# Recomendaciones para el docente sobre “Estadística y Probabilidad”

Los Lineamientos Curriculares para el primer año del nuevo bachillerato recomiendan una presentación progresiva de conceptos probabilísticos y de herramientas de la Estadística. En este capítulo se exponen las herramienta de la Estadística Descriptiva: *encuestas*, *tablas de frecuencias*, *gráficos descriptivos*, *medidas de tendencia central* de una muestra, *dos medidas de dispersión*. En cuanto a Probabilidades, el capítulo presenta la noción de probabilidad de un evento, conjunto de eventos y el conteo de elementos de un conjunto mediante la fórmula combinatoria de selección con repetición de un número de elementos de un total dado.

## Para “Introducción”

La Introducción tiene como finalidad mostrar un gráfico descriptivo de datos. Los datos de pluviosidad anual permiten comparar distintos años. Los gráficos estadísticos son muy comunes en todos los medios de comunicación. Las preguntas planteadas en la actividad de introducción motivan al estudiante a pensar en el uso de datos en la toma de decisiones.

### Sugerencias Metodológicas

- Con anterioridad, pida a sus estudiantes que recorten tablas y gráficos estadísticos de revistas o periódicos, preferiblemente de temas que les interesen. Pida a algunos de sus estudiantes que interpreten los datos de los gráficos que encontraron y que describan en sus propias palabras la información que se presenta en el gráfico.

- En la clase, realice preguntas a sus estudiantes sobre el gráfico de pluviosidad. Cuando se lee un gráfico estadístico, hay tres tipos de preguntas que se pueden realizar:

  – De lectura. Por ejemplo: *¿cuál es el año de mayor pluviosidad?*

  – Calculativas. Por ejemplo: *¿Cuántos años la pluviosidad fue menor que* 200 *milímetros*?

  – De interpretación. Por ejemplo: *¿Es Guayaquil una ciudad con alta pluviosidad?*

- Asegúrese de que los estudiantes comprendan toda la información que un gráfico estadístico provee; esta información debe estar en los títulos que acompañan al gráfico; por ejemplo: las unidades de medida, el número de datos, las escalas, etcétera.

- Utilizando los gráficos que sus estudiantes hayan traído, recuerde los diversos tipos de gráficos: barras, histogramas, circulares, pictogramas, poligonales, etcétera.

## Para “Preparación y repaso”

Utilice la actividad de la Introducción para estimar el nivel de conocimiento previo que sus estudiantes tienen. El currículo de la Educación General Básica indica que los estudiantes ya deben haber sido introducidos a las gráficas estadísticas y a las medidas de tendencia central. Es posible que sus estudiantes no sepan o no recuerden el segundo tema. Este capítulo presenta nuevamente estos conceptos; puede saltar la preparación si sus estudiantes no han estudiado las medidas de tendencia central anteriormente.

## Para “Actividad para la clase”

Las encuestas son la forma más sencilla de recopilar datos. Sus estudiantes seguramente encuentren esta actividad divertida e instructiva. Esta actividad sigue los pasos básicos de recopilación de datos y, además, introduce al estudiante a conceptos básicos como *población* y *muestra*, *variable cuantitativa* y *variable cualitativa*.

### Sugerencias Metodológicas

- Dedique una clase a esta actividad; puede utilizar cualquier otra pregunta que sus estudiantes deseen investigar, siga los mismos pasos planteados en el libro.
- Al final de la actividad pida a varios estudiantes que expongan sus resultados a la clase.
- Pida a los estudiantes que comparen sus resultados con los resultados de otros compañeros. ¿Son los resultados los mismos? ¿Por qué?
- ¿Son diez personas una muestra representativa de la clase? ¿Del colegio? ¿Del país?

## Para “Estadística”

El ejemplo 1 presenta las herramientas de la estadística descriptiva: tablas, tablas de frecuencias, gráficos estadísticos; en particular, un diagrama circular y un histograma, puesto que estos son los dos tipos de diagramas utilizados con mayor frecuencia.

### Sugerencias Metodológicas

- Utilice una clase para desarrollar el ejemplo 1.
- Mientras se desarrolla el ejemplo 1, asegúrese de escribir las definiciones presentadas en un sitio del aula permanente.
- Pida más ejemplos de cada una de las definiciones que se van presentando en el ejemplo.

- Utilice una segunda clase para repetir el ejemplo 1 con otro grupo de datos. Por ejemplo: puede realizar el siguiente experimento con su clase: “¿cuántos segundos puedes tener los ojos abiertos sin pestañar?”, “¿Cuántas veces puedes saltar la cuerda?”, “¿Cuántos centímetros puedes saltar con los dos pies juntos?”, etcétera.

## Para “Medidas de tendencia central”

Uno de los conceptos estadísticos más importantes es el de *media aritmética*. Muchos estudiantes reconocen o saben cómo calcular el promedio utilizando el algoritmo; en esta sección se enfatiza en el concepto de media aritmética como “la cantidad que iguala a las otras cantidades” y la “cantidad que balancea” a las otras cantidades.

### Sugerencias Metodológicas

- Dedique media hora para realizar la actividad sugerida con monedas.
- Repita la actividad, pero en este caso, dé el arreglo de monedas y pida a sus estudiantes que muevan las monedas de manera que igualen los grupos y calculen de esa manera el promedio.
- Compare las medidas de tendencia media y mediana para el grupo de datos dados en el ejemplo 4; busque reflexión y análisis con preguntas como las siguientes: ¿qué sucede si uno de los datos, por equivocación, es un dato muy grande? ¿Qué sucederá con la media? ¿Qué sucederá con la mediana?
- Permita que sus estudiantes descubran que la mediana es una medida de tendencia central estable mientras que la media no lo es.
- Dé una media y pida a sus estudiantes que inventen un grupo de datos que tenga esa media.
- Dé una mediana y pida a sus estudiantes que construyan un conjunto de datos con esa mediana.

## Para “Medidas de dispersión”

En este capítulo, se presentan dos medidas de dispersión: el *rango* y la *desviación absoluta promedio*.

La *desviación estándar* se deja para segundo de bachillerato. El concepto de dispersion se presenta mediante la comparación de dos grupos de datos con el mismo promedio, pero distinta dispersión. El objetivo de este ejemplo es enfatizar en que la medida de tendencia central no es suficiente para describir los datos.

### Sugerencias Metodológicas

- Dedique una clase para cubrir este tópico.
- Dé un grupo de datos muy centrado y otro muy disperso para enfatizar la necesidad de describir el rango.
- Pida a sus estudiantes que alteren un grupo de datos dado de manera que la media se mantenga, pero el rango y la desviación se incrementen.

# Para “Probabilidad”

Generalmente, el concepto de aleatoriedad es difícil de comprender. Históricamente, este concepto tardó en ser desarrollado y formalizado matemáticamente mediante el cálculo de probabilidades. El conteo de eventos se desarrolla en el área de matemáticas conocida como *combinatoria*. En este primer año del Bachillerato, se presenta un caso de combinatoria; otros serán presentados gradualmente en los siguientes años.

## Sugerencias Metodológicas

- Sus estudiantes posiblemente tienen ya una noción de probabilidad; pida que la describan y que den ejemplos de eventos aleatorios. Pregunte por qué son aleatorios. ¿Es nuestra ignorancia o el evento mismo es aleatorio? Por ejemplo: ¿es posible predecir con exactitud si va a llover?

- Incentive a la clase a dar ejemplos de eventos certeros y de eventos imposibles; asocie el evento certero con la medida de probabilidad 1 y el imposible, con probabilidad cero.

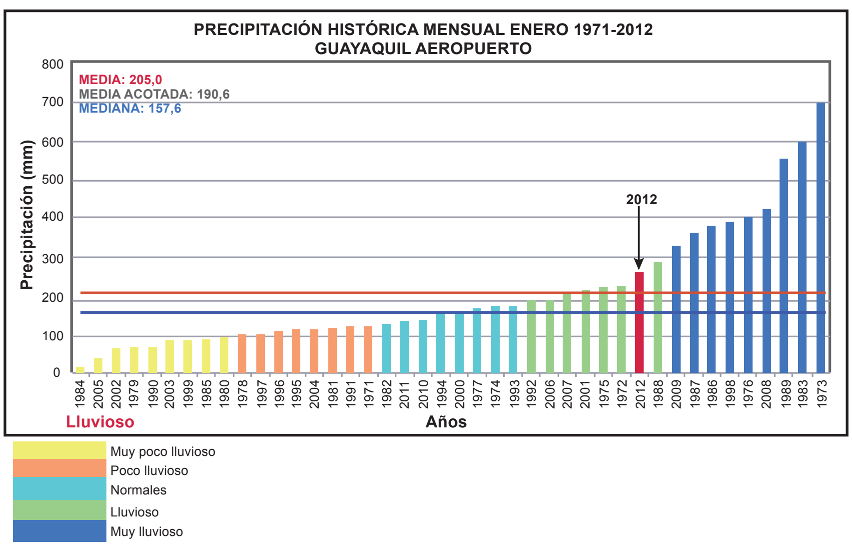
- Distinga entre experimentos ideales aleatorios, como el lanzar una moneda, y experimentos que se pueden ejecutar en la realidad. Por ejemplo: podemos pensar en una moneda ideal, pero en la realidad una moneda no está perfectamente balanceada; por tanto, no es perfecta y tendrá una cierta tendencia a favorecer uno de sus lados.

# Capítulo 7

# Estadística y Probabilidad

## Introducción: Precipitación histórica en Guayaquil

Vivimos en una época calificada por muchos como la era de la información. La información se puede considerar como un bien. Los estados, las empresas y los individuos necesitamos información para tomar decisiones. Por ello, la información es valiosa. La estadística es un área de la Matemática que nos ayuda a diseñar formas para recopilar, organizar y comunicar información. En el gráfico siguiente vemos un diagrama de barras que representa la cantidad de lluvia (precipitación) en Guayaquil desde 1971 hasta el 2012. Esta información es valiosa para meteorólogos, agricultores, ingenieros, empresarios. Si tú fueras un constructor, ¿cómo te afectaría el exceso de precipitación o la escasez de ella? Si fueras un agricultor, ¿cómo te ayudaría el conocer el pronóstico del tiempo? Si fueras un ingeniero que maneja una de las plantas hidroeléctricas del país, ¿cómo podrías usar este gráfico?




Se considera que las precipitaciones de Enero 2012 estuvieron en el rango **LLUVIOSO**

## Preparación y repaso

1. Explica con tus propias palabras qué es una medida de tendencia central. ¿Qué medidas de tendencia central conoces?

2. Calcula las medidas de tendencia central *moda*, *mediana* y *media* de cada grupo de datos.

   (a) 80, 85, 90, 90, 90 y 100.

   (b) 13, 18, 13, 14, 13, 16, 14, 21 y 13.

   (c) 8, 9, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12 y 13.

   (d) 12, 15, 16, 19, 20, 20, 22, 23, 25, 27, 29, 30, 32, 32 y 35.

## Actividad en el aula: ¿qué prefieren hacer tus compañeros en su tiempo libre?

Una *encuesta* es un instrumento de investigación estadística. Vemos resultados de encuestas todos los días en los medios de comunicación. En esta actividad, vas a realizar una encuesta. El objetivo de tu investigación es saber qué es lo que prefieren hacer tus compañeros en el tiempo que no están en clases. Realiza esta actividad en tu aula.

- La *frecuencia absoluta* es el número de veces que aparece un mismo valor de una variable en una muestra.
- La *frecuencia relativa* es el número de veces que aparece un mismo valor de una variable en una muestra respecto del total de valores. Se calcula dividiendo la frecuencia absoluta por el tamaño de la muestra.

1. El *primer paso en una investigación estadística* consiste en diseñar la encuesta. En este caso, la encuesta constará de dos preguntas:

   (a) Escoge una sola de las siguientes actividades qué prefieres hacer en tu tiempo libre:

      i. Jugar un deporte (fútbol, basket, tenis, etcétera).

      ii. Ver TV o utilizar la computadora.

      iii. Pasear con amigos y amigas.

      iv. Leer.

      v. Otros.

   (b) ¿Cuántas horas a la semana le dedicas a esta actividad?

2. Escoge 10 compañeros en tu aula y recoge los datos de la encuesta. Este es el *segundo paso de una investigación estadística*.

3. Organiza los datos en las siguientes tablas (una tabla por pregunta):

| **Actividad preferida** | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Encuestado | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Preferencia | | | | | | | | | | |

| **Número de horas de dedicación por semana** | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Encuestado | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Número de horas | | | | | | | | | | |

4. La *actividad preferida* y el *número de horas de dedicación semanal* son ejemplos de variables estadísticas. La primera es una variable *categórica* o *cualitativa*; la segunda, una variable *numérica* o *cuantitativa*. Cuando se tienen muchos datos, es necesario organizarlos y describirlos mediante tablas y gráficos, para luego poder analizarlos.

   Las siguientes tablas agrupan los datos. Complétalas.

| Actividad | Número de personas que prefieren esta actividad |
|---|---|
| Jugar un deporte | |
| TV o computadora | |
| Conversar con amigos/as | |
| Leer | |
| Otros | |

| Actividad | Frecuencia relativa de personas que prefieren esta actividad |
|---|---|
| Jugar un deporte | |
| TV o computadora | |
| Conversar con amigos/as | |
| Leer | |
| Otros | |

| Número de horas | Número de personas que respondieron este número de horas |
|---|---|
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |

| Número de horas | Frecuencia relativa de personas que respondieron este número de horas |
|---|---|
| 0 | |
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |
| 8 | |
| 9 | |

5. Una manera de comunicar los resultados de una investigación estadística es mediante diagramas y gráficos: barras, bastones, círculos, polígonos, pictogramas, histogramas, etcétera.

   Soraya presenta el resumen de su encuesta en la siguiente tabla:

| Actividad | Frecuencia relativa de personas que prefieren esta actividad |
|---|---|
| Jugar un deporte | 3/10 = 0,33 |
| TV o computadora | 4/10 = 0,4 |
| Conversar con amigos/as | 2/10 = 0,2 |
| Leer | 1/10 = 0,1 |
| Otros | 0 |

Ahora crea una diagrama circular para la variable *Preferencia*. Para ello, recuerda que el ángulo de cada sector debe estar en la misma proporción que la frecuencia. Por ejemplo, el ángulo del sector correspondiente a TV, en el caso de la tabla de Soraya, es $0{,}4 \times 360 = 144$ aproximadamente.

6. Compara tus resultados con el resultado reportado por Soraya.

7. Compara tus resultados con los de otros compañeros. Posiblemente, son diferentes. Tu información representa una *muestra* (solo 10 alumnos) de la población (toda la clase).

## Estadística

La gran cantidad de información a la cual podemos acceder a través de Internet viene con frecuencia en forma de datos recolectados y organizados en tablas y gráficos. La *estadística* nos ofrece herramientas para recolectar, organizar e interpretar datos de manera que podamos utilizarlos.

En años anteriores aprendiste a describir datos en forma de tablas y gráficos de barras, circulares, poligonales, etcétera. Ahora, a través de los siguientes ejemplos, vamos a precisar algunos términos y conceptos estadísticos.

Un grupo de datos corresponden a una *variable estadística*. Si los datos son numéricos, esta variable se dice *variable cuantitativa*. Ejemplos de variables cuantitativas son:

1. el peso de las personas de un grupo;
2. las notas de un examen;
3. la altura de las montañas en un país;
4. la lluvia total en varios meses.

Si los datos son características como color, sexo, preferencia de voto, etcétera, la variable se llama *cualitativa*.

Cuando se realiza una investigación estadística o se recopila datos, la *población* se refiere a todos los individuos estudiados. Por ejemplo: si queremos saber el ingreso promedio de un ecuatoriano mayor de edad, la población está constituida por todos los ecuatorianos mayores de edad. Con frecuencia, es muy difícil recoger datos de una población grande; por ello, se recogen datos de un grupo representativo mas pequeño; este grupo de datos se llama *muestra* de la población.

Es importante que la muestra sea representativa si queremos obtener información fehaciente de la población. Por ejemplo: si queremos saber la preferencia electoral para una elección presidencial, una muestra de 10 padres de familia de tu colegio no seria representativa; ¿por qué?

### Ejemplo 1

*En un examen de matemáticas aplicados en todos los colegios de la Costa, un grupo de estudiantes obtuvieron las siguientes notas:*

***Grupo A***

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 79 | 67 | 72 | 75 | 64 | 82 | 55 |
| 56 | 58 | 66 | 60 | 59 | 63 | 75 |
| 66 | 57 | 72 | 67 | 59 | 61 | 60 |
| 57 | 61 | 60 | 53 | 30 | 50 | 42 |
| 39 | 68 | 89 | 67 | 65 | 86 | 39 |
| 54 | 93 | 52 | 55 | 72 | 56 | 65 |
| 89 | 33 | 52 | 60 | 70 | | |

***Grupo B***

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 63 | 67 | 79 | 75 | 57 | 72 | 52 |
| 89 | 39 | 59 | 55 | 68 | 66 | 86 |
| 70 | 52 | 60 | 64 | 42 | 54 | 56 |
| 82 | 57 | 65 | 59 | 33 | | |

1. *Decide si los datos corresponden a la población o a una muestra.*
2. *Describe con precisión la variable estadística que se analizara.*
3. *Construye un diagrama de tallo y hoja de los resultados del grupo A*
4. *Construye un histograma con el segundo grupo de datos para el grupo B.*
5. *Construye un histograma de frecuencias relativas para el grupo B.*
6. *¿Qué porcentaje de estudiantes obtuvieron una nota mayor que* 60*?*

**Solución.**

1. Los datos son solo una muestra de la población que corresponde a todos las notas obtenidas por todos los estudiantes de la Costa que rindieron el examen.
2. La variable estadística $x$ es la nota en el examen de Matemática; esta variable es *cuantitativa*.
3. Un gráfico de tallo y hojas nos puede ayudar a organizar los datos y dar información adicional.

   Para realizar el gráfico, tomamos el dígito más significativo del dato; en este caso, la decena y la colocamos en el "tallo"; en la hoja colocamos el dígito correspondiente a la unidad.

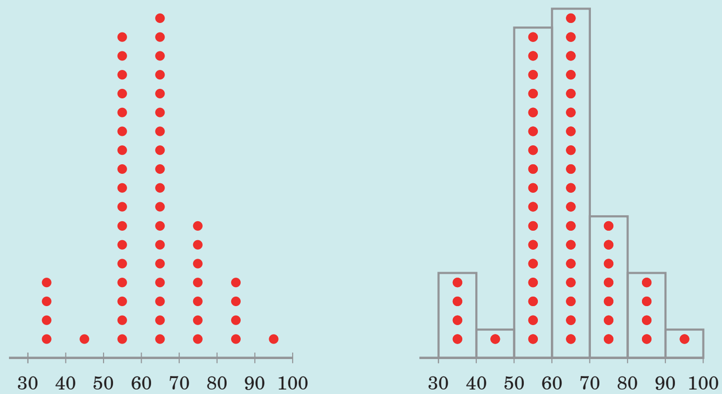
| | | | |
|---|---|---|---|
| 63 | 67 | 79 | 75 |
| 57 | 72 | 52 | 89 |
| 39 | 59 | 55 | 68 |
| 66 | 86 | 70 | 52 |
| 60 | 64 | 42 | 54 |
| 56 | 82 | 57 | 65 |
| 59 | 33 | | |

| | | |
|---|---|---|
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | 3 | 7 |
| 7 | | |
| 8 | | |

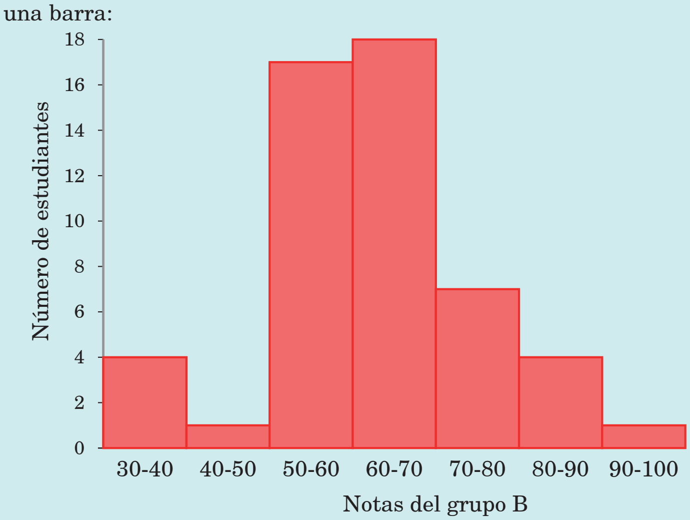
   Al final de este proceso, obtenemos el diagrama completo:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 9 | 3 | | | | | | |
| 4 | 2 | | | | | | | |
| 5 | 7 | 9 | 5 | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 |
| 6 | 3 | 7 | 8 | 6 | 0 | 4 | 5 | |
| 7 | 9 | 5 | 2 | 0 | | | | |
| 8 | 9 | 6 | 2 | | | | | |

4. Un histograma es útil cuando hay demasiados datos y es inconveniente hacer un diagrama de tallo y hojas. Este es el caso del segundo grupo de datos. Para realizar el histograma, miremos un paso intermedio: en los dos diagramas siguientes, cada dato es representado con un punto, en lugar del número mismo:




El histograma es una abstracción de los datos o puntos individuales, al reemplazarlos con una barra:




Podemos condensar los datos en la forma de una tabla de frecuencias absolutas:

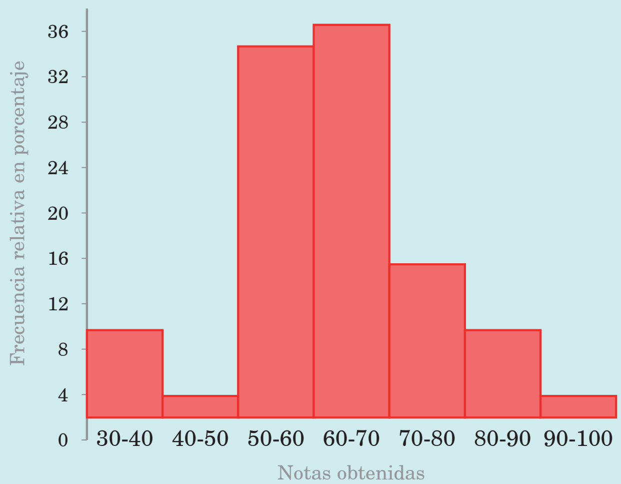
| Intervalo | Frecuencia |
|---|---|
| 30 – 40 | 4 |
| 40 – 50 | 1 |
| 50 – 60 | 17 |
| 60 – 70 | 18 |
| 70 – 80 | 7 |
| 80 – 90 | 4 |
| 90 – 100 | 1 |

5. Para construir el histograma de frecuencias relativas, primero realizamos una tabla

de frecuencias relativas:

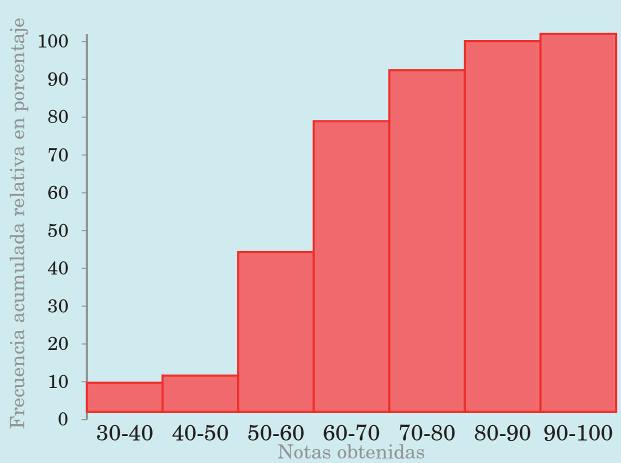
| Intervalo | Frecuencia abs. | Frecuencia relativa | Fracción | Porcentaje |
|---|---|---|---|---|
| 30 – 40 | 4 | 4/52 | 0,077 | 7,7 |
| 40 – 50 | 1 | 1/52 | 0,019 | 1,9 |
| 50 – 60 | 17 | 17/52 | 0,327 | 32,7 |
| 60 – 70 | 18 | 18/52 | 0,346 | 34,6 |
| 70 – 80 | 7 | 7/52 | 0,135 | 13,5 |
| 80 – 90 | 4 | 4/52 | 0,077 | 7,7 |
| 90 – 100 | 1 | 1/52 | 0,019 | 1,9 |

El histograma de frecuencias relativas es:




6. Podemos realizar una tabla de frecuencias acumuladas; con ello podemos responder fácilmente la siguiente pregunta:"¿Cuál es el porcentaje de estudiantes que obtuvieron una nota menor que 60?"

| Intervalo | Frec. acumu. abs. | Frec. acum. relativa | Fracción | Porcentaje |
|---|---|---|---|---|
| 30 – 40 | 4 | 4/52 | 0,077 | 7,7 |
| 40 – 50 | 5 | 5/52 | 0,096 | 9,6 |
| 50 – 60 | 22 | 22/52 | 0,423 | 42,3 |
| 60 – 70 | 40 | 40/52 | 0,769 | 76,9 |
| 70 – 80 | 47 | 47/52 | 0,904 | 90,4 |
| 80 – 90 | 51 | 51/52 | 0,981 | 98,1 |
| 90 – 100 | 52 | 52/52 | 1,000 | 100 |



Vemos que el 42,3% de estudiantes obtuvieron una nota menor que 60.

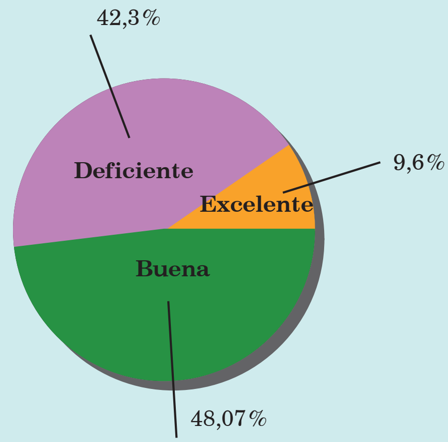
## Diagrama circular

**Ejemplo 2**

*La variable x del ejemplo 1 es una variable numérica: "nota obtenida en el examen". Crea un diagrama circular que represente tres categorías de notas: "deficiente", "buena", "excelente".*

**Solución.** Primero debemos decidir el rango de notas que corresponde a cada categoría:

- *deficiente*: menor que 60.
- *buena*: entre 60 y 80.
- *excelente*: más que 80.




Para resumir y condensar la información, podemos utilizar *medidas estadísticas*. Hay dos tipos de *estadísticas*:

1. Las medidas de tendencia central.
2. Las medidas de dispersión.

## Gráfico poligonal

Tal vez, por experiencia propia sabes que, mientras más veces repites una tarea, ésta se vuelve más fácil de realizar; es decir, te vuelves un experto en esa tarea.

Una revista científica recientemente realizó un estudio sobre el rendimiento de tres grupos diferentes de personas mientras jugaban un video juego. Este estudio está sintetizado en el siguiente diagrama, llamado *gráfico poligonal*.

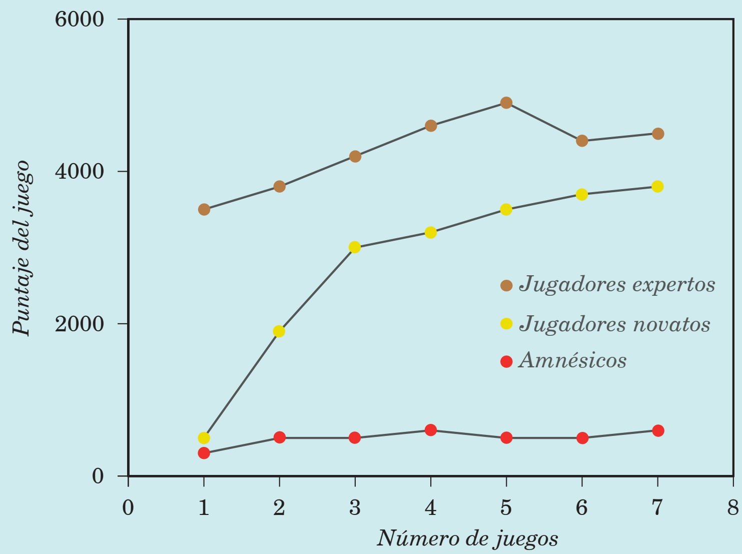
Los diagramas poligonales son buenos para mostrar datos tomados en distintos momentos de tiempo.

**Ejemplo 3**

*Estudia el gráfico y contesta las siguientes preguntas:*

1. *Si una persona es un jugador experto, ¿cuál es su puntaje cuando juega por quinta vez el juego?*
2. *Si una persona es un jugador novato, ¿cuál es su puntaje cuando juega por quinta vez el juego?*
3. *¿Quién aprende más, el jugador experto o el jugador novato?*
4. *¿Qué grupo y cuándo se obtuvo el mayor puntaje?*

5. *¿Qué puedes decir sobre el grupo de jugadores amnésicos?*




*Fuente* http: // www. scientificamerican. com/ article. cfm? id= tetris-dreams

**Solución.**

1. Podemos observar en el gráfico poligonal, en color café, que un jugador experto obtuvo 4 000 puntos.
2. También se observa, en color amarillo, que un jugador novato obtuvo aproximadamente 3 800 puntos.
3. Para comparar cuánto ha progresado cada tipo de jugador, podemos calcular la pendiente entre el punto de inicio y el punto final:

$$\frac{\text{puntaje final - puntaje inicial}}{6}.$$

   (a) Para el jugador Amnésico: $(700 - 400)/6 = 300/6 = 50$ puntos por cada juego adicional.

   (b) Para el jugador Novato: $(3\,800 - 500)/6 = 3\,300/6 = 550$ puntos por cada juego adicional.

   (c) Para el jugador Experto: $(4\,200 - 3\,800)/6 = 3\,300/6 = 66{,}6$ puntos por cada juego adicional.

4. El grupo experto obtuvo el mayor puntaje en la cuarta vez.
5. Como es de esperarse, una persona amnésica no puede recordar lo que hizo; por tanto, no puede aprender de igual manera que una persona sin amnesia. El gráfico nos indica que el grupo de amnésicos mejoró muy poco.

## ¡A practicar!

Para cada grupo de datos, escoge qué tipo de gráfico es mejor realizar: poligonal, circular, de barras, histograma. Luego realiza el gráfico.

1. En una encuesta de preferencia de bebidas en un grupo de 15 personas se obtuvieron los siguientes resultados:

| Persona | Tipo de bebida | Persona | Tipo de bebida |
|---|---|---|---|
| 1 | Agua | 2 | Jugo de fruta |
| 3 | Agua | 4 | Jugo de fruta |
| 5 | Jugo de fruta | 6 | Bebida gaseosa |
| 7 | Bebida gaseosa | 8 | Bebida gaseosa |
| 9 | Bebida gaseosa | 10 | Agua |
| 11 | Agua | 12 | Jugo de fruta |
| 13 | Jugo de fruta | 14 | Agua |
| 15 | Bebida gaseosa | | |

2. En un examen, un curso de 20 estudiantes obtuvieron las siguientes notas:

$$12,\ 15,\ 17,\ 18,\ 20,\ 13,\ 10,\ 12,\ 14,\ 19,\ 19,\ 10,\ 20,\ 19,\ 19,\ 17,\ 16,\ 16,\ 17,\ 15.$$

3. En una competencia de 50 metros libres en natación, los siguientes son los tiempos obtenidos y medidos en segundos:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Bertha | 84,5 | Rocío | 91,3 |
| Bacha | 75,8 | David | 68,2 |
| María | 98,4 | Mireya | 78,9 |
| Mónica | 77,2 | Lucía | 86,8 |
| Lina | 94,6 | Astrid | 64,3 |
| Oneya | 99,3 | Doris | 54,1 |
| Santa | 89,1 | Toya | 76,1 |

4. Para el grupo de datos dado en los tres ejercicios anteriores, encuentra todas las medidas de tendencia central que sean adecuadas.

5. Para el grupo de datos dado en los tres primeros ejercicios, encuentra el rango y la desviación absoluta promedio.

6. Para el grupo de datos dado en el segundo ejercicio, realiza un diagram de caja y bigotes. Determina cuáles son las cinco estadísticas relevantes (mínimo, máximo, mediana y segundo y tercer cuartiles).

## Medidas de tendencia central

### La media aritmética

En la siguiente actividad, descubrirás el significado del *promedio* o *media aritmética* de un conjunto de datos.

1. Toma 20 monedas iguales y acomoda una sobre la otra en 5 grupos de varios tamaños. Imagina que vas a repartir las monedas a cinco amigos. Por ejemplo, un arreglo del reparto puede ser:

$$3,\ 2,\ 10,\ 4,\ 1$$

Los 5 grupos de monedas representan los cinco datos. Este arreglo no es justo o igualitario.

La *media aritmética* se calcula sumando los datos y dividendo para el total de datos en este caso:

$$\frac{3+2+10+4+1}{5} = 205 = 4$$

La media es 4.

2. Ahora arregla las 20 monedas de otra manera, pero siempre teniendo 5 grupos. ¿Cuál es la media ahora?

3. Si arreglas las monedas en 5 grupos de 4 monedas cada uno, este arreglo representa el conjunto de datos:

$$4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4$$

4. La *media aritmética* de estos datos es:

$$\frac{4+4+4+4+4}{5} = \frac{20}{5} = 4.$$

5. Intenta con otras maneras de arreglar las monedas; ¿cuál es la media aritmética de los datos?

6. Observarás que la media es la misma en todos estos casos.

Si estuvieras repartiendo las monedas entre 5 cinco amigos, la media aritmética representa la cantidad justa e igual que le debería tocar a cada uno.

Cuando decimos "en promedio cada persona recibió 4 monedas", entendemos que unas recibieron algo más que otras (otras recibieron algo menos), pero que el reparto igual hubiera sido que cada persona recibiera cuatro monedas.

Nota, además, que las diferencias de los datos con respecto a la media se equilibran: el total de las diferencias de los que reciben más es igual al total de las diferencias de los que reciben menos.

**Ejemplo 4**

*Sin utilizar el algoritmo de cálculo de la media aritmética, verifica que 5 es la media de los siguientes datos:*

$$2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8.$$

**Solución.** Puesto que la media aritmética debe balancear las diferencias entre los datos, vemos que: la diferencia entre 2 y 5 es $-3$, entre 4 y 5 es $-1$, entre 5 y 6 es 1 y entre 8 y 5 es 3. Si sumas estas diferencias, obtienes:

$$(-3)+(-1)+1+3=0.$$

Luego las diferencias están equilibradas; por lo tanto, 5 es la media aritmética de los datos.

## La mediana y la moda

La *mediana* de un grupo de datos ordenados de menor a mayor es el dato que se encuentra en la mitad. La *moda* es el dato que se repite con más frecuencia.

**Ejemplo 5**

*En una encuesta en tu colegio sobre el número de horas a la semana que los estudiantes ven televisión, se recogieron los siguientes datos:*

$$8,\ 8,\ 9,\ 3,\ 3,\ 0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 5,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 9,\ 10,\ 10,\ 6,\ 7,\ 8,\ 2,\ 3,\ 3,\ 5.$$

*Encuentra las tres medidas de tendencia central: la media, la mediana y la moda del grupo de datos.*

**Solución.** Para encontrar la media sumamos los datos y dividimos para el numero total de datos:

$$\frac{8+8+9+3+3+0+1+2+5+5+5+6+8+9+9+10+10+6+7+8+2+3+3+5}{24} = \frac{146}{26}$$
$$\approx 5{,}615.$$

Recordemos que la mediana es el valor de la variable para el cual la mitad de los valores son mayores que la mediana y la otra mitad son valores menores. Entonces, lo primero que debemos hacer es ordenar los datos de menor a mayor:

$$0,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 6,\ 6,\ 6,\ 7,\ 8,\ 8,\ 8,\ 8,\ 9,\ 9,\ 9,\ 10,\ 10.$$

Puesto que hay 26 datos, la mediana se encuentra entre el elemento número 13 y el elemento número 14; es decir, la mediana está entre 5 y 6. Por ello, la mediana es el 5,5.

La moda es el dato que tiene mayor frecuencia; en este caso, es 5: aparece 5 veces.

## Diagrama de caja y bigotes

Un diagrama de caja y bigotes resume cinco informaciones importantes:

1. El *mínimo* de los datos; es decir, el dato (número) más pequeño.
2. El *máximo* de los datos; es decir, el dato (número) más grande.
3. La mediana de los datos.
4. El *primer cuartil*; es decir, la mediana de la mitad inferior de los datos.
5. El *tercer cuartil*; es decir, la mediana de la mitad superior de los datos.

En el siguiente ejemplo, se explica cómo se "grafica esta información" en un diagrama de caja y bigotes.

### Ejemplo 6

*Diez compañeras y compañeros de tu curso hicieron un concurso de quien puede sostener más la respiración bajo el agua. Los tiempos medidos en segundos obtenidos fueron los siguientes:*

$$25,\ 32,\ 45,\ 34,\ 65,\ 78,\ 34,\ 28,\ 45,\ 42.$$

*Construye un diagrama de caja y bigotes.*

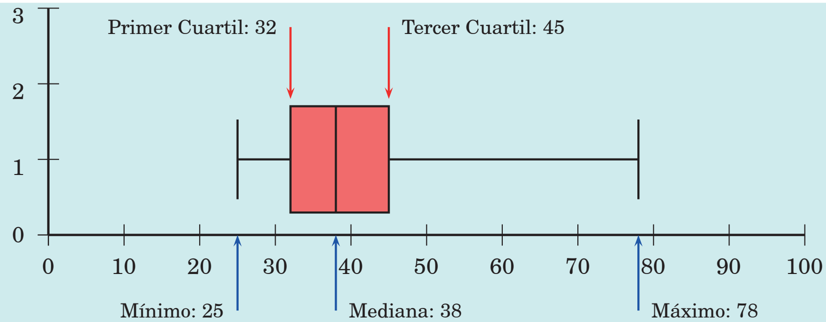
**Solución.** Para facilitar su construcción, lo primero que hacemos es ordenar los datos en forma ascendente:

$$25,\ 28,\ 32,\ 34,\ 34,\ 42,\ 45,\ 45,\ 65,\ 78.$$

Entonces:

1. El menor de los datos (el mínimo) es: 25.
2. El mayor de los datos (el máximo) es: 78.
3. La mediana de los datos es:
$$\frac{34+42}{2} = 38.$$
4. El primer cuartil es 32 (la mediana de la mitad inferior de los datos): 25, 28, 32, 34, 34.
5. El tercer cuartil es 45 (la mediana de la mitad superior de los datos): 42, 45, 45, 45, 78.

Ahora bien, el diagrama de cajas y bigote está constituido por una caja cuyos extremos son los cuartiles y los bigotes son líneas que van de la caja a los extremos:




Interpretemos este gráfico.

1. El bigote izquierdo representa el rango de datos entre el mínimo y el primer cuartil, es decir, el primer 25% de datos.
2. El bigote de la derecha representa el rango de datos entre el tercer cuartil y el máximo, es decir, el 25% superior de datos.
3. La caja está divida en dos cuartiles por la mediana; cada cuartil representa el 25% de datos.

Según el gráfico, podemos afirmar que el 75% de las personas pudieron resistir la respiración hasta 45 segundos.

En el último ejemplo, vimos que organizar los datos puede revelar información importante que nos guíe en la comprensión de la realidad y la toma de decisiones.

## Medidas de dispersión

En el problema de repartición de monedas, vimos que todos los arreglos tienen la misma media pero unos arreglos pueden ser más "desiguales" . Las diferencias entre los datos y la media nos permite medir esta desigualdad o variación entre los datos.

En los siguientes ejemplos, vamos a considerar dos estadísticas que miden la dispersión:

1. El *rango*: la diferencia entre el valor más grande y el más pequeño de los datos.
2. La *desviación absoluta promedio*: el promedio de las diferencias en valor absoluto entre la media y los datos

### Ejemplo 7

*Encuentra el rango y la desviación absoluta promedio de los siguientes datos, que representan el peso de tres personas:*

*A:* 56 *kg*. *B:* 78 *kg*. *C:* 90 *kg*.

**Solución.**

1. El rango es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo:

$$90 - 56 = 34.$$

   El rango es, por lo tanto, igual a 34 kilogramos.
2. La desviación absoluta promedio es el promedio de las diferencias en valor absoluto

entre la media y los datos. En primer lugar, la media es:

$$\frac{56+78+90}{3}=74{,}67.$$

En segundo lugar, calculemos el valor absoluto de la desviación de cada dato con respecto a la media:

$$|56-74{,}67|=|-18{,}67|=18{,}67$$
$$|78-74{,}67|=|3{,}33|=3{,}33$$
$$|90-74{,}67|=|15{,}33|=15{,}33.$$

Ahora encontramos la media de estos tres valores absolutos:

$$\text{desviación absoluta promedio}=\frac{18{,}67+3{,}33+15{,}33}{3}=12{,}44.$$

## Algoritmo para determinar el rango

1. Determine el valor máximo y mínimo del conjunto de datos.
2. Reste del valor máximo el valor mínimo; ése es el rango de los datos.

## Algoritmo para obtener la desviación absoluta promedio

1. Determinar media
2. Determinar la desviación o diferencia entre la media y cada dato.
3. Tomar el valor absoluto de las diferencias encontradas en el paso 2 y encontrar su media.

### Ejemplo 8

*Para el grupo de datos*

$$3,\ 2,\ 10,\ 4,\ 1,$$

*encuentra las dos medidas de dispersión. Luego compara las con las correspondientes medidas del grupo de datos*

$$3,\ 1,\ 11,\ 3,\ 2.$$

*Nota que ambos grupos tienen la misma media igual a 4. Si estás repartiendo monedas a 5 personas, ¿cuál de las dos distribuciones es más equitativa?*

**Solución.** El rango del primer grupo de datos es

$$10-1=9.$$

El valor absoluto de las diferencias de cada dato con la media 4 son:

$$1,\ 2,\ 6,\ 0,\ 3,$$

respectivamente. El promedio de estas diferencias es 2,4; por lo tanto, la desviación absoluta es 2,4.

El rango del segundo grupo de datos es

$$11-1=10.$$

Las diferencias de cada dato con la media 4 son:

$$1,\ 3,\ 7,\ 1,\ 2,$$

respectivamente. El promedio de estas diferencias es 2,8; por lo tanto, la desviación absoluta es 2,8.

Puesto que el rango es mayor, la segunda distribución es menos equitativa.

# Probabilidad

Resultan difíciles o imposibles predecir muchos de los eventos de nuestra vida cotidiana. Piensa, por ejemplo, en el pronóstico del tiempo, el resultado de lanzar una moneda al aire, el resultado de las votaciones en tu colegio, el tiempo que te demoras en ir de una ciudad a otra. Sin embargo, a pesar de que no podemos predecir de manera exacta lo que sucederá en cada uno de estos eventos, la teoría de probabilidades nos da herramientas para darnos algunas respuestas. La teoría de probabilidades también tiene aplicaciones importantes en la estadística y en la toma de decisiones.

## Actividad para la clase

1. Piensa en eventos cuyo resultado es incierto y regístralos en tu cuaderno.

2. Traza una línea recta como la siguiente, y ubica cada evento de tu lista en la línea según su certeza:

Imposible                Certero

0                1

3. Cada uno de los siguientes eventos ubícalo en la línea según su certeza. ¿Cuál es el número entre cero y uno que asociaste a cada evento?

   (a) "El sol sale por el oriente".

   (b) "El sol sale por el occidente".

   (c) "Lloverá el día de mañana".

   (d) "Si lanzo una moneda, me saldrá cara".

El número entre 0 y 1 que asociaste al evento se llama la *probabilidad* del evento.

## Términos importantes

Considera el siguiente experimento probabilístico: se lanza un dado cada una de cuyas 6 caras están marcadas con un número entre el 1 y el 6. Se registra el número marcado en la cara superior del dado. Decimos que:

1. Este experimento es *aleatorio*.

2. El resultado del experimento es un *evento*. Por ejemplo: un evento es: "La cara superior está marcada con 2".

3. El conjunto de datos de posibles resultados es el *espacio muestral* del experimento. En este caso, el espacio muestral es el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

4. Un *evento simple* es un elemento del espacio muestral. Por ejemplo: si el resultado del experimento es "La cara superior está marcada con 2", un evento simple es 2.

5. Un *evento compuesto* es cuando combinamos varios eventos simples. Por ejemplo: si el experimento consiste en *Se lanza un dado una vez, se registra el número de la cara superior y se vuelve a lanzar el dado otra vez*, el evento de que "Salga 2 y luego 3" es un evento compuesto.

6. La variable que representa a un evento es la *variable aleatoria discreta*.

7. La probabilidad es un número $p$ tal que $0 \leq p \leq 1$, que asociamos a cada valor de la variable aleatoria. Por ejemplo, si $x$ es la variable aleatoria discreta, escribiremos

$$P(x = a) = p$$

para indicar que *la probabilidad de que "la variable $x$ sea igual al valor $a$" es $p$*. Por ejemplo: la probabilidad de que al lanzar un dado, la cara superior marque un 1 es $\frac{1}{6}$ se representa así:

$$P(x = 1) = \frac{1}{6}.$$

**Ejemplo 9**

*Lanza una moneda dos veces y anota el resultado en orden. Por ejemplo: "cs" indicará que la primera vez salió* cara *y la segunda,* sello.

1. *Describe el espacio muestral de este experimento. ¿Cuántos elementos tiene? ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra cada uno de los eventos?*

2. *Describe el espacio muestral del experimento: Lanzar la moneda tres veces consecutivas. ¿Cuántos elementos tiene? ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra cada uno?*

**Solución.**

1. El espacio muestral es

$$\{\text{cc, cs, sc, ss}\}.$$

Hay cuatro elementos, y cada uno tiene la misma posibilidad de salir; por lo tanto, la probabilidad de cada uno es $\frac{1}{4}$.

2. El espacio muestral es

$$\{\text{ccc, ccs, csc, css, scc, scs, ssc, sss}\}.$$

Hay ocho elementos y cada uno tiene la misma posibilidad de salir. Luego, la probabilidad de cada evento es $\frac{1}{8}$.

Los eventos en los dos ejemplos anteriores se conocen con el nombre de *eventos equiprobables*, pues todos tienen la *misma* probabilidad de ocurrir.

Son *eventos equiprobables* aquellos que tienen la *misma* probabilidad.

**Ejemplo 10**

*Considera el siguiente juego de azar: dos jugadores, A y B, uno con un dado de color azul y el otro de color rojo, lanzan los dados.*

- *El jugador A ganará si la suma de los dos dados es* 2, 3, 4, 10, 11 *o* 12.
- *El jugador B ganará si la suma de los dos dados es* 5, 6, 7, 8 *o* 9.

*¿Este juego es justo? Es decir, ¿cada jugador tiene la misma probabilidad de ganar?*

**Solución.** Para resolver este problema de manera eficiente, vamos a escribir los resultados en una tabla, que la vamos a construir de la siguiente manera.

La primera columna contiene los resultados del dado azul y la primera fila, del dado de color rojo. En cada celda de la tabla, escribiremos el resultado del dado azul, seguido de un signo "+" y seguido del resultado del dado rojo. Por ejemplo: si el dado azul salió 2 y el rojo, 4, escribiremos en la tabla lo siguiente:

| + | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | 2 + 4 | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

Entonces, la tabla completa es:

| + | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 + 1 | 1 + 2 | 1 + 3 | 1 + 4 | 1 + 5 | 1 + 6 |
| 2 | 2 + 1 | 2 + 2 | 2 + 3 | 2 + 4 | 2 + 5 | 2 + 6 |
| 3 | 3 + 1 | 3 + 2 | 3 + 3 | 3 + 4 | 3 + 5 | 3 + 6 |
| 4 | 4 + 1 | 4 + 2 | 4 + 3 | 4 + 4 | 4 + 5 | 4 + 6 |
| 5 | 5 + 1 | 5 + 2 | 5 + 3 | 5 + 4 | 5 + 5 | 5 + 6 |
| 6 | 6 + 1 | 6 + 2 | 6 + 3 | 6 + 4 | 6 + 5 | 6 + 6 |

Como puedes ver, hay 36 posibilidades en total:

- 12 de ellas dan 2, 3, 4, 10, 11 o 12.
- 24 de las 36 posibilidades dan un resultado igual a 5, 6, 7, 8 o 9.

Por lo tanto:

- El jugador $A$ tiene una probabilidad de ganar igual a:

$$\frac{12}{36} = \frac{1}{3};$$

  o lo que es lo mismo: el 33,33 %.

- El jugador $B$ tiene una probabilidad de ganar igual a:

$$\frac{24}{36} = \frac{2}{3};$$

  es decir: el 66,67 %.

Este juego no es equitativo.

Como hemos visto en los ejemplos anteriores, la probabilidad de un evento se puede calcular de la manera siguiente:

$$P(\text{evento}) = \frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número de resultados posibles}}$$

**Ejemplo 11**

*Se lanza tres veces una moneda, ¿cuántos elementos hay en el espacio muestral?*

**Solución.** Utilicemos las letras c y s para "cara" y "sello", respectivamente.

Cada evento puede ser representado por una secuencia del siguiente tipo *css*, que indica que en el primer lanzamiento, la moneda mostró una cara; en el segundo y en el tercer lanzamiento, salió sello. En total hay 8 posibilidades:

| | | |
|---|---|---|
| c | c | c |
| c | c | s |
| c | s | c |
| c | s | s |
| s | c | c |
| s | c | s |
| s | s | c |
| s | s | s |

Por lo tanto, el espacio muestral tiene 8 elementos.

### Ejemplo 12

*Un experimento consiste en lanzar dos dados, ¿cuántos elementos tiene el espacio muestral correspondiente?*

**Solución.** Por cada resultado del primer dado, hay 6 posibles resultados distintos del segundo dado. Y, como hay 6 posibles resultados para el primer dado, en total habrán

$$6 \times 6 = 36$$

posibilidades:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) |
| 2 | (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) |
| 3 | (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) |
| 4 | (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (4,6) |
| 5 | (5,1) | (5,2) | (5,3) | (5,4) | (5,5) | (5,6) |
| 6 | (6,1) | (6,2) | (6,3) | (6,4) | (6,5) | (6,6) |

Cada par ordenado indica un evento. El espacio muestral tiene, entonces, 36 elementos.

### Ejemplo 13

*En un juego de azar, se tienen tres bolas: una de color roja, otra blanca y otra de color verde. De una funda, se saca al azar dos veces una bola, siempre devolviéndola a la funda. ¿Cuántos elementos hay en el espacio muestral? ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos bolas del mismo color?*

**Solución.** Si utilizamos las letras r, b y v para representar las bolas roja, blanca y verde, respectivamente, los elementos del espacio muestral serán

| | r | b | v |
|---|---|---|---|
| r | rr | rb | rv |
| b | br | bb | bv |
| v | vr | vb | vv |

Cada pareja indica un evento. El espacio muestral tiene, entonces, 9 elementos.

Claramente hay tres eventos en los que se repite el color: rr, bb y vv. Por tanto, la probabilidad de que las dos bolas salgan del mismo color es:

$$\frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

En los tres ejemplos, hemos procedido de manera similar para obtener el espacio muestral:

1. En el primero, se han seleccionado tres letras de un total de dos opciones: c y s. Se obtuvieron en total $2^3 = 8$.

2. En el segundo ejemplo, se tomaron dos elementos de un total de 6 y se obtuvieron $6^2$ en total; es decir: $6^2 = 36$.

3. Se tomaron dos elementos de un total de tres; se obtuvieron 9 en total; es decir: $3^2 = 9$.

El procedimiento realizado en cada ejemplo puede ser visto como la *selección con repetición de $n$ elementos de un total de $N$*. Y en total son: $N^n$. Esta es una fórmula combinatoria y que puede ser utilizada para calcular el conteo del número de casos favorables.

# Ejercicios del capítulo

## Conceptos

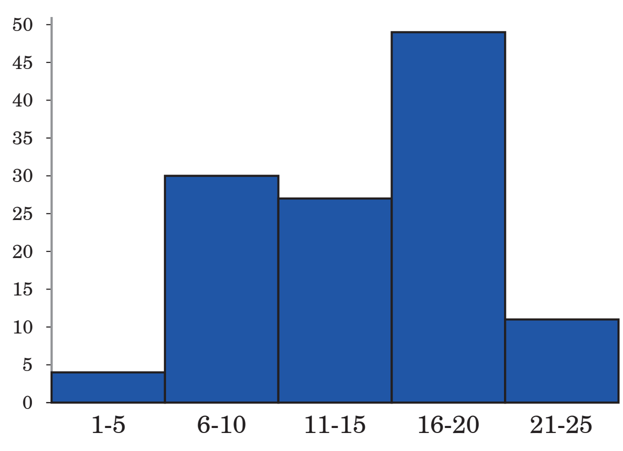
1. Propón dos conjuntos de datos distintos que tengan la misma media, la misma mediana y la misma moda.

2. En un juego de lanzar una bola al aro de básquet 10 veces, 6 personas obtuvieron los siguientes números de canastas:

$$4,\ 3,\ 5,\ 5,\ 7,\ 1.$$

   Encuentra la media, la mediana y la moda del conjunto de datos.

3. En una competencia de quien sabe más capitales de países del mundo, se obtuvieron los siguientes datos representados en el siguiente histograma.




   ¿Cuántas personas participaron en el concurso? ¿Cuántas personas saben más de 16 capitales?

4. Un estudiante obtuvo las siguientes notas (sobre 20) en cuatro exámenes:

$$16,\ 18,\ 19,\ 16.$$

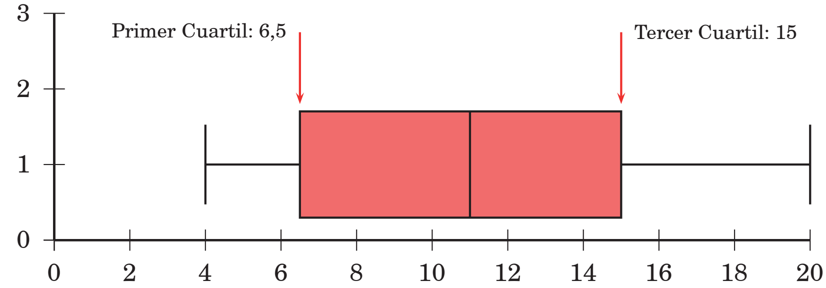
   ¿Cuál debe ser la nota de un quinto examen para que la media del total de datos sea 18?

5. Aumenta dos datos al siguiente grupo:

$$13,\ 18,\ 13,\ 14,\ 13,\ 16,\ 14,\ 21,\ 13.$$

de manera que la media no se altere.

6. Observa el siguiente gráfico de caja y bigotes:




(a) ¿Cuáles son las cinco estadísticas importantes en este gráfico?

(b) Uno de los datos es 8, ¿a qué cuartil pertenece?

7. Consideremos el experimento aleatorio consistente en extraer al azar una bola de una urna que contiene una bola roja y dos blancas. Describe el espacio muestral. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola roja?

8. Consideremos el experimento aleatorio consistente en sacar al azar dos bolas de una urna compuesta por una bola roja y dos blancas. Describe el espacio muestral. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola roja?

## Procedimientos

1. En una competencia de saltar la cuerda, cuatro paralelos de tu colegio obtuvieron los siguientes puntajes:

| Paralelo A | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 23 | 25 | 25 | 26 | 26 | 26 | 26 | 27 | 27 | 27 | 27 |
| 28 | 29 | 29 | 29 | 30 | 30 | 31 | 31 | 31 | 32 | 32 |
| 32 | 33 | 34 | 34 | 35 | 35 | 36 | 39 | | | |

| Paralelo B | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 22 | 24 | 24 | 25 | 25 | 25 | 25 | 26 | 26 | 26 |
| 26 | 26 | 26 | 27 | 27 | 27 | 27 | 28 | 29 | 29 | 29 |
| 29 | 29 | 29 | 30 | 30 | | | | | | |

| Paralelo C | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 25 | 25 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 27 | 27 | 27 |
| 28 | 28 | 28 | 28 | 28 | 28 | 28 | 28 | 28 | 29 | 29 |
| 29 | 30 | 30 | 31 | 32 | 32 | | | | | |

| Paralelo D | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 23 | 24 | 25 | 25 | 25 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 |
| 27 | 27 | 28 | 28 | 29 | 29 | 29 | 29 | 29 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 32 | 33 | 33 | 33 | 34 | 34 | 35 | 35 | 35 |
| 36 | 36 | 38 | | | | | | | | |

(a) Construye una tabla de frecuencias absolutas y frecuencias relativas. Realiza un histograma para los datos de cada paralelo.

(b) Determina la media, el rango y la desviación absoluta promedio de cada paralelo.

(c) ¿Qué paralelo obtuvo la mejor media?

(d) ¿Qué paralelo tiene la menor desviación.

(e) Comparando los resultados de cada paralelo, ¿a cuál declararías ganador?

2. Aumenta un dato al grupo de datos 13, 18, 13, 14, 13, 16, 14, 21, 13 de manera que la mediana no se altere.

3. Realiza un diagrama de caja y bigotes para el siguiente conjunto de datos:

$$14, 16, 8, 15, 16, 18, 20, 22, 21, 30, 5.$$

4. Realiza un diagrama de caja y bigotes para el siguiente conjunto de datos:

$$102, 103, 120, 115, 116, 108, 99, 96, 120, 118, 119.$$

5. El siguiente diagrama de tallo y hoja representa un grupo de datos de cuántos minutos a la semana lee un grupo de estudiantes:

| | |
|---|---|
| 3 | 0 3 |
| 3 | 9 9 |
| 4 | 2 |
| 4 | |
| 5 | 0 2 2 3 3 4 |
| 5 | 5 5 6 6 7 7 7 7 8 9 9 |
| 6 | 0 0 0 0 1 1 2 3 4 |
| 6 | 5 2 2 6 7 7 7 7 8 |
| 7 | 0 2 2 2 |
| 7 | 5 5 9 |
| 8 | 2 |
| 8 | 6 9 9 |
| 9 | 3 |
| 9 | |

(a) Construye una tabla de frecuencias absolutas con cinco intervalos.

(b) Construye una tabla de frecuencias relativas con cinco intervalos.

(c) Realiza un histograma con cinco intervalos para las frecuencias relativas.

(d) Construye una tabla de frecuencias acumuladas con cinco intervalos.

(e) Realiza un histograma con cinco intervalos para las frecuencias acumuladas.

6. Un juego de azar con dos jugadores consiste en lazar dos dados. El jugador A gana si la suma de los dados es 2, 3, 4, 7, 10, 11 o 12. El jugador B gana si la suma de los dados es 5, 6, 8 o 9. ¿Es el juego justo?

7. En el mismo juego de azar de dos jugadores con dos dados del ejercicio anterior, decide quién tiene más opciones de ganar si el jugador $A$ lo hará cuando la suma es par y el jugador $B$, cuando la diferencia es 3, 4 o 5.

8. En el mismo juego de azar de dos jugadores con dos dados del ejercicio anterior, decide quién tiene más opciones de ganar si el jugador $A$ lo hará cuando la diferencia es 0, 1 o 2 y el jugador $B$ ganará cuando la suma sea un número impar.

9. ¿Cuántos elementos hay en el espacio muestral en cada uno de los siguientes juegos de azar?

   - Se lanzan cuatro monedas al mismo tiempo.
   - Se lanzan tres dados al mismo tiempo.

10. En los juegos descritos en el problema anterior,

   - ¿cuál es la probabilidad de que las cuatro monedas sean o solo cara o solo sello?
   - ¿cuál es la probabilidad de que los tres dados muestren 1, 1 y 1?

## Uso de tecnología

Si dispones de una calculadora gráfica o tienes acceso a una herramienta en línea, realiza un histograma con 4, 5, 6, 7 y 8 intervalos de los siguientes datos. ¿Qué puedes observar en la forma en que toma la distribución de los datos cuando aumentas el número de intervalos?

| | | | |
|---|---|---|---|
| 490,0 | 499,0 | 459,0 | 575,0 |
| 575,0 | 513,0 | 382,0 | 525,0 |
| 510,0 | 542,0 | 368,0 | 564,0 |
| 509,0 | 530,0 | 485,0 | 521,0 |
| 495,0 | 526,0 | 474,0 | 500,0 |
| 441,0 | 750,0 | 495,0 | 476,0 |
| 456,0 | 440,0 | 547,0 | 479,0 |
| 501,0 | 476,0 | 457,0 | 444,0 |
| 444,0 | 467,0 | 482,0 | 449,0 |
| 464,0 | 501,0 | 670,0 | 740,0 |
| 590,0 | 700,0 | 590,0 | 450,0 |
| 452,0 | 468,0 | 472,0 | 447,0 |