objetivo y el conjunto de restricciones.
- Sean, x = «número de kilogramos del compuesto P_1»; y = «número de kilogramos del compuesto P_2». La función objetivo es: $f(x, y) = x + 1{,}20y$.

  Del enunciado se deducen las siguientes restricciones o inecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 4y \leq 30 \\ 4x + 2y \leq 20 \\ 5x + 6y \geq 30 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



- Se halla la región factible.

  Para ello, se representa las rectas:

$$r_1: 3x + 4y \leq 30$$
$$r_2: 4x + 2y \leq 20$$
$$r_3: 5x + 6y \geq 30$$
$$r_4: x = 0$$
$$r_5: y = 0$$

- Se calcula los puntos que minimizan la función objetivo.

  El valor buscado debe encontrarse en alguno de los tres vértices de la región factible: $D(10, 0)$; $E(2, 6)$, obtenido de la intersección de las rectas r_1 y r_2, y $F(0, 10)$.

  Sustituyendo las coordenadas de los vértices de la región factible en la función objetivo $f(x, y) = x + 1{,}20y$, se obtiene:

  $f(D) = 1 \cdot 10 + 1{,}20 \cdot 0 = 10$ $\qquad f(F) = 1 \cdot 0 + 1{,}20 \cdot 10 = 12$

  $f(E) = 1 \cdot 2 + 1{,}20 \cdot 6 = 9{,}20$

  El costo mínimo se obtiene en el vértice $E(2, 6)$, por lo que el granjero tiene que mezclar 2 kg de balanceado del tipo A con 6 kg del tipo B.

Tarea

Se necesita una dieta que proporcione un mínimo de 2 400 calorías y 330 unidades de proteínas por día. Para preparar la dieta se requieren dos productos P_1 y P_2. El producto P_1 cuesta \$ 50 /kg, contiene 40 calorías y 3 unidades de proteínas. El producto P_2 cuesta \$40 /kg, contiene 30 calorías y 6 unidades de proteínas. Determina la cantidad de cada tipo de producto que debe mezclarse para que el costo sea mínimo.

BECU_M1_B3_P126_143.indd 138 4/22/14 11:57 AM

Problema de transporte

Toma en cuenta

Técnicas de transporte

Las técnicas de transporte tratan de encontrar los caminos para trasladar mercancía, de varias plantas (orígenes) a diferentes centros de almacenamiento (destinos), de manera que se minimice el costo de transporte.

Para que un problema pueda ser resuelto por el método del transporte debe cumplir:

- La función objetivo y las restricciones deben ser lineales.
- El total de unidades que salen en el origen debe ser igual al total de unidades que entran en destino.

Trabajo individual

Almacén	A	B
Almacén 1	5	8
Almacén 2	10	15
Almacén 3	20	10

Dos almacenes *A* y *B* distribuyen fruta a tres mercados. El almacén *A* dispone de 15 toneladas de fruta diarias y el *B* de 20 toneladas, que reparten en su totalidad. Los tres mercados necesitan diariamente 12, 13 y 10 toneladas de fruta, respectivamente. Si el coste del transporte desde cada almacén a cada mercado está representado en la tabla del margen, ¿cómo planificarías el transporte de forma que el costo sea mínimo?

Ejemplo

Dos fábricas, F_1 y F_2, producen 40 y 50 unidades respectivamente de un determinado producto. Deben abastecer a tres centros de consumo C_1, C_2 y C_3, que necesitan 20, 45 y 25 unidades, respectivamente. El costo del transporte de cada fábrica a cada centro de consumo, en dólares por unidad, viene dado en la siguiente tabla:

	C_1	C_2	C_3
F_1	5	10	15
F_2	10	7	14

¿Cómo han de distribuirse las unidades del producto para que el transporte sea lo más económico posible?

Solución

- Se construye la siguiente tabla de distribución, siendo x e y las cantidades de unidades que se transportan desde la fábrica F_1 a los centros C_1 y C_2, respectivamente.

	C_1 (20 u)	C_2 (45 u)	C_3 (25 u)
F_1 (40 u)	x	y	$40 - (x + y)$
F_2 (50 u)	$20 - x$	$45 - x$	$25 - [40 - (x + y)] = (x + y) - 15$

Como estas cantidades tienen que ser positivas, las restricciones son:

$x \geq 0;\ 20 - x \geq 0;\ y \geq 0;\ 45 - y \geq 0;\ 40 - (x + y) \geq 0;\ (x + y) - 15 \geq 0$

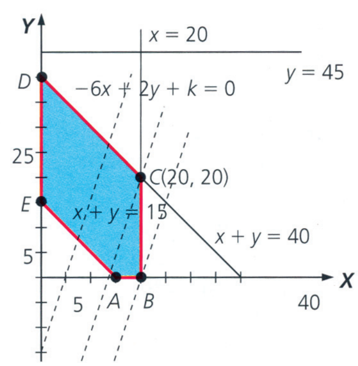
- Se obtiene la función de coste del transporte T(x, y) sumando los productos de cada cantidad de unidades transportadas por sus respectivos precios de transporte:

$T(x, y) = 5x + 10y + 15[40 - (x + y)] + 10(20 - x) + 7(45 - y) + 1$
$4[(x + y) - 15 = -6x + 2y + 905$

Por tanto, el problema dado queda reducido a minimizar la función de coste $T(x, y) = -6x + 2y + 905$, teniendo en cuenta las restricciones anteriores.

Utilizando el **método gráfico**:

La función T se minimiza en el punto $B(20, 0)$. La solución es $x = 20$; $y = 0$, por lo que las cantidades que se deben transportar son:



	C_1	C_2	C_3
F_1	20	0	20
F_2	0	45	5

Actividades

Determina el área solución de un sistema de inecuaciones.

1. Resuelve estos sistemas de inecuaciones de dos inecuaciones y dos incógnitas.

a. $\begin{cases} -2x + y \leq 2 \\ 2x - 3y \geq -2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} -x + 2y \leq 4 \\ 2x - 4y \leq 1 \end{cases}$

2. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x + y \leq 1 \\ -2x - y \leq 1 \\ x \leq 4 \\ y \geq -4 \end{cases}$$

Representa gráficamente la región factible.

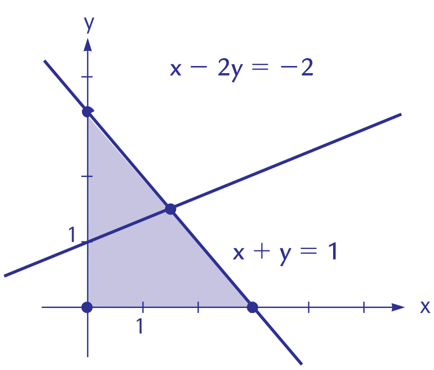
3. Dibuja la región factible que representan estas restricciones.

a. $\begin{cases} 3x - y \geq 1 \\ 2x - y < 6 \\ x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + y \geq 1 \\ -x - y > 6 \\ x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$

Representa gráficamente la región factible.

4. Determina los vértices de la siguiente región.



Minimiza funciones.

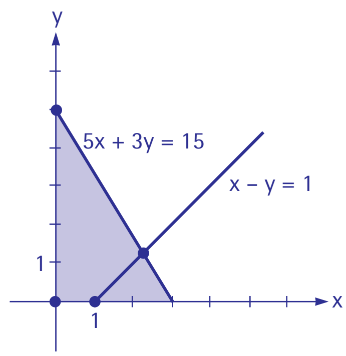
5. Calcula los puntos de la región donde se alcanza el valor mínimo de estas funciones.

$f(x, y) = x + 4y$

$f(x, y) = x + y + 4$

Maximiza funciones.

6. Determina la solución óptima que maximiza la función $f(x, y) = 2x - y$ en esta región factible.



Resuelve problemas de programación lineal.

7. Resuelve el siguiente problema de programación lineal.

Maximizar $f(x, y) = -x + 3y$

Sujeto a $\begin{cases} x + 5y \geq 25 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

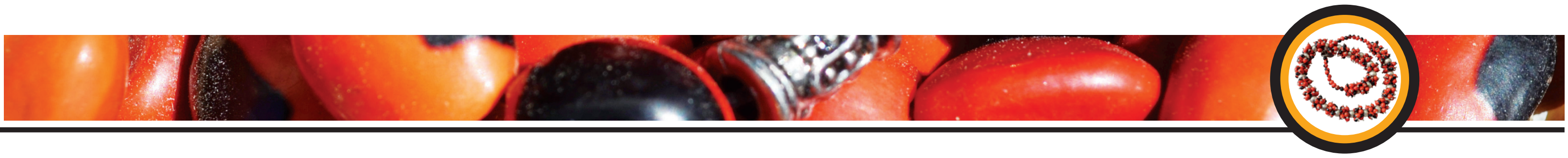
8. Resuelve el siguiente problema de programación lineal.

Maximizar $f(x, y) = 3x - 2y$

Sujeto a $\begin{cases} -x + 3y \geq 12 \\ 2x + y \geq 8 \\ x - y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

9. Se tiene como máximo 120 unidades de dos productos, *A* y *B*. Hay 65 unidades de *A*, con unas ganancias de \$ 4 por unidad, y 55 de *B*, con \$ 6,50 por unidad. Determina las cantidades que se venden para maximizar las ganancias.

BECU_M1_B3_P126_143.indd 140 4/22/14 11:57 AM



10. Se tiene mesas de tipo A con 2 m^2 de madera, 1 hora de trabajo y una ganancia de \$ 80 cada una, y de tipo B con 1 m^2 de madera, 3 horas de trabajo y \$ 50 de beneficio. Si hay 600 m^2 de madera y un máximo de 900 horas, determina cómo obtener la máxima ganancia.

11. Se fabrican dos tipos de aparatos *A* y *B* en los talleres *X* y *Y*. En cada uno de los talleres se trabajan 100 horas a la semana. Cada aparato *A* requiere 3 horas del taller X y 1 hora de *Y*, y cada aparato *B*, 1 y 2 horas, respectivamente. Cada aparato *A* se vende a \$ 100 y cada aparato *B* a \$ 150. Calcula, gráficamente, el número de aparatos de cada tipo que hay que producir para que la facturación sea máxima.

12. Una fábrica de conserva tiene 800 kg de guisantes para conservar en dos tipos de latas. La lata pequeña contiene 200 g y aporta una ganancia de 10 centavos por lata. La lata grande contiene 500 g y una ganancia de 30 centavos. Si en el almacén solo se dispone de 2 000 latas de tamaño pequeño y 1 000 grandes, determina la cantidad de latas de cada tamaño que se tiene que producir para maximizar la ganancia.

13. Esta es la composición de los artículos, *A* y *B*, *AB*, por los elementos M_1, M_2 y M_3.

	A	***B***
M_1	2	1
M_2	3	2
M_3	1	2

Disponemos de 45 unidades de M_1, 71 de M_2 y 25 de M_3, y los costos de traslado de *A* y *B* son \$ 50 y \$ 60, respectivamente. Determina los artículos que hay que elaborar para que los costes de traslado sean mínimos.

14. María quiere comenzar a vender collares y pulseras que hará ella misma con bisutería. Los materiales necesarios para una pulsera cuestan \$ 2; los de un collar, \$ 3 y María puede invertir hasta \$ 40.

Ella calcula que se demorará 2 horas en terminar una pulsera y 5 horas en terminar un collar y está dispuesta a dedicar, como máximo, 60 horas al proyecto.

Si venderá cada pulsera en \$ 5 y cada collar en \$ 8 ¿cuántas prendas de cada tipo debe realizar para maximizar sus ganancias? ¿Cuál es la ganancia total que obtendrá María con esta pequeña empresa? (Nota: Recuerda que la ganancia es igual a los ingresos menos los gastos).

15. Se tienen 12 kilogramos de frutillas y 14 kilogramos de azúcar, con los que se prepararán dos recetas de mermelada que será envasada en frascos para regalar. La primera receta requiere medio kilogramo de frutillas y 1 kilogramo de azúcar por frasco, mientras que el segundo tipo de mermelada usa 750 gramos de frutillas y 500 gramos de azúcar. Determina cuántos frascos con cada tipo de mermelada deben prepararse para obtener la mayor cantidad de regalos posible.

16. Una fábrica de delantales tiene dos proveedores de telas. Al primero de ellos le encarga 50 000 metros de género y al segundo, 40 000 metros.

Las telas serán almacenadas en tres pequeñas bodegas cuyas capacidades máximas son: 20 000 metros, 30 000 metros y 40 000 metros respectivamente.

El precio, en dólares, de llevar un rollo de 200 metros de tela desde los lugares de compra hasta las bodegas está indicado en la tabla siguiente.

	Bodega 1	Bodega 2	Bodega 3
Proveedor 1	5	14	8
Proveedor 2	7	11	6

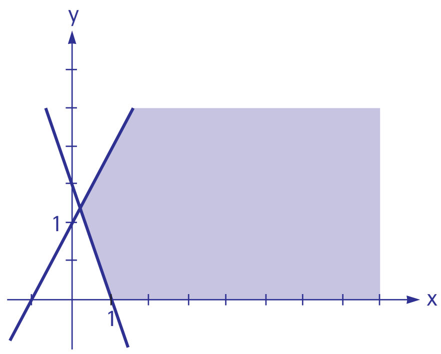
¿Cómo debe planificarse el almacenamiento para que los gastos de transporte sean mínimos?

BECU_M1_B3_P126_143.indd 141 4/22/14 11:57 AM

Evaluación

- Escribe las restricciones de una región factible.

2 puntos **1.** Determina las restricciones que representan a la siguiente región factible.



- Identifica la función objetivo y escribe una expresión lineal que la modele a un problema de optimización.

2 puntos **2.** Se dispone de 90 000 m^2 para construir parcelas de 3 000 y 5 000 m^2, *A* y *B*. Las ganacias son de \$ 10 000 por cada parcela A y de \$ 20 000 por *B*. El número máximo de parcelas *B* es de 120, y el de parcelas *A*, 150. Determina la función objetivo y cuántas parcelas de cada tipo se necesita para obtener beneficios máximos.

- Determina el conjunto factible de problemas de optimización lineal.

2 puntos **3.** Resuelve el problema de programación lineal:

Maximizar $f(x, y) = x + y$

Sujeto a
$$\begin{cases} x - 2y \leq 6 \\ 2x + 3y \geq -6 \\ x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

- Resuelve e interpreta la solución de problemas de optimización.

2 puntos **4.** Determina la solución de los siguientes problemas.

a. Se va a invertir en dos productos financieros *A* y *B*. La inversión en *B* será, al menos, de \$ 3 000 y no se invertirá en *A* más del doble que en *B*. El producto A proporciona un beneficio del 10 % y *B* del 5 %. Si se dispone de un máximo de \$ 12 000, ¿cuánto se debe invertir en cada producto para maximizar el beneficio?

b. Un agricultor tiene dos plantaciones de uvas. La primera produjo 50 toneladas de uvas; y la segunda, 80 toneladas. Tres fábricas de vino de la zona le comprarán 35, 50 y 45 toneladas, respectivamente. Los costos de transporte, por tonelada de uva, de cada plantación es en cientos de dólares (ver cuadro 1). Determina la distribución de transporte que signifique un menor gasto para el agricultor y el monto de dinero que debe destinar a transporte

cuadro 1	Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3
Plantación 1	6	6	8
Plantación 2	7	4	2

2 puntos **5.** Determina el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x, y) = 480x + 420y - 250$ dentro de la región definida por el sistema

$$\begin{cases} 6x + 6y \leq 108 \\ 128 - 4y \geq 8x \\ x \geq 0 \\ 3x + 9y \leq 108 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Coevaluación

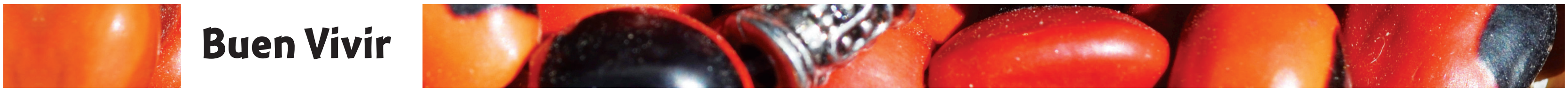
Resuelvan en parejas el problema, y luego discutan la respuesta obtenida en clase.

Para abonar una parcela de huerta se necesitan por lo menos 8 kg de nitrógeno y 12 kg de fósforo. Se dispone de un producto A cuyo precio es 30 ctvs./kg y que contiene un 10% de nitrógeno y un 30% de fósforo. Existe en el mercado otro producto B que contiene un 20% de nitrógeno y otro 20% de fósforo, y cuyo precio es 40 ctvs./kg. ¿Qué cantidades se deben tomar de A y B para abonar la parcela con el menor gasto posible.

Autoevaluación (Metacognición)

Mediante un ejemplo explica cómo se aplica el método gráfico en la solución de problemas de programación lineal.

- **Indicador esencial de evaluación**



Salud

Ingestión diaria recomendada

IDR son las siglas correspondientes a «ingestión diaria recomendada».Esta indica las cantidades de cada nutriente capaces de satisfacer las necesidades diarias de cualquier persona incluyendo a los que necesitan una dosis por encima de la media.

IDR no se aplica a los individuos, solo se aplica a grupos de población. Se utiliza para planificar y procurar suministros de alimentos a grupos de población, interpretar informes sobre la composición de los alimentos, establecer criterios en programas de asistencia pública, desarrollar programas educativos sobre nutrición y establecer pautas relacionadas con la clasificación nutritiva de los alimentos.

Aunque la ingestión diaria recomendada se calcula para un día, no es preciso preocuparse de consumir los nutrientes diariamente porque nuestro organismo es capaz de almacenar una reserva razonable de ellos.

Actividades

Para complementar la dieta de un niño de 4 – 6 años, se mezclan dos tipos de alimento preparado, P_1 y P_2, con las siguientes recomendaciones:

- No tomar más de 200 g de mezcla ni menos de 100 g.
- La cantidad de P_1 debe ser igual o superior a la de P_2.
- No debe incluir más de 150 g de P_1.
- 100 g de P_1 contienen 30 mg de vitaminas y producen 500 calorías, y 100 g de P_2 contienen 20 mg de vitaminas y producen 300 calorías:

a. ¿Cuántos gramos de cada producto deben mezclarse para obtener el preparado más rico en vitaminas?

b. ¿Y el más pobre en calorías?

Investiga

- Con qué otros nombres se conocen a las vitaminas B_1, B_2 y C? Indica algunos alimentos donde se encuentren.
- Nia = niacina. ¿Qué es la niacina? ¿En qué alimentos se encuentran?
- Fe = hierro. ¿Por qué es necesario consumir hierro en la alimentación? ¿En qué alimentos se encuentran?

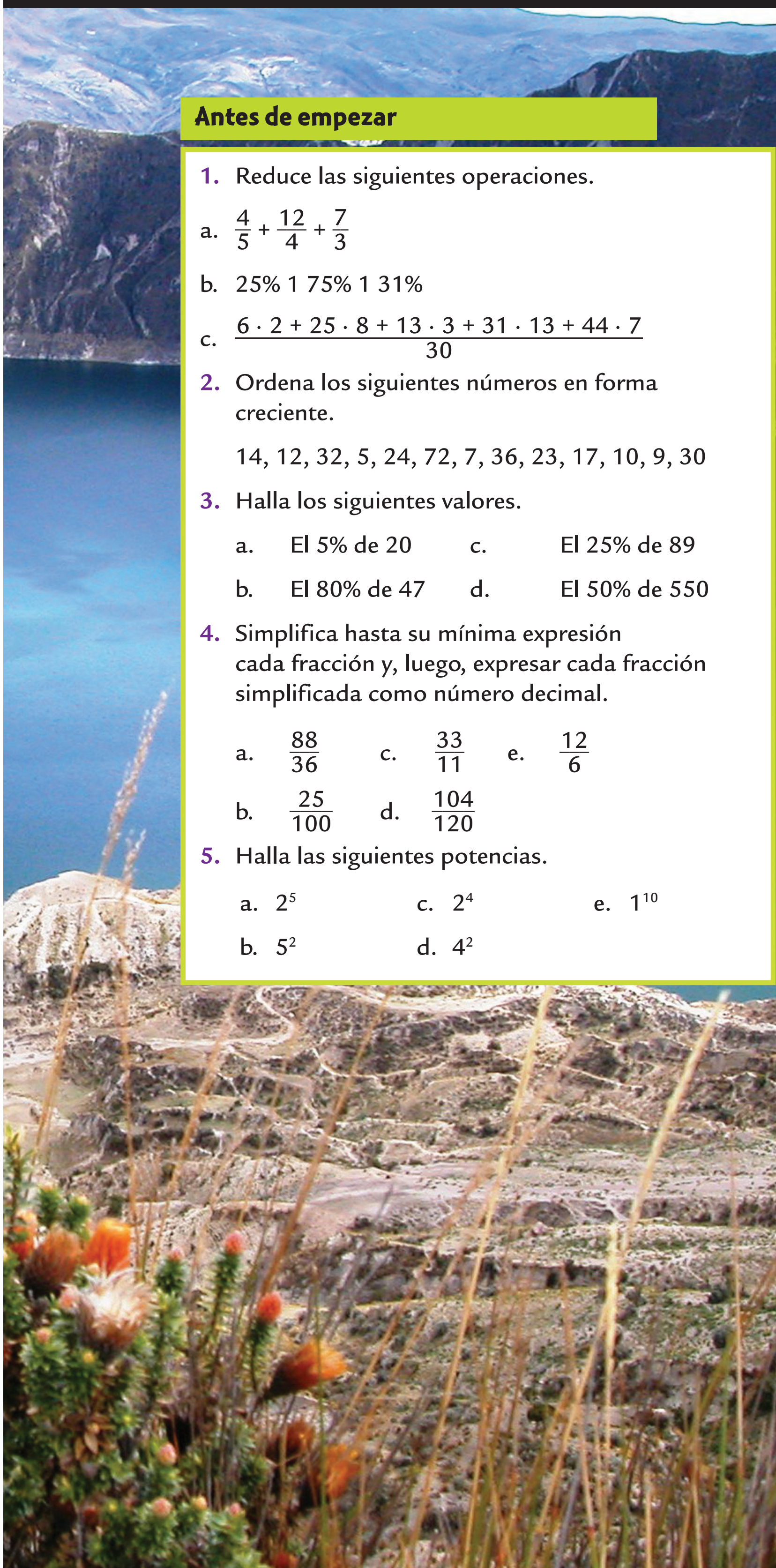
BECU_M1_B3_P126_143.indd 143 4/22/14 11:57 AM

Bloque 4

Unidad 5

Estadística

BECU_M1_B4_P144_173.indd 144 4/22/14 2:02 PM



Antes de empezar

1. Reduce las siguientes operaciones.

a. $\frac{4}{5} + \frac{12}{4} + \frac{7}{3}$

b. 25% 1 75% 1 31%

c. $\frac{6 \cdot 2 + 25 \cdot 8 + 13 \cdot 3 + 31 \cdot 13 + 44 \cdot 7}{30}$

2. Ordena los siguientes números en forma creciente.

   14, 12, 32, 5, 24, 72, 7, 36, 23, 17, 10, 9, 30

3. Halla los siguientes valores.

   a. El 5% de 20 c. El 25% de 89

   b. El 80% de 47 d. El 50% de 550

4. Simplifica hasta su mínima expresión cada fracción y, luego, expresar cada fracción simplificada como número decimal.

   a. $\frac{88}{36}$ c. $\frac{33}{11}$ e. $\frac{12}{6}$

   b. $\frac{25}{100}$ d. $\frac{104}{120}$

5. Halla las siguientes potencias.

   a. 2^5 c. 2^4 e. 1^{10}

   b. 5^2 d. 4^2

Status, estado, estadística

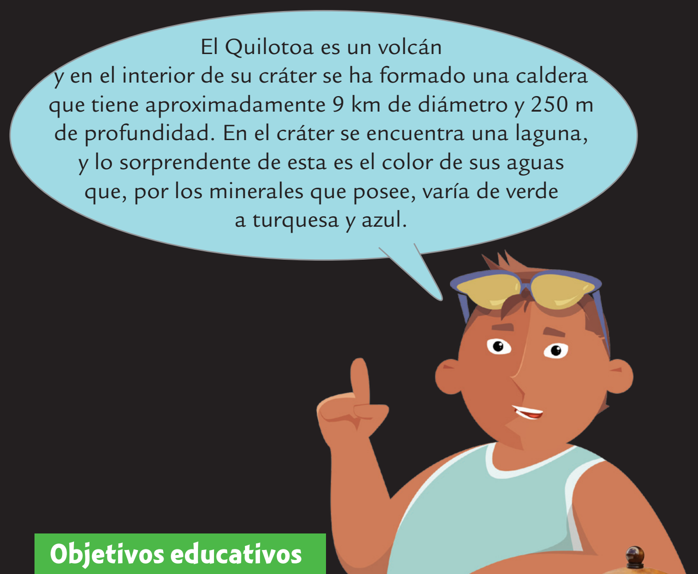
El origen de la estadística se remonta a los comienzos de la Historia. En los antiguos monumentos egipcios se han encontrado documentos según los cuales, a partir del año 3050 a. de C., se llevaban cuentas de los movimientos de población y continuamente hacían censos, bajo la dirección del faraón.

En la Biblia, por ejemplo, en el libro de los Números, se encuentra registrado el censo que realizó Moisés después de la salida de Egipto.

En China, Confucio en uno de sus clásicos Shu-King escrito hacia el año 550 a. de C., narra cómo el rey Yao, ordenó hacer una estadística agrícola, industrial y comercial.

Con Carlo Magno, en Francia, regresaron las estadísticas a Europa, teniendo un carácter netamente financiero y administrativo. En Inglaterra Guillermo el Conquistador mandó a realizar una especie de catastro, que constituyó un documento estadístico administrativo.

A mediados del siglo XVII, gracias a Vito Seckendorff y, sobre todo, a German Conring la estadística se empezó a considerar como la descripción de los hechos notables de un estado. Conring perfeccionó y mejoró notablemente la nueva tendencia, sistematizando los conocimientos y los datos. El mejor de sus seguidores fue Godofredo Achenwall, quien consolidó definitivamente los postulados de esta nueva ciencia y le dio el nombre de *estadística*, palabra que etimológicamente se deriva de la palabra *status*, que significa 'estado' o 'situación'.



Objetivos educativos

Recolectar, utilizar, representar e interpretar colecciones de datos mediante herramientas de la estadística descriptiva.

Compotera de coco y mate.
Artesanía elaborada en Esmeraldas.

BECU_M1_B4_P144_173.indd 145 4/22/14 11:58 AM

Estadística descriptiva

Destrezas con criterio de desempeño:

- Identificar **conceptos básicos** que se utilizan en la estadística descriptiva. **(C)**
- Comprender situaciones de la vida cotidiana a través de la interpretación de **datos estadísticos**. **(M)**

Conocimientos previos

Indica a qué tipos de variables estadísticas corresponden los siguientes ejemplos.

- Estatura
- Peso
- Número de hijos
- Marcas de automóviles

Glosario

estadística. Derivada del latín *status*, que significa 'estado' o 'situación'.

Toma en cuenta

Una muestra se toma cuando la población es muy grande y no es posible realizar un estudio con todos los integrantes de esta. Es importante que la muestra se escoja correctamente, pues de lo contrario, las conclusiones obtenidas no serán representativas de la población.

La estadística consiste en un conjunto de técnicas y procedimientos que permiten recoger datos, presentarlos, ordenarlos y analizarlos, de manera que, a partir de ellos, se puedan inferir conclusiones.

POBLACIÓN Y MUESTRA

La **población** es un conjunto de objetos o de individuos que se desea estudiar y que, a su vez, presentan una característica que interesa medir.

Generalmente, el tamaño de la población se denota con la letra **N**.

Se llama **muestra** a un subconjunto representativo de la población que se desea estudiar. Generalmente, el tamaño de la muestra se denota con la letra **n**.

VARIABLES ESTADÍSTICAS

Una **variable** estadística corresponde a una o varias características que se miden en la muestra. Las variables pueden ser **cuantitativas** o **cualitativas**.

Variables cualitativas

Son aquellas que no se pueden medir numéricamente y están relacionadas con características. Los valores que toma este tipo de variables son etiquetas que representan categorías o cualidades.

Una variable cualitativa puede ser **nominal** u **ordinal**.

Las **variables nominales** corresponden a aquellas en las cuales no existe ninguna ordenación; por ejemplo, el estado civil, el sexo de un individuo, etc.

Las **variables ordinales** son aquellas en las cuales existe un orden intuitivo; por ejemplo, nivel educacional (básico, medio, superior), situación económica (baja, media, alta), etc.

Variables cuantitativas

Son aquellas que se pueden medir numéricamente, es decir, los valores que toma este tipo de variables son números.

Una variable cuantitativa puede ser **discreta** o **continua**.

Las **variables discretas** son aquellas en las cuales los posibles valores surgen frecuentemente de un conteo. En cada tramo o intervalo, la variable solo puede tomar un número determinado de valores (enteros).

Ejemplos

1. Número de hijos.
2. Número de páginas de un libro, etc.

BECU_M1_B4_P144_173.indd 146 4/22/14 11:58 AM

Trabajo individual

Escribe dos ejemplos de cada uno de los tipos de variables estadísticas.

Las **variables continuas** son aquellas en las cuales los posibles valores surgen frecuentemente de una medición. Estas variables pueden tomar tantos valores (reales) como sea posible en un tramo.

Ejemplos

1. La estatura de una persona.
2. El peso de alguien, etc.

- Variable estadística
  - Cualitativa
    - Nominal
    - Ordinal
  - Cuantitativa
    - Discreta
    - Continua

Recuerda

Estadística e historia

En el año 2000 a. C. en China ya se realizaban estudios estadísticos relacionados con el censo de la población.

Por otro lado, los romanos, cada cinco años, realizaban un recuento de la población, que consideraba cantidad de nacimientos, defunciones, ganado, etc.

ESTUDIO ESTADÍSTICO

Para realizar un estudio estadístico, generalmente se siguen los siguientes pasos.

1º Recolección, orden y recuento de datos.

2º Cálculo de las medidas de centralización y localización.

3º Representación gráfica de los resultados.

4º Planteamiento de las conclusiones.

Actividades

Determina elementos de un estudio estadístico.

1. En la unidad educativa, durante el primer quimestre del año se propondrá realizar algunos estudios, como:
   - ¿Qué características comunes tienen los estudiantes dedicados a la música?
   - ¿En qué usan el tiempo libre los estudiantes de básica?
   - ¿Qué oportunidades de esparcimiento y diversión tienen en la ciudad?
   - ¿Cuáles son los hábitos deportivos de los profesores?
   - ¿A qué dedican el tiempo libre que comparten las familias de la unidad educativa?

   Determina:

   a. Entre cinco y diez variables que se puedan considerar en el estudio.

   b. Valores de cada variable considerada.

Clasifica las variables estadísticas.

2. En un estudio sobre el uso de la televisión por parte de los estudiantes de primer año de bachillerato del colegio Avancemos, se averiguará:

   a. Edad

   b. Género

   c. Número de horas semanales dedicadas a ver televisión.

   d. Tipo de programas preferidos.

   e. Cantidad de canales de los que disponen en casa.

   Determina las variables e indica de qué clase son.

Tablas de frecuencias

Destrezas con criterio de desempeño:

- Reconocer y elaborar cuadros de **frecuencias absolutas y frecuencias acumuladas**, con datos simples y con datos agrupados. **(C, P)**
- Comprender situaciones de la vida cotidiana a través de la interpretación de **datos estadísticos**. **(M)**

Conocimientos previos

Determina los siguientes porcentajes.

a. 30% de 300

b. 75% de 250

c. 40% de 1 200

Toma en cuenta

De la tabla de frecuencias presentada en el ejemplo, se pueden responder preguntas tales como las siguientes:

- ¿Cuántas veces se obtuvo 4?
- ¿Cuántos resultados menores o iguales que 4 se obtuvo?
- ¿Qué porcentaje obtuvo el resultado 5?

Observa

notación. Para denotar la frecuencia absoluta se utiliza la expresión $\mathbf{f_i}$. Para denotar la frecuencia relativa se utiliza la expresión $\mathbf{h_i}$.

TABLAS DE FRECUENCIA PARA DATOS NO AGRUPADOS

Al ordenar los datos correspondientes a un cierto estudio, es usual agruparlos en clases o categorías, para lo cual, generalmente, se utilizan tablas de frecuencias.

Frecuencia absoluta

Es el número de veces que aparece o se repite un cierto valor en la variable de medición.

Frecuencia absoluta acumulada

Representa el número de datos cuyo valor es menor o igual al valor considerado. Se obtiene sumando sucesivamente las frecuencias absolutas.

Frecuencia relativa

Representa la razón de ocurrencia respecto al total. Se calcula como el cociente entre la frecuencia absoluta y el tamaño total de la muestra.

La suma de todas las frecuencias relativas da como resultado 1.

Frecuencia relativa porcentual

Corresponde a la frecuencia relativa expresada en porcentaje. Se calcula como el producto de la frecuencia relativa por 100.

La suma de todas las frecuencias relativas porcentuales da como resultado 100%.

Ejemplo

Al lanzar un dado 10 veces, se obtienen los siguientes resultados: 1, 1, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6. Se puede observar que la variable de estudio es el resultado del lanzamiento del dado. Luego, la tabla de frecuencias correspondiente es:

Resultado	F. absoluta f_i	F. acumulada F_i	F. relativa h_i	F. relativa %
1	2	2	2/10	20%
2	0	2	0/10	0%
3	1	3	1/10	10%
4	3	6	3/10	30%
5	2	8	2/10	20%
6	2	10	2/10	20%

TABLAS DE FRECUENCIA PARA DATOS AGRUPADOS

Si el conjunto de datos que se recolecta es muy numeroso, o bien, si el **rango** (diferencia entre el mayor y menor valor de una variable) es muy amplio, es usual presentarlos agrupados y ordenados en **intervalos** (rango de valores).

Toma en cuenta

Que los intervalos tengan igual tamaño facilita la interpretación, análisis y conclusión de los estudios.

Sin embargo, en ocasiones los intervalos no coinciden en tamaño.

Amplitud de una clase. Se calcula mediante la diferencia entre el límite superior y el límite inferior de un intervalo.

Recuerda

De la tabla de frecuencias dada en el ejemplo se pueden responder preguntas tales como las siguientes:

- ¿Qué porcentaje de pacientes presentan un nivel de colesterol menor a 200 mg/d?
- ¿Qué porcentaje de pacientes supera los 200 mg/d de colesterol total?
- ¿Cuántos pacientes tienen una medición entre 190 mg/d y 199 mg/d?

Tamaño de un intervalo

El tamaño de cada intervalo se puede calcular dividiendo el valor del rango para la cantidad de intervalos que se desean obtener.

Marca de clase

Es un valor representativo de cada intervalo (o clase), que corresponde al punto medio del intervalo. Se calcula como la suma del límite inferior (menor valor) y el límite superior (mayor valor) del intervalo, dividido entre 2.

Ejemplo

Un grupo de 20 pacientes entre 50 y 60 años se realizaron un examen para medir su nivel de colesterol (en mg/d). Los resultados obtenidos fueron los siguientes.

183	206	193	172	valor menor
182	205	199	177	
180	195	199	175	
185	197	190	201	
200	210	219	219	valor mayor

Como se puede observar, los valores de la variable de estudio (nivel de colesterol) presentan un rango amplio. Los datos se agruparon en 5 intervalos de tamaño 9, ya que $\frac{219 - 172}{5} = \frac{47}{5} \approx 9$, es decir, cada intervalo es de amplitud 9. Luego, la tabla de frecuencias correspondiente es:

Nivel de colesterol	F. absoluta	F. acumulada	F. relativa	F. relativa %
170 – 179	3	3	3/10	15%
180 – 189	4	7	4/10	20%
190 – 199	6	13	6/10	30%
200 – 209	4	17	4/10	20%
210 – 219	3	20	3/10	15%

Actividades

Analiza problemas de estadística.

1. Los siguientes datos se obtuvieron durante una encuesta a los estudiantes de primer año de bachillerato sobre el número de años que están en el colegio.

4	5	2	9	4	5	7
2	8	2	5	1	9	6
10	2	5	5	5	4	5
3	2	10	3	10	8	3
3	2	6	2	10	3	
7	5	5	5	9	3	

a. Elabora la tabla de frecuencias e indica a cuántos se ha encuestado.

b. Indica cuál es la variable.

c. Encuentra el porcentaje de los que tienen más tiempo en el colegio.

d. Halla el porcentaje de los que tienen menos tiempo.

e. Responde ¿Cuántos estudiantes tienen menos de 5 años en el colegio?

Gráfico de frecuencias

Destrezas con criterio de desempeño:

- Reconocer en diferentes **diagramas estadísticos** (tallo y hojas, polígonos de frecuencia, gráfico de barras, caja y bigotes, histogramas, etc.) la información que estos proporcionan. **(C)**
- Interpretar un **diagrama estadístico** a través de los parámetros representados en él. **(C)**
- Representar los resultados de cuadros de frecuencias absolutas y frecuencias acumuladas mediante los **diferentes diagramas** (tallo y hojas, polígonos de frecuencia, gráfico de barras, histogramas, etc.). **(P)**

Conocimientos previos

Elabora una tabla y encuentra las frecuencias absolutas y relativas.

Las edades en un grupo de jóvenes son:

14	15	14
16	15	14
15	15	14
16	13	14
15	13	13
14	15	16
16	14	

Glosario

ejes. En un histograma los intervalos se representan en el eje de las abscisas (x), mientras que en el eje de las ordenadas (y) se representan las frecuencias.

HISTOGRAMA

Es una representación gráfica de una distribución de frecuencias, generalmente de variables cuantitativas agrupadas en intervalos. Está formado por barras cuyas bases representan el intervalo al que corresponden los valores de la variable, y las alturas están dadas por las frecuencias de cada categoría.

GRÁFICO CIRCULAR

Este gráfico, también conocido como **diagrama de sectores**, se utiliza para representar cualquier tipo de frecuencias aunque, generalmente, se emplea para frecuencias relativas porcentuales.

Los datos son representados mediante sectores de un círculo. Cada sector indica diferentes categorías de la variable y cada ángulo de los sectores circulares es proporcional al valor de la variable.

Ángulos de los sectores de un gráfico circular

La medida de los ángulos de los sectores circulares, se obtiene multiplicando las frecuencias absolutas de la categoría por 360º y dividiendo para el número total de datos, es decir:

$$\text{Ángulo} = \frac{f_i \cdot 360^\circ}{N}$$

Donde f_i: frecuencia absoluta y N: total de datos.

POLÍGONO DE FRECUENCIAS

Un polígono de frecuencias se obtiene al unir los puntos medios de los intervalos representados por cada barra en un histograma, es decir, al unir la marca de clase de cada intervalo mediante una línea poligonal.

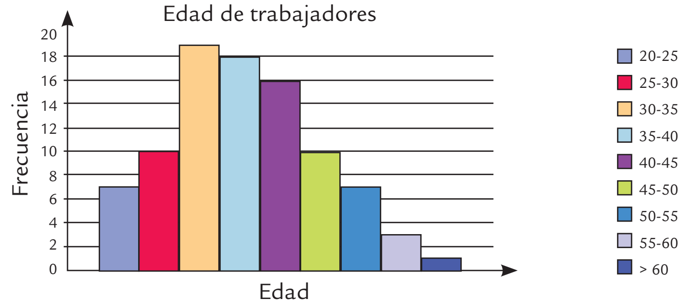
Ejemplo

Se encuestó al personal de una empresa con la finalidad de conocer y registrar las edades de sus trabajadores.

La tabla de frecuencias con los resultados obtenidos es la siguiente:

Edades	[20 – 25[	[25 – 30[	[30 – 35[	[35 – 40[	[40 – 45[	[45 – 50[	[50 – 55[	[55 – 60[	> 60
f_i	7	10	19	18	16	10	7	3	1

- El histograma correspondiente es:



BECU_M1_B4_P144_173.indd 150 4/22/14 11:58 AM

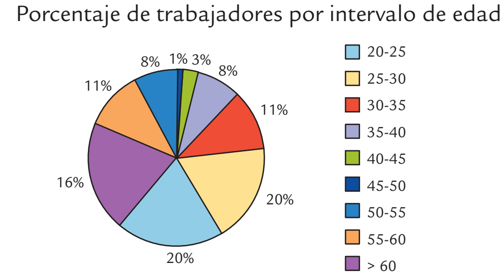
Toma en cuenta

Gráfico según variable

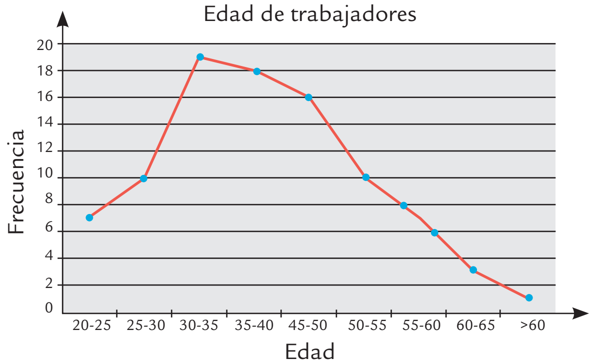
La elección del gráfico más adecuado para representar cierto tipo de variable dependerá de si esta es cualitativa o cuantitativa. Generalmente se utilizan los siguientes tipos de gráficos.

Variable	Nombre
Cualitativa	· Circular · Gráfico de barras
Cuantitativa discreta	· Circular · Polígono de frecuencias
Cuantitativa continua	· Histograma · Polígono de frecuencias

- El gráfico circular que muestra las frecuencias relativas correspondientes a cada categoría es:



- El polígono de frecuencias correspondiente al ejemplo es:



Un polígono de frecuencias puede ser construido a partir de las frecuencias absolutas, o bien, de las frecuencias relativas. Aunque estos valores sean distintos, la forma del gráfico es similar, ya que las proporciones entre ellas se mantienen.

Actividades

Elabora una tabla de funciones.

1. Los datos corresponden a la duración en horas del uso continuo de 40 dispositivos electrónicos iguales, sometidos a un control de calidad.

480	570	775	826	890
496	802	712	560	590
724	795	683	794	750
780	886	830	676	489
801	714	560	760	725
830	452	810	720	680
660	490	895	660	666
746	668	880	570	680

Construye una tabla de distribución de frecuencias agrupadas que considere las columnas *intervalo*, *frecuencia absoluta* y *frecuencia relativa*.

Representa la información en una diagrama de barras.

2. Grafica un diagrama de barras con la siguiente información.
Las estaturas en centímetros de 27 jóvenes son las siguientes: 155, 178, 170, 165, 173, 168, 160, 166, 176, 169, 158, 170, 179, 161, 164, 156, 170, 171, 167, 151, 163, 158, 164, 174, 176, 164 y 154.

Traza un histograma.

3. Realiza el histograma y el polígono de frecuencias con la siguiente información.
Se mide la altura de 200 estudiantes de Bachillerato y se extraen los resultados de la siguiente tabla.

Altura (cm)	[140-150[	[150-160[	[160-170[	[170-180[	[180-190[
fi	12	58	91	46	23

+ Observa

En el ejemplo de gráfico de frecuencias acumuladas, en el eje *x* se ha representado el límite superior del intervalo y en el eje *y*, la frecuencia acumulada.

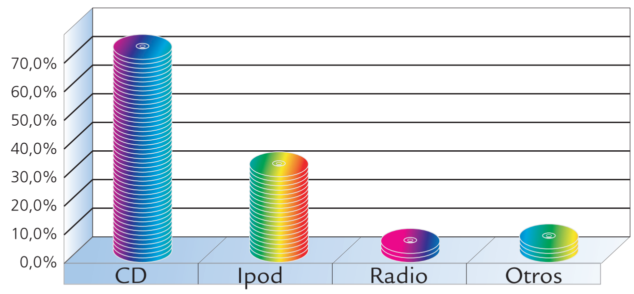
PICTOGRAMA

Este tipo de gráfico se utiliza para representar variables cualitativas. Para cada valor de la variable, se utiliza una figura cuyo tamaño es proporcional a la frecuencia.

Ejemplo

El siguiente pictograma corresponde a una encuesta de consumo cultural y tiempo libre.

Medios o formatos empleados para escuchar música (año 2013)



+ Toma en cuenta

Es posible construir un gráfico a partir de la frecuencia relativa acumulada.

GRÁFICO DE FRECUENCIAS ACUMULADAS (OJIVA)

En un gráfico de distribución de frecuencias acumuladas, se puede notar que esta frecuencia de un intervalo corresponde a todas las observaciones menores que el límite superior de ese intervalo.

+ Recuerda

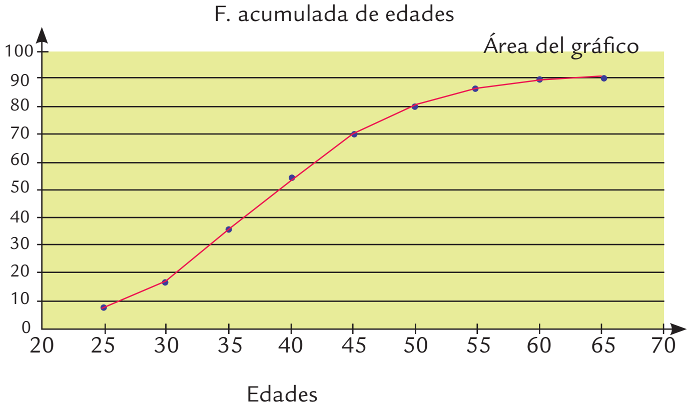
En el gráfico de frecuencias acumuladas se marcan los puntos de la forma (x, y), donde:
x: límite superior
y: frecuencia acumulada.

Ejemplo

Si se considera el caso de las edades del personal de una empresa, se obtiene la siguiente tabla de frecuencias acumuladas, en la cual se ha incluido el límite superior de cada intervalo y el respectivo gráfico.

Edades	Límite superior	F. absoluta	F. acumulada
[20 – 25[	25	7	7
[25 – 30[	30	10	17
[30 – 35[	35	19	36
[35 – 40[	40	18	54
[40 – 45[	45	16	70
[45 – 50[	50	10	80
[50 – 55[	55	7	87
[55 – 60[	60	3	90
[60 – 65[	65	1	91

F. acumulada de edades



Toma en cuenta

John Wilder Tukey (1915-2000)

Inventó el diagrama de tallo y hoja, como un modo rápido de representar un conjunto de datos de manera gráfica.

Recuerda

En general, se utilizan diagramas de tallo y hoja para estudiar la dispersión de los valores de una muestra.

Además, la elección del tallo y hojas es arbitraria pues estos se seleccionan de acuerdo a la conveniencia y dependerán de la magnitud de los datos.

El diagrama correspondiente a los datos: 20, 21, 35, 40, 43 y 45 se puede representar como:

2	0	1	
3	5		
4	0	3	5

DIAGRAMA DE TALLO Y HOJA

Este diagrama tiene por objetivo resumir u ordenar un conjunto de datos, con el fin de conocer intuitivamente la forma de su distribución. También permite comparar la distribución de dos o más grupos diferentes.

Este tipo de gráfico se construye separando los valores de cada observación en dos partes, la primera corresponde al tallo y se ubica a la izquierda de una línea vertical; la segunda incluye a las hojas y se ubica a la derecha.

Si se tienen muchas hojas en cada tallo, es posible separarlas en dos tallos.

Ejemplo

A continuación se muestra un diagrama de tallo y hoja, correspondiente al salario, en dólares, de un grupo de trabajadores de una empresa.

Tallo	Hojas			
4	00	25		
5	31	42		
6	28	36	99	
7	18	69	87	
8	17	25	33	95
9	25	58	77	96
10	53	76		
11	01	69		
12	00	79		
13	33	70	95	
14	59	61		
15	89			
16	12	51		
17	16			
18	65			
19	30			
20				
21				
22	00			

Del diagrama anterior se puede desprender información como la siguiente.

- El trabajador que tiene menor salario gana $ 400.
- El trabajador que tiene mayor salario percibe $ 2 200.
- La mayoría de los trabajadores percibe entre $ 400 y $ 1 600, ya que entre esos valores se presenta la mayor frecuencia de salarios.

BECU_M1_B4_P144_173.indd 153 4/22/14 11:58 AM

Actividades

Identifica variables cualitativas y cuantitativas.

1. Indica en cada caso si la variable dada es cualitativa o cuantitativa.

a. Número de personas que integran un grupo familiar en una parroquia de Quito.

b. Sueldo de los empleados de una empresa.

c. Color de ojos de los estudiantes de un curso.

d. Nivel de escolaridad de los integrantes de un grupo familiar.

Diferencia entre variables discretas y continuas.

2. Señala cuáles de las siguientes son variables discretas y cuáles son continuas.

a. Temperaturas diarias medidas en una ciudad.

b. Ingresos de los ejecutivos de un banco.

c. Longitudes de 100 clavos producidos por una empresa.

d. Número de estudiantes en una sala de clases.

Identifica a que clase pertenecen las variables.

3. Clasifica cada una de las siguientes variables, según su clase: cuantitativa (discreta o continua) o cualitativa (nominal u ordinal).

a. Distancia recorrida por un automóvil desde Latacunga a Ambato.

b. Tiempo que se requiere para responder una encuesta.

c. Cantidad de llamadas que llegan a una central telefónica.

d. Periódicos vendidos en un kiosco.

e. Color de pelo de los integrantes de una familia.

f. Número de acciones transadas en la bolsa en un día determinado.

Determina las características de un problema estadístico.

4. Se realizó una encuesta para conocer la preferencia del jefe(a) de hogar de un barrio, por algún tipo de supermercado. Entre los 100 jefes(as) de hogar entrevistados, 30 prefirieron el supermercado «Triunfo».

a. ¿Cuál es la muestra de esta encuesta?

b. ¿Cuál es el tamaño de la muestra?

c. ¿Cuál es la población?

d. ¿Cuál es la variable de estudio?

e. ¿Cuál es la proporción, dentro de la muestra, de jefes (as) de hogar que prefirieron el supermercado «Triunfo»?

f. ¿Cuántos jefes(as) de hogar prefirieron otro supermercado?

Completa tablas estadísticas y analiza su información.

5. En una guardería y prebásica, las edades de los niños se han representado en la siguiente tabla. Observa, y luego, responde.

Edad (años)	Números de niños
1	6
2	8
3	7
4	3

a. ¿Cuántos niños mayores de 3 años hay en el jardín?

b. ¿Qué porcentaje de niños tienen un año de edad?

c. ¿Cuántos niños tienen 2 años o menos?

d. ¿Cuántos niños tienen más de 1 año?

e. ¿Qué porcentaje de niños tiene más de 2 años?

f. ¿Cuántos niños hay en total en la institución?

BECU_M1_B4_P144_173.indd 154 4/22/14 11:58 AM

6. Los siguientes datos corresponden a la duración, en horas, del uso continuo de 50 ampolletas iguales, que serán sometidas a un control de calidad. Observa y luego responde.

480	496	724	780	801
570	802	795	886	714
775	712	683	830	560
826	560	794	676	760
890	590	750	489	725
666	746	668	880	570
830	452	810	720	680
680	660	490	895	660
720	793	870	715	708
710	679	762	793	751

a. ¿Cuál es la población de estudio?

b. ¿Cuál es la muestra del estudio?

c. ¿Cuál es la variable de estudio?

d. ¿Qué porcentaje de ampolletas tiene una duración de al menos 590 horas?

e. Grafica una tabla de distribución de frecuencias, considerando la frecuencia absoluta, la frecuencia relativa, la relativa porcentual y las respectivas frecuencias acumuladas.

f. ¿Qué porcentaje de ampolletas tiene una duración de 660 horas o más?

g. Grafica en Excel un histograma para representar el tiempo de duración de las ampolletas.

7. Las siguientes cantidades son las tarifas, en dólares, que una empresa de mensajería cobró por entregar paquetes pequeños la tarde del jueves pasado.

4,03	3,07	4,02	5,57	4,63	3,82	4,30
4,07	6,04	3,62	3,89	5,02	5,46	5,24
3,59	7,86	2,93	3,70	4,15	3,10	4,91

a. Elabora un diagrama de tallo y hojas.

b. Construye una distribución de frecuencias.

8. De los partidos de fútbol jugados en un mes en cierto campeonato, se contabilizó el número de goles marcados en cada partido. Observa y, luego responde.

Número de goles	Frecuencia
0	3
1	5
2	7
3	7
4	6
5	4
6	3

a. ¿Cuál es la población de estudio?

b. ¿Cuál es la muestra del estudio?

c. ¿Cuál es el tamaño de la muestra?

d. ¿Cuál es la variable de estudio?

e. Elabora una tabla de distribución de frecuencias considerando la frecuencia absoluta, la frecuencia relativa, la relativa porcentual y las respectivas frecuencias acumuladas.

f. Construye, utilizando Excel, un gráfico circular a partir de los datos de la tabla.

g. Obtén al menos tres conclusiones a partir del gráfico.

9. A continuación, se proporcionan las edades de 50 bailarines que asistieron a una audición para participar en una comedia musical.

21	22	18	23	19	19	21	21	22	21
21	21	19	20	19	20	19	21	19	21
18	19	22	24	24	19	19	20	19	20
20	22	20	20	20	19	21	19	19	19
20	21	22	19	19	21	18	21	20	17

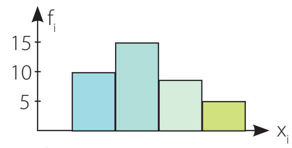
a. Elabora una distribución de frecuencias donde los intervalos sean:

17 años -18 años
19 años
20 años
21 años
Más de 21 años

BECU_M1_B4_P144_173.indd 155 4/22/14 11:58 AM

Actividades

10. Elige la respuesta correcta. El siguiente diagrama es un:



a. polígono de frecuencias.

b. histograma.

c. diagrama de barras.

d. polígono de frecuencias acumuladas.

11. Se realizó un estudio de seguridad en 34 ciudades de un país. Este arrojó los siguientes resultados a la pregunta: «En qué lugar se siente más seguro».

	Casa	Lugar de trabajo	Lugares públicos	Calle
Muy seguro	52%	41%	41%	13%
Muy inseguro	47%	30%	55%	86%
No responde	1%	29%	4%	1%

a. Construye un gráfico circular para cada uno de los lugares. ¿Qué puedes concluir?

b. Elabora un histograma que muestre las diferencias entre los cuatro sitios. ¿A qué crees que se deba esta divergencia?

c. Responde: Si la muestra de la encuesta anterior fuera de 402 personas, ¿cuántas corresponderían a cada categoría?

12. La tabla siguiente indica la edad de los 40 socios de un club.

Edad	15	16	17	18	19
Nº de personas	5	8	2	20	5

Haz el histograma o el diagrama de barras correspondiente.

13. En una encuesta, realizada a los estudiantes, con la pregunta «¿Debería haber más actividades extraescolares?», las respuestas fueron: De acuerdo, 55,8%; En desacuerdo, 17,2%; Indiferente, 27%. Señala cómo representarías estas respuestas.

a. Con un gráfico de sectores

b. Con un polígono de frecuencias

c. Con un histograma de frecuencias

d. Con un diagrama de barras

14. En una inspección oftalmológica a los empleados de una empresa, un oculista anotó las dioptrías del ojo derecho en esta tabla.

Dioptrías	0	0,5	1	1,5	2
f_i	42	30		24	
h_i	0,35		0,15		0,05

a. Completa el cuadro.

b. Grafica el diagrama de sectores.

c. Dibuja el polígono de frecuencias relativas.

15. Se ha lanzado una moneda 40 veces y se han obtenido los siguientes resultados: x, x, c, x, c, c, c, c, x, x, c, x, x, x, c, x, c, x, x, x, x, c, c, x, x, c, x, c, x, c, x, x, c, c, x, x, x, x, c, x.

a. Obtén la tabla de frecuencias.

b. Responde: ¿Qué gráfico es más adecuado para representar los datos?

16. La siguiente información corresponde al número de pacientes atendidos en una sala de urgencias el pasado mes de febrero.

Domingo	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
						1 15
2 21	3 10	4 8	5 17	6 16	7 9	8 8
9 21	10 9	11 25	12 32	13 16	14 28	15 17
16 20	17 12	18 8	19 15	20 12	21 32	22 15
23 12	24 14	25 18	26 29	27 22	28 10	

a. Construye un gráfico de serie de tiempo.

b. ¿Cuáles son las conclusiones que se pueden obtener de estos datos?

BECU_M1_B4_P144_173.indd 156 4/22/14 11:58 AM

17. Para una investigación se midió la estatura, en centímetros, de 35 mujeres y 35 hombres. Los datos son los siguientes.

Hombres		
172	159	171
174	157	155
166	167	174
171	179	158
156	152	157
167	153	178
169	159	170
152	174	154
160	159	153
154	168	163
169	159	180
171	155	

Mujeres		
146	136	148
138	140	144
153	142	164
162	136	159
162	144	165
164	145	143
135	152	164
147	146	137
161	146	159
142	162	164
139	146	159
136	149	

a. Elabora un diagrama de tallo y hojas para cada muestra.

b. Compara los diagramas anteriores y presenta una conclusión con respecto a los datos.

c. Construye una distribución de frecuencias para las estaturas de los hombres y una distribución de frecuencias para las estaturas de las mujeres.

18. El siguiente diagrama de tallo y hojas corresponde al peso, en libras, de 34 estudiantes de un colegio.

Diagrama de tallo y hojas para el pesos de 34 estudiantes

13	2 5 7
14	2 3 5 8
15	0 4 4 5 7 8
16	1 2 2 5 7 8
17	0 0 6 6 7
18	3 4 6 8
19	0 1 5 5
20	5
21	5

Tallo: decenas y centenas
Hojas: unidades

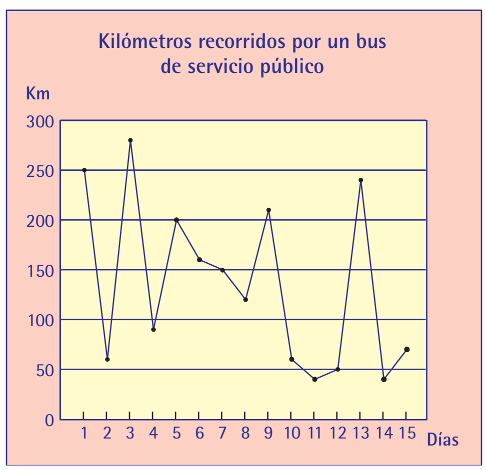
a. Construye una distribución de frecuencias con los datos recogidos sobre el peso de los 34 estudiantes.

b. Determina, según tu criterio, los porcentajes más significativos.

19. La siguiente información corresponde a la cantidad de kilómetros recorridos por un bus de servicio público durante los últimos 15 días.

a. A partir de la gráfica, elabora un diagrama de tallo y hojas del kilometraje recorrido por el bus.

b. Responde: ¿Cuántos días el recorrido del bus está entre 100 km y 200 km?



BECU_M1_B4_P144_173.indd 157 4/22/14 11:58 AM

Medidas de tendencia central

Destreza con criterio de desempeño:
Calcular las **medidas de tendencia central** y de dispersión para diferentes tipos de datos. **(P)**

Conocimientos previos

Responde estas preguntas:

a. ¿Cómo obtienes el promedio de tus notas?

b. ¿Qué significa estar a la moda?

Toma en cuenta

- La media aritmética es única y fácil de calcular e interpretar, sin embargo, se ve afectada si existen valores extremos.
- La mediana es única y no se ve afectada si existen valores extremos.

Observa

Es posible que no exista moda o que exista más de una, como ocurre en el siguiente ejemplo.

La moda de: 1-1-2-2-3-4-5-6-7 es 1 y 2.

*Las medidas de tendencia central son parámetros estadísticos que indican valores cuyo objetivo es resumir la información para un conjunto de datos, es decir, son representantes de un conjunto de datos. Las medidas de tendencia central más conocidas son: la **media aritmética**, la **mediana** y la **moda**.*

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL PARA DATOS NO AGRUPADOS

Media aritmética

Es el valor numérico que corresponde al cociente de la suma de todos los datos y el número total de observaciones (promedio). Se denota como $\overline{\mathbf{X}}$.

Es decir,

$$\boxed{\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}$$

n: número de elementos de la muestra

Ejemplo

Si se considera el número de hijos de 7 familias con los siguientes resultados: 1, 2, 2, 4, 5, 5, 6, la media aritmética del número de hijos es 3,6, ya que

$$\overline{X} = \frac{1+2+2+4+5+5+6}{7} = \frac{25}{7} \approx 3{,}6.$$

Observar que la media aritmética no coincide con ningún valor de los datos, ya que estos corresponden a números enteros positivos (número de hijos), en estos casos, el valor de la media se puede aproximar, es decir $\overline{X} \approx 4$.

Mediana

Se define como el valor central de un conjunto de datos ordenados de manera creciente o decreciente. En el caso de que el número de datos sea par, la mediana corresponde a la media aritmética de los dos valores centrales. Se denota como **Me**.

Ejemplo

Las notas de 6 alumnos de un curso de botánica son las siguientes: 2,0; 3,0; 3,0; 4,0; 4,0; 5,0. El número de observaciones es par, por lo tanto, la mediana es 3,5 pues $\frac{3{,}0 + 4{,}0}{2} = 3{,}5$.

Moda

La moda de un conjunto de observaciones corresponde a aquel dato que tiene la mayor frecuencia. Se denota como **Mo**. En el ejemplo anterior, hay dos modas: 3,0 y 4,0.

BECU_M1_B4_P144_173.indd 158 4/22/14 11:59 AM

Observa

Ejemplos para datos agrupados.

Observa la siguiente tabla de frecuencias.

Intervalo	f_i
40 – 45	12
46 – 51	15
52 – 57	4

La marca de clase para cada intervalo es 42,5; 48,5 y 54,5, respectivamente, además n = 31. Luego, la media aritmética está dada por:

$$\overline{X} = \frac{42{,}5 \cdot 12 + 48{,}5 \cdot 15 + 54{,}5 \cdot 4}{31}$$

$\overline{X} \approx 46{,}95$

Además, la mediana se ubica en el intervalo 46 – 51, ya que ahí se encuentra el 50% del total de los datos, por lo tanto n = 31; t = 6; f_{i-1} = 12; fmediana = 15; L_i = 46. Luego,

$$M_e = \frac{46 + \frac{31}{2} - 12}{15} \cdot 6 = 47{,}4.$$

Por otro lado,
$d_1 = 15 - 12 = 3$;
$d_2 = 15 - 4 = 11$.
L_i = 46. Luego,

$$M_o = \frac{46 + 3}{3 + 11} \cdot 6 \approx 47,29$$

Las fórmulas correspondientes a la mediana y a la moda solo son válidas cuando *t* el ancho del intervalo es constante.

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL PARA DATOS AGRUPADOS

Media aritmética

La media para datos agrupados se calcula multiplicando la marca de clase de cada intervalo (x_i), con sus respectivas frecuencias absolutas (f_i). Después se suman los resultados obtenidos y este total se divide para el número total de datos (n). Este proceso está representado en la siguiente fórmula.

$$\boxed{\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{n}}$$

Mediana

Una manera aproximada de calcular la mediana para datos agrupados es mediante la siguiente expresión.

$$\boxed{Me = L_i + \frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a}$$

Donde:

L_i: límite inferior del intervalo donde se encuentra la mediana.

n: número total de elementos de la muestra, o bien, la frecuencia total.

a: amplitud de los intervalos.

F_{i-1}: frecuencia acumulada anterior al intervalo en el cual se encuentra la mediana.

f_i: frecuencia del intervalo en el cual se encuentra la mediana.

Moda

La moda para datos agrupados está dada por la siguiente expresión.

$$\boxed{Mo = L_i + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \cdot a}$$

Donde:

d_1: diferencia de la frecuencia del intervalo modal (intervalo con mayor frecuencia absoluta) y la frecuencia de la clase anterior.

d_2: diferencia de la frecuencia del intervalo modal y la frecuencia de la clase posterior.

a: ancho de los intervalos.

L_i: límite inferior de la clase modal.

Si se calcula la moda para datos agrupados, el resultado corresponde a una aproximación de esta.

Medidas de dispersión

Destreza con criterio de desempeño:
Calcular las **medidas de tendencia central de dispersión** para diferentes tipos de datos. **(P)**

*Las medidas de dispersión son parámetros estadísticos que indican cuánto se alejan los datos respecto de la media aritmética, es decir, señalan la **variabilidad de los datos**.*

Las medidas de dispersión más utilizadas son el **rango**, la **desviación media** y la **desviación estándar** o **típica**.

Conocimientos previos

Los siguientes datos corresponden a las estaturas en centímetros de un grupo de estudiantes de primer año de bachillerato. Indica cuál es el valor de la estatura mayor, cuál es el menor valor, y qué diferencia hay entre estos dos valores.

165, 170, 168, 162, 165, 165, 169, 168, 170, 171, 167, 166, 165, 162, 172, 168, 169, 170, 164, 168

RANGO

Indica la dispersión entre los valores extremos de una variable. Se calcula como la diferencia entre el mayor y el menor valor de la variable.

Se denota como **R**, es decir,

$$\boxed{R = x_n - x_1}$$

Donde:
$\mathbf{x_n}$: estadístico de orden n, es decir, el mayor valor de la variable.
$\mathbf{x_1}$: estadístico de orden 1, es decir, el menor valor de la variable.

DESVIACIÓN MEDIA

- **La desviación media de una observación (d)**, con respecto a la media ($\overline{\mathbf{X}}$), se define como la diferencia entre ellas. Es decir,

$$\boxed{d = x - \overline{X}}$$

Toma en cuenta

La suma de las desviaciones de todos los datos con respecto a la media aritmética es siempre cero.

- **La desviación media de un conjunto de datos (DM)** es la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones de cada dato respecto a la media ($\overline{\mathbf{X}}$). Es decir,

$$\boxed{DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{X}|}{n}}$$

Donde:
$\mathbf{x_i}$: valores de la variable.
n: número total de datos.

Actividades

Determina el rango y la desviación media.

1. Calcula el rango, y la desviación media a partir de los datos de edad de las personas que están en una función determinada de cine, de acuerdo con la siguiente distribución.

x_i	10	15	20	25	30	35
f_i	2	12	27	41	30	7

Recuerda

Desviación estándar para datos agrupados
Está representada con la expresión:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Donde $\mathbf{f_i}$ es la frecuencia de cada valor de la variable y $\mathbf{x_i}$ es la marca de clase.

Trabajo cooperativo

Hallen la desviación estándar con los datos de longitud en centímetros de truchas pescadas en el río Pita, según la siguiente distribución.

f_i	Longitud (cm)
26	[0,10[
35	[10,20[
46	[20,30[

DESVIACIÓN ESTÁNDAR O TÍPICA

La desviación estándar mide el grado de dispersión de los datos con respecto a la media. Se denota como **σ** para la población, o bien **s** para una muestra. Está dada por la siguiente expresión.

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^2}{n}}}$$

Mientras menor sea la desviación estándar, los datos son más homogéneos, es decir, a menor dispersión mayor homogeneidad, y viceversa.

Ejemplo

Las notas obtenidas por un alumno en una asignatura son las siguientes: 2,0; 3,9; 5,0; 5,9; 6,2.

Obtener el rango, desviación media para cada nota y la desviación estándar de las notas obtenidas.

Se tiene que el rango es: R = 6,2 – 2,0 = 4,2, lo que indica que las notas son bastante dispersas, ya que la amplitud entre ambos valores es «grande».

Para calcular la desviación media, primero se debe calcular la media aritmética. Se tiene: $\bar{X} = \frac{22{,}0 + 3{,}9 + 5{,}0 + 5{,}9 + 6{,}2}{5} = 4{,}6$. Con esta media aritmética, se pueden obtener las desviaciones medias para cada nota.

Nota	Desviación media
2,0	–2,6
3,9	–0,7
5,0	0,4
5,9	1,3
6,2	1,6

Estos valores indican el mayor o menor alejamiento de las notas respecto a $\bar{X}$.

Para la desviación estándar, se tiene:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(2{,}0 - 4{,}6)^2 + (3{,}9 - 4{,}6)^2 + (5{,}0 - 4{,}\ 6)^2 + (5{,}9 - 4{,}6)^2 + (6{,}2 - 4{,}6)^2}{5}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{6{,}76 + 0{,}49 + 0{,}16 + 1{,}69 + 2{,}56}{5}} \approx 1{,}53$$

Grado de dispersión respecto a $\bar{X}$.

Luego, la desviación estándar para las notas obtenidas es aproximadamente 1,53.

BECU_M1_B4_P144_173.indd 161 4/22/14 11:59 AM

VARIANZA

Es otro parámetro utilizado para medir la dispersión de los valores de una variable respecto a la media. Corresponde a la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones, respecto a la media. Está dada por la siguiente expresión.

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}{n}$$

Dado que la varianza corresponde al cuadrado de la desviación estándar, está expresada en unidades cuadradas.

+ Toma en cuenta

Valor de la varianza

La varianza corresponde al cuadrado de la desviación estándar y, por lo tanto, su valor es siempre positivo.

COEFICIENTE DE VARIACIÓN

Permite determinar la razón existente entre la desviación estándar (σ) y la media. Se denota como **CV**. El coeficiente de variación se calcula mediante la siguiente expresión.

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{X}}$$

El **CV** no tiene unidades de medida, por lo que permite la comparación de variables, sin importar sus magnitudes ni lo que estas representan.

CORRELACIÓN

El análisis de la correlación es apropiado cuando se necesita conocer el grado de asociación entre dos variables.

+ Recuerda

Al calcular la covarianza de una variable respecto a sí misma, se obtiene la varianza.

Covarianza

La **covarianza** (**cov**(**x, y**)) de dos variables es un indicador de la relación entre ellas. Este parámetro puede utilizarse para medir la relación entre ambas solo si están expresadas en la misma escala o unidad de medida. Se obtiene a partir de la fórmula a continuación.

$$\text{cov}(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y})}{n}$$

Coeficiente de correlación de Pearson

La correlación o grado de asociación entre dos variables se mide utilizando el **coeficiente de relación de Pearson**. Este coeficiente mide el grado de asociación lineal entre dos variables. Se denota como **r** y su valor fluctúa en el intervalo [–1, 1].

Este coeficiente se calcula mediante la siguiente expresión.

$$r = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

Toma en cuenta

Karl Pearson
(1857-1936)

No solo se destacó por sus contribuciones a la estadística, sino también por sus valiosos aportes a la antropología, biometría y genética.

Donde:

σ_x: desviación estándar de la variable x.

σ_y: desviación estándar de la variable y.

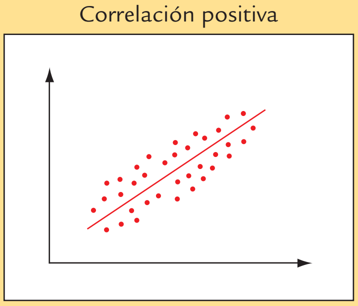
Análisis del coeficiente de correlación

Según el valor del coeficiente de correlación (r), se presentan estas opciones.

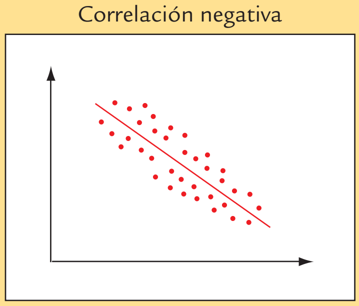
- Si **r** es **positivo**, la relación lineal entre las variables es directa. Se dice que la correlación es positiva.
- Si **r** es **negativo**, la relación lineal entre las variables es inversa. Se dice que la correlación es negativa.
- Si **r = 0**, no existe relación lineal entre las variables. Se dice que la correlación es nula.
- Si **r = 1**, existe una relación de dependencia total directa entre las variables, es decir, si una de ellas aumenta (o disminuye), la otra aumenta (o disminuye) en igual proporción.
- Si **r = –1**, existe una relación de dependencia total inversa entre las variables, es decir, si una de ellas aumenta (o disminuye), la otra disminuye (o aumenta) en igual proporción.

Representación gráfica de la correlación

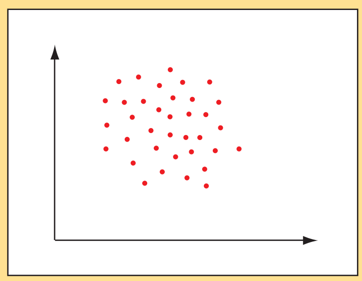
Correlación positiva



Correlación negativa



Correlación nula



Correlación perfecta

Si el coeficiente de correlación toma valores extremos, es decir, **r = 1** o **r = –1**, se dice que la correlación es perfecta.

Si **r = 1**, la correlación es máxima directa.

Si **r = –1**, la correlación es máxima inversa.

En ambos casos, todos los puntos pueden representarse gráficamente, en una misma recta.

Medidas de localización

Destreza con criterio de desempeño:
Calcular las **medidas localización** para diferentes tipos de datos. **(P)**

*Una **medida de localización** nos indica el lugar donde se ubica un valor de la variable dentro de un conjunto ordenado de valores. Las medidas de localización más utilizadas son cuartiles, deciles y percentiles.*

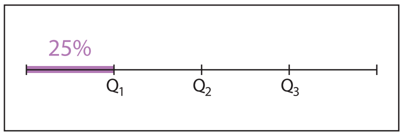
Conocimientos previos

Determina la mediana del siguiente grupo de datos. Recuerda que este valor divide en la mitad a la distribución de datos.

3, 5, 6, 7, 3, 5, 4, 6, 8,
7, 9, 1 3, 5, 6, 0 5, 6,
7, 5, 7, 8,9 2 3,3 3, 9
0, 4, 4, 5, 6

CUARTILES

Son tres valores que dividen al conjunto de observaciones ordenadas en cuatro partes iguales. Por lo tanto, el **primer cuartil** (**Q_1**) es el valor por debajo del cual, o en el cual, se ubica el 25% de todos los valores; el **segundo cuartil** (**Q_2**) es el valor por debajo del cual se ubica el 50% de todos los valores y el **tercer cuartil** (**Q_3**) es el valor por debajo del cual se ubica el 75% de todos los valores. Gráficamente, se los representa de la siguiente manera.



Para determinar cada cuartil, se utilizan las siguientes expresiones:

$$Q_1 = L_i + \frac{\frac{n}{4} - F_{i-1}}{f_i \cdot a} \qquad Q_2 = L_2 + \frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i \cdot a} \qquad Q_3 = L_3 + \frac{\frac{3n}{4} - F_{i-1}}{f_i} \cdot a$$

$$Q_i = L_i + \frac{i\left(\frac{n}{10}\right) - F_{i-1}}{f_i} \cdot a$$

Donde:

i = 1, 2, 3.

L_i: límite inferior del intervalo que contiene al cuartil.

F_{i-1}: frecuencia acumulada del intervalo anterior que contiene al cuartil.

a: ancho del intervalo donde está el cuartil.

f_i: frecuencia absoluta del intervalo que contiene al cuartil.

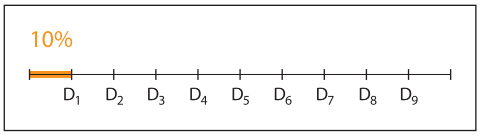
n: tamaño de la muestra.

Toma en cuenta

- El segundo cuartil coincide con la mediana.
- El quinto decil coincide con la mediana.
- Los deciles se denotan como **D_1**, **D_2**, ..., **D_9**.

DECILES

Los deciles corresponden a nueve valores que dividen al conjunto de observaciones ordenadas en diez partes iguales. Gráficamente, se representan así.



BECU_M1_B4_P144_173.indd 164 4/22/14 11:59 AM

Recuerda

Para calcular medidas de localización se utilizan las frecuencias acumuladas. Si la variable es continua, se toma como valor la marca de clase.

Para determinar el i-ésimo decil, se utiliza la siguiente expresión.

$$D_i = L_i + \frac{i\left(\frac{n}{10}\right) - F_{i-1}}{f_i} \cdot a$$

Donde:

i = 1, 2, 3, ..., 9.

$\mathbf{L_i}$: límite inferior del intervalo que contiene al decil.

n: número total de observaciones.

$\mathbf{F_{i-1}}$: frecuencia acumulada del intervalo que antecede al decil.

$\mathbf{f_i}$: frecuencia absoluta del intervalo al que pertenece el decil.

a: longitud del intervalo que contiene al decil.

PERCENTILES

Corresponden a 99 valores que dividen al conjunto de observaciones, ordenadas en cien partes iguales.

Para determinar el i-ésimo percentil se utiliza la siguiente expresión:

$$P_i = L_i + \frac{i\left(\frac{n}{100}\right) - F_{i-1}}{f_i} \cdot a$$

Donde:

i = 1, 2, 3, ..., 99.

$\mathbf{L_i}$: límite inferior del intervalo que contiene al percentil.

n: número total de observaciones.

$\mathbf{F_{i-1}}$: frecuencia absoluta acumulada del intervalo que antecede al percentil.

$\mathbf{f_i}$: frecuencia absoluta del intervalo al que pertenece el percentil.

a: longitud del intervalo que contiene al percentil.

Ejemplo

A partir de la siguiente tabla de frecuencias, determinar P_{90}.

Intervalo	f_i	F_i
60 – 69	10	10
70 – 79	20	30
80 – 89	20	50

Solución

El 90% de los valores de la tabla se ubican en el intervalo 80 – 89.

Se tiene: $L_i = 80$ (límite inferior del intervalo 80 - 89); n = 50 (tamaño de la muestra); $f_i = 50$ (frecuencia absoluta del intervalo 80 – 89); $F_{i-1} = 30$ (frecuencia acumulada del intervalo 70 - 79); a = 10 (amplitud del intervalo).

Remplazando los valores anteriores en la fórmula respectiva, se tiene:

$$P_{90} = 80 + \frac{90\left(\frac{50}{100}\right) - 30}{20} \cdot 10 = 87{,}5.$$

Luego, $P_{90} = 87{,}5$. Es decir, el 90% de los datos es menor o igual que 87,5.

Observa

Los percentiles se denotan como $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, ..., $\mathbf{P_{99}}$.

Esta medida es una de las más utilizadas cuando el objetivo es la clasificación de personas respecto a alguna característica, por ejemplo, el peso o la estatura.

BECU_M1_B4_P144_173.indd 165 4/22/14 11:59 AM

Diagrama de caja

Destreza con criterio de desempeño:

Reconocer en diferentes **diagramas estadísticos** (tallo y hojas, polígonos de frecuencia, gráfico de barras, caja y bigotes, histogramas, etc.) la información que estos proporcionan. **(C)**

Conocimientos previos

En una población de 25 familias, se ha asignado a la variable *x* al número de autos que tiene la familia, y se han obtenido los siguientes datos: 0, 1, 2, 3, 1, 0, 1, 1, 1, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 2 y 1.

Determina los cuartiles.

Glosario

box-plot. Diagramas de cajas también conocidos como gráficos de cajón con bigotes.

*Un **diagrama de caja** (box - plot) es una representación gráfica que se construye a partir de los cuartiles de un conjunto de valores de una variable. Además, en este tipo de gráfico se indican otros elementos de la distribución, tales como: rango, mediana, etc. En general, este gráfico se utiliza para comparar las distribuciones de diferentes grupos.*

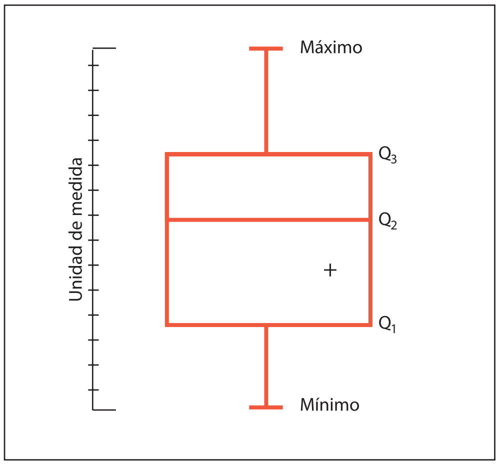
CONSTRUCCIÓN DE UN DIAGRAMA DE CAJA

Para su construir este diagrama es necesario conocer los siguientes datos para cada variable.

- Valor mínimo.
- Valor máximo.
- Primer cuartil.
- Segundo cuartil o mediana.
- Tercer cuartil.
- Media aritmética de los valores de la variable (este dato no es imprescindible para el diagrama, pero, en caso de conocerlo, se incluye en la gráfica).

En un diagrama de caja, se puede observar lo siguiente (ver figura).

- Las líneas que sobresalen del rectángulo, indican el valor mínimo y máximo de los valores de la variable.
- Los extremos inferior y superior del rectángulo indican el primer y tercer cuartil, respectivamente, mientras que la línea horizontal (o vertical) que divide al rectángulo indica la mediana (segundo cuartil).
- Para indicar la media de los valores (si se conoce) de la variable se utiliza un signo **+**.



Recuerda

Sir Francis Galton (1822-1911)

Destacado científico cuyos aportes más importantes los realizó en el campo de la estadística. Se le atribuye la creación del cálculo correlacional.

Toma en cuenta

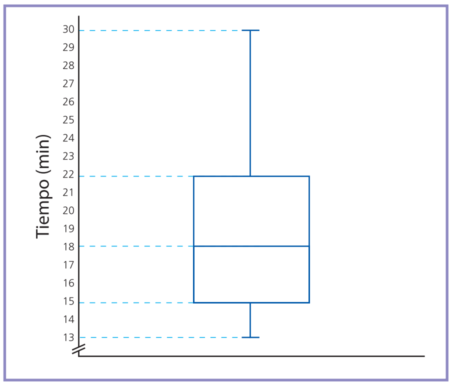
Posición de un diagrama

Un diagrama de cajas se puede construir de manera vertical, o bien, horizontal.

Ejemplos

1. Un restaurante seleccionó una muestra de 30 entregas a domicilio durante un mes, obteniendo la siguiente información.

- Tiempo mínimo de entrega: 13 minutos.
- Tiempo máximo de entrega: 30 minutos.
- Q_1: 15 minutos.
- Mediana del tiempo de entrega: 18 minutos.
- Q_3: 22 minutos.



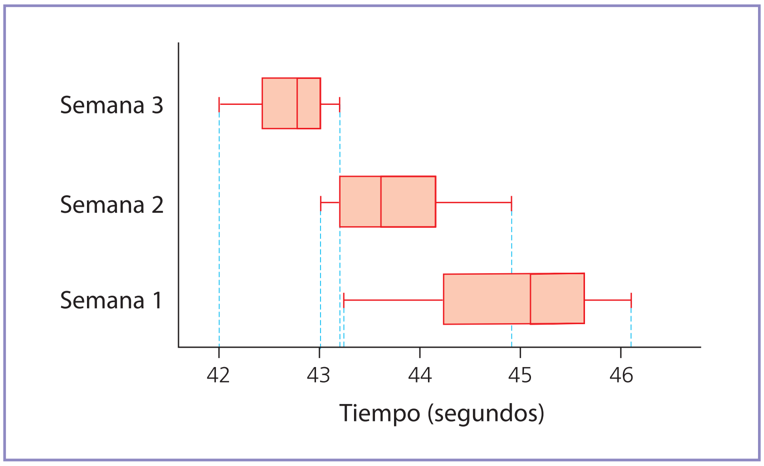
Solución

Con la información anterior se construyó el diagrama de caja. A partir de este, se puede observar que el tiempo de entrega de este restaurante está concentrado bajo el tercel cuartil, es decir, sus tiempos de entrega son, frecuentemente, bajos (demoran poco tiempo en las entregas).

2. Se registraron los tiempos obtenidos por una nadadora en 50 m pecho, durante su entrenamiento en tres semanas diferentes, con el objetivo de averiguar si la práctica favorecía el logro de mejores marcas.

Solución

A partir de los tiempos obtenidos en cada semana, se construyó el siguiente diagrama:



A partir del gráfico, se puede concluir que, a medida que transcurrieron los días de entrenamiento, la diferencia entre la máxima y mínima marca de cada semana es menor. Además, existe un desplazamiento de la gráfica hacia la izquierda, lo que muestra que los tiempos obtenidos han mejorado respecto de la semana anterior y, por ende, la práctica está dando resultados.

Actividades

Elabora un diagrama de tallo y hoja.

1. Dibuja un diagrama de tallo y hojas para el siguiente conjunto de datos. Luego, responde las preguntas.

5,0	2,8	2,5	6,8
6,2	5,7	5,8	3,7
3,5	3,3	2,2	2,7
5,1	5,5	4,3	4,0
3,7	3,9	3,4	4,3
2,7	3,2	4,9	7,0
4,3	4,8	4,0	4,2
5,7	4,0	4,6	5,3
4,5	5,0	6,0	4,1
5,3	4,5	4,8	5,3

a. ¿Cuál es la media de los datos?

b. ¿Cuál es el rango de los datos?

c. ¿Cómo es la dispersión de los datos?

Resuelve problemas de medidas de tendencia central.

2. Resuelve los siguientes problemas.

a. Andrés se entrena para participar en una carrera de 100 m planos obteniendo los siguientes tiempos medidos en segundos: 12,9; 13,1; 12,4; 13,2 y un quinto tiempo que no recuerda. Si el promedio de los tiempos fue 12,88 s, calcula el tiempo faltante.

b. Tres hombres de negocios tienen igual promedio de ganancias durante un año. ¿Significa esto que han recibido mensualmente las mismas ganancias? ¿Por qué?

c. El mayor de cuatro hermanos recibe $ 30 de mesada, mientras que sus hermanos reciben $ 15, $ 18 y $ 20. ¿La media aritmética de las mesadas es un valor representativo de ellas?

d. Las estaturas en centímetros de diez estudiantes son:159, 168, 173, 168, 173, 159, 165, 167, 173 y 182. Encuentra la estatura media, la mediana y la moda.

Analiza una tabla de datos no agrupados, y agrupados.

3. La siguiente distribución de frecuencias corresponde a los salarios de los empleados de una fábrica. Observa los datos y responde.

Salario ($)	Frecuencia
350 - 354,9	7
355 – 359,9	18
360 – 364,9	32
365 – 369,9	45
370 – 374,9	52
375 – 379,9	28
380 – 384,9	16
385 – 389,9	8

a. Calcula el tamaño de los intervalos.

b. ¿Cuál es el límite inferior del séptimo intervalo?

c. ¿Cuál es el límite superior del segundo intervalo?

d. Escribe en orden las marcas de clase de los intervalos.

e. Agrega a esta tabla la frecuencia acumulada, la frecuencia relativa y la frecuencia relativa porcentual.

f. Grafica en Excel un histograma de frecuencias.

4. Se lanzó un dado cierta cantidad de veces y, con los valores obtenidos, se elaboró la siguiente tabla de frecuencias.

Resultado	f_i
1	5
2	2
3	4
4	x
5	4
6	7

a. Si la media aritmética de los resultados es 3,8, ¿cuál es el número total de lanzamientos?

b. Determina el valor de la mediana.

BECU_M1_B4_P144_173.indd 168 4/22/14 11:59 AM

Analiza un problema mediante medidas de tendencia central y gráficos.

5. En un centro hospitalario se ha estudiado el número de días que han demorado ciertos pacientes en sentir mejoría con el consumo de un nuevo medicamento. Los resultados obtenidos fueron los siguientes.

Días mejoría	Frecuencia
0	100
1	150
2	200
3	600
4	450
5	600

a. Calcula la media aritmética, la mediana y la moda.

b. Calcula el rango de los datos.

c. Construye un pictograma para representar las frecuencias anteriores.

d. A partir de los parámetros estadísticos obtenidos y del gráfico, obtén al menos tres conclusiones.

6. En 15 días de trabajo se contabilizó el tiempo de espera (en minutos) de locomoción colectiva para desplazarse desde el hogar hasta el trabajo. Los tiempos registrados son los siguientes:

10	1	13	9	5
9	2	10	3	8
6	17	2	10	15

a. Determina la media aritmética, la mediana y la moda de los tiempos.

b. ¿Cuál de las medidas de tendencia central anteriores es más apropiada para representar el tiempo de espera? Justifica tu respuesta.

c. Mediante un gráfico estadístico, representa la información.

d. A partir del gráfico, obtén dos conclusiones.

Determina la mediana de una serie de datos.

7. Determina la mediana de los datos presentados en cada caso.

a.

3,0	4,5	6,0	14,0
8,2	9,0	12,0	

b.

12,0	15,3	17,0	21,0
25,1	26,1	28,0	28,0
28,0	30,0		

Analiza situaciones problema.

8. Responde: Qué ocurre con la mediana y la desviación estándar si:

a. en un conjunto de datos, cada observación se multiplica por 2.

b. en un conjunto de datos, se le suma 5 unidades a cada observación.

Resuelve problemas de medidas de tendencia central.

9. Resuelve los siguientes ejercicios.

a. Encuentra la media de 25 números sabiendo que la media de 7 de ellos es 3,6 y la media de los otros 18 números es 5,1.

b. La media de los números 3, 7, 8, 10 y *x* es 6. Determina el valor de x.

c. La media de los pesos de 5 deportistas es de 76 kg. Los pesos de 4 de ellos son 72 kg, 74 kg, 75 kg y 81 kg. ¿Cuál es el peso del quinto deportista?

d. Los números 3, 5, 7, 8 y C se encuentran ordenados en forma creciente. Determina el valor de C si la media es igual a la mediana.

e. Una fábrica produce pastelillos que deben pesar 85 g. Analizadas 400 unidades elegidas al azar, se obtuvo la siguiente información.

Edad (años)	x_i	f_i	F_i
[25, 35[	30	5	5
[35, 45[	40	6	11
[45, 55[	50	8	19
[55, 65[	60	6	25

- Calcula el D_2 y el Q_2.
- Calcula los P_{15} y el P_{75}.

Actividades

Analiza información mediante las medidas de localización.

10. La siguiente tabla corresponde a la distribución de los puntajes de un grupo de estudiantes que rendirán un examen de Matemáticas para la universidad.

Puntaje	Nº de alumnos	%
250 – 299	123	0,1
300 – 349	2 910	1,4
350 – 399	2 389	1,1
400 – 449	10 015	4,7
450 – 499	25 223	4,7
500 – 549	25 999	12,3
550 – 599	37 209	17,6
600 – 649	39 411	18,6
650 – 699	28 645	13,5
700 – 749	21 367	10,1
750 – 799	11 1897	5,3
800 – 849	4 247	2,0
850 – 899	1 597	0,8
900 – 950	1 197	0,6
Total	211 519	100,0

a. ¿Cuántos estudiantes rindieron la prueba?

b. ¿Qué porcentaje de estudiantes obtuvo puntajes menores que los del intervalo 300 – 349?

c. ¿Qué porcentaje de estudiantes obtuvo más de 800 puntos?

d. Calcula la media aritmética de esta distribución de puntajes.

e. Calcula Q_1, Q_2 y Q_3.

f. Calcula P_{10} y P_{90}.

g. Calcula la desviación estándar de esta distribución de puntajes.

h. Construye, utilizando Excel, una curva de distribución de frecuencias.

i. ¿A qué distribución se asemeja la forma de esta curva?

Comprende situaciones de la vida cotidiana a través de la interpretación de datos estadísticos.

11. Se desea estudiar el número de errores de impresión de un libro. Para tal efecto, se selecciona una muestra de 50 páginas. Los resultados fueron los siguientes.

Nº de errores	f_i
0	25
1	20
2	3
3	1
4	1

a. ¿Cuál es el número medio de errores por página?

b. ¿Cuál es la mediana de errores por página?

c. Si el libro tiene 500 páginas, ¿cuántos errores se esperaría que tuviera el libro?

12. Se tiene un conjunto de 5 números consecutivos. La mediana de ellos es N.

a. Obtén la media del conjunto de datos.

b. Encuentra la media de los cuadrados de estos números.

c. Encuentra P_{10}.

d. Responde: ¿Cómo se puede interpretar la información anterior?

13. Resuelve los siguientes ejercicios.

a. Calcula el percentil 65 de los siguientes datos. Luego, interpreta el resultado obtenido.

Valores	f_i
2	12
4	10
6	8
8	7
10	5
12	8
14	10

BECU_M1_B4_P144_173.indd 170 4/22/14 11:59 AM

b. Ordena los siguientes datos de menor a mayor. Luego, calcula el rango de los datos.

3,22	2,93	3,01	4,48
5,06	4,31	2,98	3,07

c. Responde: ¿Qué significa que una persona haya obtenido un puntaje superior al noveno decil (D_9) en un cuestionario de interés científico?

d. La estatura del estudiante más alto de un curso es 1,92 m y la del menor es 1,68 m. Calcula el rango de la estatura de este grupo.

e. Se realizó un estudio estadístico con el objetivo de averiguar la antigüedad de los clientes de una empresa. A partir de los análisis, se pudo determinar que la antigüedad media de un cliente de esta empresa es de 4 años. En cambio, la mediana arrojó un valor de 2,5 años.

i) ¿Cómo se puede interpretar esta información?

ii) ¿Cómo es la desviación estándar de los datos obtenidos?

f. Calcula la desviación estándar de los siguientes datos: 3, 5, 6, 7, 10, 12, 15, 18.

g. Un grupo de deportistas obtuvo las siguientes marcas en atletismo (expresada en horas): 2,60; 2,40; 2,30; 2,00; 2,10. Calcula e interpreta la desviación media de los datos.

h. La siguiente tabla de distribución muestra la estaura de los miembros de un curso de educación media de cierto colegio. Calcula e interpreta, la desviación estándar de estos datos.

Estuaturas	Nº de alumnos (f_i)
[150 - 155[	3
[155 - 160[	7
[160 - 165[	6
[165 -170[	4
[170 - 175[	5

i. Se tienen dos variables X y Y. Ambas presentan la misma media, pero con desviación estándar de 4 y 9, respectivamente. ¿Para cuál de las dos variables la media es la medida más representativa?

j. La media de una variable Z es 10 unidades y la desviación estándar es cero. ¿Qué se puede afirmar respecto de la variable Z?

14. Se lanzó un dado 25 veces, obteniendo los siguientes resultados:

5	3	2	6	5
1	2	3	2	1
5	1	5	2	4
5	6	1	2	4
4	2	2	4	3

a. Si se grafica esta información con un polígono de frecuencias, ¿a qué se asemejaría la curva obtenida? Justifica tu respuesta.

b. Calcula P_{30}.

c. Obtén al menos dos conclusiones a partir de la información anterior.

15. En una prueba, dos cursos A y B obtuvieron los siguientes resultados.

Curso A → Media: 5,1 y s: 0,8
Curso B → Media: 5,2 y s: 0,2
De acuerdo con la información anterior, responde estas preguntas:

a. ¿En qué curso las notas fueron más homogéneas?

b. Es la media de las notas obtenidas por cada curso un valor representativo?

c. Un estudiante del curso A obtuvo un 6,5 y uno del curso B un 6,2. ¿A cuál de los dos estudiantes le fue mejor en la prueba, dentro de su curso?

BECU_M1_B4_P144_173.indd 171 4/22/14 11:59 AM

Evaluación

- Calcula las medidas de tendencia central y de dispersión para diferentes tipos de datos.

2,5 puntos **1. Un hospital tiene los siguientes datos, que representan el peso en libras de 200 bebés prematuros al momento de su nacimiento. Construye una ojiva que permita contestar las siguientes preguntas.**

Clase	Frecuencia
[0,5 - 1,0[	10
[1,0 - 1,5[	19
[1,5 - 2,0[	24
[2,0 - 2,5[	27
[2,5 - 3,0[	34
[3,0 - 3,5[	40
[3,5 - 4,0[	29
[4,0 - 4,5[	17

a. ¿Cuál es el promedio aproximado del conjunto de datos?

b. Si los bebés prematuros de menos de 3 libras se mantienen en una incubadora durante varios días como precaución, ¿cuál es el porcentaje de bebés prematuros que necesitarían incubadora en ese hospital?

2,5 puntos **2. En un intento de estimar la demanda potencial futura, una compañía realizó un estudio en 2012, en el que preguntaba a parejas casadas cuántos automóviles debe tener la familia actual. La compañía promedió las respuestas del hombre y la mujer, a fin de obtener la respuesta global de la pareja. Las respuestas se colocaron en una tabla.**

Número de autos	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
Frecuencia	2	14	23	7	4	2

a. Representa la información en un diagrama de barras.

b. Calcula la Mo y Me.

- Reconoce y elabora cuadros de frecuencias absolutas y frecuencias acumuladas.

2,5 puntos **3. Una compañía hizo un muestreo de sus registros de embarque para cierto día. Los siguientes resultados presentan el tiempo entre la recepción de una orden y su entrega en días.**

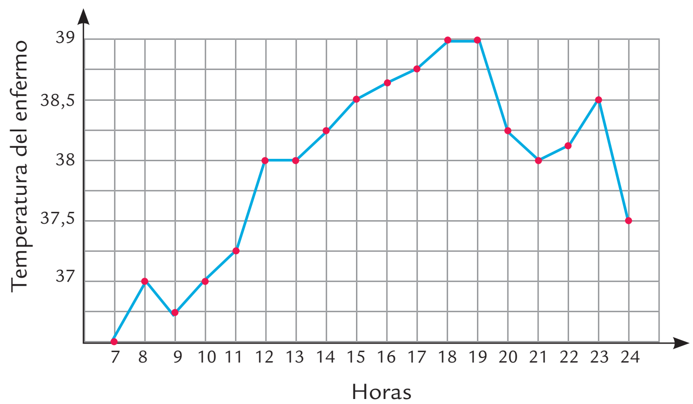
4	6	12	8	14	7	13	13	11	11
20	5	19	10	15	24	7	29	6	7

a. Construye una distribución de frecuencias relativas, con un ancho de intervalo de 6 días.

b. Determina los cuartiles y elabora un diagrama de caja.

- Interpreta diagramas estadísticos a través de los parámetros representados en él.

2,5 puntos **4. El siguiente gráfico corresponde al registro de la temperatura de un enfermo en distintas horas durante un día.**



Responde las siguientes preguntas.

a. Si el límite de la temperatura normal de una persona es 37,5°, ¿entre qué horas tuvo fiebre el enfermo?

b. ¿A qué hora tuvo el enfermo la temperatura más baja?

c. ¿En qué intervalo de tiempo tuvo la temperatura más alta?

d. ¿Cuál fue el cambio más significativo de temperatura que tuvo el enfermo?¿A qué hora se produjo? Explica tu respuesta.

Coevaluación

En grupos, organicen un estudio estadístico del rendimiento que han tenido (todo el curso) en una asignatura que escojan. Organicen la información en tablas y presenten la información con apoyo de un gráfico estadístico.

Autoevaluación (Metacognición)

Explica cómo se interpreta una información estadística utilizando la media y la desviación estándar.

- **Indicador esencial de evaluación**

BECU_M1_B4_P144_173.indd 172 4/22/14 11:59 AM

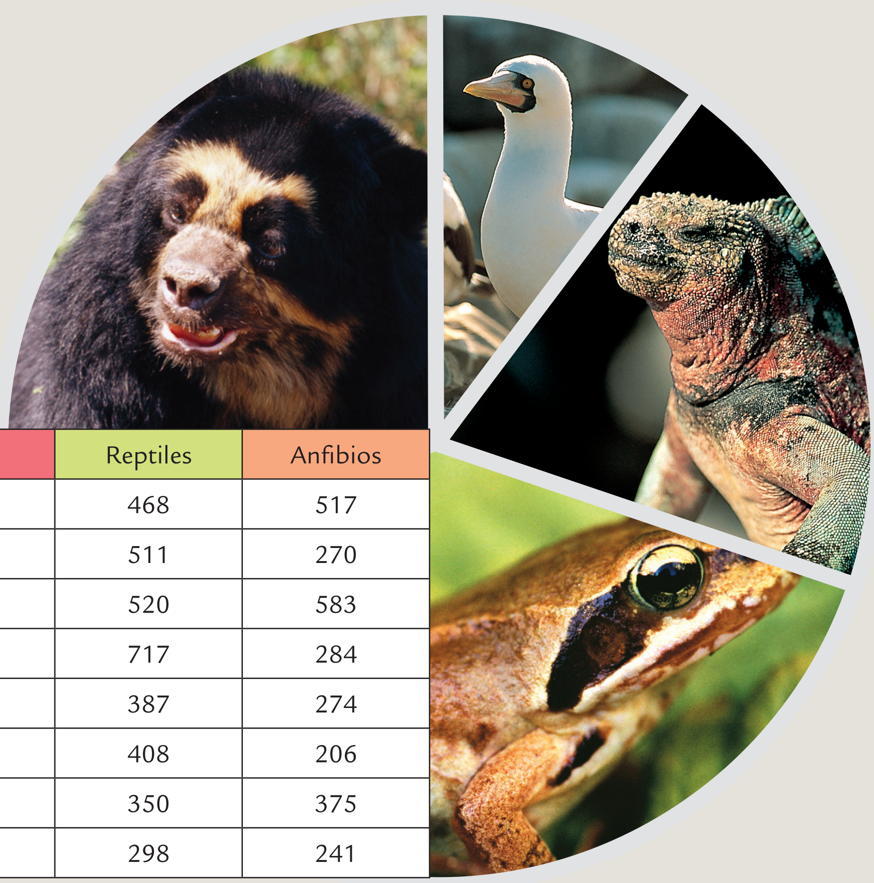
Medioambiente

Biodiversidad

La estadística sirve como herramienta a los ecologistas y biólogos que están involucrados con la preservación y el cuidado de los recursos naturales y la fauna. La riqueza de fauna que existe en nuestro planeta se ha venido acabando debido a la mano devastadora del hombre.

En los últimos años, se han creado organizaciones que se encargan de concienciar al mundo acerca del tema y una de las herramientas que estas utilizan consiste en generar proyectos de investigación en estos campos.

La siguiente tabla muestra los países con mayor diversidad de vertebrados en el mundo.



País	Mamíferos	Aves	Reptiles	Anfibios
Brasil	524	1 622	468	517
Indonesia	515	1 531	511	270
Colombia	456	1 815	520	583
México	450	1 050	717	284
China	499	1 244	387	274
India	360	1 258	408	206
Ecuador	320	1 600	350	375
Perú	344	1 703	298	241

Actividades

1. Determina el total por país en cuanto a biodiversidad de vertebrados.
2. Elabora un histograma de frecuencias para los mamíferos en los distintos países. Escribe algunas conclusiones.
3. Calcula la cantidad media de aves de distinta especie que se encuentran en los países de América.
4. Calcula la desviación estándar del número de especies distintas de mamíferos en América. ¿Es posible afirmar que la diversidad en América es similar en los países representados en la tabla?
5. Compara la desviación estándar de especies de aves con la de especies de reptiles. ¿Qué se puede concluir a partir de estos resultados?
6. Construye el histograma para las variables *país* y *tipo de vertebrado*. Escribe algunas conclusiones.
7. Propón una estrategia para conservar las especies propias de nuestro país.

BECU_M1_B4_P144_173.indd 173 4/22/14 11:59 AM

Bloque 4

Unidad 6

Probabilidad

BECU_M1_B4_P174_208.indd 174 4/22/14 12:09 PM

Antes de empezar

1. Observa las siguientes opciones de prendas de vestir, encuentra las posibilidades de organizar el atuendo.

   Zapatos: botas, zapatillas

   Pantalón de: paño, lino, jean

   Chaqueta: gamuza, cuero

2. Realiza un diagrama de árbol para determinar los posibles resultados en tres lanzamientos de una moneda.

3. Elabora todas las cantidades de tres cifras que se pueden formar con los elementos del conjunto $A = \{5, 7, 9\}$.

Una pareja ideal

Inicialmente, la probabilidad y la estadística se conciben de forma independiente. Las dos tienen una justificación en la antigüedad.

Los orígenes de la estadística están asociados al conteo de personas, riquezas y productos de una colectividad. Estas actividades fueron iniciativa de los gobernantes para conocer la cantidad de súbditos y las riquezas que disponían.

Por su parte, la probabilidad nace ligada a los juegos de azar. Por esta razón, a partir del siglo XVII, la teoría de la probabilidad se volvió muy popular. Inicialmente, la teoría de la probabilidad estudiaba únicamente la aleatoriedad en los juegos; a partir de Blaise Pascal se aplicó a otras áreas como la genética, la psicología y la economía.

En nuestros días, la estadística se ha convertido en un método efectivo para describir con exactitud los valores de datos económicos, políticos, sociales, psicológicos, biológicos o físicos, y sirve como herramienta para relacionar y analizar dichos datos.

El desarrollo de la teoría de la probabilidad ha sobrepasado el alcance de las aplicaciones de la estadística. Muchos conjuntos de datos se pueden aproximar, con gran exactitud, utilizando determinadas distribuciones probabilísticas. La probabilidad es útil para comprobar la fiabilidad de las inferencias estadísticas y para predecir el tipo y la cantidad de datos necesarios en un determinado estudio estadístico.

Objetivo educativo

Reconocer y utilizar las permutaciones, combinaciones y arreglos como técnicas de conteo.

Compotera de coco y mate.
Artesanía elaborada en Esmeraldas.

BECU_M1_B4_P174_208.indd 175 4/22/14 12:09 PM

Probabilidad y azar

Destrezas con criterio de desempeño:

- Reconocer las características de **experimentos aleatorios**, **espacios muestrales y eventos** en diferentes problemas. **(C)**
- Describir **situaciones no determinísticas** mediante el concepto de probabilidad. **(C, P)**
- Determinar el número de **elementos del espacio muestral** de un experimento mediante el uso de las técnicas de conteo adecuadas. **(P, M)**

Conocimientos previos

Indica cuál de los siguientes experimentos son considerados experimentos aleatorios.

a. Extraer una carta al azar.

b. Determinar la cantidad que se debe mezclar de harina y huevos para hacer un pastel.

Actualízate

Blaise Pascal (1623-1662)

A partir de los 12 años comenzó a demostrar su talento para la matemática.

Fue fundador del cálculo, junto con Fermat.

Relacionó ciertos fenómenos probabilísticos con el triángulo que actualmente lleva su nombre.

CONCEPTOS BÁSICOS

Experimentos determinísticos

En este tipo de experimentos se conoce de antemano el resultado.

Ejemplo

En un laboratorio se mezclan, en las proporciones adecuadas, hidrógeno y oxígeno, resultando agua. Se sabe de antemano el resultado, por lo tanto, es un experimento determinístico.

Experimentos aleatorios

Este tipo de experimentos, repetidos una cierta cantidad de veces, en condiciones similares, puede presentar resultados diferentes. En los experimentos aleatorios no se conocen los resultados de antemano.

Ejemplo

Si se introducen bolitas en una tómbola y se extrae una no se sabe de antemano cuál va a salir, por lo tanto, este tipo de experimento es aleatorio.

Espacio muestral y eventos

El conjunto formado por todos los posibles resultados de un experimento se **llama espacio muestral (S)** y cada uno de estos resultados es conocido como **suceso** o **evento elemental (E)**.

Un evento puede ser:

Evento seguro: está formado por todos los resultados posibles del experimento, coincide con el espacio muestral y siempre ocurre.

Evento imposible: nunca ocurre, no se presenta al realizar un experimento aleatorio. Se denota por el símbolo $\varnothing$.

Eventos mutuamente excluyentes: dos eventos que no pueden suceder simultáneamente.

Ejemplo

Si se lanza un dado, se puede obtener cualquier número entero entre 1 y 6. Entonces, el experimento es aleatorio, su espacio muestral es $S: = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y los sucesos elementales son: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Un evento seguro sería obtener un número entre 1 y 6 y, un evento imposible, obtener un número mayor que 6.

Actividades

Determina el espacio muestral de un experimento.

1. Se lanzan dos dados y se multiplica el número de puntos obtenidos en cada uno. ¿Cuántos resultados se pueden obtener? Forma el espacio muestral e indica un suceso imposible y uno seguro.

2. Se lanzan dos dados y se suman los puntos. ¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener? Forma el espacio muestral e indica un suceso imposible y uno seguro.

BECU_M1_B4_P174_208.indd 176 4/22/14 12:09 PM

Probabilidad de un suceso

Si un experimento se repite **n** veces bajo las mismas condiciones, la probabilidad de que el evento **E** ocurra se denota por **P(E)** y corresponde a un valor comprendido entre **0** y **1**.

Eventos equiprobables

Si en un experimento todos los sucesos tienen la misma probabilidad de ocurrir, se dice que los sucesos son **equiprobables**.

REGLA DE LAPLACE

Si en un experimento aleatorio los sucesos son equiprobables, entonces, la probabilidad de que el evento **A** ocurra está dado por la expresión:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso (E)}}{\text{número de casos posibles (S)}}$$

Ejemplo

Se lanzan 2 dados: uno rojo y otro verde. Interesa observar el producto del puntaje obtenido en los dados, es decir,

E: producto del puntaje de los dados.

Los posibles resultados se muestran en la tabla:

·	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Solución

Luego, la probabilidad de que ocurra el evento E dado, es:

P(E = 1) = 1/36 0,028
P(E = 2) = 2/36 0,06
P(E = 3) = 2/36 0,06
P(E = 4) = 3/36 0,08
P(E = 5) = 2/36 0,06
P(E = 6) = 4/36 0,11

P(E = 8) = 2/36 0,06
P(E = 9) = 1/36 0,028
P(E = 10) = 2/36 0,06
P(E = 12) = 4/36 0,11
P(E = 15) = 2/36 0,06
P(E = 16) = 1/36 0,028

P(E = 18) = 2/36 0,06
P(E = 20) = 2/36 0,06
P(E = 24) = 2/36 0,06
P(E = 25) = 1/36 0,028
P(E = 30) = 2/36 0,06
P(E = 36) = 1/36 0,028

Como se puede observar, la mayor probabilidad corresponde a P(E = 6) y P(E = 12), es decir, obtener como resultado del producto 6 o 12.

Toma en cuenta

Ley de los grandes números se refiere a que a medida que aumenta el número de repeticiones de un experimento aleatorio, la frecuencia relativa (ver páginas 148 y 149) de un suceso E se aproxima cada vez más a su probabilidad.

Tarea

Determina el espacio muestral del experimentos de lanzar un dado por tres veces seguidas.

Actualízate

Pierre Simon Laplace

(1749-1827)

Uno de los físicos y matemáticos más destacados de su tiempo. Sus principales aportes fueron en el campo de la probabilidad y la astronomía.

Operaciones con sucesos: $A \cap B$, $A \cup B$ y A^c

Destrezas con criterio de desempeño:

- Calcular la **probabilidad de eventos simples y compuestos** (uniones, intersecciones, diferencias) en espacios muestrales finitos, asociados a experimentos contextualizados en diferentes problemas (frecuencias, juegos de azar, etc.). **(P)**
- Conocer y utilizar correctamente el lenguaje de las **probabilidades** en el planteamiento y resolución de problemas. **(C)**

Conocimientos previos

Dados los conjuntos:

A = { 1, 2, 3, 4, 5} y
B = { 1, 4, 5, 7, 8, 9}

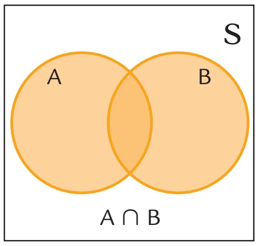
- Realiza la unión de los conjuntos
- Realiza la intersección de los conjuntos

Actualízate

P(S) = 1

P(∅) = 0

Representación gráfica



Intersección de dos eventos

Toma en cuenta

Notación
La probabilidad de que ocurra la intersección de dos eventos **A** y **B** se denota **P(A y B)**.
Además
P(A y B) = **P(A ∩ B)**.

Las operaciones de eventos o sucesos suelen representarse a través de diagramas, para esto, se recurre a las operaciones con conjuntos.

Las operaciones más usuales de sucesos o eventos son **intersección**, **unión** y **complemento**.

INTERSECCIÓN DE SUCESOS

La intersección de dos sucesos **A** y **B**, corresponde al suceso formado por los elementos comunes de **A** y **B**, es decir, el resultado del experimento es a la vez un elemento de A y un elemento de B, simultáneamente, y se denota **A ∩ B**.

Además, si **A** y **B** son eventos **mutuamente excluyentes**, su intersección es el evento nulo, es decir:

$$\boxed{A \cap B = \varnothing}$$

Ejemplos

1. Se definen los siguientes sucesos relacionados con el lanzamiento de un dado:

A: el número obtenido es impar → {1, 3, 5}.

B: el número obtenido es menor que 3 → {1, 2}.

Luego, A ∩ B = {1}.

2. Se definen los siguientes sucesos:

A: un trabajador pertenece a una empresa A.

B: un trabajador es ecuatoriano.

Luego, A ∩ B: un trabajador ecuatoriano pertenece a la empresa A.

Probabilidad de la intersección de sucesos

La probabilidad de que ocurra la intersección de **dos sucesos independientes** entre sí (la ocurrencia de uno de ellos no depende de la ocurrencia del otro), está dada por la expresión:

$$\boxed{P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)}$$

Donde:

P(A): probabilidad de que ocurra el suceso A.

P(B): probabilidad de que ocurra el suceso B.

Esta fórmula se conoce como **ley multiplicativa**.

Actividades

1. Escribe en palabras los sucesos.

Una persona estudia la posibilidad de realizar tres tipos de inversiones en: la bolsa (B), fondos de inversión (F) y valores inmobiliarios (I). Explica en palabras los sucesos B ∩ F, B ∩ I, F ∩ I.

BECU_M1_B4_P174_208.indd 178 4/22/14 12:09 PM

Trabajo grupal

Determinen cuántas elementos forman el conjunto del evento de obtener tres caras iguales al lanzar un dado tres veces seguidas.

Ejemplo

1. Al extraer dos cartas de una baraja inglesa, con reposición, se definen los siguientes sucesos:

   A: que la primera carta sea as.

   B: que la segunda carta sea as.

   C: que la primera carta sea rey.

   Determinar:

   a. P(A y B)

   b. P(A y C)

Solución

a. Al extraer una carta de una baraja se tienen 4 casos favorables al suceso A y 52 casos posibles, aplicando la ley de Laplace se tiene que:

$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

Del mismo modo, $P(B) = \frac{1}{13}$

A y B son sucesos independientes ya que el resultado obtenido en la segunda extracción no dependerá del resultado obtenido en la primera extracción, entonces:

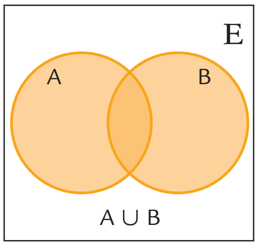
$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{169}$ ▶ 0,0059, luego P(A y B) 0,0059.

El resultado del experimento es un elemento de A y un elemento de B o de ambos a la vez.

b. Los sucesos A y C son mutuamente excluyentes, por lo tanto, P(A y C) = ∅.

Actualízate

Representación gráfica



Unión de dos eventos

UNIÓN DE SUCESOS

La unión de dos eventos **A** y **B** incluye todos los resultados posibles de **A** y de **B**, es decir, el resultado del experimento es un elemento de **A**, un elemento de **B** o de ambos a la vez.

Ejemplo

Se definen los siguientes sucesos relacionados con el lanzamiento de un dado:

A: el número obtenido es par ▶{2, 4, 6}.

B: el número obtenido es mayor que 2 ▶{3, 4, 5, 6}.

Luego, A ∪ B = {2, 3, 4, 5, 6}.

Actividades

1. Escribe en palabras los sucesos.

   Una persona estudia la posibilidad de realizar tres tipos de inversiones en: la bolsa (B), fondos de inversión (F) y valores inmobiliarios (I). Explica en palabras los sucesos B ∪ F, B ∪ I, F ∪ I.

Toma en cuenta

Notación
La probabilidad de la unión de dos sucesos **A** y **B** se denota como **P(A y B)**.

Además **P(A o B)** = **P(A ∪ B)**.

Probabilidad de la unión de dos sucesos.

La probabilidad de que ocurra la unión de dos sucesos excluyentes entre sí está dada por la expresión:

$$\boxed{P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)}$$

La probabilidad de que ocurra la unión de dos sucesos no excluyentes, está dada por la expresión:

$$\boxed{P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)}$$

Ejemplo

1. Al extraer un naipe de una baraja, determinar:

a. la probabilidad de obtener un corazón o un trébol.

b. la probabilidad de obtener un corazón o un rey.

Solución

a. Sean los sucesos A: obtener un naipe de corazón y B: obtener un naipe de trébol.

$P(A) = \frac{13}{52}$ y $P(B) = \frac{13}{52}$

Los sucesos A y B son mutuamente excluyentes, por lo tanto, la probabilidad de obtener un naipe de corazón o de trébol está dada por la expresión:

$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Luego, la probabilidad de obtener corazón o trébol es 0,5.

b. Los sucesos A: obtener un naipe de corazón y C: obtener un rey.

Además, $P(A) = \frac{13}{52}$ y $P(C) = \frac{4}{52}$ (en la baraja 4 naipes corresponden a reyes).

Los sucesos A y C no son mutuamente excluyentes, ya que existe una carta que es corazón y además es rey, por lo tanto:

$P(A \text{ o } C) = P(A) + P(C) - P(A \text{ y } C) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} = \frac{1}{52} = \frac{16}{52} \approx 0{,}31$

Luego, la probabilidad de obtener corazón o rey es aproximadamente 0,31.

Actividades

Determina la probabilidad la intersección y unión de sucesos.

1. Si se conoce que:

$A = \{x/x$ es múltiplo de tres$\}$.

$B = \{ x/x$ es un número primo$\}$.

$C = \{x/x$ es un número menor que $10\}$.

Realiza las siguientes operaciones.

a. $A \cap B$

b. $B \cap C$

c. $A \cap C$

d. $(A \cap B) \cup C$

e. $(B \cap C) \cup A$

Propiedades de la intersección y unión de sucesos

Propiedad	Unión	Intersección
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

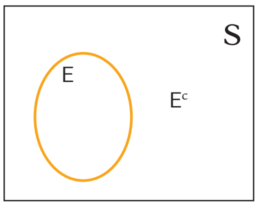
COMPLEMENTO DE UN SUCESO

El complemento de un suceso **E**, denotado por $\mathbf{E^c}$, considera a todos los resultados que no corresponden a **E**.

Por definición, **E** y $\mathbf{E^c}$ son mutuamente excluyentes, es decir, su intersección es el evento nulo, ya que no tienen elementos en común.

Actualízate

Representación gráfica



Complemento de un suceso

Notación.
El complemento de un suceso también se denota como E^c o como A'.

Propiedades del complemento de un suceso

Dado un suceso **E** y su complemento $\mathbf{E^c}$, se tiene:

- $\mathbf{E \cap E^c = \varnothing}$
- $\mathbf{E \cup E^c = S}$
- $\mathbf{P(E) + P(E^c) = 1}$

Ejemplo

Para el lanzamiento de un dado se define el siguiente suceso:

A: obtener un número impar, es decir, $A = \{1, 3, 5\}$, el complemento de A está dado por $A^c = \{2, 4, 6\}$, es decir, por todos los números que no son impares, además $A \cup A^c = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = E$.

Además $P(A) + P(A^c) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6}$

LEYES DE MORGAN

Dados dos sucesos **A** y **B** y sus complementos $\mathbf{A^c}$ y $\mathbf{B^c}$, respectivamente, se tiene que:

$$\boxed{(A \cup B)^c = A^c \cap B^c}$$

Además:

$$\boxed{(A \cap B)^c = A^c \cup B^c}$$

Actividades

1. Si se conoce que $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$A = \{x/x$ es múltiplo de tres$\}$.

$B = \{ x/x$ es un número primo$\}$

Demuestra que $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$.

Actividades

Analiza experimentos aleatorios.

2. Un experimento consiste en lanzar una moneda cuatro veces.

a. Encuentra el espacio muestral S por medio de un diagrama de árbol.

b. Determina el número de elementos del espacio muestral S.

c. Halla la probabilidad de los siguientes eventos:

A: obtener dos caras

B: obtener máximo un sello

C: no obtener sello

D: obtener por lo menos una cara y un sello

Determina experimentos aleatorios.

3. Se lanza un dado dos veces y se resta el resultado de sus caras.

a. Determina los puntos muestrales del experimento aleatorio.

b. Encuentra la probabilidad de los siguientes eventos:

M: obtener un número mayor que 3

N: obtener un número menor que cero

P: obtener un número par

Q: obtener un número primo

R: obtener un divisor de 30

4. Rosita tiene que escoger una camisa y un pantalón. Si tiene una camisa roja, una camisa negra, una camisa azul, un pantalón negro y un pantalón azul, calcula la probabilidad de que escoja:

a. la camisa azul

b. la camisa roja

c. el pantalón azul

d. la camisa roja y el pantalón negro

e. camisa negra y pantalón negro

Analiza la probabilidad que se dé un resultado.

5. Al escribir números de tres cifras con los dígitos pares, cuál es la probabilidad de que:

a. el número empiece con 4.

b. el número contenga un múltiplo de 6.

c. el número termine en 6.

d. el número tenga el 4 o el 8.

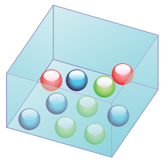
6. Entre Lina, Paola, Sandra y Héctor se quiere escoger dos estudiantes para que asistan a un congreso. Indica cuál es la probabilidad de que:

a. Héctor sea escogido.

b. Paola o Lina sean el dúo escogido.

c. Sandra no asista.

7. En una urna, hay 4 bolas verdes, 2 rojas y 4 azules. Calcula la probabilidad de que al extraer una bola al azar, salga roja.



8. Adriana está organizando un bingo y marca los cartones con dos letras y tres números.

a. Determina la cantidad de cartones distintos que puede elaborar Adriana.

b. Encuentra la probabilidad de que los cartones contengan solo números pares.

c. Halla la probabilidad de que los cartones contengan una vocal y un número primo.

9. Con los dígitos impares se forman números de dos cifras (con repetición, por ejemplo, se acepta el número 33).

a. Determina cuántos números distintos se forman.

b. Halla el espacio muestral con un diagrama de árbol.

c. Halla la probabilidad de obtener un número múltiplo de 5.

d. Halla la probabilidad de que el número que se obtenga empiece con un número primo.

BECU_M1_B4_P174_208.indd 182 4/22/14 12:09 PM

10. Se extrae una carta de una baraja de naipes. Halla la probabilidad de los sucesos A (la carta extraída es un corazón negro), B (es un diamante), C (es un as), y también de los sucesos:

$A \cup B$ $A \cap B$ $A \cap B \cap C$
$A \cup C$ $A \cap C$

Realiza operaciones entre sucesos.

11. Las calificaciones de un estudiante vienen dadas por números enteros. Considérense los sucesos A (obtener una calificación superior o igual a 5), B (obtener un 9) y C (obtener un 4).

Describe los sucesos:

A, B, C, $A \cap B$ $A \cup (B \cap C)$
$A \cup B$ $A \cup C$ $B \cap (A \cup C)$

12. Una urna contiene 4 bolas blancas, 1 roja y 5 negras. El experimento es sacar una bola al azar. Calcula las probabilidades de sacar:

a. una bola blanca
b. una bola roja
c. una bola que no sea negra
d. una bola que no sea roja
e. una bola verde
f. una bola blanca o negra

13. Un estudiante se presenta a un examen tipo test compuesto por cien preguntas, cada una de las cuales va acompañada de cuatro respuestas, solo una de las cuales es la correcta. 60 de las preguntas corresponden a la parte del programa que el alumno ha preparado y en ellas tiene una probabilidad del 80% de contestar acertadamente. En las restantes, señalará al azar una de las cuatro respuestas. Calcula cuál es la probabilidad de que sus respuestas sean correctas.

Resuelve problemas de probabilidades.

14. En una caja hay 5 botones rojos, 3 azules y 7 verdes. Si sacamos un botón al azar, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

a. Sacar un botón rojo
b. Sacar un botón verde o azul
c. Sacar un botón azul

15. Se lanzan dos dados al aire. Sabiendo que la suma de los puntos ha sido 7, halla la probabilidad de que en alguno de los dados aparezca un 6.

16. De una baraja de 52 cartas, se extrae al azar una. Calcula estas probabilidades.

a. Que sea as. b. Que sea J o K.

17. Se distribuyen 3 bolas en dos urnas (A y B). Escribe el espacio muestral de todas las configuraciones posibles. Halla la probabilidad de que la urna A contenga exactamente 0, 1, 2 o 3 bolas.

18. Un estudiante sabe 15 de los 25 temas de un examen. Debe elegir dos temas al azar y exponer uno de ellos a su elección. Halla la probabilidad de que pueda exponer un tema que sepa.

19. Una caja contiene bolas blancas y rojas. Se sacan diez bolas, de una en una, resultando la siguiente serie: b, b, r, b, b, b, r, b, b, r. ¿Cuáles han sido las frecuencias absolutas y relativas de los sucesos A (sacar bola blanca) y B (sacar bola roja)?

20. Considerando el dado dodecaédrico, indica cuáles de los siguientes sucesos son equiprobables.

a. Que salga un número múltiplo de 3.
b. Que salga un número menor que 4.
c. Que salga un número compuesto.
d. Que salga un número mayor que 7

Indica cuáles de los sucesos A, B, C y D anteriores son equiprobables si se considera un dado en forma de icosaedro, con 20 caras numeradas de 1 a 20.

21. Las seis caras de un cubo están pintadas de color rojo o azul. Halla cuántas son de cada color si la probabilidad de que salga cara roja al lanzarlo es:

a. $\frac{2}{3}$
b. $\frac{5}{6}$
c. $\frac{1}{6}$
d. $\frac{1}{3}$

BECU_M1_B4_P174_208.indd 183 4/22/14 12:09 PM

Diagrama de árbol y triángulo de Pascal

Destreza con criterio de desempeño:

Establecer la **técnica de conteo** apropiada para un experimento, mediante la identificación de las variables que aparecen en el experimento y la relación que existe entre ellas. **(C, M)**

Conocimientos previos

Escribe tres menús que se pueden formar con la siguiente información.

Plato fuerte

- Carne
- Pollo

Acompañado

- Ensalada
- Papas fritas
- Bebida
- Jugo
- gaseosa

Toma en cuenta

Historia de la probabilidad.

Las leyes del azar no surgen antes del siglo XVI, posiblemente debido a que el intento de anticipar los resultados de algún suceso se podía interpretar como adivinar la acción de los dioses, lo cual era considerado de mala suerte.

DIAGRAMA DE ÁRBOL

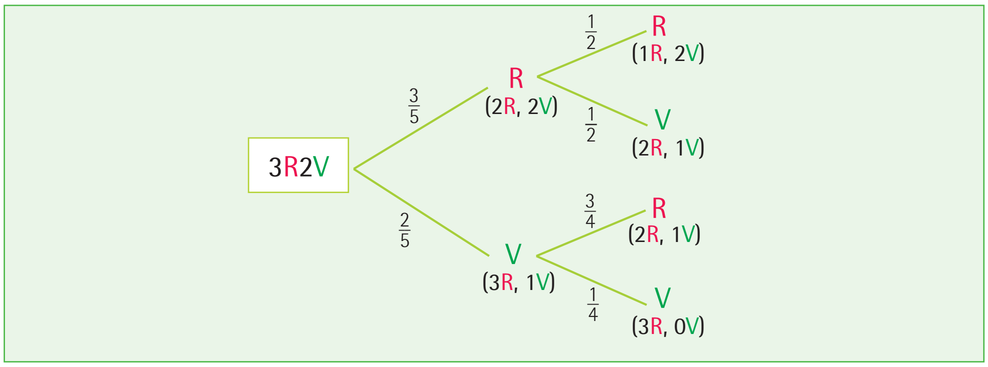
Un **diagrama de árbol** corresponde a una representación gráfica de un experimento que tiene varias etapas. Cada una de las etapas tiene un número finito de posibilidades, las cuales son representadas mediante ramas.

El número total de posibilidades del experimento se obtienen contando las ramas finales del árbol.

Ejemplo

Se tiene una urna con 3 fichas rojas y 2 verdes. Para calcular la probabilidad de obtener fichas del mismo color en dos extracciones sucesivas sin remplazo, basta con determinar los casos favorables a este suceso, los cuales se pueden extraer del siguiente diagrama:

(luego de cada extracción se indica, entre paréntesis, las fichas de cada color que quedan en la urna).



Solución

Como se puede observar, la probabilidad de obtener fichas del mismo color es $\frac{2}{5}$, ya que:

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\underbrace{\frac{3}{10}}_{\text{probabilidad de obtener 2 fichas rojas}}+\underbrace{\frac{2}{20}}_{\text{probabilidad de obtener 2 fichas verdes}}=\frac{2}{5}$$

Actividades

Determina un espacio muestral a través de un diagrama de árbol.

1. Una fábrica de pantalones vaqueros produce 2 tipos de pantalones (unos con botones y otros con cierres) en 4 colores (azul, negro, blanco y verde) y en 3 tallas (pequeña, mediana y grande). Representa este proceso mediante un diagrama de árbol y obtén el número de modelos distintos que se fabrican.
2. ¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2 y 3? Encuentra todos los números mediante un diagrama de árbol.
3. Cuando Carla y Juan van a almorzar, les indican que pueden escoger dos platos para armar su menú. El primer plato puede ser pasta o legumbres y para el segundo plato pueden elegir entre pescado, carne o huevos. Mediante un diagrama de árbol determina cuáles son los posibles menús que pueden escoger.

BECU_M1_B4_P174_208.indd 184 4/22/14 12:09 PM

TRIÁNGULO DE PASCAL

El **triángulo de Pascal** es un triángulo formado por números enteros positivos. Se puede utilizar para calcular la probabilidad de ocurrencia de un cierto suceso en un experimento dado.

Características del triángulo de Pascal

- Todas las filas del triángulo comienzan y terminan por la unidad, y son simétricas respecto al valor central.
- Cada número del triángulo corresponde a la suma de los dos números ubicados arriba de él. Estos coeficientes representan la cantidad de casos favorables de un determinado suceso.
- La suma de todos los elementos de cada fila corresponde al valor 2^n, siendo n el orden de la fila. Este valor indica la cantidad de casos posibles de un determinado suceso.
- Se puede seguir su construcción de manera infinita.

Actualízate

Triángulo de Tartaglia.

El triángulo de Pascal también es conocido como triángulo de Tartaglia en honor a su creador, el italiano Nicolo Tartaglia.

Orden de la fila	Coeficientes del triángulo de Pascal	N° de términos
n = 0	1	1 = 20 = 1
n = 1	1 1	1 + 1 = 21 = 2
n = 2	1 2 1	1 + 2 + 1 = 22 = 4
n = 3	1 3 3 1	1 + 3 + 3 + 1 = 23 = 8
n = 4	1 4 6 4 1	1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 24 = 16
n = 5	1 5 10 10 5 1	1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 25 = 32

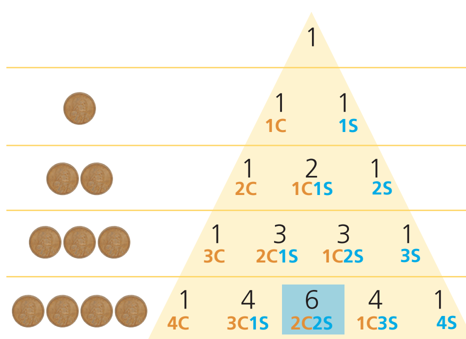
Ejemplo

1. Determinar la probabilidad de obtener igual número de caras (C) y sellos (S) al lanzar 4 monedas.

Se determinará la probabilidad pedida utilizando el triángulo de Pascal. Para la solución, hay que fijarse en el orden de la fila del triángulo; como son 4 monedas se construirá hasta la fila de orden 4, es decir, 2^4. Luego, la cantidad de casos posibles de este evento corresponde a 16.

Arbitrariamente, se elige de izquierda a derecha que el primer 1 de la fila de orden 4, representará la probabilidad de que salga una vez 4C.

Luego, al avanzar hacia la derecha se tienen 4 casos en los cuales se obtiene 3C y 1S; 6 casos con 2C y 2S (probabilidad buscada); 4 casos con 1C y 3S, y finalmente 1 caso con 4S.



Luego, la probabilidad de obtener el mismo número de caras y sellos es de: $\frac{6}{16} = 0{,}375$.

Tarea

Determina la probabilidad de obtener igual número de caras (C) y sellos (S) al lanzar 6 monedas.

Actividades

Analiza las variables en un experimento aleatorio.

1. Determina el tipo de variable en cada caso.

a. Número de respuestas correctas en una prueba de 10 preguntas

b. Nivel de educación de los habitantes de una ciudad (Prebásica, básica, bachillerato)

c. Intensidad de los temblores (escala de Richter) ocurridos en el año 2012 en Ecuador

d. Religión de determinados individuos

e. Superficie de los 40 lagos más grandes del mundo

f. Grupo socioeconómico de una persona

g. Tiempos de espera en la fila de un banco

h. Semestre que cursan los estudiantes de Geografía

i. Peso de los estudiantes de un colegio

j. Estado civil de los trabajadores de una empresa (soltero, casado, viudo, separado)

Determina el espacio muestral.

2. Una caja contiene 3 bolitas: 1 roja, 1 verde y 1 azul. Si se considera el experimento que consiste en sacar 2 bolitas de la caja, con reposición:

a. describe el espacio muestral del experimento.

b. describe el espacio muestral, si la segunda bolita es sacada sin reposición.

Analiza los sucesos que se dan en un experimento aleatorio.

3. Si se lanzan dos dados de cuatro caras numeradas del 1 al 4 y se suman los números obtenidos en la cara de apoyo:

a. ¿cuál es el espacio muestral?

b. escribe dos sucesos compatibles.

c. escribe dos sucesos incompatibles.

d. escribe dos sucesos contrarios.

4. Si se lanza una vez un dado de seis caras:

a. ¿cuántos resultados se pueden obtener?

b. ¿cuál es un resultado seguro?, ¿y uno imposible?

c. asignar probabilidades a todos los resultados que se pueden obtener.

5. Cuatro corredores igualmente calificados, Juan, Guillermo, Eduardo y David, corren los 100 metros libres y se registra el orden de llegada.

a. ¿Cuántos eventos simples hay en el espacio muestral?

b. Si los corredores están igualmente calificados, ¿qué probabilidad se debe asignar a cada evento simple?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que David gane la competencia?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que David gane y Juan quede en segundo lugar?

e. ¿Cuál es la probabilidad de que Eduardo llegue en último lugar?

6. En una alcancía hay 20 billetes de \$1 y 24 de \$5. Si se saca un billete al azar:

a. ¿cuál es la probabilidad de que sea un billete de \$5?

b. ¿cuál es la probabilidad de que sea un billete de \$1?

7. Un espacio muestral contiene diez eventos simples $E1, E2, ..., E10$. Si $P(E1) = 0{,}3$, $P(E2) = 0{,}45$ y los eventos simples restantes son equiprobables. Calcular las probabilidades de los eventos restantes.

8. Un espacio muestral S consta de cinco eventos simples con las siguientes probabilidades:

$P(E1) = P(E2) = 0{,}15$

$P(E3) = 0{,}4$

$P(E4) = 2 \cdot P(E5)$

a. Calcula las probabilidades para E4 y E5.

b. ¿Cuál de los eventos es más probable?

c. ¿Cuál es el evento menos probable?

BECU_M1_B4_P174_208.indd 186 4/22/14 12:09 PM

Determina la probabilidad de que se dé un resultado.

9. En las votaciones para elegir al consejo estudiantil de un colegio de 900 estudiantes; 325 votaron por la lista A, 375 por la B y el resto por la C. Si se extrae un voto al azar, ¿a qué lista es más probable que pertenezca?

10. Una bandeja tiene 3 sobres rojos, 2 sobres verdes, 2 sobres blancos y 1 azul (todos los sobres son de igual forma y tamaño). Si se toma un sobre de la bandeja sin mirar:

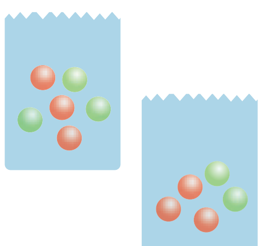
a. ¿cuál es el color con mayor probabilidad de ser escogido?

b. ¿cuál es el color con menor probabilidad de ser escogido?

c. ¿qué colores tienen igual probabilidad de ser escogidos?

11. Se tiene dos bolsas con bolas, como se muestra en la imagen.

Se saca una bola de cada bolsa. ¿De qué bolsa es más fácil sacar una bola roja?



Calculan probabilidad mediante operaciones entre sucesos.

12. Al considerar el lanzamiento de dos monedas, se definen los siguientes sucesos:

A: obtener al menos una cara

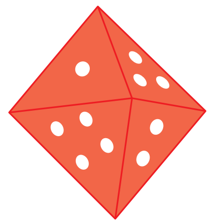
B: obtener solo una cara

Determina:

a. $A \cup B$ c. A^c

b. $A \cap B$ d. B^c

13. Considerar el lanzamiento de un dado de ocho caras numeradas del 1 al 8, como se ve en la figura.



Se definen los sucesos A: sale número par y B: sale número primo. Determinar los siguientes sucesos:

a. $A \cup B$ c. B^c

b. $A \cap B$ d. $A^c \cap B$

14. Calcular la probabilidad de que al lanzar dos monedas:

a. se obtenga exactamente una cara.

b. No se obtenga ninguna cara.

Analiza el valor de verdad de enunciados.

15. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica las falsas.

a. La probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda es de 1/2.

b. En la regla de Laplace, el numerador puede ser mayor que el denominador.

c. La probabilidad de que al extraer una carta de una baraja inglesa se obtenga un 15 es 0.

d. La probabilidad de que al lanzar una moneda salga cara o sello es 1.

e. La probabilidad de que salga un 2 al lanzar un dado es 1/6.

Actividades

Resuelve problemas de probabilidad.

16. Resuelve.

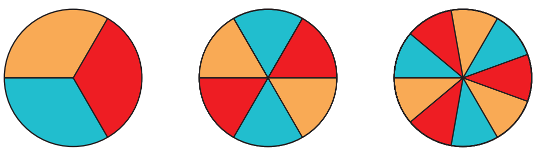
a. La probabilidad de cierto suceso es 0,2. ¿Cuál es la probabilidad de ocurrencia del suceso contrario?

b. Se extrae una ficha al azar de un dominó y se calcula la diferencia en valor absoluto de los puntos. ¿Qué valor de esta diferencia tiene mayor probabilidad?

c. ¿Cuál es la probabilidad de no obtener un 6 al lanzar un dado?

d. En un juego, una persona gana si al arrojar tres monedas al aire obtiene solo caras o solo sellos y pierde si resultan una o dos caras. ¿Cuál es la probabilidad de que gane?

e. Una persona debe elegir una ruleta de las que aparecen a continuación para jugar con 2 amigos más. ¿Cuál debería elegir si quiere tener más posibilidades de ganar (cada color representa a un participante? Justificar.



17. Se lanzan dos dados a la vez. Indica cuál es la probabilidad de:

a. que la suma de los puntos sea igual a 12.

b. no sacar doble 5.

c. obtener una suma de puntos mayor que 5.

d. obtener una suma de puntos menor que 12.

18. En familias de tres hijos, se estudia la distribución de sus sexos. Por ejemplo (H, M, M) significa que el mayor es hombre y las otras dos son mujeres.

a. Determina el espacio muestral E.

b. Considerando los eventos:

A: «la menor es mujer»

B: «el mayor es hombre». ¿Qué representa $A \cup B$?

c. Calcular P(A), P(B), $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$.

19. La probabilidad de que una persona tenga el pelo liso es 0,6; la de que tenga pelo castaño es 0,42. Si se elige una persona al azar, calcula la probabilidad de que:

a. no tenga el pelo liso.

b. tenga el pelo liso y castaño.

c. no tenga el pelo castaño.

20. En el cumpleaños de Sofía, los invitados (niños y niñas) eligieron tomar helado de piña o de naranja según muestra la tabla.

	Piña	Naranja
Niño	20	8
Niña	15	13

Si se elige a un invitado al azar, calcula la probabilidad de que:

a. pidiera helado de piña.

b. sea niño.

c. sea niña y haya pedido helado de piña.

d. sea niño y haya pedido helado de naranja.

21. En una bolsa hay dados verdes, blancos, rojos, negros y azules. Se sabe que las probabilidades de sacar un dado de cada color son:

P(verde) = 0,12 P(rojo) = 0,40

P(blanco) = 0,24 P(negro) = 0,10.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar un dado al azar sea verde o rojo o blanco?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar un dado al azar no sea ni azul ni verde?

c. ¿Cuál es la mínima cantidad de dados que puede haber en la bolsa?

BECU_M1_B4_P174_208.indd 188 4/22/14 12:09 PM

22. En una comida hay 28 hombres y 32 mujeres. Han comido carne 16 hombres y 20 mujeres. El resto comió pescado. Si se elige una persona al azar:

a. ¿cuál es la probabilidad de que haya comido pescado?

b. ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre y haya comido pescado?

23. Se tiene un dado de ocho caras: 4 rojas y 4 blancas, donde los números 1, 3, 5 y 7 se encuentran sobre caras blancas y los números 2, 4, 6 y 8 sobre caras rojas. Si se lanza el dado una vez, calcula la probabilidad de que salga:

a. rojo o mayor que 3

b. blanco y número primo

c. rojo y par

d. impar y blanco

24. En una biblioteca hay 24 libros de matemática, clasificados por tema de la siguiente forma:

A: álgebra. B: cálculo. C: geometría.

Los datos dados a continuación representan la cantidad de libros que contienen material relativo a tales temas:

$n(A) = 8$

$n(A \cap B) = 5$

$n(B) = 13$

$n(A \cap C) = 3$

$n(A \cap B \cap C) = 2$

$n(C) = 13$

$n(B \cap C) = 6$

a. ¿Cuántos libros tienen material de álgebra?

b. ¿Cuántos libros tienen material de cálculo y geometría?

25. Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio. Si $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ y $P(A \cup B) = \frac{7}{15}$, calcular:

a. la probabilidad de que se cumplan A y B.

b. la probabilidad de que se cumpla A y no B.

c. la probabilidad de que no se cumpla A ni B.

26. De las 100 personas que asisten a un congreso, 30 hablan francés; 60, inglés; 46, español, 11, francés e inglés; 12, francés y español; y 13, inglés y español. Si se eligen dos asistentes al azar:

a. ¿cuál es la probabilidad de que ninguno hable francés?

b. ¿cuál es la probabilidad de que los dos hablen español?

c. ¿cuál es la probabilidad de que se entiendan solo en español?

d. ¿cuál es la probabilidad de que solo hablen un idioma?

e. ¿cuál es la probabilidad de que hablen los tres idiomas?

27. Se lanza un dado equilibrado de 6 caras. Considerando la variable aleatoria A = número de caras pares obtenidas en tres lanzamientos sucesivos:

a. ¿cuál es la probabilidad de que A = 2?

b. ¿cuál es el número esperado de caras pares en tres lanzamientos consecutivos?

BECU_M1_B4_P174_208.indd 189 4/22/14 12:09 PM

Problemas de ampliación

1. Actualidad. Un concesionario ofrece dos automóviles, uno de modelo antiguo y uno de modelo contemporáneo. Las opciones de ensamblado para cada automóvil son: Ecuador, Estados Unidos, Europa o Asia.

a. ¿Cuáles son los posibles resultados del experimento que consiste en escoger dos automóviles?

b. ¿Cuáles resultados están contenidos en el evento de que un automóvil sea ensamblado en Ecuador y el otro automóvil sea ensamblado en el extranjero?

c. ¿Cuáles resultados están contenidos en el evento de que por lo menos uno de los automóviles sea de fabricación extranjera?

d. Enunciar cinco eventos simples.

2. En una corporación de ahorro y vivienda se toma una muestra de cuatro créditos hipotecarios. Cada crédito está clasificado como de tasa fija (TF) o de tasa variable (TV).

a. Elabora un diagrama de árbol para determinar el espacio muestral del experimento.

b. ¿Cuáles resultados están incluidos en el evento de que exactamente tres de las hipotecas sean de tasa fija?

c. ¿Cuáles resultados están incluidos en el evento de que las cuatro hipotecas sean del mismo tipo?

3. Se lanza un par de dados, uno de color rojo y otro de color azul, y se anota el resultado que corresponde a la suma de los puntos de la cara superior de cada dado.

a. ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?

b. Si los dos dados fueran del mismo color, ¿el espacio muestral sería el mismo? Si la respuesta es no, construir el nuevo espacio muestral. Si la respuesta es sí, justificarla.

c. ¿Cuáles resultados están incluidos en el evento de que la suma sea mayor de 6?

4. Se lanza una moneda al aire cuatro veces y se anota el resultado, cara (C) o sello (S).

a. Mediante un diagrama de árbol encontrar el espacio muestral del experimento.

b. Si se lanzaran cuatro monedas al aire y se anotaran los resultados de las cuatro, ¿el espacio muestral es igual al del experimento inicial? Justifica la respuesta.

c. Determina el evento que consiste en obtener, por lo menos, dos caras en los tres primeros resultados.

d. Determina el evento seguro.

5. Se lanzan dos monedas y un dado y se anotan los resultados.

a. Construye el espacio muestral.

b. ¿Cuáles resultados están incluidos en el evento de que en las monedas salga cara y en el dado un número impar?

c. ¿Cuáles resultados están incluidos en el evento de que el resultado del dado sea un número primo?

6. Cuatro personas, de igual preparación profesional, presentan su solicitud de ascenso para dos cargos idénticos en una compañía. Un aspirante pertenece a un sector del sindicato. Los puestos se asignan seleccionando dos personas al azar.

a. Establece los posibles resultados del experimento.

b. ¿Cuáles resultados están incluidos en el evento de que el candidato que pertenece al sindicato no obtenga uno de los dos puestos?

BECU_M1_B4_P174_208.indd 190 4/22/14 12:09 PM

Elementos de combinatoria

Destrezas con criterio de desempeño:

- Establecer la **técnica de conteo** apropiada para un experimento, mediante la identificación de las variables que aparecen en el experimento y la relación que existe entre ellas. **(C, M)**
- Aplicar **diferentes técnicas de conteo** en la resolución de problemas. **(P)**
- Determinar el **número de elementos del espacio muestral** de un experimento mediante el uso de las técnicas de conteo adecuadas. **(P, M)**

Conocimientos previos

Determina el resultado de las siguientes operaciones.

a. $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

b. $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot$
$3 \cdot 2 \cdot 1$

Toma en cuenta

Generalización del principio multiplicativo: este principio se puede aplicar a más de dos eventos.

Trabajo individual

Se tiene tres fichas: una de color rojo, otra amarillo y otra verde, se las va a colocar en fila. ¿De cuántas maneras diferentes pueden ordenarse si deben quedar en forma alternada?

Actualízate

Representación gráfica

Las situaciones que se pueden resolver utilizando el principio multiplicativo pueden ser representadas mediante un diagrama de árbol (ver página 96 y 97).

La teoría de combinatoria intenta resolver problemas donde se debe cuantificar diferentes agrupaciones que se pueden formar a partir de un conjunto de elementos dado. Para ello, existen métodos que permiten mecanizar tales cálculos.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DEL CONTEO

Principio aditivo

Si **A** y **B** son eventos mutuamente excluyentes, donde **A** puede ocurrir de **m** maneras distintas y **B** puede ocurrir de n maneras distintas, entonces existen **m + n** maneras de que ocurra **A** o **B**.

Principio multiplicativo

Si un evento **A** puede ocurrir de m maneras distintas, y un evento **B** puede ocurrir de **m** maneras distintas, entonces existen **m + n** maneras de que ocurra **A** y a continuación ocurra **B**.

Ejemplo

Una empresa inmobiliaria fue contratada para construir una casa. Los cimientos de la casa pueden ser de dos maneras: concreto o bloques de cemento. Las paredes pueden ser de adobe, cemento o ladrillo y el techo puede ser de madera o lámina galvanizada.

Solución

En este caso, la casa se puede construir de 12 maneras diferentes, pues se tienen:

2 opciones para hacer cimientos

3 opciones para hacer las paredes

2 opciones para hacer el techo

Luego, debemos aplicar el principio multiplicativo. Se tiene que existen $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ maneras diferentes de construir la casa.

FACTORIAL DE UN NÚMERO

Dado un número natural **n**, se denominará **n-factorial**, al producto de los primeros **n** naturales consecutivos. Y se representa por **n!**

Es decir, $\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n}$

El factorial de los primeros naturales son valores pequeños, sin embargo, aumentan rápidamente.

$$1! = 1$$
$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$
$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$
$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$
$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$
$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Además, $0! = 1$

Actualízate

Permutaciones circulares

Son permutaciones en las cuales no existe una primera y una última posición (a diferencia de las permutaciones lineales), por ejemplo, ordenar a 5 personas en una mesa redonda. El número total de permutaciones circulares a partir de **n** elementos está dado por:

$$\boxed{P_n = (n - 1)!}$$

Cada agrupación de **n** elementos difiere de las restantes solo en el orden en que están dispuestos los elementos.

Tarea

Calcula.

$5! + 4!$

$6! \cdot 2!$

$\dfrac{8! \cdot 3!}{6!}$

PERMUTACIONES LINEALES

Se denomina permutación lineal de **n** elementos (P_n), a cada una de las ordenaciones diferentes que se pueden realizar utilizando todos los elementos.

El número total de permutaciones que se pueden obtener a partir de **n** elementos, sin repetición, corresponde a **n!** Es decir,

$$\boxed{P_n = n!}$$

Permutaciones con repetición

Dado un conjunto de **n** elementos, el número total de permutaciones con repetición **(PR_n)** que pueden realizarse con ellos de manera que el primer elemento se repita k_1 veces, el segundo k_2 veces,… y el enésimo k_n veces, está dado por:

$$\boxed{PR_n, (k_1, k_2, ..., k_n) = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_n!}}$$

Ejercicio resuelto

1. **Un grupo de tres mujeres y tres hombres se distribuyen en una fila de seis sillas. ¿De cuántas maneras diferentes pueden ordenarse si deben quedar sentados en forma alternada?**

Solución

Sea M: mujeres y H: hombres.

El número de permutaciones posibles para los hombres es $P_3 = 3! = 6$.

El número de permutaciones para las mujeres es $P_3 = 3! = 6$.

Se ordenará el grupo, suponiendo que la primera silla es ocupada por una mujer:

Cada trío de mujeres se debe combinar con un trío de hombres, de modo que formen una fila de 6 personas, aplicando el principio multiplicativo, se tienen $3! \cdot 3! = 36$, es decir, 36 opciones de ordenarlos.

M	H	M	H	M	H

Por otro lado, la fila también puede comenzar por un hombre, es decir:

H	M	H	M	H	M

En este caso, se tienen $3! \cdot 3! = 36$, es decir, 36 opciones de ordenamiento.

Luego, se tienen $3! \cdot 3! \cdot 2 = 72$ permutaciones diferentes. Es decir, el grupo de 3 hombres y 3 mujeres se pueden ordenar de 72 formas diferentes.

Actividades

1. Escribe todas las permutaciones de 3 elementos con las letras a, b y c , y todas las de 4 elementos con los dígitos 1, 2, 3 y 4. Elabora un gráfico de apoyo.
2. Con las letras de la palabra amor, ¿cuántas palabras se pueden formar? Escríbelas todas.

BECU_M1_B4_P174_208.indd 192 4/22/14 12:09 PM

Toma en cuenta

En una variación, el número de elementos a ordenar (r) debe ser menor que el número total de elementos disponibles (**n**), es decir: **r** < **n**. Además, si **r** = **n**, la variación corresponde a una permutación, y por lo tanto,

$V_r^n = V_r^n = P_n$.

VARIACIONES

A diferencia de las permutaciones, en las **variaciones** se ordenan **r** elementos de un total de **n**. Una variación puede ser con o sin repetición.

Variaciones sin repetición

Dado un conjunto de **n** elementos, se denominan **variaciones sin repetición** a cada una de las posibles ordenaciones de r elementos que se pueden obtener sin repetir ningún elemento ($\mathbf{V_r^n}$). El número total de ordenaciones está dado por:

$$\boxed{\mathbf{V_r^n} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{(n-r)!}},\ \text{con } \mathbf{n} \in \mathbb{N} \text{ y } \mathbf{r} \in \mathbb{N}}$$

Actualízate

Representación gráfica

Las posibles variaciones para el ejemplo 1 de variaciones con repetición se pueden representar gráficamente del siguiente modo:

Variación		Resultados
A	A	AA
	B	AB
	C	AC
	D	AD
B	A	BA
	B	BB
	C	BC
	D	BD
C	A	CA
	B	CB
	C	CC
	D	CD
D	A	DA
	B	DB
	C	DC
	D	DD

Ejemplo

Si en un estacionamiento hay solo tres lugares disponibles y 10 autos se quieren estacionar, determina las variaciones.

La cantidad de ordenaciones diferentes que se pueden realizar es 720,

$V_3^{10} = \frac{10!}{(10-3)} = \frac{10!}{71} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$

Variaciones con repetición

Dado un conjunto de **n** elementos, se denominan **variaciones con repetición** a cada una de las posibles ordenaciones de **r** elementos que se pueden obtener, en las cuales se puede repetir uno o más de ellos

($\mathbf{VR_r^n}$ o bien $\mathbf{\overline{V}_r^n}$). El número total de ordenaciones está dado por:

$$\boxed{\mathbf{VR_r^n} = \mathbf{n^r},\ \text{con } \mathbf{n} \in \mathbb{N} \text{ y } \mathbf{r} \in \mathbb{N}}$$

Ejemplos

1. **Dadas las letras A, B, C y D, el número de variaciones con repetición que pueden formarse tomando las letras de dos en dos.**

   $VR_2^4 = 4^2 = 16$ (ver diagrama de la izquierda).

2. Una urna tiene 5 bolitas enumeradas del 1 al 5. Se extraen 3 bolitas, registrando el número de la bolita y devolviéndola a la urna.
   El número total de resultados que se pueden obtener es 125,

   $VR_3^5 = 5^3 = 125$.

Actividades

1. Dadas las letras P, Q, R y D, determina el número de variaciones con repetición que pueden darse tomando las letras de dos en dos.

2. En una sala de cine quedan solamente tres asientos vacíos y 5 personas que desean sentarse, determina el número de ordenaciones diferentes que se pueden obtener.

Recuerda

Notación. La expresión se lee «**n sobre r**».

Variación/permutación

Una combinación sin repetición se obtiene del cociente de una variación y una permutación, es decir:

$$C^n_r = \frac{V^r_n}{P_r} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Toma en cuenta

Al resolver un problema de combinatoria:

- Si en una agrupación solo figuran algunos de los elementos disponibles e importa el orden de estos, entonces corresponde a un problema de variaciones.
- Si en las agrupaciones figuran todos los elementos disponibles e importa su orden, entonces corresponde a un problema de permutaciones.
- Si en cada agrupación figuran solo algunos de los elementos disponibles y no importa el orden de estos, entonces corresponde a un problema de combinaciones.

COMBINACIONES

Las combinaciones se obtienen al seleccionar de un conjunto de **n** elementos grupos de **r**, de manera que cada grupo sea diferente a los demás, solo si contiene al menos un elemento distinto, sea cual sea su orden de colocación en el grupo. Una combinación puede ser sin o con repetición.

Combinaciones sin repetición

Dado un conjunto de **n** elementos, se denominan **combinaciones sin repetición** a cada una de las posibles combinaciones de **r** elementos que se pueden obtener sin repetir ningún elemento (C^n_r).

El total de combinaciones que se pueden formar con **r** elementos de un total de **n** elementos está dado por:

$$\boxed{C^n_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}, \text{ con } n \geq r,\ n \in \mathbb{N} \text{ y } r \in \mathbb{N}}$$

Ejemplo

Si de un grupo de 5 personas se quieren seleccionar 3, determinar el número de combinaciones.

El número total de combinaciones que pueden obtener es 10.

$$C^5_3 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!3!} = 10$$

Combinaciones con repetición

Dado un conjunto de **n** elementos, se denominan **combinaciones con repetición** a cada una de las posibles combinaciones de **r** elementos que se pueden obtener cuando se admiten repeticiones de ellos (C^n_r).

El total de combinaciones con repetición que se pueden formar con **r** elementos de un total de **n** elementos está dado por:

$$\boxed{CR^n_r = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!}, \text{ con } n \geq r,\ n \in \mathbb{N} \text{ y } r \in \mathbb{N}}$$

Ejemplo

En una pastelería hay cinco tipos de pasteles diferentes. Si se eligen 4 pasteles, determinar las combinaciones.

Las combinaciones posibles son 70.

$$C^5_4 = \binom{5+4+1}{4} = \frac{(5+4-1)!}{(5-1)!4!} = \frac{8!}{4!4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$$

Actividades

1. Calcula: ¿Cuántas combinaciones de 3 letras con repetición se pueden formar con las vocales?
2. Forma las combinaciones de 4 elementos con las letras c, *j*, *k*, *l*, *m* y *i*, si estas se pueden repetir.

BECU_M1_B4_P174_208.indd 194 4/22/14 12:09 PM

Actividades

Resuelve problemas de permutaciones.

3. Resuelve.

a. ¿Cuántos números pares de 3 cifras se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7?

b. ¿Cuántos números pares de 3 cifras existen?

c. ¿Cuántos pares de vocales distintas existen?

d. Se tienen 2 banderas café, 2 verdes y 2 celestes. Calcula cuántas combinaciones de colores pueden formarse con dos de estas banderas.

e. Calcula cuántas placas de patentes se pueden fabricar suponiendo que están formadas por dos letras y 4 números. Las patentes pueden contener cualquier letra o número excepto la letra ñ. Además, se excluyen los números de la forma 0001, 0043, 0987.

f. Calcula cuántos números impares de tres cifras se pueden formar con los dígitos 0, 3, 4, 6 y 7.

g. Con las letras de la palabra *triángulo* se hacen 5 grupos de letras distintas. ¿Cuántos de esos grupos terminan en una vocal?

h. Sean $A = \{W, D, p\}$ y $B = \{1, 2\}$. ¿Cuántos pares ordenados es posible formar utilizando todos los elementos de A y B?

i. Una figura de madera se pintará de dos colores diferentes. ¿De cuántas maneras puede pintarse la figura con los colores azul, rosado, rojo y celeste?

j. A partir de cinco fichas de distintos colores:

   i) ¿de cuántas maneras se pueden formar filas de tres fichas?

   ii) ¿de cuántas maneras se pueden formar filas de tres fichas si en todos los tríos hay una ficha verde?

k. Un árbol tiene 30 ramas. Si de cada una de ellas salen 12 brotes y de cada brote crecen 5 hojas, ¿cuál es el número total de hojas del árbol?

l. Escribe todas las permutaciones posibles que se pueden realizar con las letras P, Q y R.

m. ¿De cuántas formas se pueden sentar 5 personas en un auto?

n. ¿Cuántos números de 5 cifras distintas se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5?

ñ. Calcular el valor de las siguientes expresiones:

   i) $6! + 3!$

   ii) $2 \cdot 3!$

   iii) $2 + 2! + 3!\ 5!$

   iv) $\frac{9!}{6!}$

o. Ocho personas esperan su turno para comprar en una farmacia. ¿De cuántas formas distintas se podría formar una fila con esas personas?

p. Un matrimonio y sus cuatro hijos se ordenan en una fila para tomarse una fotografía. Determina en cuántas posiciones pueden tomarse las fotos si:

   i) el matrimonio se ubica al centro.

   ii) el papá y la mamá se colocan en los extremos.

   iii) cada uno toma distintas posiciones.

q. Un tren está formado por la locomotora y 8 carros. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden enganchar los carros?

r. En un concurso hay 6 paneles con nombres de objetos. El concursante recibe 6 carteles con los distintos precios de cada objeto y debe colocar cada uno en el panel correspondiente. ¿Cuántos intentos podría hacer como máximo antes de acertar?

s. ¿Cuántas permutaciones se pueden realizar con las letras a, b, c, d, e si:

   i) la letra c está en la segunda posición

   ii) la letra a está en la primera posición y la e en la quinta

BECU_M1_B4_P174_208.indd 195 4/22/14 12:09 PM

Actividades

iii) la letra a o la letra e están en la quinta posición

iv) la letra a no está en la primera posición y la e no está en la quinta

t. En una fila de 7 sillas deben sentarse 3 mujeres y 4 hombres. Determinar de cuántas maneras pueden distribuirse los asientos si las mujeres deben estar juntas al lado izquierdo de la fila.

u. ¿De cuántas maneras distintas pueden colocarse en línea 9 bolitas si 4 de ellas son negras, 3 son rojas y 2 son verdes?

v. Calcula el valor de x en cada caso.

i) $P_{2x} = 40\ 320$

ii) $2P_x = 1\ 440$

iii) $P_x = 720$

iv) $\frac{1}{3}P_x = 1\ 680$

w. Simplifica las siguientes expresiones.

i) $\frac{(x+1)!}{(x-1)!}$

ii) $\frac{(x-1)!}{(x-3)!}$

iii) $\frac{x!}{(x-3)!}$

iv) $\frac{(x-4)!}{(x-3)!}$

x. Se deben ordenar tres libros en un estante: uno de estadística, otro de álgebra y otro de geometría. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar estos libros?

Resuelve problemas de combinaciones.

4. Resuelve.

a. Calcular cuántas ordenaciones diferentes se pueden hacer con los números 1, 2, 3, 4, 6, 8 y 9, considerando los siete números a la vez y teniendo en cuenta que:

i) deben terminar en 9.

ii) comienzan con 2 y terminan con 3.

iii) el 5 está en el centro.

iv) el último número debe ser par.

v) el primer número debe ser impar.

b. En un restaurante hay 4 tipos de ensaladas para escoger. ¿De cuántas maneras se pueden elegir 6 platos de ensaladas? (Cada plato tiene solo un tipo de ensalada).

c. En una convención internacional, se encuentran personas de distintas nacionalidades. Asistieron 2 brasileños, 4 canadienses, 4 suizos y 3 ecuatorianos. ¿De cuántas maneras pueden sentarse en una fila, de manera que las personas de nacionalidades iguales queden juntos?

d. Se dispone de 4 cuadros para la decoración de una pared. Se deben escoger 3 de ellos. ¿De cuántas maneras se puede hacer la elección de los cuadros?

e. De 18 vestidos que hay en una tienda, se eligen 6. ¿De cuántas maneras distintas pueden ser elegidos?

f. ¿Cuántos números de 3 cifras distintas se pueden formar con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

g. Un colegio dispone de 7 salas para tomar exámenes a 4 cursos. ¿De cuántas maneras es posible distribuir los cursos?

h. Calcular cuántas palabras (no necesariamente legibles) de 4 letras distintas es posible formar con las letras A, B, C, D, E, F.

i. ¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar con los dígitos 2, 3, 4, 6, 8, 9?

j. ¿Cuántos números de 8 cifras que empiecen con 2 se pueden formar?

k. ¿Cuántos números impares de 3 cifras existen?

BECU_M1_B4_P174_208.indd 196 4/22/14 12:09 PM

l. Los habitantes de cierto pueblo utilizan solo dos dígitos: 1 y 2. ¿Cuántos números de 5 cifras pueden formar?

m. En tres secciones de una multitienda se necesita contratar un vendedor para cada sección. Si hay 20 postulantes, calcular de cuántas formas distintas pueden ocuparse las vacantes.

n. Un entrenador deportivo debe escoger 3 deportistas de un total de 7 seleccionados nacionales. ¿Cuántos equipos distintos se pueden escoger?

ñ. ¿De cuántas maneras es posible ordenar 8 libros en una repisa, si se elige de un total de 12 libros distintos?

o. Se dispone de 7 libros que deben ser colocados en tres espacios de un estante de la biblioteca. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 3 libros de estos?

p. En una competencia deportiva nacional participan 4 representantes de Pichincha, 4 del Guayas, 4 del Azuay y 4 del Coca. Si todos terminan la competencia, ¿cuántas combinaciones distintas para los tres primeros lugares pueden formarse al terminar la competencia, si no hay representante del Azuay en la final?

q. Determina el valor de las siguientes expresiones:

i) C_3^7 ii) C_{78}^{80} iii) C_{100}^{100}

r. Con las letras r, s, t, u, ¿cuántas palabras distintas de 10 letras se pueden formar?

s. ¿Cuántas combinaciones de tres elementos se pueden hacer con las letras A, B, C y D?

t. En un curso de 40 apoderados, ¿cuántas comisiones diferentes, de tres apoderados cada una, se pueden formar?

u. De los números del 1 al 25 se sortean 15 números.
¿Cuántos grupos se pueden sortear?

v. Una empresa necesita 3 empleados para llenar las vacantes. Si hay 12 postulantes, ¿cuántos grupos diferentes de personas se pueden seleccionar?

Resuelve problemas de variaciones.

5. Determina el valor de x en cada caso.

a. $V_4^x = x!$

b. $V_2^x = 30$

c. $V_4^x - V_3^{x+1} = 0$

d. $V_2^x = Px$

e. $V_5^{-1} = 3V_4^x$

f. $V_4^x = 20V_2^x$

6. Resuelve.

a. En un campeonato de fútbol jugarán 6 equipos. ¿De cuántas maneras distintas se puede escoger el partido inaugural?

b. Andrea desea invitar a su casa de veraneo a sus 9 amigos pero solo puede invitar a 6. ¿Cuántos grupos distintos de amigos podría invitar?

c. Un grupo de amigos se encuentra y se saludan dándose la mano (una sola vez). Si se estrecharon las manos 6 veces, ¿cuántos amigos son?

d. En un centro hospitalario se deben determinar tres turnos de médicos. Si hay siete médicos disponibles, ¿cuántos turnos es posible establecer?

e. En un negocio de barrio hay 12 botellas de bebida de fantasía, 12 de jugos y 12 botellas de vino. Si un vecino compró 8 botellas en total, ¿de cuántas maneras se pueden escoger las 8 botellas?

f. Un niño tiene tres monedas distintas de: 10 ctvs, 25 ctvs y 50 ctvs. ¿Cuántos montos diferentes de dinero se pueden formar con una o más de estas monedas?

g. Un juego de azar posee 36 números posibles de los cuales se deben seleccionar 6. ¿De cuántas maneras se pueden escoger los números?

h. Se tienen 7 libros de matemáticas y 4 de lengua. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar 3 libros de matemáticas y dos de lengua?

- Determina el número de elementos del espacio muestral de un experimento.

1 punto

1. La biblioteca de un colegio de la ciudad tiene en reserva cinco ejemplares del libro de estadística. Dos ejemplares corresponden a la primera edición y los otros tres corresponden a la segunda edición. Un estudiante selecciona aleatoriamente uno a uno estos libros y se detiene cuando encuentra uno de segunda edición.

a. Construye el espacio muestral de este experimento.

b. Dado el evento A: el estudiante selecciona solamente un libro, ¿cuáles son los elementos de este evento?

2 puntos

2. Se le pide a una persona que pruebe tres tipos de gaseosa marcadas como A, B y C. Luego, se le solicita que, al probar las tres bebidas, las clasifique en orden de preferencia.

a. Construye el espacio muestral del experimento.

b. ¿Cuántos eventos simples hay en este experimento?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la bebida de la marca A no sea clasificada de primera?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que la bebida de la marca A sea clasificada de primera y la bebida de la marca B sea clasificada de segunda?

- Calcula la probabilidad de eventos simples y compuestos.

2 puntos

3. La siguiente tabla muestra los resultados de dos características, color de ojos y color de piel, medidas en un grupo de asesores comerciales de sexo femenino.

	Color de ojos		
Color de piel	Azul	Negro	Café
Trigueña	5	12	20
Morena	1	5	18
Blanca	15	10	5

Si se selecciona una asesora aleatoriamente dentro del grupo, ¿cuál es la probabilidad de que:

a. sea morena?

b. tenga los ojos de color azul?

c. tenga el color de piel trigueña y sus ojos sean de color café?

Si la asesora seleccionada tiene los ojos negros, cuál es la probabilidad de que su color de piel sea blanca?

- Establece la técnica de conteo apropiada para un experimento.

2 puntos

4. Cuántos números telefónicos de siete dígitos se pueden formar si:

a. no hay ninguna restricción.

b. el primer dígito no puede ser ni cero, ni uno, ni 9.

c. los dos primero dígitos son pares.

d. los primeros tres dígitos no son mayores que 5.

2 puntos

5. Se toma una muestra de tres pruebas finales en el área de matemáticas. Cada prueba puede ser evaluada con las letras I, A, B, E.

a. Construye un diagrama de árbol para determinar el espacio muestral.

b. Encuentra los elementos del evento A: las dos primeras pruebas fueron excelentes.

c. ¿Cuál es la probabilidad de que entre las cuatro pruebas haya por lo menos dos evaluadas con la letra B?

d. Si la segunda prueba se evaluó con A, ¿cuál es la probabilidad de que la tercera tenga la misma evaluación?

1 punto

6. Hay 5 corredores en una carrera de 400 m. Al primero, segundo y tercer lugares se los premiará con una cinta. Indica de cuántas maneras posibles se puede premiar con las cintas.

Coevaluación

En parejas determinen si cada situación es una permutación o una combinación, luego verifiquen sus resultados intercambiando sus trabajos.

a. Escoger 3 clips de papel de una caja de 100

b. Agarrar 5 pelotas de tenis de una cesta de 10

c. Seis pájaros posados en un alambre telefónico

d. Escoger 4 marcadores de colores de una caja de 8 diferentes colores

e. Cinco bicicletas estacionadas en un puesto para 10 bicicletas

Autoevaluación (Metacognición)

Explica la diferencia entre permutación, variación y combinación, y da un ejemplo de cada una.

- **Indicador esencial de evaluación**

BECU_M1_B4_P174_208.indd 198 4/22/14 12:09 PM

Ciencia, tecnología e innovación

La genética

Las leyes de Mendel se verifican en los seres humanos y se cumple, por ejemplo, que el factor «ojos oscuros» domina sobre el factor «ojos claros». Se va a calcular la probabilidad de que una persona de ojos oscuros y otra de ojos claros tengan hijos de ojos oscuros.

Se denominará O al factor «ojos oscuros» y c al factor «ojos claros». Como el factor «ojos oscuros» domina por sobre el factor «ojos claros», el padre de ojos oscuros puede tener ambos factores oscuros (puro OO) o uno solo (híbrido Oc).

Entonces, los casos posibles son:

Ojos de color oscuro puro — ojos de color claro

Padres → OO — cc

Primera generación → ☐ ☐ ☐ ☐

Como el factor «color ___________» (O) domina sobre el factor «color______» (c), todos los miembros de la primera generación tendrán ojos de color _____________, pero son portadores del factor «ojos de color claro».

Pero también puede ser que:

Ojos de color oscuro puro — ojos de color claro

Padres → OO — cc

Primera generación → ☐ ☐ ☐ ☐

Aquí, la mitad de la primera generación tendrá ojos oscuros híbrido (Oc) y la otra mitad tendrá ojos claros (cc).

Actividades

1. Cuando uno de los padres tiene ojos oscuros puros, la probabilidad de que su hijo tenga ojos oscuros es: $\frac{4}{4} = 1$, mientras que cuando uno de los padres tiene ojos oscuros híbridos, determina la probabilidad de que su hijo tenga ojos oscuros.

   a. Un padre de ojos oscuros puros, ¿puede tener un hijo de ojos claros?

   b. Cuándo dos personas de ojos oscuros podrán tener hijos de ojos claros?

   c. ¿Con qué probabilidad?

Evaluación del segundo quimestre

- Reconoce los elementos de un vector en $\mathbb{R}^2$.

0,5 puntos **1.** Del vector $\overrightarrow{PQ}$ de componentes (5, 2) se conoce el extremo Q(12, −5). Halla las coordenadas de P.

0,5 puntos **2.** Halla el punto simétrico A´ de A(4, −2) respecto del punto M(2, 6).

0,5 puntos **3.** Dados los puntos A(1, 3) y B(3, 7), halla las componentes de los vectores opuestos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ y las componentes de los vectores nulos $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$.

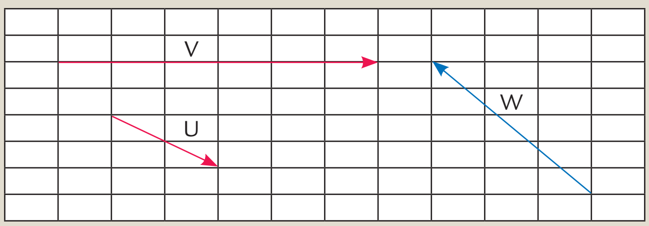
0,5 puntos **4.** Halla los componentes rectangulares de un vector *v* cuyo módulo es 20 si se sabe que forma con la horizontal un ángulo de 37°.

- Opera con vectores de $\mathbb{R}^2$.

0,5 puntos **5.** Dados los vectores a = (3, −1) y b = (4, 2), halla:

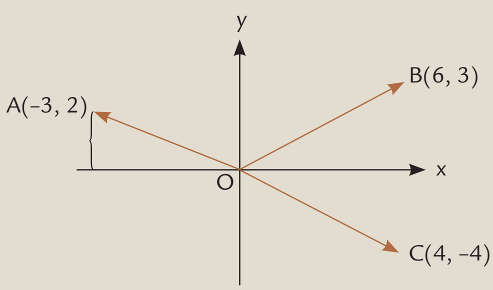
a. a − b   b. b − a   c. $|b - a|$

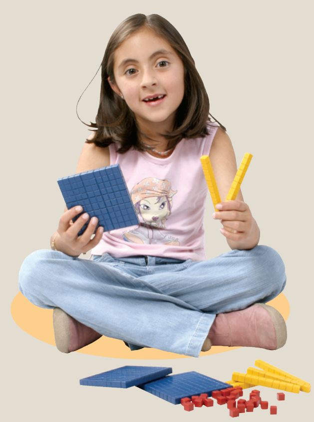
1 punto **6.** Dibuja los vectores $\frac{1}{3}$v; −2v; $\frac{1}{4}$u; $-\frac{1}{2}$u; −ww; $\frac{1}{5}$w.



- Determina la longitud de un vector.

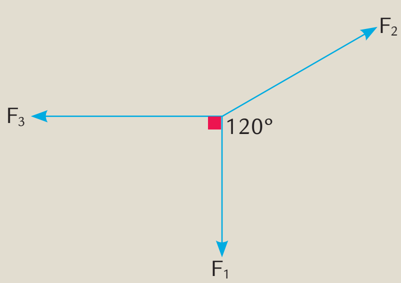
1 punto **7.** Encuentra los módulos de los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$





- Resuelve problemas de la Física aplicando vectores.

1 punto **8.** Una partícula se encuentra en equilibrio por acción de las fuerzas que actúan sobre ella. Calcula $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ si F_1 es 30 N.



- Resuelve e interpreta la solución de problemas de optimización.

1 punto **9.** Se considera la región factible dada por el siguiente conjunto de restricciones:

$4x + y \leq 4$

$y - x \leq 1$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

- Identifica la función objetivo y escribe una expresión lineal que la modele a un problema de optimización.

1 punto **10.** Representa la región factible que determina el sistema de inecuaciones y halla la solución mínima y máxima para cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x, y) = x + 2y$

b. $f(x, y) = y - 3x$

1 punto **11.** Los abonos A y B se obtienen mezclando cierto sustrato con dos fertilizantes F1 y F2 en las siguientes proporciones:

	F_1	F_2
A	100 g/kg	50 g/kg
B	70 g/kg	80 g/kg

Las cantidades disponibles de los fertilizantes F_1 y F_2 son 39 y 24 kg.
El beneficio que producen los abonos A y B son 75 ctvs/kg y 60 ctvs/kg.
¿Cuántos kilogramos se deben fabricar del abono A y del abono B para maximizar el beneficio?

- Calcula las medidas de tendencia central y de dispersión para diferentes tipos de datos.

0,5 puntos **12.** Carla obtuvo las siguientes notas parciales en Matemática: 6; 5,85; 7,5; 8,85; y 9,3. Determina la media, la mediana, la moda y la desviación estándar.

- Reconoce y elabora cuadros de frecuencias absolutas y frecuencias acumuladas.

1 punto **13.** Las vidas útiles en horas de 42 focos de 100 wats son:

807	811	620	650	817	732	747
660	753	1 050	788	857	867	867
881	872	869	918	847	833	833
766	787	923	841	803	933	933
1 056	1 076	958	792	776	828	828
832	863	852	970	980	889	889

a. Elabora la tabla de frecuencias con datos agrupados y una amplitud del intervalo de 7.

b. Encuentra la mediana y la moda en los datos ordenados pero sin agrupar.

d. Halla la clase mediana y la mediana en los datos agrupados. ¿Cuál es la diferencia?

e. Halla la clase modal y la moda en los datos agrupados. ¿Cuál es la diferencia?

- **Indicador esencial de evaluación**

Hacer un dibujo

Estrategia

Una estrategia muy usada y de gran utilidad en muchos problemas es la de hacer un dibujo. Volcando en ese dibujo los datos del problema es más fácil hacerse una idea clara de la situación y encontrar relaciones que de otra forma podrían pasar inadvertidas.

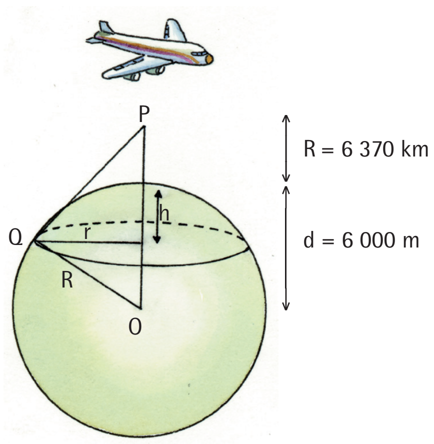
Enunciado

Un piloto vuela a 6 000 m de altura. ¿Cuál es el área del casquete esférico que puede observar?

Planteamiento y resolución

Si realizamos un dibujo de la situación, aparece una serie de relaciones que nos ayudará a resolver el problema. Para ello necesitamos conocer la altura *h* de dicho casquete esférico.

El triángulo *PQO* es un triángulo rectángulo al igual que el formado por *R*, *r* y *R* – *h*. Ambos además son semejantes por tener el ángulo agudo *POQ* en común. Luego:



$$\frac{d + R}{R} = \frac{R}{R - h}$$

$$dR - dh + R^2 - Rh = R^2$$

$$dR = dh + Rh$$

$$h = \frac{dR}{d + R}$$

$$h = \frac{dR}{d + r} = \frac{6 \cdot 6\,370}{6\,376} = \frac{38\,220}{6\,376} \cong 6 \text{ km}$$

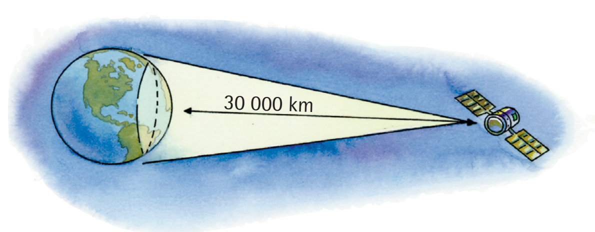
Calculamos el área del casquete esférico:

$A = 2\pi\, R \cdot h = 2R \cdot 6\,370 \cdot 6 = 240\,021{,}6 \text{ km}^2$.

El piloto puede observar 240 021,6 km^2.

Actividades

1. Halla a qué altura sobre la superficie terrestre vuela un piloto si el área del casquete esférico que divisa tiene una superficie de 200 020 km^2.
2. Un cono de altura 15 cm y radio de la base 6 cm tiene en su interior inscrita una esfera. Calcula el volumen de dicha esfera.
3. Un satélite artificial geoestacionario se encuentra situado siempre sobre el mismo punto de la superficie terrestre a una distancia de 30 000 km de él. Si el mencionado satélite emite ondas de televisión, ¿qué porcentaje de la superficie terrestre reciben dichas ondas?



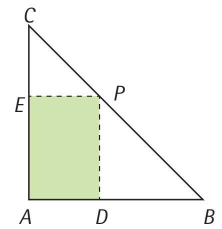
Pasar del dibujo geométrico al gráfico de una función

Estrategia

Muchas veces un dibujo geométrico permite relacionar dos magnitudes hallando pares de valores correspondientes. De ahí se puede pasar a la construcción de una tabla y obtener el gráfico de una función.

Enunciado

Se tiene un triángulo rectángulo isósceles de catetos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, que miden 10 cm. Señalamos el punto P en la hipotenusa y obtenemos el rectángulo PDAE. Estudia cómo varía el área del rectángulo al variar la posición del punto P.



Planteamiento y resolución

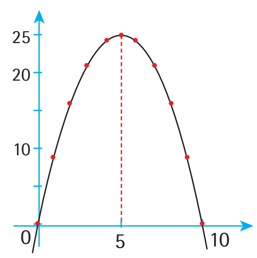
Da valores al segmento *AD* y llévalos a una tabla para obtener el área del rectángulo *PDAE*.

AD = x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Área	0	1 · 9	2 · 8	3 · 7	4 · 6	5 · 5	6 · 4	7 · 3	8 · 2	9 · 1	10 · 0

Con estos valores obtenemos el gráfico que representa la variación del área según la posición de P.

La expresión matemática que representa de modo general la variación anterior es:

$y = x(10 - x) = 10x - x^2$



Actividades

1. ¿Existe un rectángulo con un perímetro mínimo para un área de 24 cm^2? ¿Qué dimensiones tiene? Utiliza una cuadrícula para pasar del dibujo geométrico a la obtención de la función.
2. ¿Existe un rectángulo con un área máxima para un perímetro de 48 cm? ¿Qué dimensiones tiene? Utiliza una cuadrícula para pasar del dibujo geométrico a la obtención de la función.
3. Un edificio de 5 pisos, en el que cada piso tiene una altura de 3 metros, tiene un ascensor con las siguientes características:

   – Tiempo de parada solicitada: 7 segundos.

   – Tiempo que tarda en subir un piso: 4 segundos.

   El ascensor, a velocidad constante, hace el siguiente recorrido: parte del primer piso y se para en el segundo y tercer piso.

   ¿Podrías determinar esta situación mediante una función matemática?

   Recuerda que la ecuación del movimiento uniforme es d = v · t y que puedes conocer fácilmente la velocidad del ascensor.

   ¿Cuál será la función si el ascensor se detiene en cada piso?

BECU_M1_B4_P174_208.indd 203 4/22/14 12:09 PM

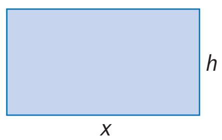
Hacer tablas y gráficos

Estrategia

Frecuentemente, en matemática es necesario hacer tablas de valores y gráficas de funciones. La gráfica de la función que se obtiene al plantear el problema ayuda a resolverlo. En algunos problemas la representación gráfica de la función cuadrática que se obtiene al plantear el problema conduce a la solución.

Enunciado

Con 50 metros de valla metálica se quiere cerrar un recinto rectangular como el del margen. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del recinto si se desea que tenga la mayor área posible?



Planteamiento y resolución

Llamamos x y h a las dimensiones del recinto rectangular.

Como el perímetro mide 50 m, se tiene que la relación entre la base x y la altura h es: x + h = 25.

Si designamos el área del rectángulo con la letra y obtenemos la siguiente expresión del área:

$$y = x \cdot h = x \cdot (25 - x), \text{ es decir, } y = 25x - x^2$$

Como $x + h = 25$, los valores de x varían entre 0 y 25. Ver la tabla de valores del margen.

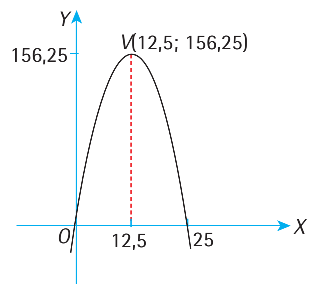
x	y
0	0
5	100
10	150
12,5	156,25
15	150
20	100
25	0

Para representar la función, buscamos los puntos de corte con el eje X, resolviendo la ecuación:

$$25x - x^2 = 0 \rightarrow x(25 - x) = 0; \text{ de donde } x = 0, \ x = 25$$

Como el coeficiente de x^2 de la función es negativo, la gráfica está abierta hacia abajo y el máximo se encuentra en el punto medio de intervalo (0; 25), es decir, el máximo se encuentra para $x = 12{,}5$ y vale $y = 156{,}25$ m².

Con estos tres valores de x(0; 25; 12,5) y algunos más se ha construido la tabla del margen y la gráfica de la función.

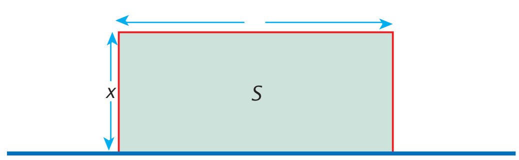


El valor de h es 12,5 cm y el recinto es un cuadrado.

Actividades

1. Un granjero desea construir un recinto rectangular para lo que dispone de 12 m de valla metálica. Uno de los lados del recinto coincide con un muro, por lo que no debe ponerse valla.

Expresa el área (S) del recinto en función del dato de la longitud del lado x, perpendicular al muro.



Representa la función cuadrática obtenida y averigua con ella para qué longitud del lado x se obtiene la superficie máxima. (Ten en cuenta que 2x + y = 12)

BECU_M1_B4_P174_208.indd 204 4/22/14 12:09 PM

Hacer un diagrama

Estrategia

En los problemas donde aparecen varios conjuntos o agrupación de elementos que tienen ciertas propiedades, dibujar cada agrupación mediante un gráfico limitado por una curva (diagrama de Venn) puede ser una buena estrategia para resolver el problema. Esto ocurre en los problemas que siguen.

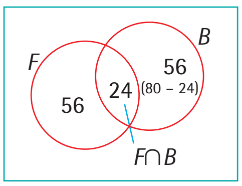
Enunciado

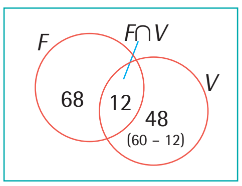
En un complejo deportivo hay inscritas 200 personas para practicar fútbol, básquet y vóley. De las personas inscritas han practicado estos deportes un fin de semana el siguiente número de personas expresadas en porcentajes: el 40% básquet; el 30%, vóley; el 12%, fútbol y básquet; el 6%, fútbol y vóley; el 10%, básquet y vóley; el 4%, practicó fútbol, básquet y vóley. Finalmente, el 14% de las personas inscritas no practicó ningún deporte.

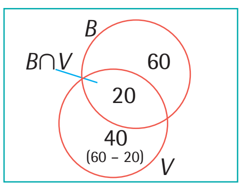
¿Cuántas personas practicaron solamente un deporte?

Planteamiento y resolución

Calculamos los porcentajes y utilizamos una notación adecuada para representar los conjuntos de personas, en la siguiente tabla.

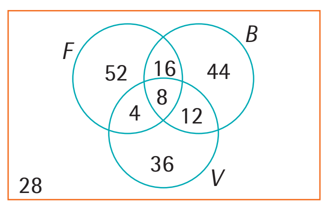






	Notación	% de personas	N° de personas
Fútbol	F	40%	80
Básquet	B	40%	80
Vóley	V	30%	60
Fútbol y básquet	F∩B	12%	24
Fútbol y vóley	F∩V	6%	12
Básquet y vóley	B∩V	10%	20
Fútbol, básquet y vóley	F∩B∩V	4%	8
No practicaron ningún deporte		14%	28

Observa a la izquierda cómo se colocan los datos de la última columna correspondientes a cada dos conjuntos, en los diagramas del margen. Partiendo de estos diagramas y de los datos de las dos últimas filas se puedes distribuir los datos como se indica en el siguiente diagrama de Venn.



Practicaron solamente un deporte:
$52 + 44 + 36 = 132$ personas

Actividades

1. En una academia de 400 alumnos, el 70% estudia inglés y el 40% estudia francés. ¿Cuántos alumnos estudian los dos idiomas?
2. En un pueblo se leen tres periódicos A, B y C con un total de 914 ejemplares. De cada periódico se venden 356 ejemplares. Las personas que compran dos periódicos son: el A y B, 76 personas; el A y C, 60; el B y C, 40. Finalmente, hay 22 personas que compran los tres periódicos. Calcula cuántas personas compran solamente un periódico.

BECU_M1_B4_P174_208.indd 205 4/22/14 12:09 PM

Pasar de las tablas de contingencia a la probabilidad

Estrategia

Cuando clasificamos los distintos casos de una población referidos a dos caracteres distintos que tienen más de una modalidad cada uno de ellos, utilizamos una tabla de contingencia. A partir de ella se pueden calcular probabilidades de sucesos.

Enunciado

En una sección de 1er año de bachillerato hay 28 chicas y 12 chicos. Llevan lentes 8 chicas y 10 chicos. Elegido un alumno al azar calcula las siguientes probabilidades: P (chico), P (chica), P (con lentes), P (sin lentes), P (chico y con lentes), P (chica y con lentes), P (chico y sin lentes), P (chica y sin lentes).

Planteamiento y resolución

Expresamos los datos en la siguiente tabla de contingencia.

	Chicos	Chicas	
Con lentes	10	8	18
Sin lentes	2	20	22
Total	12	28	40

Elegido un alumno al azar se tiene:

P (chico) = 12/40 = 0,3
P (chica) = 28/40 = 0,7
P (con lentes) = 18/40 = 0,45
P (sin lentes) = 22/40 = 0,55
P (chico y con lentes) = 10/40 = 0,25
P (chica y con lentes) = 8/40 = 0,20
P (chico y sin lentes) = 2/40 = 0,05
P (chica y sin lentes) = 20/40 = 0,5

Su relación con el diagrama de árbol es:

Primer carácter	Segundo carácter	Resultado	Probabilidad
12/40 Chico	10/12 Con lentes	Chico y con lentes	(12/40) (10/12) = 10/40 = 0,25
	2/12 Sin lentes	Chico y sin lentes	(12/40) (2/12) = 2/40 = 0,05
28/40 Chica	8/28 Con lentes	Chica y con lentes	(28/40) (8/28) = 8/40 = 0,20
	20/28 Sin lentes	Chica y sin lentes	(28/40) (20/28) = 20/40 = 0,5
			= 1,00

Actividades

1. En un colegio hay 1 000 alumnos de secundaria repartidos de esta forma:

	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto
Chicos	120	100	95	85
Chicas	200	150	130	120

Elegido un alumno al azar, calcula las siguientes probabilidades.

a. ser chico.
b. ser chica.
c. ser alumno de primero
d. Ser alumno de segundo
e. ser alumno de tercero
f. ser alumno de cuarto
g. ser chica y alumna de cuarto
h. ser chico y alumno de segundo
i. comprueba las actividades g) y h) con un diagrama de árbol

BECU_M1_B4_P174_208.indd 206 4/22/14 12:09 PM

Estrategia

En matemática ocurre a veces que para obtener la solución de un problema no disponemos de un método a nuestro alcance (por ser de un nivel superior, por su dificultad de aplicación, etc.) que nos permita resolverlo con exactitud. Cuando esto ocurre, recurrimos a métodos que nos aproxima a la solución y que sean de comprensión fácil e intuitiva. Después conviene comprobar los resultados.

Enunciado

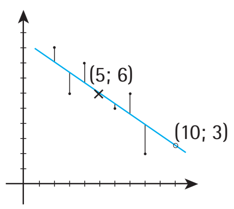
Ajustar una recta de regresión a la nube de puntos dada por:

x	2	4	7	8	3	6
y	9	8	6	2	6	5

Planteamiento y resolución

La recta pasa por el punto $(\bar{x}, \bar{y})$, es decir, por (5; 6) y además por otro punto que conoceremos tras dibujar la nube de puntos.

La recta se traza de modo que pasa por $(\bar{x}, \bar{y})$ con la condición de dejar aproximadamente el mismo número de puntos por arriba y por debajo, y además que las distancias señaladas con puntitos entre cada punto y la recta sean lo más pequeñas posible.



El punto elegido es el (10, 3).

Obtenemos la ecuación que pasa por (5, 6) y (10, 3).

$$\left.\begin{aligned} 6 &= 5m + n \\ 3 &= 10m + n \end{aligned}\right\} \Rightarrow m = -0{,}6 \text{ y } n = 9$$

La ecuación de la recta de ajuste es $y = -0{,}6x + 9$.

Obtenemos ahora para cada x de la tabla el valor y' que le corresponde al sustituirlo en la ecuación de la recta de regresión. Después se halla la diferencia entre y e y' en valor absoluto (en el gráfico los segmentos de puntos). Su suma nos da una cantidad. Cuanto más pequeña sea, mejor será el ajuste.

x	2	4	7	8	3	6	
y	9	8	6	2	6	5	
y'	7,8	6,6	4,8	4,2	7,2	5,4	Suma
$\lvert y - y' \rvert$	1,2	1,4	1,2	2,2	1,2	0,4	**7,6**

$y'(2) = -0{,}6 \cdot 2 + 9 = 7{,}8$

Si tienes una calculadora científica, podrás comprobar los resultados.

La recta de regresión a partir de la nube de puntos es: $y = -0{,}86x + 10{,}29$, siendo la suma de las diferencias 6,56; más pequeña que la obtenida.

En clase, cada dos alumnos pueden efectuar su ajuste comparando después los resultados, eligiendo aquella recta cuya suma de diferencias sea más pequeña. La recta hallada con la calculadora es la de mejor ajuste.

Actividades

1. Ajusta una recta de regresión a la nube de puntos dada por (2, 4), (4, 7), (5, 3), (7, 8), (8, 5) y (10, 8).

a. Que pase por el punto (2, 5).

b. Que pase por el punto (8, 8).

c. Que pase por el punto que estimes más oportuno.

¿Cuál de ellas se ajusta mejor? Compruébalo obteniendo la recta de regresión con la calculadora científica.

BECU_M1_B4_P174_208.indd 207 4/22/14 12:09 PM

Bibliografía

Enlaces web

- www.juegosmensa.com
- www.dane.gov.co
- www.matesworld.com
- www.redemat.com
- www.vitutor.com/algebra/pl/a_1.html
- recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Programacion_lineal/index.htm
- www.vitutor.com/algebra/pl/a_g.html
- goo.gl/5RkCy
- www.vitutor.com/geo/coni/f_1.html
- math2.org/math/algebra/es-conics.htm
- www.educacionplastica.net/conicas.htm

Libros

- Ayres Jr., Frank. *Trigonometría*, México, McGraw-Hill, 1990.
- Barnett, Raymond. *Álgebra y Trigonometría*, México, McGraw-Hill, 1992.
- Bautista, Mauricio, et al. *Física I*, Bogotá, Santillana, 2005.
- Bell, Eric Temple. *Historia de la Matemática*, México, Fondo de Cultura Económica, 1992.
- Chávez, Hugo, et al. *Introducción al Cálculo*, Bogotá, Santillana, 2004.
- Chávez, Hugo. *Matemáticas 11. Guía de recursos*, Bogotá, Santillana, 2000.
- Contreras, Juan, et al. *Nuevos Símbolos 5*, Lima, Santillana, 2003.
- Freund, John y Gary Simon. *Estadística elemental*, México, Prentice Hall, 1992.
- Goñi Galarza, Juan. *Trigonometría*, Lima, Ingeniería, 1997.
- Hirsch, Christian, et al. *Trigonometría y Geometría Analítica*, Bogotá, McGraw-Hill, 1993.
- Lara, Jorge y Jorge Arroba. *Análisis matemático*, Quito, Centro de Matemática-Universidad Central del Ecuador, 1997.
- Lorenzo, Miguel, et al. *Matemáticas 1 Bachillerato*, Madrid, Santillana, 2008.
- Ministerio de Educación del Ecuador. *Lineamientos Curriculares para el Nuevo Bachillerato Ecuatoriano*, Quito, 2011.
- Nortes, Andrés, et al. *Matemática aplicadas a las Ciencias Sociales 2*: *Bachillerato*, Madrid, Santillana, 2000.
- Nortes, Andrés, et al. *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 1*: *Bachillerato*, Madrid, Santillana, 2000.
- Swokowski, Earl y Jeffrey Cole. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*, México, Iberoamericana, 1997.
- Taylor, Howard y Thomas Wade. *Geometría Analítica Bidimensional*, México, Limusa, 1973.
- Urteaga, Carlos, et al. *Nuevos Símbolos 4*, Lima, Santillana, 2003.

BECU_M1_B4_P174_208.indd 208 4/22/14 12:09 PM