Ministerio de Educación

MATEMÁTICA

TEXTO DEL ESTUDIANTE

3.º CURSO | Bachillerato General Unificado

PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA
Rafael Correa Delgado

MINISTRO DE EDUCACIÓN
Augusto Espinosa Andrade

VICEMINISTRO DE EDUCACIÓN
Freddy Peñafiel Larrea

VICEMINISTRO DE GESTIÓN EDUCATIVA
Jaime Roca Gutiérrez

SUBSECRETARIA DE FUNDAMENTOS EDUCATIVOS
Tannya Lozada

DIRECTORA NACIONAL DE CURRÍCULO
Isabel Ramos Castañeda

Av. Amazonas N34-451 y Atahualpa
Quito, Ecuador
www.educacion.gob.ec

Primera edición: julio 2014
Impreso por El Telégrafo
ISBN: 978-9942-15-108-7
DISTRIBUCIÓN GRATUITA - PROHIBIDA SU VENTA

Matemática

Tercer año de Bachillerato General Unificado

TEXTO DEL ESTUDIANTE

AUTORÍA
Lucía Castro

EDICIÓN
Doris Arroba Jácome

DISEÑO Y DIAGRAMACIÓN
Augusto Cabrera

CORRECCIÓN DE ESTILO
Santiago Preckler

FOTOGRAFÍA
Archivos fotográficos SM

Ministerio de Educación

ADVERTENCIA

Un objetivo manifiesto del Ministerio de Educación es combatir el sexismo y la discriminación de género en la sociedad ecuatoriana y promover, a través del sistema educativo, la equidad entre mujeres y hombres. Para alcanzar este objetivo, promovemos el uso de un lenguaje que no reproduzca esquemas sexistas, y de conformidad con esta práctica preferimos emplear en nuestros documentos oficiales palabras neutras, tales como las personas (en lugar de los hombres) o el profesorado (en lugar de los profesores), etc. Sólo en los casos en que tales expresiones no existan, se usará la forma masculina como génerica para hacer referencia tanto a las personas del sexo femenino como masculino. Esta práctica comunicativa, que es recomendada por la Real Academia Española en su Diccionario Panhispánico de Dudas, obedece a dos razones: (a) en español es posible <referirse a colectivos mixtos a través del género gramatical masculino>, y (b) es preferible aplicar <la ley lingüística de la economía expresiva> para así evitar el abultamiento gráfico y la consiguiente ilegibilidad que ocurriría en el caso de utilizar expresiones como las y los, os/as y otras fórmulas que buscan visibilizar la presencia de ambos sexos.

PRESENTACIÓN

El Plan Decenal de Educación, aprobado mediante Consulta Popular el 26 de noviembre 2006 con el 66% del total de votos, marcó desde entonces la agenda para la Política Pública en el Ministerio de Educación.

La estrategia clave para la consecución de las Políticas del Plan Decenal de Educación referentes a la Universalización de la Educación General Básica de primero a décimo grados, al incremento de la población estudiantil del Bachillerato hasta alcanzar al menos el 75% de los jóvenes en la edad correspondiente (al año 2013), a la tasa neta de asistencia a Educación General Básica que alcanzó el 96,1% y a la tasa neta de asistencia a Bachillerato que ascendió a 65,8% frente al 51,2% (registrado en el año 2007), está necesariamente ligada a la fuerte inversión que el Gobierno Nacional ha realizado los últimos años en educación.

Con el presupuesto asignado, el Ministerio de Educación despliega, desde el año 2007, varios programas dirigidos a la eliminación de las barreras económicas de acceso a la educación de los niños, niñas y adolescentes. Uno de estos programas es el referente a la entrega gratuita de textos escolares a los estudiantes y docentes de Educación General Básica, Bachillerato General Unificado de la oferta intercultural e intercultural bilingüe, que asisten de manera regular a las instituciones fiscales, fiscomisionales y municipales en todo el país.

Para los estudiantes, se entrega textos y cuadernos de trabajo; para los docentes, textos y guías docentes; y para los estudiantes y docentes de Educación Intercultural Bilingüe, los kukayos pedagógicos (textos bilingües).

En el año 2014, se entregará textos a los estudiantes y guías del docente para Bachillerato General Unificado (BGU) del régimen Sierra y Costa en las materias de Matemática, Lengua y Literatura, Física, Química, Desarrollo del Pensamiento, para el primer curso; Biología, Lengua y Literatura, Físico-Química, para segundo curso; y Lengua y Literatura, Matemática, Educación para la Ciudadanía, para tercer curso. Adicionalmente, se entregará material para el estudiante (texto y libro de trabajo) y material para el docente (guía docente y CD de audio) del área de inglés a los tres cursos de BGU.

El libro de texto tiene como principal objetivo brindar apoyo, tanto a los docentes como a los estudiantes y representantes, en la consecución de los estándares de aprendizaje, referidos a los mínimos que los estudiantes deben alcanzar al culminar el tercer año del Bachillerato. Por lo tanto, brinda información científica sobre los temas en estudio, propone actividades de investigación y aplicación del nuevo conocimiento, invita al lector a aplicar estrategias de autoevaluación, coevaluación y heteroevaluación, enseña a citar fuentes de consulta y enlista la bibliografía en la que sustenta la información.

Por todo lo anterior, se ha puesto especial cuidado en la selección de este texto, aplicando un estricto proceso de evaluación del rigor científico y curricular que el Ministerio de Educación exige en este material.

Siendo un material de apoyo básico, esperamos que los docentes y sobre todo los estudiantes no se sujeten exclusivamente a la información vertida en él, sino que este libro despierte las ganas de investigar, de ampliar su información, de acudir a otras fuentes que los lleven hacia una mayor comprensión y aplicación en la vida diaria de lo que aprenden.

Éxitos en este nuevo año y a escribir nuestra nueva historia…

Ministerio de Educación

Ministerio
de **Educación**

Conoce tu libro

1 Apertura de la unidad

Los módulos comienzan con una doble página de introducción que despierta la curiosidad acerca de los temas que serán estudiados.

- ¿Qué sabes?
- ¿Qué aprenderás?
- Objetivos educativos del módulo
- Activación de conocimientos previos
- Iniciemos
- El Buen Vivir

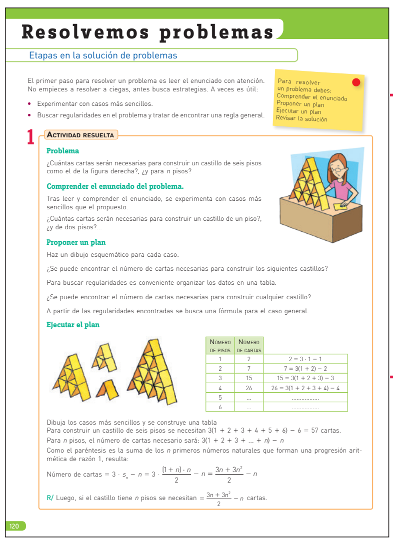
3 Aplicamos

Colección de actividades organizadas por contenidos. Según la acción se clasifican en: Calcula, Entrena, Resuelve problemas, Refuerza, Aclara conceptos, Amplía e Interpreta y resuelve.

Su nivel de complejidad puede ser:

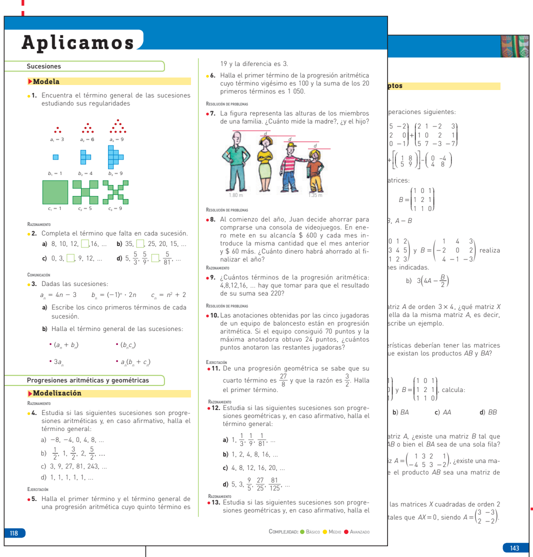
• Básico • Medio • Avanzado

Cada actividad privilegia alguno de los procesos matemáticos: Ejercitación, Razonamiento, Comunicación, Modelación y Resolución de problemas.



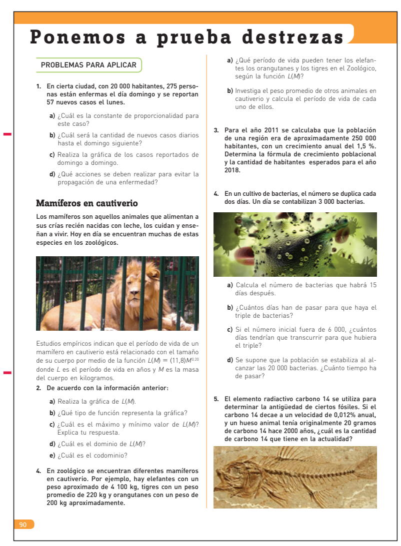
4 Resolvemos problemas

Sección en la cual se expone y se aplica una estrategia de resolución de problemas asociados a los contenidos de la unidad.

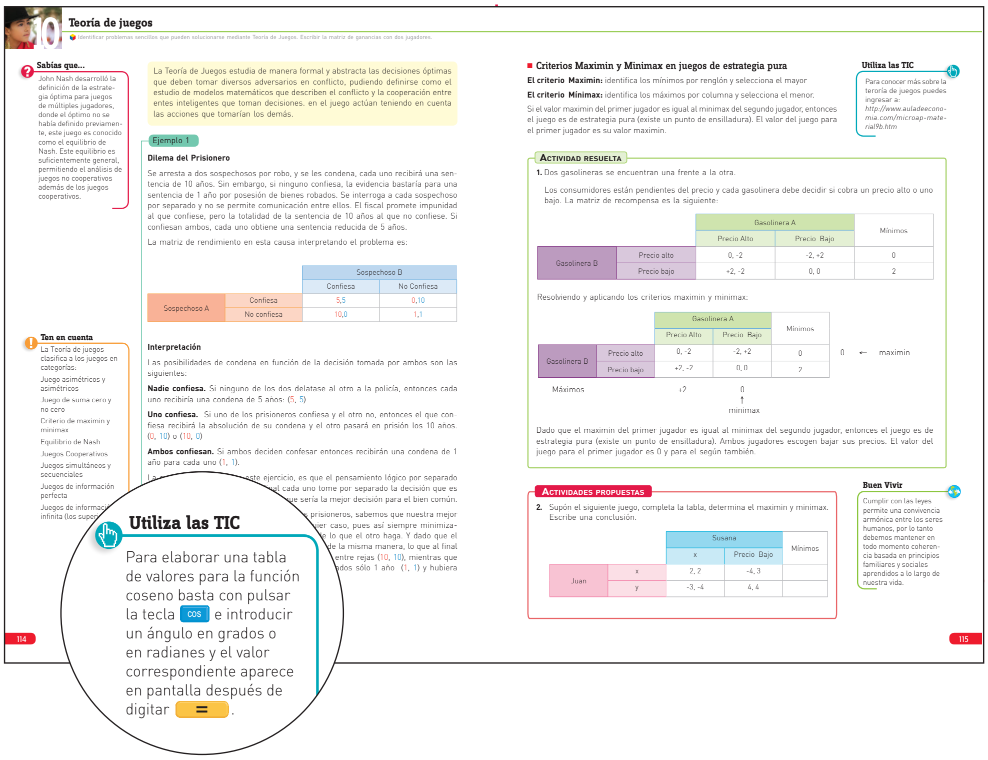


5 Ponemos a prueba destrezas

Página en la cual se trabajan las destrezas con criterios de desempeño, mediante actividades que reflejan situaciones reales y cotidianas.



2 Desarrollo de conocimientos y destrezas con criterios de desempeño



Los contenidos se exponen de forma estructurada, clara y sencilla, mediante el uso de un lenguaje riguroso.

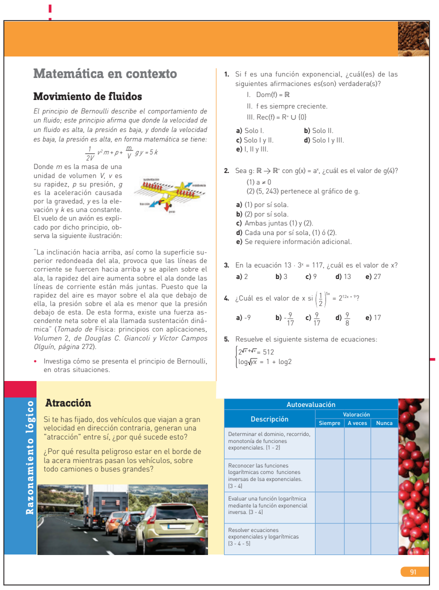
- En **recuadros con fondo de color** se destacan las ideas fundamentales de los temas.
- Con los **ejemplos** y **actividades resueltas** y **propuestas** se aplican los conocimientos expuestos.
- Incluye notas al margen y **vínculos a páginas web** que enriquecen los contenidos.

Utiliza las TIC

Permite acceder a recursos interactivos para profundizar los contenidos.

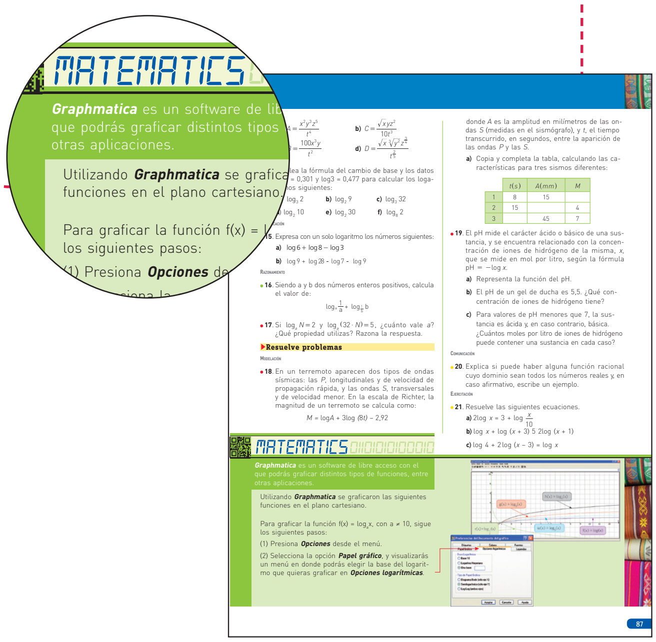
6 Matemática en contexto

Presenta textos informativos relacionados con otras áreas del conocimiento a las que la matemática sirve como instrumento para expresar y resolver sus propios problemas.



7 Matematics

Contiene procedimientos de resolución de problemas con ayuda de herramientas tecnológicas, tales como la calculadora y la computadora.



Contenido

1

Funciones

Bloque: Números y funciones.

La cría de aves en nuestro país está en aumento, el 78,17% de las aves proviene de planteles avícolas y apenas el 21,83% son criadas en el campo, esto según el Instituto Nacional de Estadística y Censos INEC.

En forma general, los datos recogidos en los Censos son transformados en funciones que permiten una interpretación clara de los fenómenos investigados para poderlos analizar, controlar y predecir.

Fuente: file:///C:/Users/Personal/Downloads/info-aves.pdf (Adaptación)

¿Qué sabes?

En años anteriores trabajaste con funciones lineales y cuadráticas, además sabes modelar con estas funciones para interpretar problemas de Física, Biología, Química e incluso de Economía. Reconoces cuándo una función es creciente, decreciente y puedes interpretar información que te brindan las funciones para resolver problemas cotidianos.

¿Qué aprenderás?

- **Recordarás** conceptos asociados a relaciones y funciones.
- **Representarás** funciones elementales por medio de tablas, gráficas, fórmulas y relaciones.
- **Evaluarás** una función en valores numéricos y simbólicos.
- **Reconocerás** el comportamiento local y global de funciones elementales de una variable, a través de su dominio, recorrido, variaciones, simetría.
- **Determinarás** si una función posee inversa estableciendo si es biyectiva o no.

El Buen Vivir

Fuentes de empleo

El sector avícola alcanza alrededor de 25 mil empleos directos y se calcula que genera 500 mil plazas si se toma en cuenta toda la cadena productiva. Además, el sector suministra el 100% de la demanda de carne de pollo y de huevos del mercado nacional, razón por la cual el país no importa esos productos.

- ¿Qué cantidad de huevos y pollo estimas que consumen en tu casa semanalmente?
- El incremento de la producción agrícola, ¿en qué beneficia a la población ecuatoriana?

Fuente: http://www.hoy.com.ec/noticias-ecuador/la-produccion-avicola-alimenta-a-todo-el-ecuador-351678.html

Iniciemos

Activación de conocimientos previos

La distancia que recorre un avión que viaja a una velocidad constante de 500 millas por hora es una función del tiempo de vuelo. Si s representa la distancia en millas y *t* es el tiempo en horas, entonces ¿cuál es la función del desplazamiento en relación al tiempo?

Objetivos educativos del módulo

- Estudiar el comportamiento local y global de funciones (de una variable) polinomial, racional, con radicales, trigonométricas, o de una función definida a trozos o por casos mediante funciones de los tipos mencionados, a través del análisis de su dominio, recorrido, monotonía, simetría, extremos, asíntotas, intersecciones con los ejes y sus ceros.
- Utilizar TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación)
  - Para graficar funciones lineales, cuadráticas, racionales, con radicales y trigonométricas
  - Para manipular el dominio y el recorrido para producir gráficas.
  - Para analizar las características geométricas de funciones lineales, cuadráticas, con radicales, trigonométricas (intersecciones con los ejes, monotonía, extremos y asíntotas).

Relaciones y funciones

Identifica cuando una relación es una función

Indagamos

Mario tiene un pantalón café y uno azul, además tiene una camisa blanca y una negra. ¿De cuántas maneras puede combinar su ropa para vestirse diferente?. Elabora una tabla.

Producto cartesiano

Comencemos el análisis con el caso de Carla, que vende *pizzas* y maneja tres tipos de pasta para la base y cuatro ingredientes. La salsa y el queso es igual para todas. Para tener un mejor control de los pedidos, ella enumera los ingredientes como se muestra.

1. Pasta clásica	1. Champiñones y *peperoni*
2. Pasta crujiente	2. Camarones y atún
3. Pasta delgada	3. Chorizo y pimiento
	4. Carne molida y aceitunas

Carla identifica la pasta y los ingredientes, así forma parejas con las claves para llevar el control de los pedidos con esos números y en ese orden.

Si consideramos que cada pasta puede combinarse con cuatro ingredientes distintos, obtenemos cuatro parejas por pasta. Ahora, como hay tres pastas distintas, entonces tenemos un total ($4 \times 3 = 12$) de 12 posibles combinaciones representadas por las parejas.

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3) \text{ y } (3, 4)$$

Ten en cuenta

Cuando hablamos de conjuntos, usamos el símbolo $\in$ para indicar la **pertenencia** a un conjunto.

De esta forma, $x \in M$, significa que x pertenece o es un elemento del conjunto M.

Cada pareja se denomina **par ordenado** y está formado por dos elementos llamados **coordenadas**, es importante el orden en que se escriben. En el ejemplo observamos que la primera coordenada siempre indica el tipo de pasta, mientras que la segunda se refiere a la clase de ingrediente.

Si A y B son dos conjuntos, su **producto cartesiano** $A \times B$ es el conjunto formado por todas las parejas ordenadas posibles (a, b), donde $a \in A$ y $b \in B$.

Actividad resuelta

Considera los conjuntos en cada caso, determina el producto cartesiano. Observa los ejemplos:

1. $A = \{-3, -1, 0, 2\}$; $B = \{1, 3, 5\}$

$A \times B = \{(-3, 1), (-3, 3), (-3, 5), (-1, 1), (-1, 3), (-1, 5), (0, 1), (0, 3), (0, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 5)\}$

2. C = {rosa, café, negro}; $N = \{1, 2, 3\}$

$C \times N$ = {(rosa, 1), (rosa, 2), (rosa, 3), (café, 1), (café, 2), (café, 3), (negro, 1), (negro, 2), (negro, 3)}

3. C = {a, e, i}; F = {f, k, k, l}

$C \times F$ = {(a, f), (a, k), (a, k), (a, l), (e, f), (e, k), (e, k), (e, l), (i, f), (i, k), (i, k), (i, l)}

Actividades propuestas

En cada caso, escribe los pares ordenados del producto cartesiano de los conjuntos.

4. $A = \{x, y, z\}$ — $B = \{3, 4, 5, 6\}$

5. H = {Luis, Gerardo, Pedro, Ángel} — M = {Verónica, Itzel, Lucía}

6. $C = \{-5, -4, -3, -2\}$ — $N = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Relaciones y productos cartesianos

Ahora que conocemos el producto cartesiano, podemos entender con claridad la definición más aceptada del concepto **relación**.

Una **relación** R del conjunto A en el conjunto B, representada por $R: A \to B$ es cualquier conjunto de parejas tomadas del producto cartesiano $A \times B$.

Al conjunto A se le conoce como el conjunto de salida, y el conjunto B es el conjunto de llegada.

El dominio de la relación *Dom*(*R*) es un subconjunto del conjunto de salida, formado únicamente por los elementos de A que forman parte de la relación.

El recorrido de la relación *Rec*(*R*) es un subconjunto del conjunto de llegada, formado únicamente por los elementos de B que forman parte de la relación.

Ejemplo

Considera los conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$. En cada caso, determina:

a) $A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$

b) Establece la relación de correspondencia: $a = b - 2$

$R = \{(3, 5), (2, 4)\}$

c) Determina el dominio y el recorrido de la relación.

$Dom(R) = \{3, 2\}$ $Rec(R) = \{5, 4\}$

Ciertas relaciones tienen una regla de correspondencia que puede ser expresada mediante una fórmula o ecuación matemática.

Actividad resuelta

Sean $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y $B = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$.

7. Si definimos $R: A \to B$ con la regla de correspondencia $a < b$, escribe todos los pares ordenados que conforman la relación R.

La regla de correspondencia nos indica que la relación está formada por los pares ordenados de $A \times B$ tales que la primera coordenada es menor que la segunda.

Por ejemplo, como $-2 > -3$, entonces la pareja $(-2, -3)$ no pertenece a la relación, es decir, $(-2, -3) \notin R$. Por otro lado, como $-2 < 0$, entonces la pareja $(-2, 0)$ sí pertenece a la relación $(-2, 0) \in R$.

Al comparar cada elemento de A con todos los elementos de B, podemos comprobar:

$R = \{(-2, -1), (-2, 0), (-2, 1), (-2, 3), (-1, 0), (-1, 1), (-1, 3), (0, 1), (0, 3), (1, 3), (2, 3)\}$

Actividades propuestas

Resuelve.

8. Encuentra los pares ordenados que pertenecen a la regla de correspondencia que define a: $a \geqslant b$; donde $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$; $B = \{3, 5, 6, 7, 8\}$.

9. Encuentra la regla de correspondencia que describe la relación $T = \{(1, 2), (3, 6), (4, 8), (5, 10), (6, 12)\}$. Señala el domino y el recorrido de T.

2 Funciones

Representar funciones elementales por medio de tablas, gráficas, fórmulas y relaciones.

Funciones y relaciones

La mayor parte de la matemática superior se basa en el concepto función, por eso, sin su correcta comprensión, es imposible entender la matemática a nivel superior.

Una **función *f*** es una relación de *A* en *B*, que cumple con las siguientes condiciones:

- El dominio es igual al conjunto de salida.
- No existen dos pares ordenados diferentes con la misma primera coordenada.

La restricción de que dos pares ordenados diferentes no puedan tener la misma primera cordenada asegura que la segunda cordenada es única.

Ten en cuenta

Si $f: A \to B$ es una función:

- A es el dominio de la función $A = Dom(f)$
- B es el conjunto de llegada de la función.
- El recorrido de la función se define como $Rec(f) = \{f(a) \mid a \in Dom(f)\}$.
- Si $a \in Dom(f)$, entonces $f(a) \in Rec(f)$ y decimos que $f(a)$ es la imagen de a bajo la función f.
- Si $x \in Dom(f)$, entonces x es la variable independiente.
- Si $y = f(x) \in Rec(f)$, entonces y es la variable dependiente.

Ejemplo 1

Considera los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. En cada caso, determina si la relación f: $A \to B$ es una función. Explica tu respuesta.

$f = \{(1, 1), (2, 1), (3, 3), (4, 3)\}$ Sí es función. Al analizar las cuatro pares ordenados de la relación observamos que:

- Todos los elementos de A, es decir: 1, 2, 3 y 4, aparecen en la primera coordenada de alguna de las parejas de f.
- No hay dos pares ordenados de f diferentes que tengan la misma primera coordenada. Analiza todos los pares: $(1, 1), (2, 1), (3, 3), (4, 3)$; $1 \neq 2 \neq 3 \neq 4$

A partir de la definición anterior, es claro que toda función es una relación, pero no toda relación es una función.

Analiza los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2

$f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 5)\}$

No es función porque no se cumple la segunda condición. Al analizar los pares ordenados $(1, 1)$ y $(1, 5)$, observamos que tienen la misma primera coordenada.

$f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 1)\}$

No es función, no cumple la primera condición. Al analizar los pares ordenados $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$, puedes observar que el dominio de f es:

$Dom(f) = \{1, 2, 3\}$, el cual es diferente al conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$

Cuando usamos una letra x para representar a cualquier elemento del dominio, $x \in Dom(f)$, decimos que x es la **variable independiente** de la función f. Por otro lado, si $y \in Rec(f)$, decimos que y es la **variable dependiente** de la función f.

Notación de funciones

Si f es una función definida del conjunto de salida A al conjunto de llegada B, que toma un elemento x de A y lo asocia con un elemento y de B, entonces, lo representamos de la siguiente manera:

$$f:\ A \to B$$
$$x \to f(x)$$

donde $y = f(x)$

Ejemplo 3

Definamos una función en la que a cada elemento del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ lo asociamos con el resultado de sumarle tres, que es otro elemento de los números reales $\mathbb{R}$.

Primero, le ponemos un nombre a la función, podemos usar cualquier letra, por ejemplo f.

Segundo, escogemos otro literal para representar a los elementos del dominio, digamos x. Entonces escribimos:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x)$$
donde $\quad f(x) = x + 3$

Propiedades de las funciones

- Si $f: A \to B$ es una función, $x \in Dom(f)$, entonces $f(x) \in Rec(f)$.
- Si $x \in Dom(f)$, entonces $(x, f(x))$ representa a cualquiera de los pares ordenados de f.

Representación gráfica

La gráfica de una relación o una función $f: \quad A \to B$

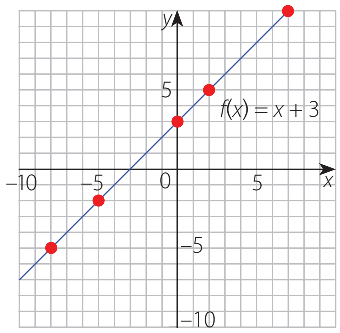
$$x \to y = f(x)$$

Es la representación de los pares ordenados en el plano cartesiano, siendo la primera coordenada la abscisa en el eje x y la segunda coordenada es la ordenada en el eje y.

Ejemplo 4

Para trazar la gráfica de f, elegimos y asignamos valores para la variable independiente x, y con la regla de correspondencia construimos una tabla.

x	$f(x) = x + 3 = y$	$(x, y) = (x, f(x))$
-8	$y = -8 + 3 = -5$	$(-8, -5)$
-5	$y = -5 + 3 = -2$	$(-5, -2)$
0	$y = 0 + 3 = 3$	$(0, 3)$
2	$y = 2 + 3 = 5$	$(2, 5)$
7	$y = 7 + 3 = 10$	$(7, 10)$



Ten en cuenta

El plano cartesiano está formado por dos rectas perpendiculares. La recta horizontal es el eje de las abscisas o eje x y la recta vertical es el eje de las ordenadas o eje y. El punto donde se cortan se llama origen.

En el ejemplo, se unen los puntos que representan los pares ordenados con una línea recta para simbolizar el resto de pares ordenados que no hemos calculado en la tabla.

Por estar formadas en pares ordenados, todas las relaciones pueden representarse con una gráfica. Cuando conocemos la gráfica de una relación, el criterio de la recta vertical nos permite decidir si la relación no es una función.

Criterio de la recta vertical

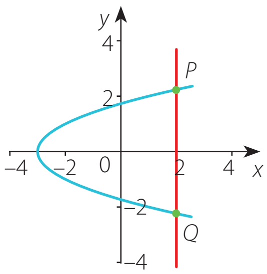
Dada la gráfica de una función f, no es posible trazar una recta vertical que la corte más de una vez.

Cuando trazamos una recta vertical que corte dos o más veces a la gráfica de la relación, la relación no puede ser función. Observa que en este caso no se cumple la segunda condición que define a las funciones. Veamos algunos ejemplos.

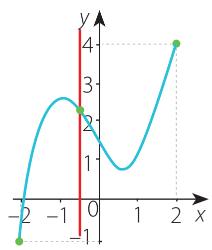
Ejemplo 5

Utiliza el criterio de la recta vertical para determinar si alguna de las siguientes gráficas no podría corresponder a una función.

a) Esta gráfica no corresponde a una función. Al trazar la recta vertical de color rojo observamos que corta en dos puntos *P* y *Q* a la curva, lo cual indica que no se cumple la segunda característica de la definición de función. En este caso vemos que hay, por lo menos, dos pares ordenados diferentes de la relación que tienen la misma primera coordenada: (2, –2) y (2, 2).



b) Esta gráfica representa la relación *f*: [-2, 2] → ℝ, y sí cumple con el criterio de la recta vertical. Al trazar cualquier recta vertical que podemos imaginar, esta sólo cortará en un punto a la gráfica. Así, observamos que se cumple con la segunda condición de la definición de función.



Ten en cuenta

El criterio de la recta vertical es muy útil para determinar cuando una relación **no** es función, sin embargo, no es suficiente para determinar que **si** es función.

Dominio y recorrido de una función definida en los número reales ℝ

En muchas ocasiones sólo conocemos la regla de correspondencia de una función definida en los reales y no se indica cuál es su dominio o recorrido. En estos casos, tomaremos como dominio al conjunto más grande de números reales para el cual la regla de correspondencia se pueda aplicar y tenga como resultado otro número real.

Ahora, observemos cómo, en algunos casos, a partir de la regla de correspondencia, podemos determinar el dominio de una función.

Ejemplo 6

Define el dominio de cada función.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

Para que esta regla de correspondencia cumpla con la definición de función, debemos evitar que el denominador sea cero. En este caso, basta que $x \neq 0$. Entonces, el dominio es $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$.

b) $f(x) = \dfrac{x-4}{x+4}$

Debemos evitar que el denominador de la regla de correspondencia sea cero. Observamos que $x + 4 = 0$ sólo cuando $x = -4$.

Entonces, si $x \neq -4$ tenemos que $x + 4 \neq 0$. Por lo tanto, $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -4\}$.

c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$

Escribimos el denominador de la regla de correspondencia como $x^2 - 4 = 0$ y resolvemos $x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4}$.

Entonces, la regla de correspondencia sólo se calcula cuando $x \neq 2$ y $x \neq -2$.

Por lo tanto, $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2 \text{ y } x \neq -2\}$.

d) $f(x) = \dfrac{3}{x^2-x-12}$

Factorizamos $x^2 - x - 12 = 0$ y obtenemos que $(x - 4)(x + 3) = 0$, de donde se sigue que $x = 4$ o $x = -3$. Entonces, si $x \neq 4$ y $x \neq -3$, tenemos que $x^2 - x - 12 \neq 0$.

Por lo tanto, $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4 \text{ y } x \neq -3\}$.

Actividad resuelta

Analiza la función para determinar su dominio.

1. $f(x) = \sqrt{x}$

Observamos que x no puede ser un número negativo. Por tanto, si $x \geq 0$ se garantiza que la regla de correspondencia es calculable. Por lo tanto, $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

2. $f(x) = \sqrt{3x - 9}$

Observamos que $3x - 9$ no puede ser un número negativo. Por lo tanto, $3x - 9 \geq 0$ y resolvemos la desigualdad: $3x \geq 9 \rightarrow x \geq \dfrac{9}{3} \rightarrow x \geq 3$ de donde obtenemos que $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$.

3. $f(x) = \dfrac{4x-5}{\sqrt{25-x^2}}$

En este caso establecemos la desigualdad $25 - x^2 > 0$, de donde se sigue que $x^2 < 25$ y por tanto que $|x| < \sqrt{25} = 5$
Entonces, $-5 < x < 5$, y obtenemos que $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 5\}$.

Sabemos que la raíz cuadrada de un número negativo no está definida en el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$).

Considerando lo anterior, para determinar el dominio de funciones que, en su regla de correspondencia, tienen este tipo de raíces debemos restringir los valores de la variable independiente de forma que el radicando no tome valores negativos.

Como observamos en los ejemplos anteriores, en la práctica para encontrar el dominio de este tipo de funciones, se requiere del uso de desigualdades y de un adecuado conocimiento de las principales técnicas de resolución de las mismas.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

Identifica el dominio, el recorrido y encuentra cinco pares ordenados para las funciones.

4. $g(x) = -x^2$

5. $h(x) = 1 - 2x$

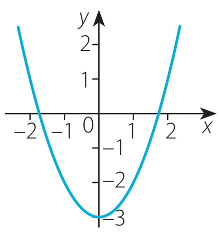
Traza la gráfica de las siguientes funciones.

6. $f(x) = x^3 - 4$

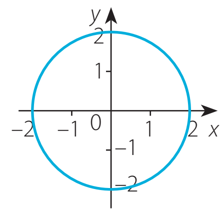
7. $f(x) = x^2 + 2$

Determina si las siguientes gráficas corresponden o no a funciones. Explica.

8.



9.



10. $f(x) = \sqrt{5x + 20}$

11. $f(x) = \dfrac{5x - 4}{4x - 8}$

12. $f(x) = \sqrt{6x - 12}$

13. $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}$

14. $f(x) = \dfrac{7}{x - 9}$

15. $f(x) = \sqrt{8 - 4x}$

Representa gráficamente las funciones.

16. $f(x) = 5x - 6$

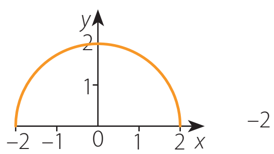
17. $f(x) = x^2 - 2$

18. $f(x) = -2x^2 + 3x$

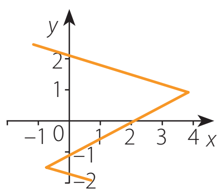
19. $f(x) = x^3 - 2$

Usa el criterio de la recta vertical y determina si las gráficas corresponden o no a una función:

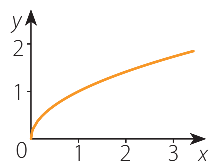
20.



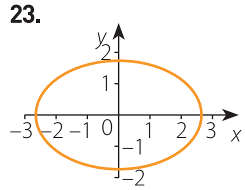
21.



22.



23.



Determina el dominio de las siguientes funciones.

24. $f(x) = \dfrac{-2x + 4}{3x - 8}$

25. $f(x) = \dfrac{x - 4}{x^2 - 5x + 6}$

26. $f(x) = \dfrac{7}{x^2 - 16}$

27. $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 8}$

28. $f(x) = \sqrt{2x - 12}$

29. $f(x) = \sqrt{16 - 2x}$

30. $f(x) = \sqrt{\dfrac{5}{x^2 - 16}}$

31. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x^2 + 4x - 5}}$

Resuelve y traza las gráficas correspondientes.

32. El lado de un cuadrado mide x cm. Expresa el perímetro en función de la medida del lado.

33. Una circunferencia tiene un diámetro de x cm. Expresa el área en función del diámetro.

Clasificación de funciones

Representar funciones elementales por medio de tablas, gráficas, fórmulas y relaciones.
Evaluar una función en valores numéricos o simbólicos.

El estudio de las funciones, sus características y sus propiedades es una de las ramas más extensas de la matemática.

Clasificación de funciones

- por su composición y estructura matemática — algebraicas
- por su dominio, recorrido y regla de correspondencia — inyectivas, sobreyectivas y biyectivas
- por su comportamiento gráfico, ya sea general o local — continuas, discontinuas, crecientes, decrecientres…

Funciones algebraicas

Las **funciones algebraicas** se caracterizan porque en su estructura matemática sólo aparecen las operaciones: suma, resta, multiplicación, división, elevar a potencias enteras y la extracción de raíces de cualquier índice natural ($+$, $-$, $\times$, $\div$, x^n, $\sqrt[n]{x}$).

Según las operaciones que hayan sido empleadas en su composición, las funciones algebraicas se dividen a su vez en polinomiales, racionales y radicales.

Funciones polinomiales

Recordemos que un monomio en una variable es la estructura algebraica formada por una constante que multiplica a dicha variable elevada a una potencia entera mayor o igual a cero. Llamamos **polinomio** a la estructura formada por la suma de dos o más monomios.

Decimos que $f(x)$ es una **función polinomial** cuando en la composición de su regla de correspondencia sólo figuran las operaciones suma, resta y multiplicación.

$$f(x) = a_0 \pm a_1x^1 \pm a_2x^2 \pm \ldots \pm a_{n-1}x^{n-1} \pm a_nx^n, \text{ donde } a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$$

Si n es el mayor entero tal que $a_n \neq 0$, entonces decimos que la función es de grado n.

Ten en cuenta

Aunque en los monomios y los polinomios la variable x aparece elevada a alguna potencia, esta siempre es un número entero positivo.

De esta forma la notación exponencial se usa simplemente para representar multiplicaciones con factores idénticos.

Las gráficas de las funciones polinomiales se pueden graficar sin levantar el lápiz del papel; es decir, son funciones continuas que no presentan saltos en la gráfica.

Como las reglas de correspondencia de las funciones polinomiales están construidas sólo con sumas, restas y multiplicaciones, el dominio de estas funciones es el conjunto de todos los números reales ($\mathbb{R}$), a menos de que este se restrinja por alguna razón.

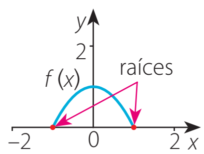
Por otro lado, la imagen o recorrido de las funciones polinomiales es variable y depende tanto del grado como de los valores particulares que tengan los coeficientes del polinomio que define a cada función.

Las gráficas de las funciones polinomiales suelen aumentar de complejidad conforme aumenta su grado.

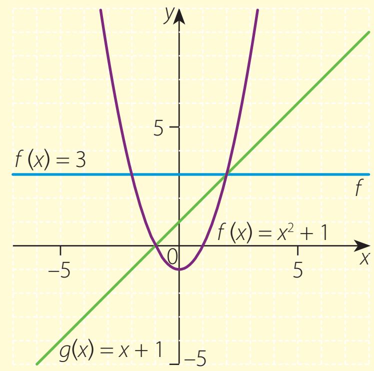
Ten en cuenta

Si $f(x)$ es una función, decimos que $x = a$ es un **cero** o una **raíz** de la función cuando $f(a) = 0$.

Las raíces de la función definen los puntos $(a, f(a) = 0)$, los cuales son los puntos donde la gráfica de f corta al eje x.



Gráficas de funciones polinomiales grados: 0, 1 y 2



- **Grado cero**: $f(x) = a_0x^0 = a_0(1) = a_0$. Se llaman *funciones constantes*, pues el valor de $y = f(x)$ siempre es constante ($c = a_0$). Sus gráficas siempre son rectas horizontales ($y = c$).
- **Grado uno**: $f(x) = a_1x + a_0$. Se llaman *funciones lineales*. Sus gráficas son rectas $y = mx + b$, donde $m = a_1$ es la pendiente y $b = a_0$ es la ordenada en el origen.
- **Grado dos**: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Conocidas como *funciones cuadráticas*. Sus gráficas son parábolas, su vértice se localiza en el punto $V = \left(-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$. Si $a > 0$ abren hacia arriba y si $a < 0$, hacia abajo.

A partir de grado tres, las gráficas de las funciones polinomiales pueden presentar formas muy diversas. Veamos algunos ejemplos sencillos.

Ten en cuenta

Para hallar los valores de una función, sustituimos números o letras para x en la fórmula dada.

Así: si $f(x) = x^2 + x + 1$ entonces:

a. $f(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1$

$f(-1) = 1$

b. $f(x + h) = (x + h)^2 + (x + h) + 1$

$f(x + h) = x^2 + 2hx + h^2 + x + h + 1$

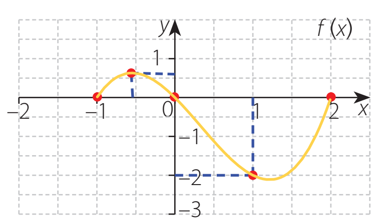
Este proceso de encontrar los valores de $f(x)$ se le conoce como **evaluación de la función.**

Ejemplo 1

Traza la gráfica de las siguientes funciones polinomiales y describe sus características.

a) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$, (hazlo para $x \in [-1, 2]$).

x	$f(x) = y$	(x, y)
-1	$(-1)^3 - (-1)^2 + 2(-1) = 0$	(-1,0)
-0,5	$(-0{,}5)^3 - (-0{,}5)^2 + 2(-0{,}5) = 0{,}6$	(-0,5, 0,6)
0	$(0)^3 - (0)^2 + 2(0) = 0$	(0,0)
1	$(1)^3 - (1)^2 + 2(1) = -2$	(1,2)
2	$(2)^3 - (2)^2 + 2(2) = 0$	(2,0)

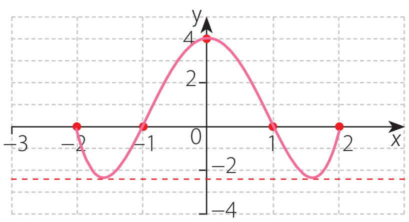


Observamos que la gráfica de esta función de tercer grado o cúbica tiene tres **raíces** o **ceros**, que son $x = -1$, $x = 0$ y $x = 2$; y corresponden a sus intersecciones con el eje x.

Si el dominio está determinado por $Dom(f) = [-1, 2]$, entonces el $Rec(f) = [-2, 1]$

b) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$, (hazlo para $x \in [-2, 2]$).

x	**f (x) = y**	**(x, y)**
−2	$(-2)^4 - 5(-2)^2 + 4 = 0$	(−2, 0)
−1	$(-1)^4 - 5(-1)^2 + 4 = 0$	(−1, 0)
0	$(0)^4 - 5(0)^2 + 4 = 4$	(0, 4)
1	$(1)^4 - 5(1)^2 + 4 = 0$	(1, 0)
2	$(2)^4 - 5(2)^2 + 4 = 0$	(2, 0)



Esta función es de cuarto grado y tiene cuatro raíces: $x = -2, -1, 1, 2$.

Además, podemos observar que:

Si el dominio está determinado por $Dom(f) = [-2, 2]$, entonces el $Rec(f) = [-2{,}25, 4]$.

Ten en cuenta

La técnica para graficar una función polinomial es tabular algunos puntos, ubicarlos en el plano cartesiano y unirlos con un trazo suave.

Es importante analizar el dominio de la función para poder representarla.

Funciones racionales y funciones radicales

Además de las funciones polinomiales, debemos considerar a las otras dos grandes familias de funciones algebraicas: las funciones racionales .

Funciones racionales y radicales

- Decimos que una función $f(x)$ es **racional** si se forma al dividir dos funciones polinomiales $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$; siempre que $q(x) \neq 0$.
- Decimos que una función $f(x)$ es **radical** si es de la forma $f(x) = \sqrt[n]{p(x)}$, $n \in \mathbb{N}$ y $p(x)$ es un polinomio cualquiera.

Para muchas de estas funciones, el dominio no es todo $\mathbb{R}$, en esos casos, según las características de la regla de correspondencia, deberemos restringir los valores de x.

Para las **funciones racionales**, $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, debemos excluir del dominio aquellos valores que hacen que el denominador sea 0, es decir, $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$.

Sus gráficas no siempre son continuas y el comportamiento de las funciones varía de acuerdo con los polinomios que se dividen.

Respecto al dominio de las **funciones radicales**, $f(x) = \sqrt[n]{p(x)}$, todo depende del índice n.

- Para las raíces de índice n impar, el dominio son todos números reales, es decir, $Dom(f) = \mathbb{R}$.
- Para las raíces de índice n par, el dominio está formado por aquellos valores de x tales que $p(x) \geq 0$, es decir, $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid p(x) \geq 0\}$.

Ten en cuenta

Las **asíntotas** de una función son líneas rectas verticales, horizontales u oblicuas, tales que la curva de la función se acerca por la izquierda y por la derecha, pero nunca las cruza o corta.

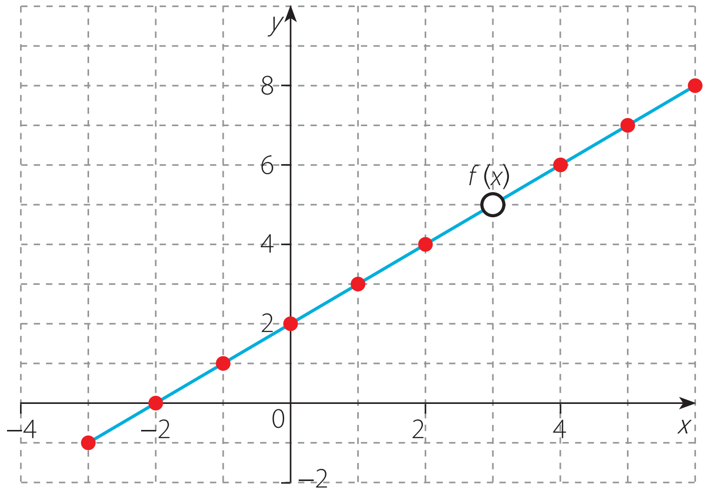
Actividad resuelta

Grafica las siguientes funciones y describe sus características.

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$, (hazlo para $x \in [-3, 6]$).

Trazamos la gráfica a partir de una tabla con valores para $x \neq 3$ en el intervalo dado.

x	**f (x) = y**	**(x, y)**
-3	$y = -1$	(-3, -1)
-2	$y = 0$	(-2, 0)
-1	$y = 1$	(-1, 1)
0	$y = 2$	(0, 2)
1	$y = 3$	(1, 3)
2	$y = 4$	(2, 4)
4	$y = 6$	(4, 6)
5	$y = 7$	(5, 7)
6	$y = 8$	(6, 8)



En primer lugar observamos que para $x = 3$ se anula el denominador, por lo que el dominio de la función es $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$.

Además, observamos que al factorizar el numerador de la regla de correspondencia tenemos que:

$f(x) = \dfrac{(x-3)(x+2)}{x-3} = x + 2$, donde $x \neq 3$.

Es así que la gráfica de la función $f(x)$ es prácticamente igual a la gráfica de la recta $y = x + 2$ excepto en el punto (3, 5).

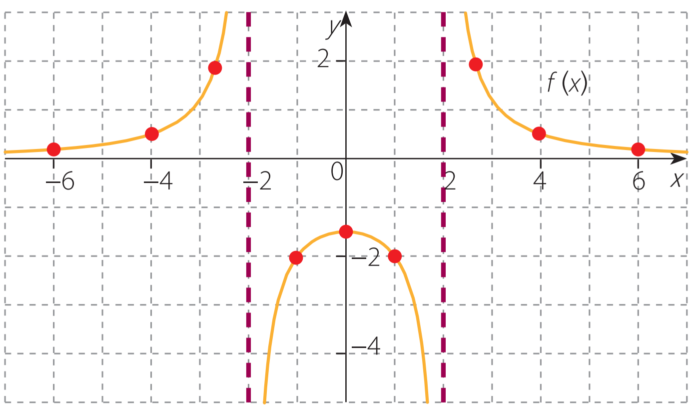
A partir de lo anterior podemos concluir que el recorrido de esta función está formado por todos los número reales excepto $y = 5$. Esto es, $Rec(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 5\}$.

2. $f(x) = \dfrac{6}{x^2 - 4}$, (hazlo para $x \in [-6, 6)$].

Para que $x^2 - 4 \neq 0$, es necesario que $x \neq \pm\sqrt{4} \neq \pm 2$.

Entonces $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2 \text{ y } x \neq -2\}$.

x	**f (x) = y**	**(x, y)**
-6	$y \approx 0{,}19$	(-6, 0,19)
-4	$y = 0{,}5$	(-4, 0,5)
-1	$y = -2$	(-1, -2)
0	$y = -1{,}5$	(0, -1,5)
1	$y = -2$	(1, -2)
4	$y = 0{,}5$	(4, 0,5)
6	$y \approx 1{,}9$	(6, 0,19)

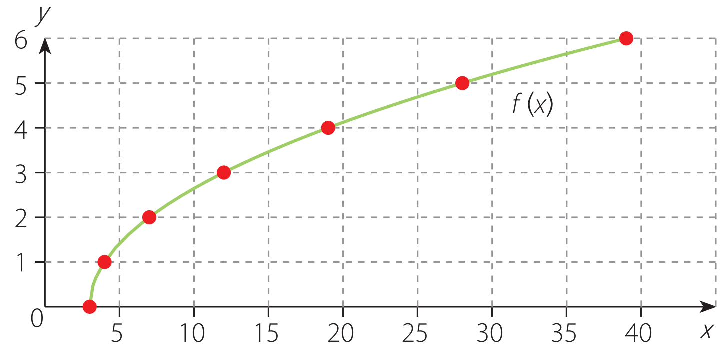


Observamos que la gráfica de $f(x)$ no es continua y está formada por tres ramas que se acercan hacia las asíntotas verticales $x = 2$ y $x = -2$ (líneas punteadas) y a la asíntota horizontal $y = 0$ (eje x). El recorrido de la función es $Rec(f) = (-\infty, -1{,}5] \cup (0, +\infty)$.

3. $f(x) = \sqrt{x-3}$, (hazlo para $x \in [3, 39]$).

Para que la raíz cuadrada tenga sentido en $x \in \mathbb{R}$, es necesario que $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$.

x	$f(x) = y$	(x, y)
3	$y = 0$	(3,0)
4	$y = 1$	(4,1)
7	$y = 2$	(7,2)
12	$y = 3$	(12,3)
19	$y = 4$	(19,4)
28	$y = 5$	(28,5)
39	$y = 6$	(39,6)



A partir de la gráfica podemos concluir que el $Rec(f) = [0, 6]$

Actividades propuestas

Grafica las siguientes funciones polinomiales y describe sus características.

4. $f(x) = x^3$, (hazlo para $x \in [-2, 2]$).

5. $f(x) = (x-3)^2 + 6$, (hazlo para $x \in [-1, 7]$).

6. $f(x) = -2x^4 + 2x^2$, (hazlo para $x \in [-2, 2]$).

7. $f(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4$, (hazlo para $x \in [-4, 2]$).

8. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x}$, (para $x \in [-4, 4]$)

9. $f(x) = \sqrt{x+1}$, (para $x \in [-1, 24]$)

10. $f(x) = \sqrt{x} - 3$, (para $x \in [0, 25]$)

11. $f(x) = \dfrac{-2x^2 + x}{x}$, (para $x \in [-4, 4]$)

En cada ejercicio encuentra el dominio, gráfica la función y realiza una descripción de la misma.

12. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

13. $f(x) = \dfrac{x+5}{x-2}$

14. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$

15. $f(x) = \sqrt{x+6}$

Funciones especiales

Reconocer el comportamiento local y global de funciones elementales de una variable a través de su dominio, recorrido, variaciones y simetría.

Buen Vivir

Cuando conduces en la ciudad o en las carreteras de nuestro país, hazlo con responsabilidad no excedas la velocidad máxima permitida y así evitarás accidentes y contratiempos.

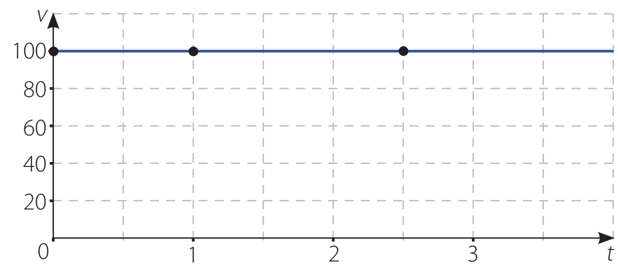
Función constante

En las vías a la costa ecuatoriana hay carreteras con largos tramos rectos y planos. Al viajar por una de ellas en automóvil es común observar que mientras transcurren los minutos, el velocímetro indica siempre lo mismo, por ejemplo, $v = 100$ km/h.

En este caso, la velocidad del automóvil es una función constante cuya variable independiente es el tiempo.

Si trazamos su gráfica observamos que se trata de una recta horizontal con pendiente $m = 0$. Algunos puntos de la recta son $P = (0, 100)$, $Q = (1, 100)$ y $R = (2{,}52; 100)$.

Aunque cada punto tiene distinta abscisa, la ordenada siempre es la misma, $v = 100$, y como no cambia es **constante**.



Ten en cuenta

En el ejemplo del texto, en lugar de la tradicional x se usó la letra t para representar la variable independiente.

En conjuntos usamos $\{a\}$ para representar al conjunto cuyo único elemento es a.

Con cualquier variación en la velocidad dejaría de ser constante y se modificaría también la pendiente. Por ejemplo, si la velocidad comienza a aumentar, siempre al mismo ritmo, la recta tendría una pendiente positiva. Si disminuye al mismo ritmo, sería negativa; en tanto se mantenga constante, el valor de la pendiente será igual a 0.

La regla de correspondencia de esta función es $v = f(t) = 100$. Si además, durante 6 minutos continuos prevalece dicho comportamiento, su dominio será $t \in [0, 6]$, mientras que el recorrido es $v \in \{100\}$.

En este ejemplo, el dominio está restringido porque no tiene sentido pensar en valores negativos de tiempo y sería absurdo pensar que el automóvil se seguirá moviendo indefinidamente de esa forma.

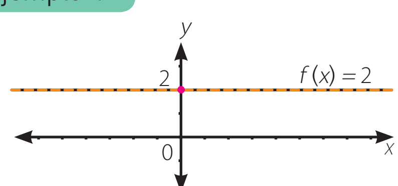
Sin embargo, si nos salimos de un contexto físico particular y nos olvidamos del significado de las variables en dicho contexto, tales restricciones se eliminan.

Una función constante es aquella donde cada elemento del dominio está asociado con el mismo y único elemento en el recorrido.

Una **función constante** se define como $f(x) = k$; donde $k \in \mathbb{R}$. Su dominio son los números reales, $Dom(f) = \mathbb{R}$, y su recorrido es $Rec(f) = \{k\}$.

Ejemplo 1

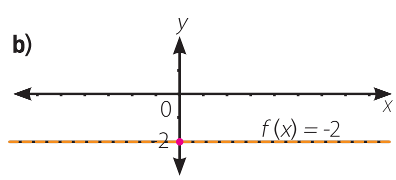
a)



$Dom(f) = \mathbb{R}$

$Rec(f) = \{2\}$

b)



$Dom(f) = \mathbb{R}$

$Rec(f) = \{-2\}$

Función identidad

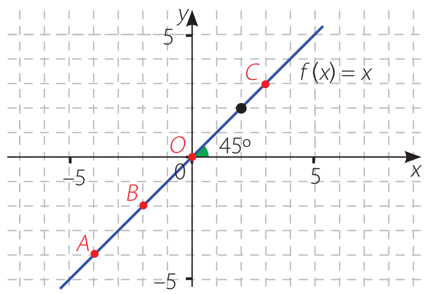
Como su nombre lo indica, la función identidad es aquella donde la regla de correspondencia asocia a cada elemento del dominio con su idéntico en el recorrido.

La **función identidad** se define como $f(x) = x$. Su dominio y su recorrido son los números reales; es decir, $Dom(f) = \mathbb{R}$ y $Rec(f) = \mathbb{R}$.

Su gráfica es la recta $y = 1x + 0$, que pasa por el origen $O = (0, 0)$ y tiene pendiente $m = 1$.

Dicha recta es la bisectriz del primer y tercer cuadrantes del plano cartesiano y forma un ángulo de 45° con la parte positiva del eje x.

x	$f(x) = y$	(x, y)
-4	-4	$A = (-4, -4)$
-2	-2	$B = (-2, -2)$
0	0	$O = (0, 0)$
3	3	$C = (3, 3)$



Cada elemento del dominio es idéntico a su ordenada en el recorrido.

Buen Vivir

De manera análoga con la función identidad, todas las personas tenemos una identidad que nos caracteriza y que nos dice que somos únicos e irrepetibles, por lo tanto debemos sentirnos orgullosos de ser ecuatorianos y de pertenecer a un país que cada día progresa.

Función definida por tramos

Una empresa que suministra conexión a internet ofrece un plan en el cual establece que la cuenta mensual del cliente dependerá exclusivamente de los minutos de conexión que utilice. Este plan tiene un costo fijo de 900 UM, por 180 minutos de conexión y por cada minuto adicional se cobrarán 65 UM.

Para representar esto mediante una función, considerando que x es la cantidad de minutos de conexión, se tiene lo siguiente:

Si x es menor o igual que 180, el costo C por el plan será de 900 UM.

Si x es mayor que 180, el costo C será de $900 + 65(x - 180)$.

Por lo tanto, la función C que representa el costo según los minutos de conexión es:

$$C(x) = \begin{cases} 900 & \text{si } 0 \leq x \leq 180 \\ 900 + 65\,(x - 180) & \text{si } x > 180 \end{cases}$$

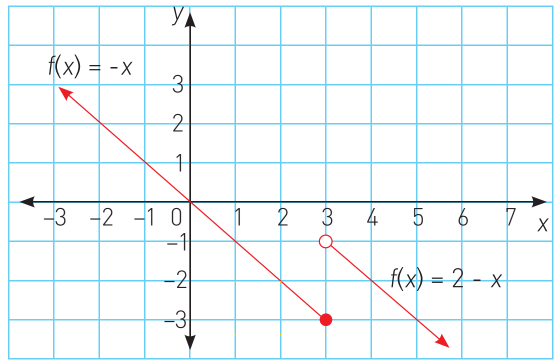
Una **función definida por tramos** es aquella que utiliza 2 o más expresiones para su definición y cada una de ellas emplea un determinado subintervalo del dominio de la función principal.

Ten en cuenta

El símbolo ≥ "mayor o igual que" representa: $a \geq b \Leftrightarrow a > b$ o $a = b$. Análogamente, el símbolo ≤ "menor o igual que" representa: $c \leq d \Leftrightarrow c < d$ o $c = d$.

Ejemplo 2

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 3 \\ 2 - x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$



●: representa que el punto (x, y) pertenece al gráfico de f.

○: representa que el punto (x, y) no pertenece al gráfico de f.

Actividad resuelta

Analiza la información. Luego, calcula el valor de las expresiones.

1. Sean f y g dos funciones definidas de la siguiente manera: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{3x} & \text{si } x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 3x + 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$

Calcula: $\dfrac{f(0) + g(-1)}{g(0)} = ?$

$f(0) = 2x - 1 = 2 \cdot 0 - 1 = -1$

$g(-1) = x - 1 = -1 - 1 = -2$

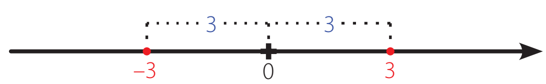
$g(0) = 3x + 1 = 3 \cdot 0 + 1 = 1$

$$\frac{f(0) + g(-1)}{g(0)} = \frac{-1 - 2}{1}$$

$$\frac{f(0) + g(-1)}{g(0)} = -3$$

Función valor absoluto

Entendemos como **valor absoluto** de un número real, la distancia entre dicho número y el 0 en una recta numérica. Dado que las distancias son siempre positivas, entonces el valor absoluto de –3 es 3. También el valor absoluto de 3 es 3.



Para representar al valor absoluto de un número, escribimos al número encerrado entre barras: $|-3| = 3$ y $|3| = 3$.

Dicho de otro modo, el valor absoluto de un número es ese número siempre positivo.

Ejemplo 3

En la tabla se muestra el valor absoluto de algunos números reales.

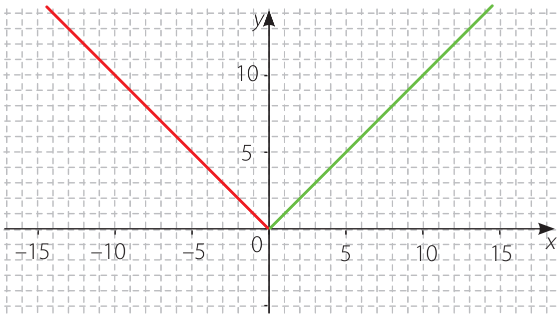
x	0	1	2,8	$\sqrt{6}$	π	-3	$-\frac{2}{3}$	-2π
$f(x) = \lvert x \rvert$	0	1	2,8	$\sqrt{6}$	π	$-(-3) = 3$	$-\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$	$-(-2\pi) = 2\pi$

Observa que para 0 y para cada número positivo x, el valor absoluto es el mismo número; es decir, $|x| = x$. Por otro lado, para cada número negativo x, su valor absoluto es igual a su inverso aditivo; es decir, $|x| = -x$.

La función **valor absoluto** se define como sigue.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Observa que para definir esta función se necesita usar dos reglas de correspondencia, las cuales se aplican en distintos intervalos de su dominio. Las funciones que se definen se les llama **funciones definidas por tramos**.



Al igual que la regla de correspondencia, su gráfica está formada por dos tramos.

La primera parte, en color verde, es propiamente la función identidad, en el intervalo $x \in [0, \infty)$; mientras que la segunda, en color rojo, es la gráfica de una recta con pendiente $m = -1$ que también pasa por el origen.

Podemos observar que en la función valor absoluto, su dominio son los reales, $Dom(f) = \mathbb{R}$, y su recorrido los reales no negativos; es decir, $Rec(f) = \{y \mid y \geq 0\}$.

Sabías que...

Generalmente se hace uso de las funciones reales, en el manejo de cifras numéricas en correspondencia con otra, debido a que se está usando subconjuntos de los números reales. Las funciones son de mucho valor y utilidad para resolver problemas de la vida diaria, problemas de finanzas, de economía, de estadística, de ingeniería, de medicina, de química y física, de astronomía, de geología, y de cualquier área social donde haya que relacionar variables.

Ejemplo 4

Traza la gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x) = |2x - 1|$. Para graficar aplicamos la definición de valor absoluto y construimos una función por tramos.

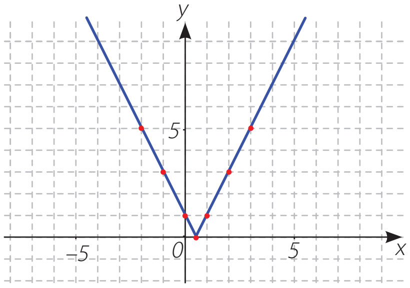
$$f(x) = |2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1, & \text{si } 2x - 1 \geq 0 \\ -(2x-1), & \text{si } 2x - 1 < 0 \end{cases} \quad \text{es decir:} \quad f(x) = |2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1, & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \\ -2x + 1, & \text{si } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ahora construimos la tabla con algunos valores para x, tanto menores como mayores que $\frac{1}{2}$.

x	$f(x) = -2x + 1$
−2	$-2(-2) + 1 = 5$
−1	$-2(-1) + 1 = 3$
0	$-2(0) + 1 = 1$
$\frac{1}{2}$	$-2(\frac{1}{2}) + 1 = 0$

x	$f(x) = 2x - 1$
1	$2(1) - 1 = 1$
2	$2(2) - 1 = 3$
3	$2(3) - 1 = 5$
4	$2(4) - 1 = 7$

Localizamos los puntos y realizamos el trazo.



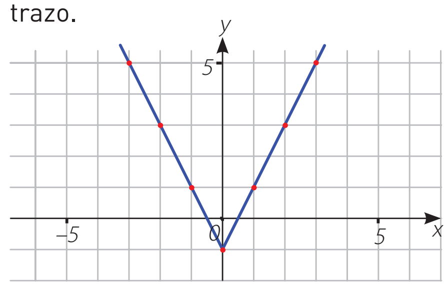
b) $f(x) = |2x| - 1$

$$f(x) = |2x| - 1 = \begin{cases} 2x - 1, & \text{si } 2x \geq 0 \\ -2x - 1, & \text{si } 2x < 0 \end{cases} \quad \text{es decir:} \quad f(x) = |2x| - 1 = \begin{cases} 2x - 1, & \text{si } x \geq 0 \\ -2x + 1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Construimos la tabla con valores para x mayores y menores que 0.

x	$f(x) = -2x - 1$	x	$f(x) = 2x - 1$
−3	$-2(-3) - 1 = 5$	1	$2(1) - 1 = 1$
−2	$-2(-2) - 1 = 3$	2	$2(2) - 1 = 3$
−1	$-2(-1) - 1 = 1$	3	$2(3) - 1 = 5$
0	$-2(0) - 1 = -1$	4	$2(4) - 1 = 7$

Localizamos los puntos y hacemos el trazo.



Función parte entera inferior

La función **parte entera** es una función muy importante para modelar fenómenos en los que la variable independiente se comporta de manera continua.

La función **parte entera**, en símbolos, $f(x) = \lfloor x \rfloor$, se define mediante la regla de correspondencia que a cada x □ □ le asigna el mayor entero que sea menor o igual que x.

En primer lugar, observamos que si x □ □, entonces $f(x) = \lfloor x \rfloor = x$. Ahora, supongamos que queremos calcular la función para un número que no sea entero, digamos $x = 1{,}5$. En este caso tenemos que $f(1{,}5) = \lfloor 1{,}5 \rfloor = 1$; lo cual se explica porque de todos los enteros menores o iguales que $x = 1{,}5$ (es decir, –4, –3, –2, –1, 0, 1), el mayor es 1.

x	0,1	0,5	0,99	1	1,75	2	2,6	–0,4	–3
$f(x) = \lfloor x \rfloor$	0	0	0	1	1	2	2	–1	–3

Ten en cuenta

A la función parte entero también se le conoce como la función piso.

Cada hueco permite saltar al siguiente escalón sin que se repitan dos valores de y para la misma x; de forma que, aplicando la prueba de la recta vertical, es claro que se trata de una función.

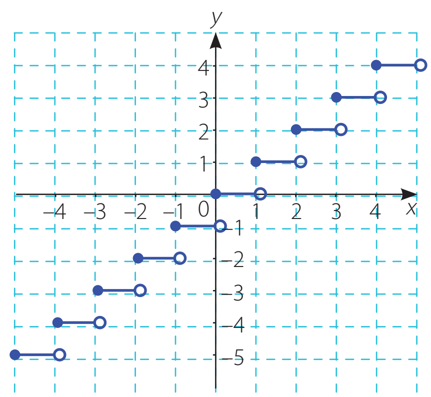
Entonces, aunque el dominio de la función máximo entero son todos los números reales, esto es $Dom(f) =$ □; su recorrido incluye únicamente a los números enteros; es decir, $Rec(f) =$ □.

Además, la función mayor entero se comporta como una función constante en varios subintervalos de su dominio. Si nos fijamos en cualquier número entero a y en todos los valores de x tales que $a \leq x < a + 1$; $f(x) = \lfloor x \rfloor = a$; de manera que, para estos valores de x, la función tiene comportamiento constante.

Pero como a puede ser cualquier número entero, su gráfica no es una sola recta horizontal, sino que está formada por una serie de segmentos horizontales a modo de escalones. Por eso a este tipo de funciones se las llama **funciones escalonadas.**

Los extremos izquierdos que delimitan a cada uno de estos escalones corresponden a los puntos donde $f(x) = x$; es decir, puntos enteros de la forma (n, n); donde n □ □.

Es importante destacar que ninguno de estos escalones contiene al último punto del extremo derecho. Para representar esta ausencia de punto o hueco, en la gráfica se acostumbra dibujar una pequeña circunferencia o círculo agujerado en el lugar donde falta el punto.



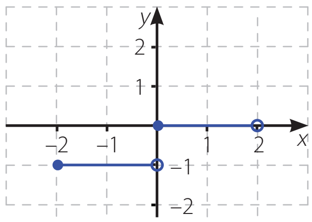
Ejemplo 5

Traza la gráfica de las siguientes funciones para $-2 \leq x \leq 2$.

a) $f(x) = \lfloor 0{,}5x \rfloor$

Al construir la tabla de valores, debemos estar muy atentos para descubrir el valor de x donde se da el salto al siguiente escalón. En este caso el brinco se da cuando $x = 0$.

x	$0{,}5x$	$\lfloor 0{,}5x \rfloor$
-2	-1	-1
-1,7	-0,85	-1
-1,4	-0,7	-1
-1,1	-0,55	-1
-1	-0,5	-1
-0,7	-0,35	-1
-0,4	-0,2	-1
-0,1	-0,05	-1

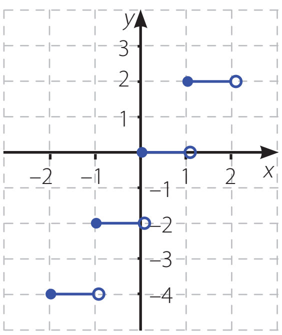


x	$0{,}5x$	$\lfloor 0{,}5x \rfloor$
0	0	0
0,3	0,15	0
0,6	0,3	0
0,9	0,45	0
1	0,5	0
1,3	0,65	0
1,6	0,8	0
1,9	0,95	0

b) $f(x) = 2\lfloor x \rfloor$

Al construir la tabla de valores, debemos identificar el valor de x en que se da el salto al siguiente escalón. En este caso el brinco se da cuando $x = 0$.

x	$\lfloor x \rfloor$	$2\lfloor x \rfloor$
-2	-2	-4
-1,7	-2	-4
-1,4	-2	-4
-1,1	-2	-4
-1	-1	-2
-0,7	-1	-2
-0,4	-1	-2
-0,1	-1	-2



x	$\lfloor x \rfloor$	$2\lfloor x \rfloor$
0	0	0
0,3	0	0
0,6	0	0
0,9	0	0
1	1	2
1,3	1	2
1,6	1	2
1,9	1	2

Ten en cuenta

La función parte entera asigna a cada número real el menor de los números enteros entre los que está comprendidos, por ejemplo $\lfloor 6{,}3 \rfloor = 6$, ya que el número 6,3 está comprendido entre los enteros 6 y 7 y el menor de ellos es 6.

Ejemplo 6

Resuelve.

Una empresa dedicada al envío de correspondencia cobra según el peso del envío.

Desde	Menos de	Costo
0	1 kg	80
1 kg	2 kg	120
2 kg	5 kg	160
5 kg	10 kg	200

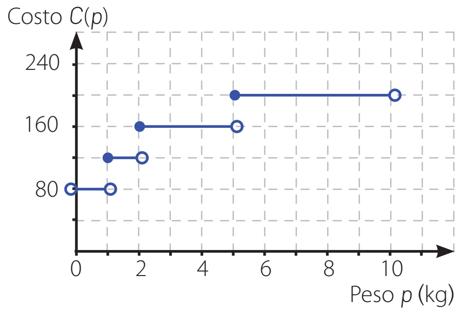
a) Encuentra una función $C(p)$ adecuada para representar el costo como función del peso.

b) Traza la gráfica de la función $C(p)$. Encuentra su dominio y su recorrido.

c) Si a partir de 10 kg se cobran 5 UM por cada 250 g de exceso, calcula el costo por enviar un paquete de 16,9 kg (por 10 kg ya se cobran 205 UM).

a) Definimos una función por tramos.

$$C(p) = \begin{cases} 80, & \text{si } 0 < p < 1 \\ 120, & \text{si } 1 \le p < 2 \\ 160, & \text{si } 2 \le p < 5 \\ 200, & \text{si } 5 \le p < 10 \end{cases}$$



b) El dominio es $Dom(f) = \{p \in \mathbb{R} \mid 0 < p < 10\}$ y su recorrido $Rec(f) = \{80, 120, 160, 200\}$.

c) Como el costo se incrementa 5 UM por cada cuarto de kilogramo o fracción, podemos usar la función escalonada: $C(x) = 205 + 5\left\lfloor \dfrac{x-10}{0{,}25} \right\rfloor = 205 + 5\lfloor 4x - 40 \rfloor$, para valores $x \geq 10$. Con esta función se calcula cuántas veces caben 250 g en los kilogramos de exceso. Para calcular el costo total de 16,9 kg, se calcula: $C(16{,}9) = 205 + 5\lfloor 4(16{,}9) - 40 \rfloor = 200 + 5\lfloor 27{,}6 \rfloor = 205 + 5(28) = 345$. El valor de 28 se obtiene tomando la parte entera superior de la función, así, el costo total es de 345 UM.

Actividades propuestas

2. En un mismo sistema de ejes coordenados, traza los siguientes pares de gráficas e indica en cada caso los puntos de intersección.

a) $\begin{cases} f(x) = x \\ g(x) = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} f(x) = |x| \\ g(x) = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} f(x) = |\frac{1}{2}x| \\ g(x) = x \end{cases}$

d) $\begin{cases} f(x) = -|x| + 1 \\ g(x) = |x| - 1 \end{cases}$

3. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = |x + 4|$

b) $f(x) = |x| + 2$

c) $f(x) = |2 - \frac{1}{2}x|$

d) $f(x) = |-3x| - 1$

4. $f(x) = \dfrac{|x|}{2}$; sobre el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

5. $f(x) = | -1 \lfloor 3{,}2x \rfloor |$;
sobre el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq 3\}$

6. $f(x) = -|4x - 1|$;
sobre el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$

7. $f(x) = \lfloor x \rfloor - 2$;
sobre el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < 4\}$

8. $f(x) = |x|$; sobre el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 5\}$

Encuentra el dominio de las funciones $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x - 1}$, $h(x) = \sqrt{x + 2}$, después usa una tabla de valores para trazar las gráficas de f, g, h. A partir de lo observado y sin emplear las tablas de valores, esboza la gráfica de $w(x) = \sqrt{x - 4}$.

En la lección anterior estudiamos distintos tipos de funciones: constante, identidad, valor absoluto y mayor entero. Ahora, tomando como base estas y otras funciones, aprenderemos a elaborar transformaciones gráficas que sirvan para el uso y análisis de funciones.

Recuerda que en años anteriores estudiaste las gráficas de las funciones cuadráticas y la relación que hay entre el aspecto de sus gráficas (parábolas) y los valores de los coeficientes a, b y c de su regla de correspondencia $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Así mismo, en diversos bloques de Matemáticas III, y en repetidas ocasiones, observaste la relación entre los valores de los parámetros de la ecuación.

En esta lección retomaremos todos estos conocimientos y los aplicaremos para establecer criterios generales que nos facilitarán la comprensión y el trazado de las gráficas de una gran cantidad de funciones, a partir del conocimiento de las gráficas de tan solo un grupo relativamente reducido de funciones básicas junto con la aplicación de algunas transformaciones gráficas.

Transformaciones gráficas
1. Expansión y contracción vertical
2. Expansión y contracción horizontal
3. Reflexión con respecto al eje x
4. Reflexión con respecto al eje y
5. Traslación vertical
6. Traslación horizontal

Veamos cómo el uso de estas transformaciones, solas o combinadas, nos permite construir variantes y combinaciones de las propiedades de los distintos tipos de funciones.

Expansión y contracción vertical

Al sufrir una contracción vertical, la gráfica de una función se deformará y tendrá un aspecto semejante al efecto visual que tenemos al mirarnos en el espejo de una feria.

En algunos casos la gráfica tomará un aspecto alargado, mientras que en otros su altura se acortará y su ancho se expandirá.

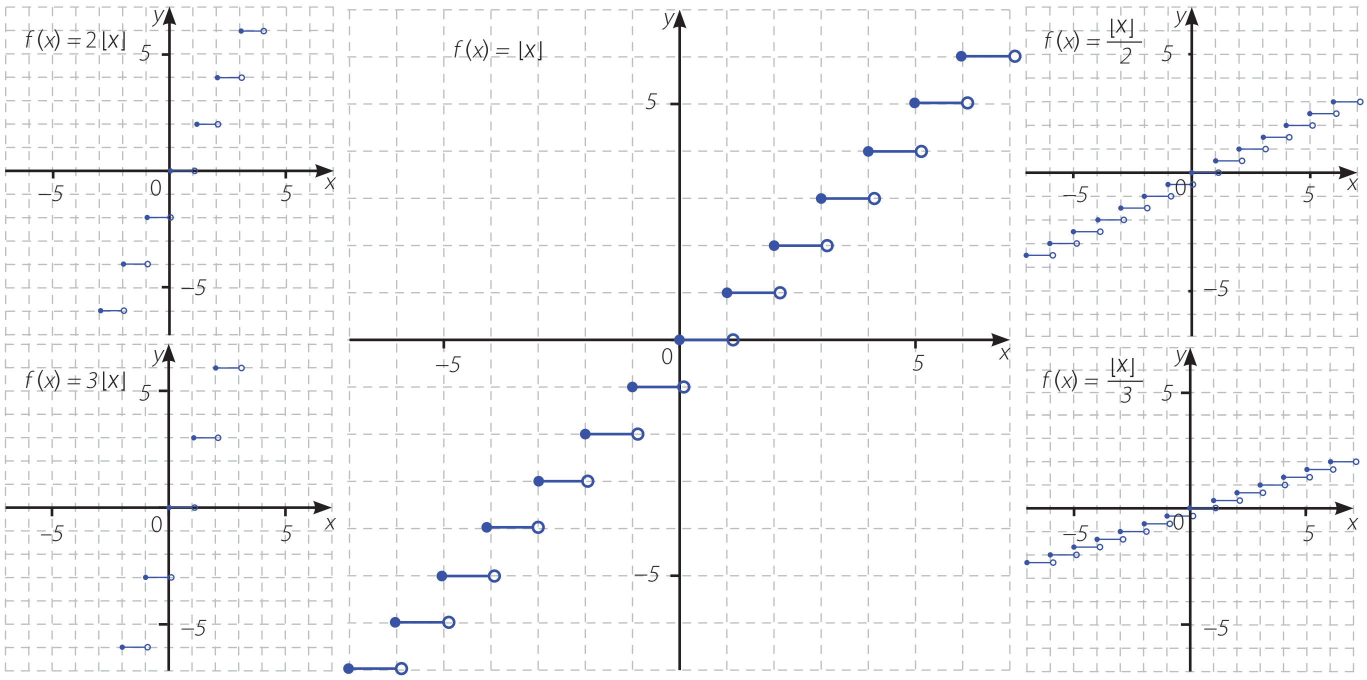
Al igual que en las demás transformaciones, el grado de la deformación está directamente relacionado con el valor numérico del parámetro que la controla.
Observa, en la siguiente página, la familia de gráficas construidas a partir de $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

Utiliza las TICS

El uso de los programas informáticos como el Geogebra te permite graficar funciones de forma rápida y exacta.

Ten en cuenta

Un **parámetro** es un valor, un elemento o un dato importante desde el que se examina un tema, cuestión o asunto.



Al comparar la gráfica central con las de la izquierda, observamos que la distancia o altura que separa a los escalones aumentó al doble en el caso de $f(x) = 2\lfloor x \rfloor$, o al triple en el caso de $f(x) = 3\lfloor x \rfloor$, con respecto de la gráfica de la función original $f(x) = \lfloor x \rfloor$, a partir de la cual fueron generadas.

De esta forma, al trazar las gráficas de estas funciones en ventanas del mismo tamaño, podemos apreciar que la cantidad de escalones de $f(x) = a\lfloor x \rfloor$, que cabe en la ventana, disminuye conforme aumenta el valor del parámetro *a*, es decir, se presenta una expansión si $a > 1$.

De forma similar, las gráficas de la derecha nos muestran el efecto de una contracción vertical, en la que, los escalones se han acercado entre sí a la mitad y la tercera parte de la distancia que tienen en la gráfica del centro.

En este caso apreciamos que mientras mayor sea el valor del parámetro *a*, menor será el valor de $\frac{1}{a}$ y mayor será el número de escalones de $f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{a} = \frac{1}{a} \cdot \lfloor x \rfloor$ que caben en ventanas del mismo tamaño.

El comportamiento que observa esta familia de gráficas construidas con la función mayor entero, ocurre de manera general si comenzamos con cualquier otro tipo de función.

Ten en cuenta

Las ventanas muestran las gráficas correspondientes a la misma sección del plano cartesiano, donde *x* y *y* toman valores de –5 a 5.

En las expansiones,

$y = 2\lfloor x \rfloor$ y $y = 3\lfloor x \rfloor$,
el número de escalones visibles en la ventana se reduce debido al estiramiento de la gráfica.

Ten en cuenta

En los casos considerados en el recuadro de la derecha, notamos que *a* es un número real positivo cualquiera, excepto porque $a \neq 0$.

Expansiones y contracciones verticales

- Si $a > 1$, la gráfica de $y = a \cdot f(x)$ es una expansión vertical de la gráfica de $y = f(x)$, en razón de *a* unidades verticales por cada unidad horizontal.
- Si $0 < a < 1$, la gráfica de $y = a \cdot f(x)$ es una contracción vertical de la gráfica de $y = f(x)$, en razón de *a* unidades verticales por cada unidad horizontal.

Ejemplo 1

Muestra que cuando aplicamos una contracción o una expansión vertical a una función $f(x)$, los únicos puntos de su gráfica, en caso de que existan, cuyas coordenadas permanecen invariantes son las raíces.

Para mostrar este hecho tomaremos un punto P cualquiera de la gráfica de la función, entonces sus coordenadas son de la forma $P = (x, f(x))$.

Al aplicar la transformación $y = a \cdot f(x)$ a cualquier punto P de la gráfica de esta función, obtenemos un nuevo punto Q (imagen de P bajo la transformación) cuyas coordenadas son de la forma $Q = (x, y) = (x, a \cdot f(x))$.

Al comparar las coordenadas del punto P original con las de su correspondiente imagen Q, observamos que P y Q representan al mismo punto, si y sólo si se cumple que

$$(x, f(x)) = P = Q = (x, a \cdot f(x)) \Rightarrow f(x) = a \cdot f(x) \Rightarrow a = 1 \text{ o } f(x) = 0$$

Como sabemos que $a \neq 1$, entonces la única posibilidad es que $f(x) = 0$. Entonces, los únicos puntos P que permanecen invariantes bajo la transformación son los de la forma $P = (x, f(x)) = (x, 0)$; es decir, las raíces o ceros de la función.

Ejemplo 2

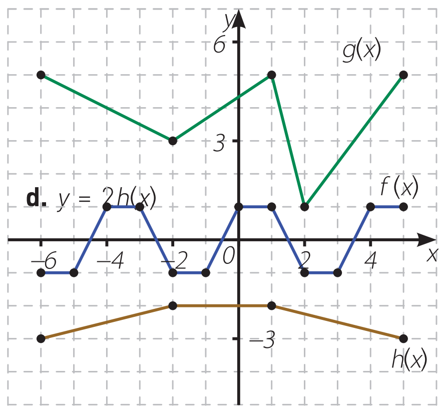
A partir de las gráficas que se muestran en el plano, traza y explica las gráficas que resultan de aplicar las siguientes transformaciones.

a) $y = 3f(x)$

b) $y = \frac{1}{2} f(x)$

c) $y = \frac{1}{3} g(x)$

d. $y = 2h(x)$



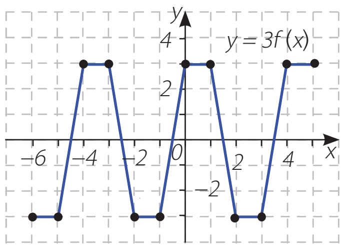
Para trazar las nuevas gráficas consideramos los siguientes aspectos.

- Al transformar cada gráfica, su imagen correspondiente se estira o se encoge según si el parámetro o factor a, que rige la transformación $y = a \cdot w(x)$, es mayor o menor que 1.
- Sabemos que al estirar o encoger una gráfica, los puntos de la forma $(x, 0)$, que están sobre el eje x, permanecerán sin cambios.
- Los puntos ubicados por arriba del eje x se alejarán o se acercarán a él, según si se trata de una expansión o una contracción.
- De manera similar, los puntos que estén ubicados por debajo del eje x se alejarán o se acercarán a él, según si se trata de una expansión o una contracción.
- Como las gráficas están formadas por segmentos rectos unidos entre sí, una forma rápida y práctica para trazar las gráficas de sus imágenes, es obtener la pendiente m de cada segmento y después multiplicarla por el factor a correspondiente.
- Finalmente, para trazar las nuevas gráficas ubicamos la imagen Q de cualquier punto P de la función original y a partir de él, usando las nuevas pendientes y conservando las abscisas de cada punto, construimos por tramos la gráfica producto de la transformación.

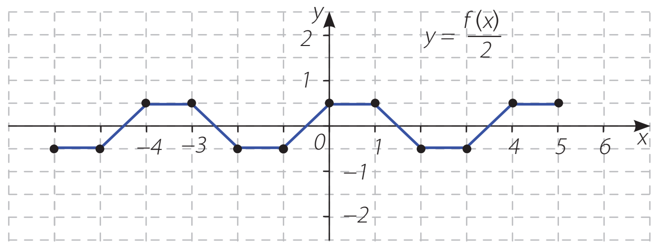
Sabías que...

La función escalón es muy importante en matemática aplicada y también se conoce como "**función parte entera inferior**" que se asigna a cada real x el mayor entero que sea "menor o igual a" x.

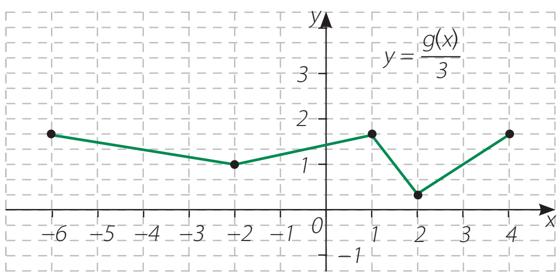
a)



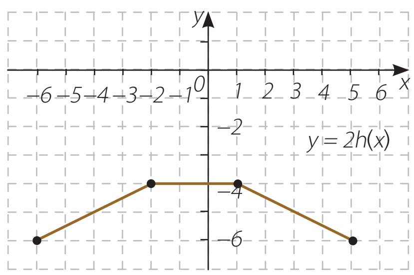
b)



c)



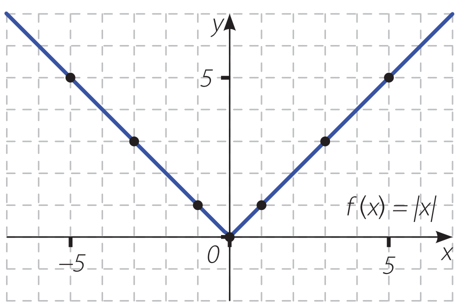
d)



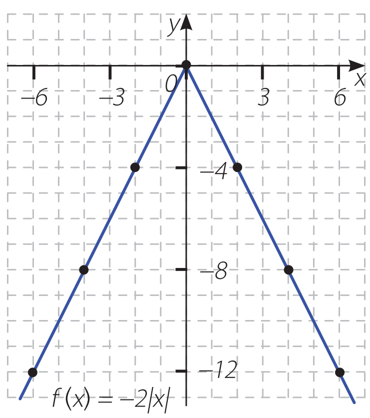
Reflexión respecto del eje *x*

Si consideramos una función $f(x)$ cualquiera, por ejemplo, la función valor absoluto, y le aplicamos la transformación $y = a \cdot f(x)$, donde $a < 0$, observamos, además de la expansión o contracción vertical, que la gráfica se reflejará con respecto del eje x.

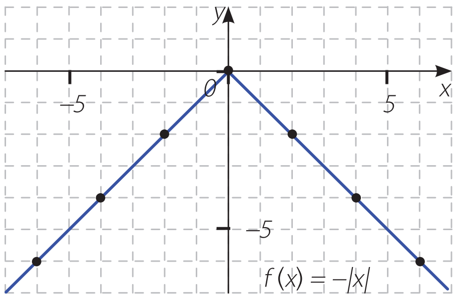
$f(x) = \lvert x \rvert$	
x	$f(x)$
0	0
±2	2
±4	4
±6	6



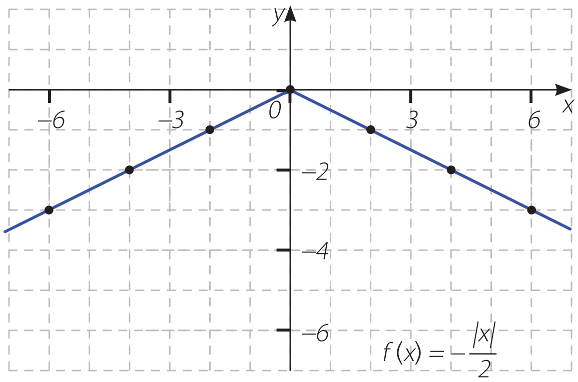
$f(x) = -2\lvert x \rvert$	
x	$f(x)$
0	0
±2	−4
±4	−8
±6	−12



$f(x) = -\lvert x \rvert$	
x	$f(x)$
0	0
±2	-2
±4	-4
±6	-6



$(x) = -\dfrac{\lvert x \rvert}{2}$	
x	$f(x)$
0	0
±2	−1
±4	−2
±6	−3



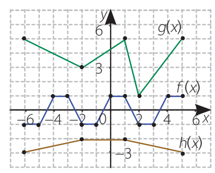
En general, si $f(x)$ es una función y el factor a es negativo ($a < 0$), tenemos lo siguiente.

Reflexión con respecto del eje x

- Si $a = -1$, la gráfica de $y = -1 \cdot f(x) = -f(x)$ es una reflexión a través del eje x de la gráfica de $y = f(x)$.
- Si $a < -1$, la gráfica de $y = a \cdot f(x)$ es una reflexión a través del eje x; más una expansión vertical de la gráfica de $y = f(x)$.
- Si $-1 < a < 0$, la gráfica de $y = a \cdot f(x)$ es una reflexión a través del eje x; más una contracción vertical de la gráfica de $y = f(x)$.

Ten en cuenta

Funciones de la sección Actividad resuelta 1, 2 y 3. Graficar funciones con transformación"



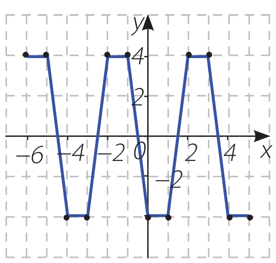
Actividad resuelta

A partir de las gráficas de $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$, graficar funciones con transformación, construye las gráficas que se solicitan.

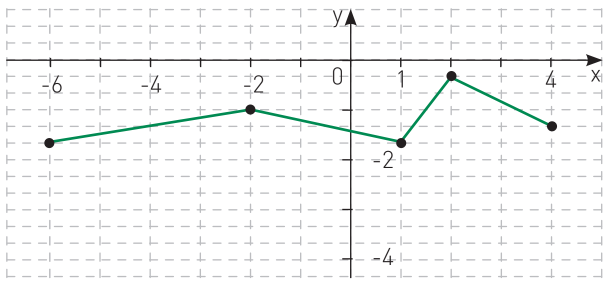
1. $y = -4\,f(x)$ **2.** $y = -\dfrac{g(x)}{3}$ **3.** $y = -h(x)$

Estas transformaciones son fáciles de hacer. Una vez que se han aplicado los efectos de estiramiento y contracción vertical, en los casos a) y b) respectivamente, lo único que debemos hacer es localizar puntos simétricos respecto al eje x. En el caso c) se localizan los puntos simétricos sin efecto de estiramiento o contracción.

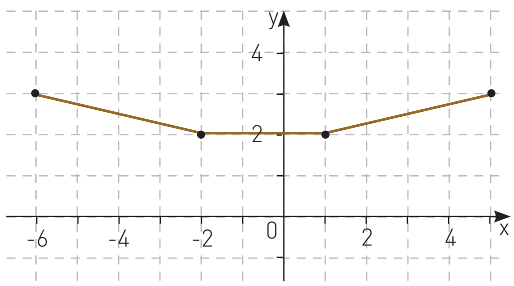
4. $y = -4\,f(x)$



2. $y = -\dfrac{g(x)}{3}$



3. $y = -h(x)$



Utiliza las TIC

El uso de paquetes informáticos facilita la realización de gráficos en forma precisa es el caso de ***geogebra*** o ***máxima***.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

En un mismo plano, traza las gráficas de las siguientes funciones para $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

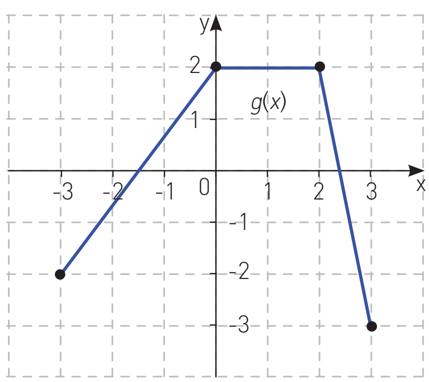
4. $f_1(x) = x^3$

5. $f_2(x) = -x^3$

6. $f_3(x) = 2x^3$

7. $f_4(x) = \dfrac{x^3}{3}$

Considera la gráfica de la función $y = g(x)$ que se muestra, y resuelve las siguientes transformaciones. Usa un color distinto en cada gráfica.



8. $y = 3g(x)$

9. $y = -3g(x)$

10. $y = 0{,}8g(x)$

11. $y = -\dfrac{g(x)}{2}$

Expansión y contracción horizontal

Antes de ilustrar esta transformación revisemos nuevamente la función **menor entero**, cuya gráfica, al igual que en el caso de la función mayor entero, está formada por escalones.

La función **menor entero**, en símbolos $f(x) = \lfloor x \rfloor$, se define mediante la regla de correspondencia que a cada $x \in \mathbb{R}$ le asigna el menor entero mayor o igual que x.

Ten en cuenta

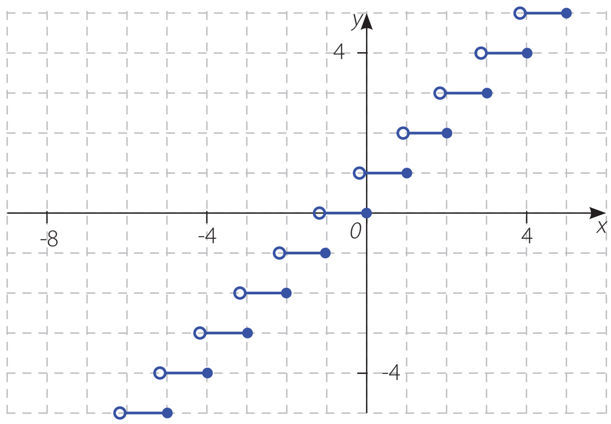
En la presentación de las gráficas de las transformaciones de $f(x)$, se usaron escalas diferentes para el eje x y para el eje y.

En cualquier caso, debemos considerar que cuando una gráfica se presenta usando diferentes escalas en los ejes, esta aparecerá deformada con respecto de su aspecto real.

$f(x) = \lfloor x \rfloor = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}$

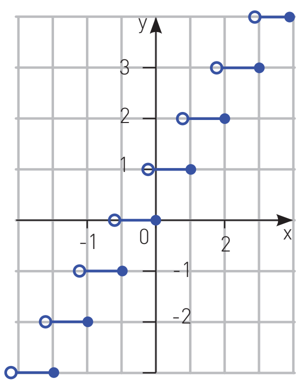
x	**f (x)**
-4	-4
-3,5	-3
-3	-3
-2,5	-2
-2	-2
-1,5	-1
-1	-1
-0,5	0

x	**f (x)**
0	0
0,5	1
1	1
1,5	2
2	2
2,5	3
3	3
3,5	4

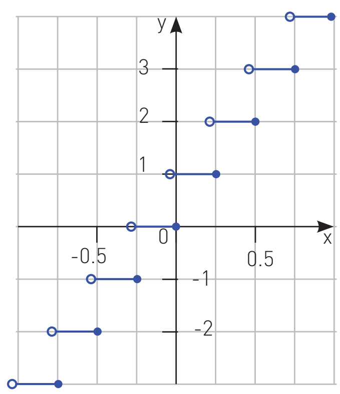


Ahora veamos cómo elaborar una expansión o una contracción horizontal. Si a partir de una función $f(x)$ cualquiera, por ejemplo, la función menor entero $f(x) = \lfloor x \rfloor$, construimos las gráficas de las funciones $f(2x)$, $f(4x)$, $f\left(\frac{x}{2}\right)$ y $f\left(\frac{x}{4}\right)$; observamos que la gráfica de $y = f(ax)$ sufre una expansión o contracción con respecto de la gráfica de $f(x)$.

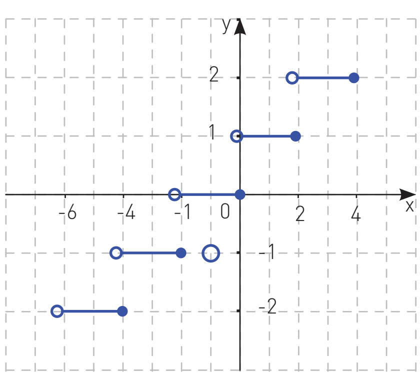
x	**2x**	$\lfloor 2x \rfloor$
-1,4	-2,8	-2
-0,7	-1,4	-1
-0,2	-0,4	0
0,3	0,6	1
0,9	1,8	2
1,3	2,6	3



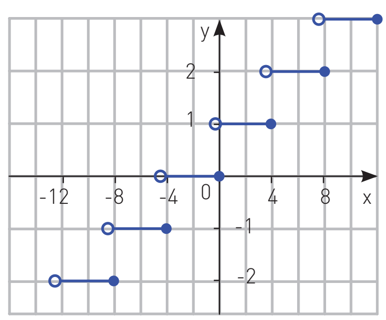
x	**4x**	$\lfloor 4x \rfloor$
-0,7	-2,8	-2
-0,3	-1,2	-1
-0,2	-0,8	0
0,2	0,8	1
0,4	1,6	2
0,7	2,8	3



x	$\frac{x}{2}$	$\lfloor \frac{x}{4} \rfloor$
-5	-2,5	-2
-3	-1,5	-1
-1	-0,5	0
1	0,5	1
3	1,5	2



x	$\frac{x}{4}$	$\lfloor \frac{x}{4} \rfloor$
-11	-2,75	-2
-6	-1,5	-1
-2	-0,5	0
3	0,75	1
7	1,75	2



Expansiones y contracciones horizontales

- Si $a > 1$, la gráfica de $y = f(a \cdot x)$ es una contracción horizontal de la gráfica de $y = f(x)$, en razón de a unidades horizontales por cada unidad vertical.
- Si $0 < a < 1$, la gráfica de $y = f(a \cdot x)$ es una expansión horizontal de la gráfica de $y = f(x)$, en razón de a unidades horizontales por cada unidad vertical.

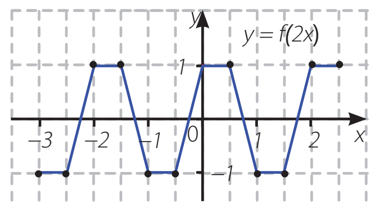
Ejemplo 1

A partir de las gráficas de $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$, del ejemplo 2 de la página 31, construye las gráficas de:

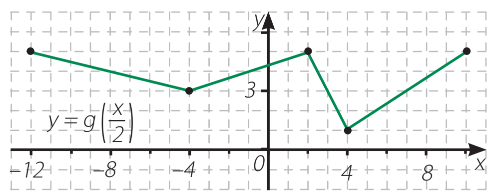
a) $y = f(2x)$ **b)** $y = g\left(\frac{x}{2}\right)$ **c)** $y = h\left(\frac{x}{3}\right)$

Para trazar las gráficas que se obtienen bajo estas transformaciones sólo debemos considerar que cada punto P de las gráficas originales se transformará en un punto Q, de tal manera que las ordenadas de P y Q coinciden, mientras que las abscisas se modificarán según el valor del factor a de la transformación $y = w(a \cdot x)$.

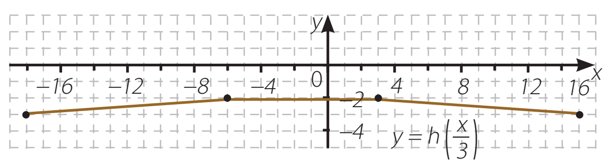
a) Como el factor $a = 2 > 0$, entonces la gráfica de la función transformada $y = f(ax)$ sufrirá una contracción horizontal bajo la cual todos los puntos de la función $y = f(ax)$ reducen su distancia del eje y a la mitad de la que tenían originalmente.



b) En este caso, como $a = 1/2 < 1$, tenemos una expansión. Así, en la gráfica de la función transformada los puntos se alejarán del eje y aumentando su distancia al doble de la original.

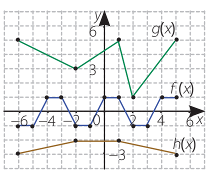


c) Como $a = 1/3 < 1$, tenemos una expansión donde los puntos aumentan su distancia del eje y al triple de la original.



Ten en cuenta

Funciones de "Actividad resuelta 1, 2 y 3...
Graficar funciones con transformación"



■ Reflexión con respecto al eje y

Análogo al caso vertical, cuando en la transformación $y = f(a \cdot x)$, el factor a es negativo ($a < 0$), entonces la gráfica sufrirá una reflexión con respecto del eje y.

Reflexión con respecto al eje y

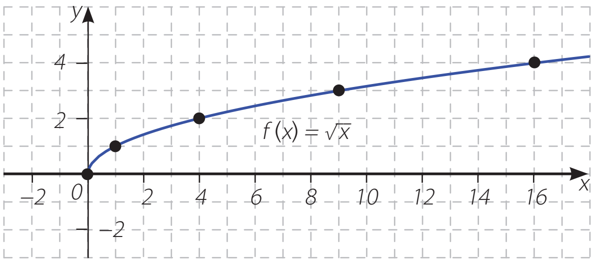
- Si $a = -1$, la gráfica de $y = f(ax)$ es una reflexión de $f(x)$ a través del eje y.
- Si $a < -1$, la gráfica de $y = f(ax)$, además de la reflexión, presenta una contracción.
- Si $-1 < a < 0$, la gráfica de $y = f(ax)$, además de la reflexión presenta una expansión.

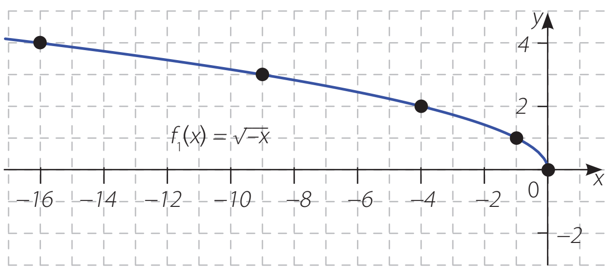
Para ilustrar las reflexiones horizontales, presentamos un ejemplo basado en la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$.

Ejemplo 2

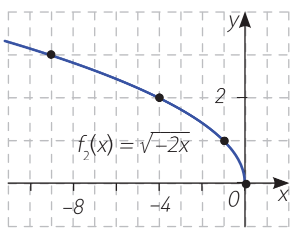
A partir de las gráficas de $f(x) = \sqrt{x}$, construye las gráficas de $f_1(x) = \sqrt{-x}$, $f_2(x) = \sqrt{-2x}$ y $f_3(x) = \sqrt{-0{,}5x}$.

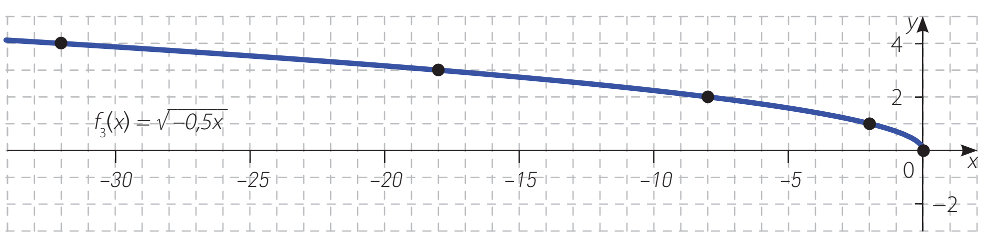
Trazamos la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ y la reflejamos a través del eje y para obtener $y = f_1(x)$.





Ahora, con base en la gráfica de $y = f_1(x)$, construimos las gráficas de $f_2(x)$ y $f_3(x)$ acercando o alejando los puntos del eje y, según corresponda.





Sabías que...

Las oberturas de Rossini son un ejemplo de traslación melódica. Las frases se repiten, cada vez con más intensidad (crescendo), provocando la expectativa de continuación. El clímax se alcanza rompiendo la traslación. En una de las partituras se puede ver cómo Bach utiliza una traslación en el tiempo además de una reflexión sobre la vertical.

Traslaciones

Para concluir con nuestro estudio sobre las transformaciones gráficas veremos cómo trasladar o desplazar la gráfica de una función. En particular, aprenderemos a elaborar traslaciones en las direcciones paralelas con los ejes cartesianos: horizontal y vertical.

Ten en cuenta

En las **traslaciones** horizontales y verticales, la forma de las gráficas es exactamente la misma.

Las gráficas no se contraen ni se estiran, únicamente se trasladan.

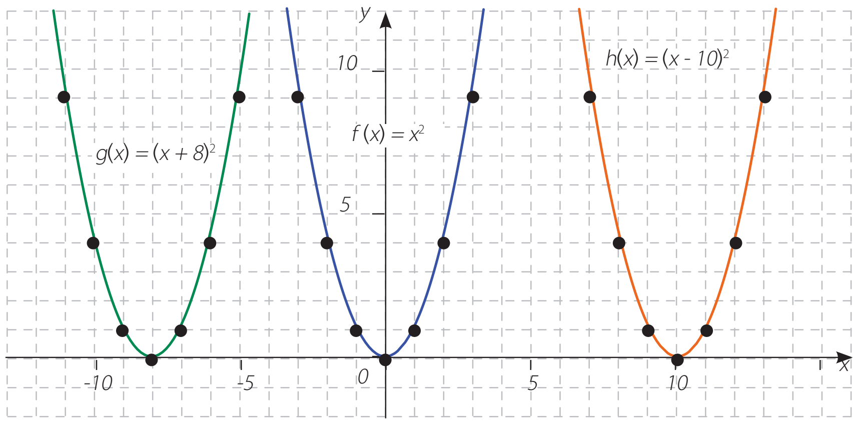
Traslación horizontal

Observa las gráficas construidas con base en la función $f(x) = x^2$.

x	$g(x)$
-10	$(-10+8)^2$
-9	$(-9+8)^2$
-8	$(-8+8)^2$
-7	$(-7+8)^2$
-6	$(-6+8)^2$

x	$f(x)$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

x	$h(x)$
8	$(8-10)^2$
9	$(9-10)^2$
10	$(10-10)^2$
11	$(11-10)^2$
12	$(12-10)^2$



Cuando aplicamos la transformación $y = f(x + c)$, dependiendo del valor de c, la gráfica de $f(x)$ se desplaza hacia la izquierda o derecha. En el ejemplo anterior, observamos que la gráfica de la función $g(x) = f(x + 8)$ está desplazada ocho unidades hacia la izquierda, mientras que la de $h(x) = f(x - 10)$ está desplazada diez unidades hacia la derecha.

Traslaciones horizontales

- Si $c > 0$, la transformación $y = f(x + c)$ desplaza la gráfica de $f(x)$ hacia la izquierda.
- Si $c < 0$, la transformación $y = f(x + c)$ desplaza la gráfica de $f(x)$ hacia la derecha.

Traslación vertical

Observa las siguientes gráficas construidas con base en la función $f(x) = \sqrt{x}$

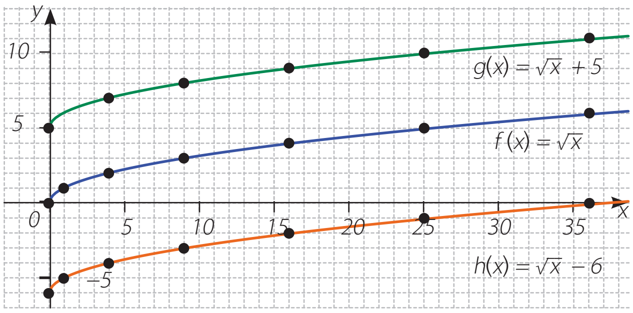
x	$g(x)$
0	$0+5$
1	$1+5$
4	$2+5$
9	$3+5$
16	$4+5$

x	$f(x)$
0	0
1	1
4	2
9	3
16	4

x	$h(x)$
0	$0-6$
1	$1-6$
4	$2-6$
9	$3-6$
16	$4-6$

Traslaciones verticales

- Si $c > 0$, la transformación $y = f(x) + c$ desplaza la gráfica de $f(x)$ hacia arriba.
- Si $c < 0$, la transformación $y = f(x) + c$ desplaza la gráfica de $f(x)$ hacia abajo.

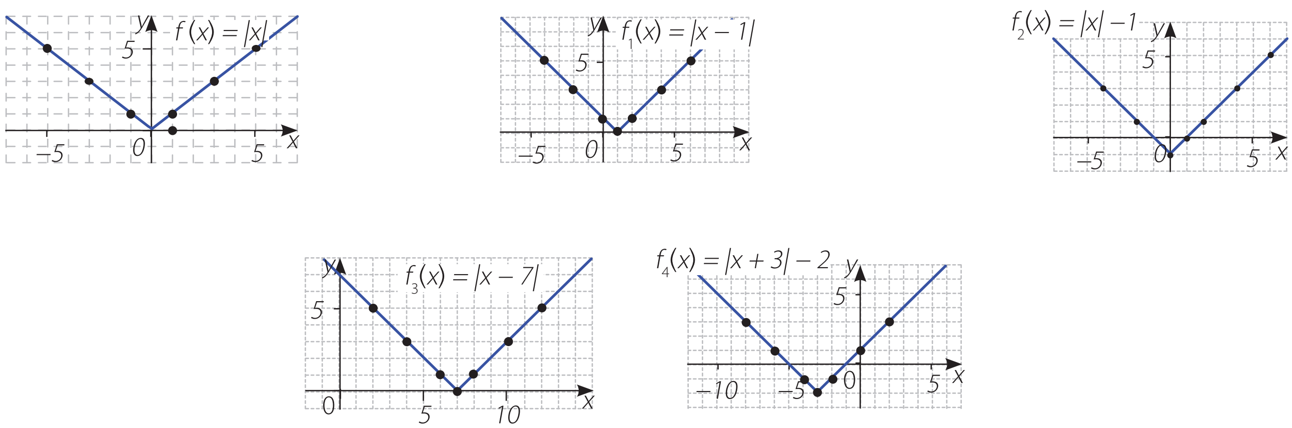


Al aplicar la trasformación $y = f(x) + c$, la gráfica de $f(x)$ se desplaza verticalmente. En el caso de la función $g(x) = f(x) + 5$ observamos una traslación de cinco unidades hacia arriba, mientras que en el caso de $h(x) = f(x) - 6$, la traslación es de seis unidades hacia abajo.

Actividad resuelta

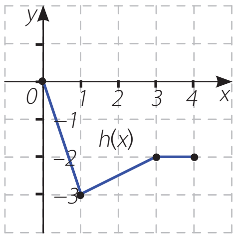
A partir de la gráfica de $f(x) = |x|$ construye las gráficas de las siguientes funciones.

a) $f_1(x) = |x - 1|$ **b)** $f_2(x) = |x| - 1$ **c)** $f_3(x) = |x - 7|$ **d)** $f_4(x) = |x + 3| - 2$



Actividades propuestas

Considera la gráfica de la función $h(x)$ que se muestra en la figura y resuelve las siguientes transformaciones. Traza las cuatro gráficas en el mismo plano usando colores distintos.



1. $y = h(3x)$ **2.** $y = h(-x)$

3. $y = h(0{,}2x)$ **4.** $y = h\left(-\frac{2}{3}x\right)$

Traza la gráfica de la función $f(x) = x^2$ para $-3 \le x \le 3$. A partir de ella construye las gráficas que resultan de elaborar las siguientes transformaciones.

5. $y = f(-x)$ **6.** $y = f(3x)$ **7.** $y = f\left(\frac{x}{3}\right)$ **8.** $y = 2\,f(1{,}5x)$

Describe los cambios que provoca la transformación en la gráfica de $f(x)$.

9. $y = 3f(x)$ **10.** $y = \frac{2}{5}f(x)$ **11.** $y = -f(x)$ **12.** $y = -4f(x)$

13. $y = -0{,}3f(x)$ **14.** $y = f(10x)$ **15.** $y = f(0{,}1x)$ **16.** $y = f(-x)$

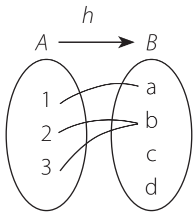
17. $y = f(x + 8)$ **18.** $y = f(x - 12)$ **19.** $y = f(x) + 7$ **20.** $y = f(x) - 11$

21. $y = 2f(x - 3)$ **22.** $y = f(2x) + 4$ **23.** $y = -3f(x) + 1$ **24.** $y = 0{,}5f(x - 6) - 3$

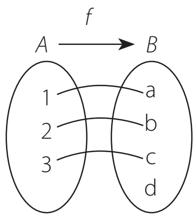
Funciones biyectivas

Reconocer y resolver ecuaciones lineales.

Ten en cuenta



Función no inyectiva



Función inyectiva

Funciones inyectivas

Otro análisis de las funciones es por la forma en que se relacionan su dominio y recorrido.

Decimos que una función f: $A \rightarrow B$ es **uno a uno** o **inyectiva** cuando a elementos distintos del dominio siempre les corresponden imágenes distintas en el recorrido.

Esto es, cada vez que tomamos x_1, x_2 □ $Dom(f)$ tales que, $x_1 \neq x_2$; entonces tenemos que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Esta definición es equivalente a decir que $f(x)$ es uno a uno si cada vez que $f(x_1) = f(x_2) \in Rec(f)$ entonces $x_1 = x_2 \in Dom(f)$.

Esta última interpretación nos sugiere que si conocemos la gráfica de una función, entonces, a partir de ella, fácilmente podemos determinar si la función es uno a uno.

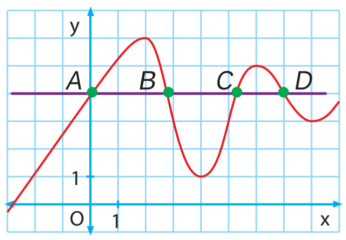
Criterio de la recta horizontal

Una función $f(x)$ es **uno a uno** si y sólo si no es posible trazar una recta horizontal que corte a su gráfica en más de un punto.

Ejemplo 1

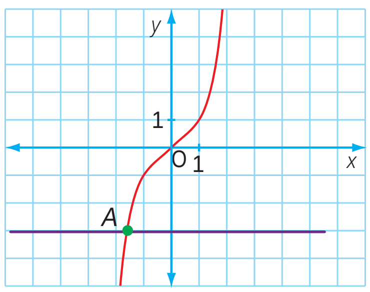
A partir de su gráfica determina si las siguientes funciones son inyectivas.

a)



La función no es uno a uno. En la gráfica se observa que la recta horizontal que trazamos interseca en al menos cuatro puntos: *A, B, C, D* a la gráfica. De acuerdo con el criterio de la recta horizontal, concluimos que:
$f(x)$ no es uno a uno.

b)



La función es inyectiva. Observamos que las rectas horizontales trazadas intersecan una vez a la función. Como es imposible trazar una recta horizontal que corte a la gráfica en más de un punto *A*, entonces, por el criterio de la recta horizontal, concluimos que:
$f(x)$ es una función uno a uno.

Funciones sobreyectivas y biyectivas

Además de las funciones inyectivas o uno a uno, también es importante aprender a identificar las funciones sobreyectivas y biyectivas.

- Una función f es **sobreyectiva** cuando el conjunto de recorrido es igual al conjunto de llegada.
- Decimos que una función f: $A \rightarrow B$, es **biyectiva** si al mismo tiempo es **inyectiva** y **sobreyectiva**.

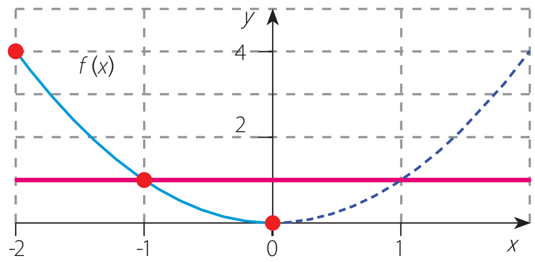
Actividad resuelta

1. Encuentra una función que sea inyectiva pero no sobreyectiva.

Definimos f: $(-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^2$.

La gráfica de $y = x^2$ es una parábola, pero al restringir el dominio al intervalo $(-\infty, 0]$, obtenemos sólo una rama. Al aplicar el criterio de la horizontal, es claro que la función es uno a uno. Por otro lado, como $f(a) > 0$ para todo $a \in Dom(f)$, tenemos que $Rec(f) = \{y \mid y \geq 0\}$.

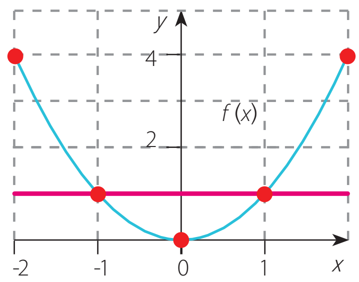
Por tanto, $f(x)$ es inyectiva pero no es sobreyectiva.



2. Encuentra una función que sea sobreyectiva pero que no sea inyectiva.

Definimos la función f: $\mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, tal que $f(x) = x^2$.

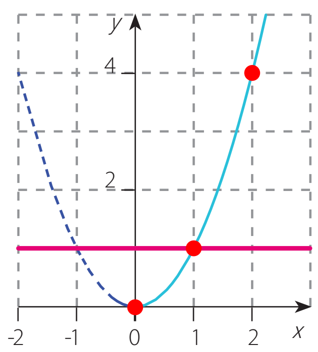
La gráfica de $f(x) = x^2$ es parábola. Al graficarla observamos que es posible trazar una infinidad de rectas horizontales que corten a la gráfica en dos puntos, por tanto $f(x)$ no es una función inyectiva. Por otro lado, observamos que los valores de $f(a) = a^2$ cubren totalmente al intervalo $[0, \infty)$ del eje y. Por tanto, la función no es inyectiva, pero sí es sobreyectiva.



3. Encuentra una función que sea biyectiva.

Definimos la función f: $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, tal que $f(x) = x^2$.

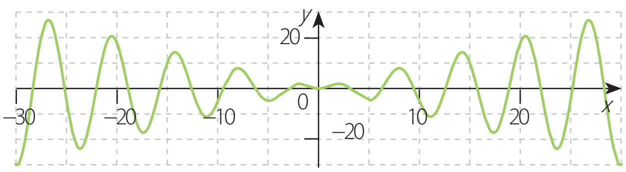
En este caso, como $Dom(f)= [0, \infty)$, la gráfica de la función es sólo la rama positiva de la parábola $y = x^2$; por lo que al aplicar el criterio de la recta horizontal concluimos que la función es inyectiva. Además, la gráfica cubre en su totalidad al intervalo $[0, \infty)$ del eje y, tenemos que $Rec(f) = Dom(f)$, por tanto $f(x)$ es sobreyectiva. Como f es inyectiva y sobreyectiva, concluimos que se trata de una función biyectiva.



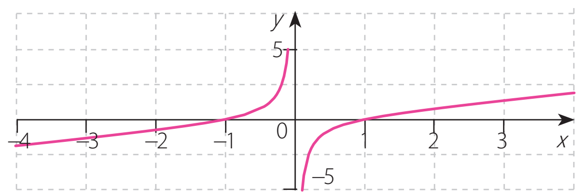
ACTIVIDADES PROPUESTAS

Aplica el criterio de la recta horizontal y decide si las siguientes funciones son inyectivas.

4.



5.



Determina si las funciones son biyectivas

6. f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 3x - 1$

7. f: $(0,\infty) \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \dfrac{1}{x}$

8. Traza la gráfica y describe las características de las funciones, evalúa en el intervalo $x \in [-5, 5]$.

a) $f(x) = -4x + 8$

b) $f(x) = -2x^2 + 8$

c) $f(x) = x^2 + 2x + 2$

d) $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

e) $f(x) = \dfrac{x^2 + 10x}{2x}$

f) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$

g) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 - 4x}$

h) $f(x) = 3x^2 + 2$

i) $f(x) = (0,3)x - 5$

j) $f(x) = -(2,5)x + 4$

9. Grafica e indica si las funciones son uno a uno.

a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

b) $f(x) = 4 - x^2$

c) $f(x) = (x - 23)^2$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$

e) $f(x) = x^2 - x^4$

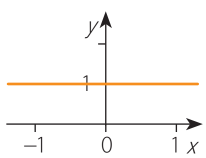
f) $f(x) = x^3 - 2$

g) $f(x) = \sqrt{x + 1}$

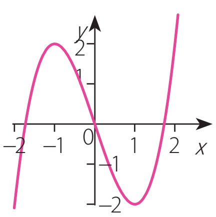
h) $f(x) = \sqrt{2x + 4}$

10. Analiza las gráficas y en cada caso determina un dominio adecuado para que $f(x)$ sea biyectiva.

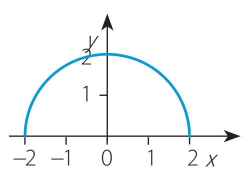
a)



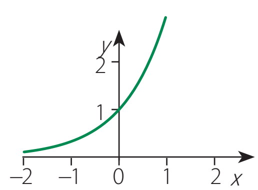
b)



c)



d)



11. Durante una tormenta se ve el rayo de luz antes de escuchar el trueno, porque la luz viaja a mayor velocidad que el sonido. La distancia a la cual cae el rayo es directamente proporcional al tiempo que hay entre la aparición del rayo y el sonido del trueno. Si tardamos 5 s en escuchar el trueno de un rayo que cayó a 5,4 km de distancia.

a) Determina la constante de proporcionalidad y escribe la función d(t) que se obtiene.

b) Traza la gráfica de la función e indica su dominio, recorrido y demás características.

Indagamos

En un juego de laberinto, un niño camina diez pasos hacia el este desde la entrada, después, la mitad de esos pasos hacia el sur, luego hacia el oeste el cuadrado de los pasos que caminó hacia el sur, continuó hacia el sur nueve pasos menos que los que caminó hacia el oeste, después, hacia el este el doble de los pasos que caminó por última vez al sur y, al final, llegó a la salida caminando cuatro pasos hacia el norte.

a) Dibuja un mapa con la trayectoria que siguió el niño en el laberinto, marcando el número de pasos en cada etapa.

b) Elabora un instructivo para que el niño regrese desde la salida hasta la entrada, exactamente por el mismo camino.

Considera la siguiente situación: dos poblaciones cercanas están comunicadas únicamente por una carretera. Para llegar de la población *A* a la población *B* en automóvil, es necesario avanzar hacia el frente en línea recta 2 km, después hacer una curva a la izquierda, luego avanzar hacia el frente en línea recta 500 m, entonces hacer una curva a la derecha, luego otra a la izquierda y por último avanzar hacia el frente en línea recta 250 m.

Si al llegar a la población *B*, ocurriera una avería en la caja de velocidades del automóvil, y solamente quedara funcionando la reversa, para regresar a *B* tendría que dar marcha atrás en línea recta 250 m, después hacer una curva a la derecha y luego otra a la izquierda, luego dar marcha atrás 500 m, hacer una curva a la derecha y por último dar marcha atrás 2 km. Entonces, la trayectoria de *B* hacia *A* es la inversa de la trayectoria de *A* hacia *B*.

Análogamente, la función: $y = f(x) = 2x + 1$ indica que para obtener y debemos duplicar cada valor de x y después sumarle 1. Su función inversa, f^{-1}, está dada por el camino de reversa: primero debemos restar 1 al último valor de y, y después dividir a la mitad lo que quedó, esto es $\frac{(y-1)}{2}$, para regresar al valor original de x. Se usa esta expresión para definir la función inversa de $f(x)$, esta nueva función se denota $f^{-1}(x)$.

$$f^{-1}(x) = \frac{(y-1)}{2}$$

Ahora, si calculamos la función f, por ejemplo para $x = 5$, tenemos que $f(5) = 2(5) + 1 = 11$, y si a este resultado le aplicamos f^{-1}, tenemos $f^{-1}(11) = \frac{11-1}{2} = 5$; de manera que regresamos al valor original, tal y como se muestra en el diagrama.

Regla práctica para obtener $f^{-1}(x)$ a partir de f(x)

1. Demuestra que f es biyectiva.
2. Definir $f(x) = y$
3. Intercambiar el nombre de las variables x y y.
4. Despejar la nueva variable y.
5. Hacer la sustitución $y = f^{-1}(x)$.

Ten en cuenta

En todos los contextos donde f representa una función, en la notación f^{-1}, el superíndice −1 no es un exponente.

Por lo tanto, si f es una función, entonces

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}.$$

Ten en cuenta

La **composición** de una función biyectiva con su inversa cumple con:

$f: A \to B$ biyectiva

$f^{-1} : B \to A$

$f_o f^{-1} = id_B : B \to B$

$f^{-1}{}_o f = id_A : A \to A$

Ejemplo 1

Sea la función $f:[\frac{2}{3};\infty) \to [0,\infty)$ $x \to f(x) = \sqrt{3x-2}$.

Encuentra su función inversa.

1. Demuestra que f es biyectiva.

Primero debemos demostrar que $f(x) = \sqrt{3x-2}$ es **inyectiva y sobreyectiva**.

Para **demostrar** que $f(x) = \sqrt{3x-2}$ es **inyectiva** debemos demostrar que a elementos distintos del dominio siempre les corresponden imágenes distintas en el recorrido. Lo cual es equivalente a decir que $f(x_1) = f(x_2)$, entonces x_1 deber ser igual a x_2.

Reemplazamos usando la regla de correspondencia: $f(x_1) = f(x_2) =$

$\sqrt{3x_1-2} = \sqrt{3x_2-2}$

$(\sqrt{3x_1-2})^2 = (\sqrt{3x_2-2})^2$

$3x_1 - 2 = 3x_2 - 2$

$3x_1 = 3x_2$

$x_1 = x_2$ Por lo tanto $f(x) = \sqrt{3x-2}$ es inyectiva.

Para **demostrar** que $f(x) = \sqrt{3x-2}$ es **sobreyectiva**, primero vamos a calcular los elementos del conjunto *Rec*(f). Analizaremos su regla de correspondencia $\sqrt{3x-2}$; como se trata de un radical sabemos que recorre todos los números reales positivos incluidos el 0. Por lo tanto *Rec*(f)= [0; ∞). Si te fijas en la definición de la función de f podrás ver que su conjunto de llegada es [0; ∞), por lo tanto *Rec*(f)= *B*, lo cual significa que $f(x) = \sqrt{3x-2}$ es sobreyectiva.

Ya que hemos demostrado que la función f es **inyectiva y sobreyectiva** entonces la función es **biyectiva.**

2. Definir $f(x) = y$ $y = \sqrt{3x-2}$

3. Intercambiamos las variables:
Intercambiar el nombre de las variables x y y.
Despejamos la nueva y: $x = \sqrt{3y-2}$

4. Despejar la nueva variable y. Sustituimos $f^{-1}(x)$ en lugar de y:

$$x^2 = 3y - 2 \to 3y = x^2 + 2 \to y = \frac{x^2+2}{3}$$

5. Hacer la sustitución $y = f^{-1}(x)$ $f^{-1}(x) = \frac{x^2+2}{3}$

Ten en cuenta

En el ejemplo 1, obtener la función inversa, el dominio de f es

$Dom(f) = \{x \mid x \geq \frac{2}{3}\}$

y por lo tanto, el recorrido de f^{-1} es

$Rec(f^{-1}) = \{y \mid y \geq \frac{2}{3}\}$

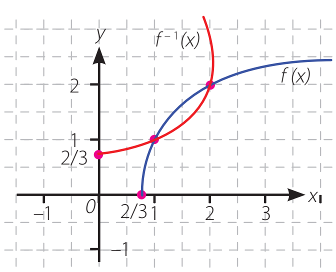
Asimismo, el recorrido de f es

$Rec(f) = \{y \mid y \geq 0\}$

por lo que el dominio de f^{-1} es

$Dom(f^{-1}) = \{x \mid x \geq 0\}$

Dominio y recorrido de la función inversa



Veamos cómo se relacionan el dominio y el recorrido de una función con los de su inversa.

Con la ayuda del diagrama de la izquierda, observamos que la función f se aplica a los elementos del conjunto *A*, que es su dominio, y su recorrido está formado por los elementos del conjunto *B*.

Inversamente, la función f^{-1} se aplica a los elementos del conjunto *B*, que es su dominio, y su recorrido está formado por los elementos del conjunto *A*.

Si f es una función, entonces f^{-1} es su función (relación) inversa, donde

- el dominio de f^{-1} es el recorrido de f; en símbolos: $Dom\ f^{-1} = Rec\ f$,
- el recorrido de f^{-1} es el dominio de f; en símbolos: $Rec\ f^{-1} = Dom\ f$.

No cualquier función tiene función inversa

La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \rightarrow x^2 - 1$, no es inyectiva por lo tanto no tiene función inversa. *Figura A*

Observa que f no es inyectiva, porque al tomar dos elementos del dominio que sean inversos aditivos se obtiene el mismo valor en el recorrido, por ejemplo, $f(2) = f(-2) = 3$.

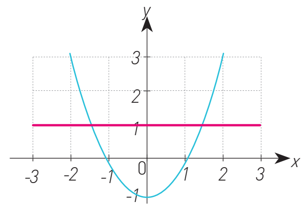


Figura A

Gráfica de una función y su inversa

Dado que el dominio y el recorrido de una función y de su inversa están intercambiados, para trazar una gráfica a partir de la otra, simplemente invertimos sus tablas de valores.

Actividad resuelta

1. En un solo plano, traza las gráficas de $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + 2$ y de su inversa $f^{-1}(x)$.

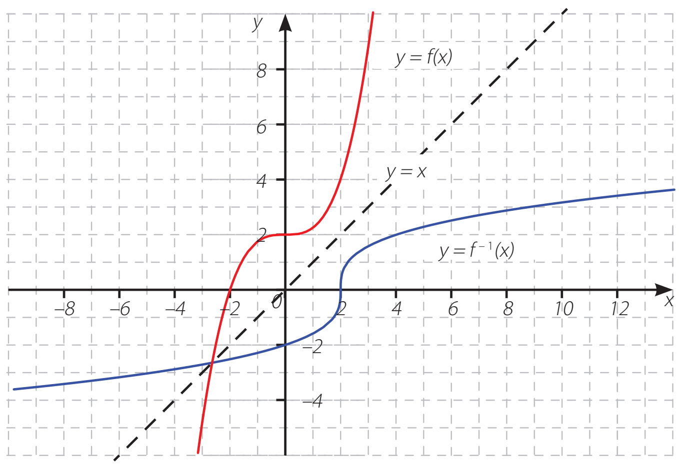
Primero hallamos la función inversa: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{4x - 8}$. Luego, elaboramos la tabla para $f(x)$ y la invertimos para obtener la tabla de $f^{-1}(x)$.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
f(x)	–4,75	0	1,75	2	2,25	4	8,75

x	–4,75	0	1,75	2	2,25	4	8,75
f^{-1}(x)	–3	–2	–1	0	1	2	3

Localizamos los puntos y graficamos:

Al intercambiar los valores de x y y de ambas funciones, el eje x de una función resulta ser el eje y de su inversa. Así, ambas gráficas resultan simétricas respecto a la función identidad $y = x$.



Las gráficas de una función $f(x)$ y de su inversa $f^{-1}(x)$ siempre son simétricas respecto a la recta $y = x$; es decir, la función identidad $f(x) = x$.

Actividades propuestas

En cada caso, halla $f^{-1}(x)$ y determina el dominio y recorrido tanto de f como de f^{-1}.

2. $f(x) = 5 - 3x$ **3.** $f(x) = x^3 + 10$ **4.** $f(x) = \sqrt{2x + 1}$ **5.** $f(x) = -\frac{4}{x + 1}$

Para cada función $f(x)$ encuentra su relación inversa $f^{-1}(x)$ y determina si es función.

8. $f(x) = |x - 1|$ **9.** $h(x) = 3x^2$ **10.** $g(x) = -\sqrt[3]{x}$ **11.** $f(x) = 2x - 5$

Traza, en un solo plano, las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$. Verifica que ambas gráficas son simétricas respecto a la recta $y = x$.

12. $f(x) = 5x$ **13.** $f(x) = \sqrt{2 - 4x}$ **14.** $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$ **15.** $f(x) = \frac{2}{5}x + \frac{1}{2}$

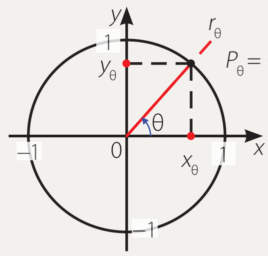
9 Gráficas de funciones trigonométricas

Identificar las gráficas correspondientes a cada una de las funciones trigonométricas a partir del análisis de sus caracteristicas particulares.

Funciones circulares

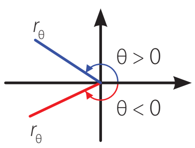
Las **funciones circulares** surgen al conjuntar la trigonometría de triángulos rectángulos, el plano cartesiano y las propiedades geométricas de la circunferencia. Si θ es un ángulo cualquiera y $P_\theta = (x_\theta, y_\theta)$ es el punto de intersección del rayo r_θ con la circunferencia unitaria, entonces se cumple lo siguiente.

Funciones trigonométricas circulares

$\operatorname{sen}\theta = y_\theta$		$\csc\theta = \frac{1}{y_\theta}$
$\cos\theta = x_\theta$		$\sec\theta = \frac{1}{x_\theta}$
$\tan\theta = \frac{y_\theta}{x_\theta}$		$\cot\theta = \frac{x_\theta}{y_\theta}$

Ten en cuenta

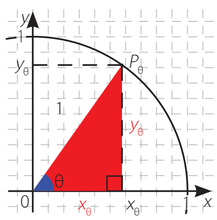
Para representar un ángulo θ en el plano cartesiano trazamos el segmento r_θ, partiendo del origen y midiendo a partir de la **dirección positiva del eje** *x* (0°).



Si θ > 0 (positivo), medimos en sentido contrario al movimiento
de las manecillas del reloj.

Si θ < 0 (negativo), entonces lo hacemos en el mismo sentido.

Una consecuencia inmediata de estas definiciones es que, cuando 0° < θ < 90°, entonces las **funciones circulares coinciden con la trigonometría de los triángulos rectángulos**.



$\operatorname{sen}\theta = \frac{co}{h} = \frac{y_\theta}{1} = y_\theta$; $\cos\theta = \frac{ca}{h} = \frac{x_\theta}{1} = x_\theta$;

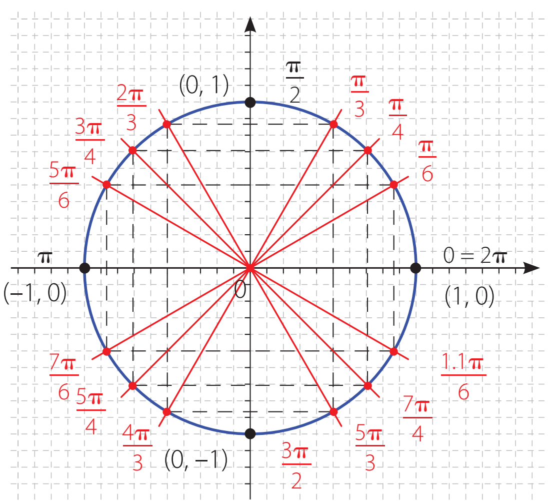
$\tan\theta = \frac{co}{ca} = \frac{y_\theta}{x_\theta}$; $\csc\theta = \frac{h}{co} = \frac{1}{y_\theta}$;

$\sec\theta = \frac{h}{ca} = \frac{1}{x_\theta}$; $\cot\theta = \frac{ca}{co} = \frac{x_\theta}{y_\theta}$.

Las funciones circulares $y = \operatorname{sen}\alpha$, $y = \cos\alpha$ se calculan, según el ángulo α, tomando las coordenadas de los puntos que están sobre la circunferencia unitaria.

Al hacer variar el valor de α sobre todos los números reales, daremos vueltas sobre la circunferencia unitaria; en consecuencia, los valores de las funciones (coordenadas) se repetirán una y otra vez en cada vuelta. Entonces, las funciones $y = \operatorname{sen}\alpha$ y $y = \cos\alpha$ son periódicas; en consecuencia, sus valores se repiten cada 360° = $2p$. Entonces, para trazar las gráficas de estas funciones, necesitamos construir sus tablas de valores para un período completo, por ejemplo, para $0 \le \alpha \le 2\pi$.

Primero hacemos una tabla con los valores más conocidos para $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$,



α						
α	Grados	0°	30°	45°	60°	90°
	Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha = x_\alpha$		1	0,87	0,71	0,5	0
$\operatorname{sen}\alpha = y_\alpha$		0	0,5	0,71	0,87	1

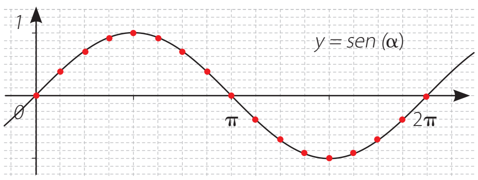
Como la circunferencia tiene su centro en el origen *O* = (0, 0), al conocer las coordenadas de los puntos que están en el primer cuadrante, usamos las propiedades de simetría para encontrar las coordenadas de los puntos simétricos que están en los otros tres cuadrantes.

Puntos simétricos por cuadrante

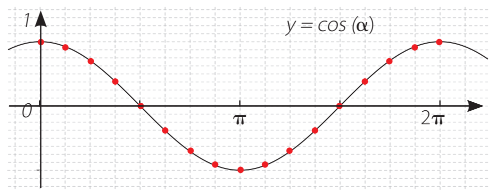
I	II	III	IV
(*x*, *y*)	(–*x*, *y*)	(–*x*, –*y*)	(*x*, –*y*)

Con estas propiedades completamos la tabla para $\frac{\pi}{2} \le \alpha \le 2\pi$.

Período de y = sen α



Período de y = cosen α



α	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
cos α	0	–0,5	–0,71	–0,87	–1	–0,87	–0,71	–0,5	0	–0,87	–0,71	–0,5	0
sen α	1	0,87	0,71	0,5	0	–0,5	–0,71	–0,87	–1	–0,5	–0,71	–0,87	–1

Ten en cuenta

Para calcular los valores de la tabla y trazar la gráfica de $y = \tan(\alpha)$, consideramos que $\tan(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ y usamos los valores de las tablas de la página anterior.

En cualquier caso, es importante observar que para $\alpha = \pm 90°$ esta función no está definida.

Ejemplo 1

Determina el período y traza la gráfica de la función $y = \tan \alpha$.

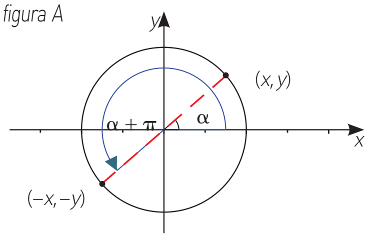
Si nos fijamos en parejas de puntos simétricos de la circunferencia respecto al origen, es fácil ver que a los dos puntos les corresponde el mismo valor de la función tangente. (*figura A*)

De esta manera, las tangentes de los ángulos simétricos de los cuadrantes I y III coinciden. Lo mismo sucede para los ángulos simétricos de los cuadrantes II y IV. (*figura B*)

En cualquier caso tenemos que $\tan \alpha = \tan(\alpha + \pi)$.

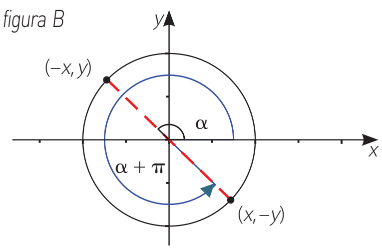
Por tanto, el período de la función tangente es $p = 180° = \pi$, su gráfica se traza a partir de una tabla con valores para $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.

figura A



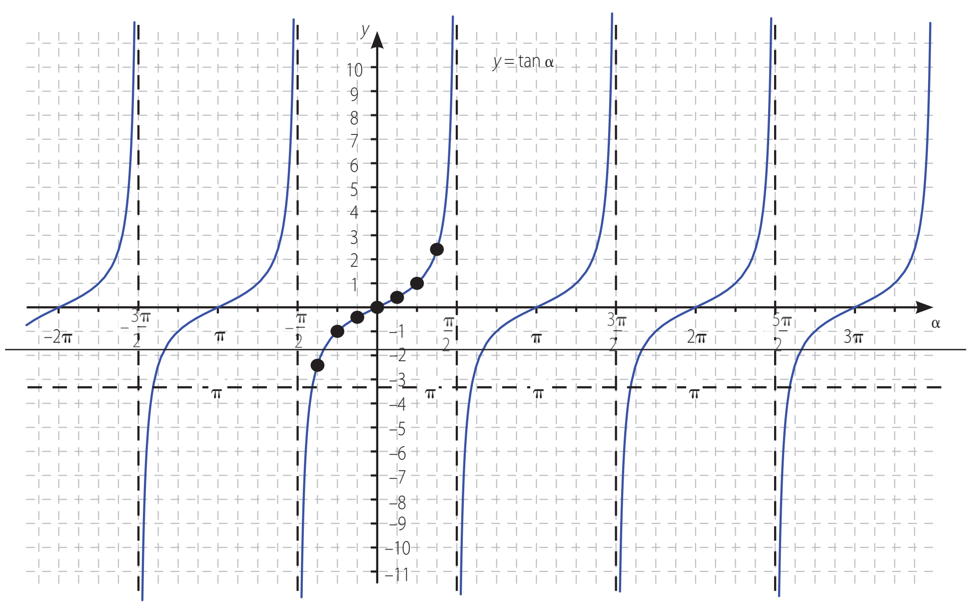
$\tan(\alpha) = \frac{y}{z} = \frac{-y}{-z} = \tan(\alpha + \pi)$

figura B



$\tan(\alpha) = \frac{y}{-z} = \frac{-y}{z} = \tan(\alpha + \pi)$

Grados	–90°	–60°	–45°	–30°	0°	30°	45°	60°	90°
Radianes	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan α		–1,73	–1	–0,58	0	0,58	1	1,73	



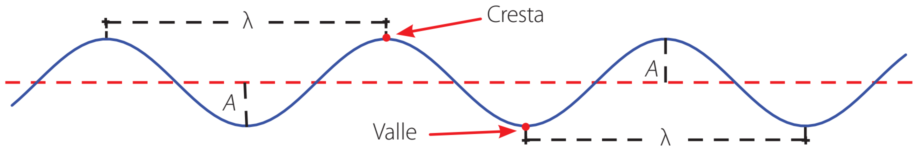
Para $\alpha = \pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi$... la función no está definida y presenta asíntotas.

Por tanto, su dominio es $Dom(f) = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \ne \pm\frac{(2n+1)\pi}{2}, n \in \mathbb{N}\}$ y su $Rec(f) = \mathbb{R}$.

Ondas y funciones senoidales

Las funciones de la forma: $f(x) = a\ \text{sen}(bx + c) + d$, donde a, b, c y d son constantes, reciben el nombre de **funciones senoidales**.

Al igual que $f(\alpha) = \text{sen}\ \alpha$, las funciones senoidales son periódicas y sus gráficas son ondulatorias. Para comenzar su estudio conozcamos las partes de una onda.

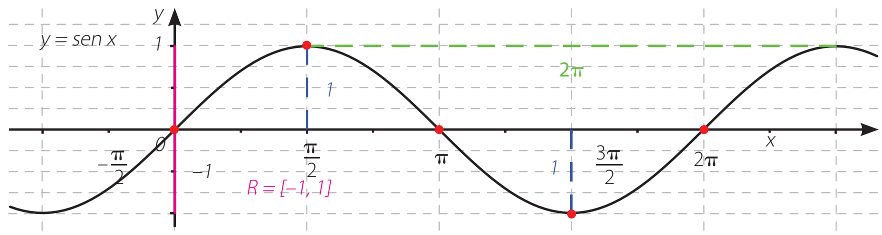


Al punto más alto de la onda se le llama **cresta** y al más bajo, **valle**. La distancia horizontal que hay entre dos crestas (o valles) se le conoce como **longitud de onda** (λ). La **amplitud de onda** (A) es la mitad de la altura que hay entre las crestas y los valles.

Amplitud y rango

Analicemos las características de la **onda básica** descrita por la función $f(x) = \text{sen}\ x$.

x	$f(x)$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0



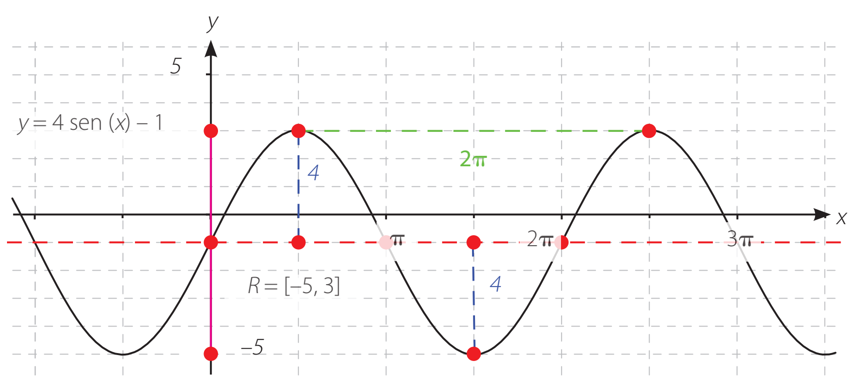
Podemos observar que la amplitud de onda es $A = 1$, el período o longitud de onda es $p = \lambda = 2\pi$ y respecto a su dominio y su rango, tenemos que $D_{sen} = \mathbb{R}$ y $R_{sen} = [-1, 1]$.

Actividad resuelta

$f(x) = 4\ \text{sen}\ (x) - 1$

Construimos una tabla de valores para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ y trazamos la gráfica.

x	$f(x)$
0	$4(0) - 1 = 1$
$\frac{\pi}{2}$	$4(1) - 1 = 3$
π	$4(0) - 1 = -1$
$\frac{3\pi}{2}$	$4(-1) - 1 = -5$
2π	$4(0) - 1 = -1$



Por tanto, la amplitud es $A = 4$, el período es $p = \lambda = 2\pi$ y el rango es $Rec(f) = [-5, 3]$.

Actividades propuestas

Determina si el valor que se indica es o no solución de la ecuación.

Investiga si $y = 10$ es solución de la ecuación $y - 5 = 3y - 25$.

Determina el período y traza la gráfica de las siguientes funciones periódicas.

$y = \sec\ \alpha$ **4.** $y = \csc\ \alpha$ **5.** $y = \cot\ \alpha$

Funciones inversas y ecuaciones trigonométricas

m	$-4{,}5$	-4	-3		-1	0		2	3	4	
n			-17	-12		-2	3			18	$25{,}5$

Si en la función $f(x) = 4 - 2x$ sabemos que si $f(x) = 10$, despejamos para encontrar el correspondiente valor de x: $f(x) = 10 = 4 - 2x \Rightarrow x = \frac{4 - 10}{2} = -3$.

En este ejemplo observamos que, al tomar un elemento k cualquiera del rango ($k \in Rec$), sólo hay un elemento x del dominio ($x \in Rec(f)$) tal que $f(x) = k$.

Sin embargo, si en la función $g(x) = x^2 + 4$, sabemos que si $g(x) = 13$, al calcular el valor de x, encontramos que hay dos soluciones posibles:

$$g(x) = 13 = x^2 + 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{13 - 4} = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = 3 \text{ o } x = -3.$$

Si para cualesquiera a, $b \in Dom(f)$ verificamos que la función es biyectiva, entonces decimos que f es una **función invertible**.

Mientras que $f(x) = 4 - 2x$ es una función invertible, $g(x) = x^2 + 4$ no lo es. Hemos mostrado que hay dos elementos distintos del dominio, $-3 \neq 3$, tales que $g(-3) = 13 = g(3)$ y por tanto, concluimos que la función $g(x)$ no es uno a uno.

Valores principales y definición de funciones invertibles

En las funciones que no son uno a uno, si conocemos o fijamos el valor de la variable dependiente, $k = f(x) \in Rec(f)$, el valor de la variable independiente, $x \in Rec(f)$, no siempre estará determinado de manera única.

Por ejemplo, si en la función definida por $f(x) = x^2$, fijamos el valor $f(x) = 25$ tenemos que el valor de x no está determinado de manera única, pues existen dos posibles valores: $g(5) = 25 = g(-5)$.

En términos de operaciones numéricas, rápidamente advertimos que en la función $y = x^2$, las dos operaciones son elevar al cuadrado y extraer raíz cuadrada.

De estas, la extracción de la raíz cuadrada es la que no está únicamente determinada ya que hay dos posibles raíces: la positiva y la negativa.

Una característica que esperamos de cualquier operación numérica es que, al calcularla, su resultado sea único. Si usamos una calculadora para extraer la raíz cuadrada de 25, siempre obtenemos la raíz positiva, es decir $x = 5$.

Al identificar las operaciones numéricas con las funciones, observamos lo siguiente.

Para definir funciones inversas a partir de funciones que no son de tipo uno a uno, es necesario establecer un conjunto de **valores principales**, que, sin perder información, permita eliminar toda ambigüedad.

Indagamos

Considera la ecuación $5m = n + 2$. Ahora completa la tabla de la izquierda.

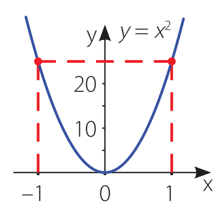
Ten en cuenta

Analizaremos las funciones trigonométricas inversas y aprenderemos a resolver algunas ecuaciones trigonométricas sencillas.

Ten en cuenta

La gráfica de la función $f(x) = x^2$ es una parábola. Si tomamos $f(x) = 25$, entonces

$x = 5$ o $x = -5$.



En el caso de $f(x) = x^2$, el conjunto de **valores principales** es el formado por los números positivos, $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$. La función inversa de $f(x) = x^2$ se define como $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, donde $\sqrt{x}$ siempre representa a la raíz positiva (principal). La otra raíz posible (negativa) se obtiene a partir del valor principal multiplicando por -1. $(-1)\sqrt{x} = -\sqrt{x}$.

Ten en cuenta

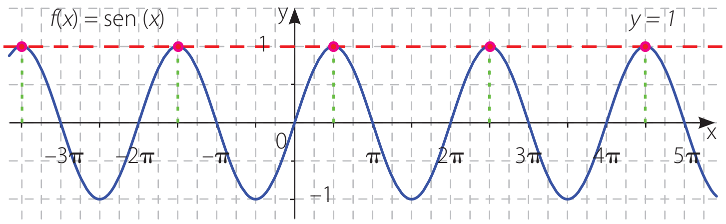
Una manera práctica para identificar relaciones uno a uno es mediante el análisis de su gráfica.

Si puedes trazar una línea horizontal o vertical que corte a la gráfica en más de un punto, entonces la función no es uno a uno.

Ejemplo 1

a) Muestra que la función $f(x) = \text{sen}(x)$ no es invertible (uno a uno).

En general, ninguna función periódica es uno a uno. En el caso de la relación $y = \text{sen } x$ es muy fácil comprobarlo. Si tomamos $y = 1$, entonces hay muchos valores posibles para x. Si $y = \text{sen } x = 1$, entonces $x = ..., -\frac{7}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{2\pi}, \frac{9}{2\pi}...$



b) La función inversa de sen (x) es arcsen (x) ($\text{sen}^{-1}(x)$). Usa una calculadora científica para descubrir cuáles son los valores principales que se usaron para definir la función arcsen (sen^{-1}).

Como $Rec(f) = [-1, 1]$ es el recorrido de la función $f(x) = \text{sen}(x)$, los valores posibles para $y = f(x)$ son los números del intervalo $[-1, 1]$, entonces una buena estrategia es usar la calculadora con el fin de obtener valores correspondientes para x a lo largo de todo el intervalo.

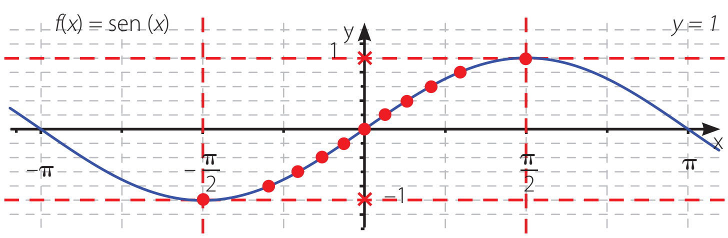
Determinamos que $y = \text{sen}(x) \to x = \text{arcsen}(y)$, y hacemos una tabla.

y	–1	–0,8	–0,6	–0,4	–0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
x = arcsen(y)	–90°	–53,1°	–36,9°	–23,6°	–11,5°	0	11,5°	23,6°	36,9°	53,1°	90°

Utiliza las TIC

Salvo alguna rara excepción, en todos los textos y dispositivos electrónicos que contemplan la función arcsen (sen^{-1}), utilizan como valores principales al intervalo $[-90°, 90°]$.

Así, en la operación (función) arcoseno (sen^{-1}) de la calculadora, los valores principales programados corresponden al intervalo $[-90°, 90°] = [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



Funciones trigonométricas inversas

Las funciones trigonométricas básicas no tienen inversas debido a que son funciones periódicas y por lo tanto no son inyectivas, pero restringiendo los dominios se puede hallar su inversa.

- Si $y = \text{sen}(x)$, entonces $x = \text{arcsen}(y)$, donde $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$.
- Si $y = \cos(x)$, entonces $x = \arccos(y)$, donde $0° \leq x \leq \pi$.
- Si $y = \tan(x)$, entonces $x = \arctan(y)$, donde $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$.

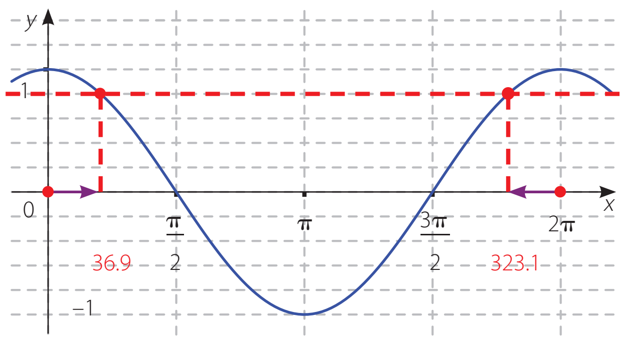
Actividad resuelta

1. Si cos (x) = 0,8, encuentra todas las soluciones posibles entre 0° y 360°.

Despejamos x, y con la calculadora obtenemos su valor principal:

$$\cos(x) = 0{,}8 \rightarrow x = \arccos(0{,}8) \approx 36{,}9°.$$

Finalmente, con las propiedades de simetría de la gráfica de $y = \cos(x)$, determinamos todas las posibles soluciones en el intervalo [0°, 360°].



Por tanto las soluciones son

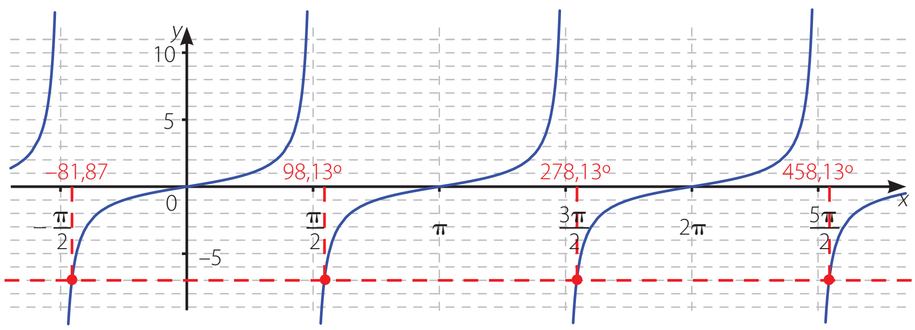
$x_1 \approx 36{,}9°$ o $x_2 \approx -x_1 = 323{,}1°$.

2. Si tan(x) = −7, encuentra todas las soluciones posibles entre 0° y 450°.

Despejamos x, y con la calculadora obtenemos su valor principal.

$$\tan(x) = -7 \rightarrow x = \arctan(-7) \approx -81{,}87°$$

Con la gráfica de $y = \tan(x)$ determinamos las soluciones en el intervalo solicitado.



Las soluciones son $x_1 \approx 98{,}13°$ o $x_2 \approx 278{,}13°$.

Actividades propuestas

Usa una calculadora científica para descubrir cuáles son los valores principales que se escogen para definir las funciones.

1. $y = \arccos(x)$

2. $y = \arctan(x)$

Encuentra el valor principal de x, y úsalo para encontrar las soluciones en el intervalo dado.

3. $\cos(x) = 0{,}75$, para $x \in [-\pi, \pi]$

4. $\tan(x) = 2{,}5$, para $x \in [-2\pi, 0°]$

5. $4 \operatorname{sen}(x) = 1$, para $x \in [0°, 2\pi]$

6. $2 \tan(x) + 5 = 0$, para $x \in [0°, 2\pi]$

Aplicamos

Relaciones y funciones

Integra conocimientos

Ejercitación

1. Determina los productos cartesianos de los conjuntos.

a) $A = \{-5, -4, -3, -2, -1\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

b) M = {Alma, Perla, Carolina}; H = {Eduardo, Luis, Pedro}

c) $N = \{2, 5, 7, 9, 11\}$ y C = {blanco, verde, azul, rojo}

Razonamiento

2. Halla las parejas de cada relación y determina si es una función.

a) $A = \{4, 5, 6, 8\}$; $B = \{1, 3, 5, 7, 10\}$;
$R = \{(a, b) \mid (a - 1) < b\}$

b) $N = \{1, 4, 9, 16\}$; $M = \{0, 1, 2, 4\}$;
$T = \{(n, m) \mid n^2 = m\}$

c) P = {**Q**uito, **I**barra, **G**uayaquil, **S**alinas, **M**anta};
C = {**S**ichincha, **I**mbabura, **E**smeraldas, **G**uayas};
$R = \{(x, y) \mid x$ es capital de $y\}$.

d) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; $B = \{-9, -8, -1, 0, 1, 8\}$;
$G = \{(a, b) \mid a^3 = b\}$

Calcula

Razonamiento

3. Encuentra el dominio, el recorrido y la regla de correspondencia adecuada para definir las siguientes relaciones.

a) $R = \{(1, 4), (2, 6), (3, 8), (4, 10)\}$

b) $T = \{(-1, 12), (0, 12), (1, 12), (2, 12)\}$

Razonamiento

c) Sean $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y $C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, -1\}$. Determina si $g: D \rightarrow C$ es una función. Justifica tu respuesta.

d) $g = \{(-1, 2), (0, 3), (1, 4), (2, 5)\}$

e) $g = \{(-2, 2), (-1, 3), (0, 4), (1, 5), (2, 6)\}$

f) $g = \{(-2, 2), (-1, 3), (0, 4), (1, 5), (-1, 6), (0, 7)\}$

Representa funciones

Ejercitación

4. Traza la gráfica de cada función usando tablas de valores adecuadas. Determina dominio y recorrido.

a) $f(x) = 7$

b) $f(x) = -\pi$

c) $f(x) = |x + 3|$

d) $f(x) = |x| - 2$

e) $f(x) = |4x|$

f) $f(x) = 4|x|$

g) $f(x) = \left|\frac{x}{3}\right|$

h) $f(x) = |4x| - 1$

i) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

j) $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}$

k) $f(x) = x^2 - 5$

l) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

m) $f(x) = x + 1$

n) $f(x) = \lfloor 1.5x \rfloor$

o) $f(x) = \dfrac{4\lfloor x \rfloor}{5}$

p) $f(x) = 2\lfloor x \rfloor - 1$

q) $f(x) = \lfloor -3x \rfloor$

r) $f(x) = \lfloor 1{,}2x \rfloor + 2$

Resuelve problemas

Resolución de problemas

5. Resuelve.

a) Traza la gráfica de las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = |x^2 - 1|$ para $-3 \leq x \leq 3$. A partir de lo observado explica sus similitudes y diferencias.

b) El alquiler de una bicicleta cuesta \$30 UM la primera hora, más \$20 UM por hora o fracción adicional. Encuentra la función de costo y traza su gráfica. Determina el total a pagar por un paseo de 3 horas y 42 minutos.

c) ¿Cuánto se deberá pagar por 2 horas y media?

Calcula

Procesos

6. Para cada función halla su inversa. Indica sus dominios y recorridos respectivos.

a) $f(x) = 3x + 11$

b) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{3}x$

c) $f(x) = 2x + 6$

d) $v(x) = 2x^3$

e) $g(x) = \sqrt[3]{x + 10}$

f) $g(x) = -\sqrt{2 - x}$

g) $f(x) = -\sqrt{x + 2}$

h) $h(x) = \sqrt{x + 8}$

i) $w(t) = \dfrac{1}{t}$

Complejidad: Básico Medio Avanzado

Comunicación de ideas

RAZONAMIENTO

- **7.** En las siguientes expresiones, $y = f(x)$ define una función. En cada caso determina si su relación inversa es o no una función. Justifica tu respuesta.

  a) $f(x) = x + 9$

  b) $x^2 - 6x + 9 = 0$

  c) $f(x) = \frac{2}{x}$

  d) $2x + 3y - 1 = 0$

  e) $f(x) = x^2 - 13$

  f) $\sqrt{x - 4} + y = 0$

  g) $f(x) = x^4$

  h) $y = \sqrt[7]{x}$

Modelación

RAZONAMIENTO

- **8.** Para contestar cada una de las siguientes preguntas considera que f es una función biyectiva.

  a) Si $f(-1) = 10$, calcula $f^{-1}(10)$.

  b) Si $f^{-1}(2) = -1$, calcula $f(-1)$.

  c) Si $f(x) = 6x + 2$, calcula $f^{-1}(0)$.

  d) Si $f(x) = \sqrt{2x + 3}$, calcula $f^{-1}(10)$.

PROCEDIMIENTO Y RAZONAMIENTO

- **9.** Comprueba que f y g son inversas entre sí. Hazlo dos veces usando los siguientes métodos alternativos.

  a) Algebraicamente: $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$.

  b) Gráficamente: verifica simetría respecto a la recta $y = x$.

- **10.** Resuelve

  a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$, $g(x) = 2x - 6$

  b) $f(x) = \frac{1}{x - 2}$, $g(x) = \frac{2x + 1}{x}$

  c) $f(x) = 6 - x^3$, $g(x) = -\sqrt[3]{x - 6}$

  d) $f(x) = \frac{2}{x + 1} - 1$, $g(x) = \frac{2}{x + 1} - 1$

  e) Determina la inversa de $f(x) = x$

Modelación

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

- **11.** Resuelve.

  a) Si consideramos su dominio implícito ($\mathbb{R}$), la función $f(x) = x^2$ no es inyectiva. Sin embargo, con el dominio restringido, la función $g(x) = x^2$, $x \geqslant 0$, sí es inyectiva.

  b) Explica por qué.

  c) Encuentra la función inversa $g^{-1}(x)$.

  d) Determina el dominio y el rango de g^{-1}.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

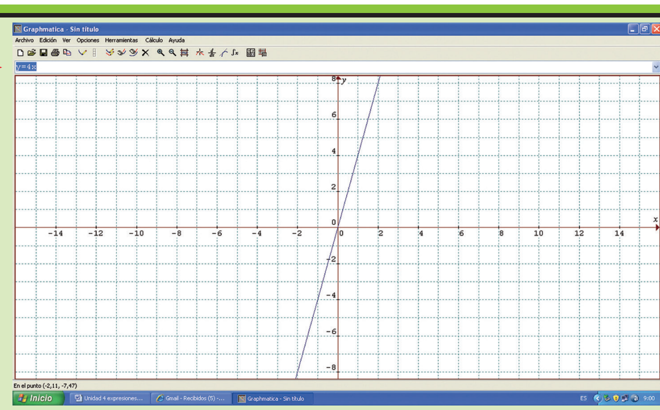
  e) En el mismo plano traza la gráfica de la función $f(x) = (x - 3)^2$, $x \geqslant 3$ y la de su inversa $f^{-1}(x)$. Comprueba que sus gráficas son simétricas al semejar un doblez del plano mediante la función identidad $f(x)$.

MATEMATICS

Graphmatica es un software de libre acceso con el que podrás graficar distintos tipos de funciones, entre otras aplicaciones.

Pídele ayuda a tu profesor(a) para conseguirlo. Por ejemplo grafica: f(x) = 4x.

Debes digitar la función y = 4x y luego presionar Enter. Visualizarás el gráfico de la función ingresada.



Utiliza ***Graphmatica*** para representar las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x + 1$ **b)** $g(x) = 2x^2$ **c)** $h(x) = 2x^3 - 1$

Resolvemos problemas

Etapas en la solución de problemas

1 Comprender el enunciado del problema.

Analizar es descomponer una situación, un texto o un problema dado en sus partes integrantes y determinar cómo se relacionan unas con otras y con una estructura o propósito general.

2 Proponer un plan

Plantear desde un inicio un plan de trabajo en la resolución de problemas te dará el camino para encontrar la solución.

Para resolver
un problema debes:
Comprender el enunciado
Proponer un plan
Ejecutar un plan
Revisar la solución

3 Ejecutar el plan

Recuerda **aplicar** o utilizar el procedimiento necesario en la situación planteada. **Interpretar** la información entregada en el problema y **emplear** el procedimiento de manera cuidadosa.

3 Revisar la solución

Es muy importante que determines si la respuesta encontrada es solución del problema y se ajusta al contexto de la situación modelada.

1 **ACTIVIDAD RESUELTA**

Problema

Si un vendedor de una automotora tiene un sueldo base mensual de \$ 2 500 y de comisión por venta obtiene un 5% del precio del vehículo, ¿qué función permite calcular el sueldo S del vendedor con respecto a los automóviles vendidos? ¿Qué sueldo obtuvo el vendedor si durante el mes vendió 2 automóviles que tenían un precio de venta de \$ 54 900 cada uno?

Comprender el enunciado del problema.

- ¿Qué se quiere dar a conocer una vez resuelto el problema?

  La función que permita calcular el sueldo y el sueldo que obtiene luego de vender 2 automóviles de cierto valor.
- ¿Qué información entrega el enunciado del problema?

  El sueldo base del vendedor, el porcentaje de comisión que obtiene por venta y la venta que hizo un mes en particular.

Proponer un plan

- **Organiza** la información.

  Primero, señala que el 5% de un valor se puede representar numéricamente como $\frac{5}{100} = 0{,}05$*. Además, otro dato del problema es que se venden 2 automóviles en \$ 54 900 cada uno.*
- **Identifica** las partes que la componen.

  Puedes identificar que el sueldo del vendedor se compone de un sueldo base de \$ 2 500 y por la venta x *de cada auto se le pagará un 5% de esta, es decir,* $0{,}05 \cdot x$.
- **Determina** de qué manera se diferencian las partes.

  Como el sueldo base no varía, este no depende de las ventas hechas.

Ejecutar el plan

La función S *se puede escribir de la siguiente manera:* $S(x) = \underbrace{2\,500}_{\text{Sueldo base}} + \underbrace{0{,}05}_{\text{Comisión por venta}}\ \underbrace{x}_{\text{Número de autos vendidos}}$

Luego, como vende 2 automóviles de \$ 54 900, se tiene:

$2 \cdot 54\,900 = 109\,800$. Así, al evaluar en la función se tiene que:

$S(109\,800) = 2\,500 + 0{,}05\,(109\,800)$

= 2 500 + 54 900

= 7 990 Por lo tanto, el sueldo del vendedor en ese mes es de $ 7 990.

Revisar la solución

Puedes calcular el 5% de 54 900, que equivale a 2 745, y multiplicarlo por 2. Entonces, 2 · 2 745 = 54 900 y a ese valor sumar el sueldo base.

Por lo tanto, 2 500 +54 900 = 7 990.

2 Actividad resuelta

Problema

Un hospital cuenta con 30 ambulancias y cada una de ellas recorre aproximadamente 200 km por día y gasta en promedio 1 litro de combustible por cada 12 km. Si el precio de un litro de combustible es de $ 0,60 UM, ¿qué función podría relacionar los datos para posteriormente calcular el dinero que se paga en combustible para las ambulancias en el hospital?

Resolución

- ¿Qué se quiere dar a conocer una vez resuelto el problema?

  Se quiere dar a conocer la función que relaciona los datos, luego calcular la cantidad de dinero que se paga por combustibles.

- ¿Qué información entrega el enunciado del problema?

  El número de ambulancias, la distancia recorrrida, el consumo de combustible por cada 12 km y el precio del litro de combustible.

  La función que relaciona el pago de combustible de acuerdo al número de ambulancias es:

$$P(x)=\left[\underbrace{\frac{200}{12}}_{\textit{cantidad}\text{ de gasolina de una ambulancia}}\cdot\underbrace{0{,}60}_{\textit{precio}\text{ litro de gasolina}}\right]\cdot\underbrace{x}_{\textit{numero}\text{ de ambulancias}}$$

P(x) = 10 x *P(30) = 10(30)* *P(30) = 300*

Por consumo de combustible de las tres ambulancias se debe cancelar 300 UM.

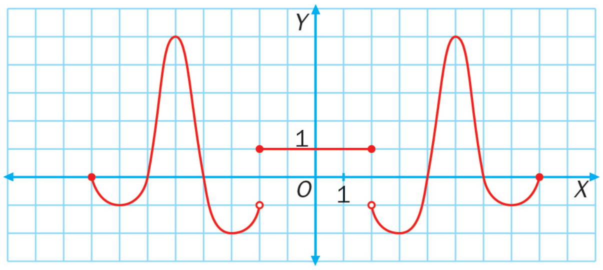
Aplica la estrategia

1. En una biblioteca, por cada libro que se presta se cobran $ 5, y por retraso se cobran $ 2. Si Leonardo pidió 8 libros, ¿cómo expresarías la función que permite calcular el pago de Leonardo en función de los días de retraso en su entrega?
2. En una fábrica de bebidas se determinó que la ganancia mensual en un mes de verano (21 dic-21 mar) aumentaba en 20% con respecto a otras estaciones del año. En el mes de febrero se invirtió en la elaboración del producto 40% de la ganancia obtenida el mes de enero. Si el mes de enero se obtuvo una ganancia de $ 20 000 y el precio de venta del producto era $ 1,50, ¿qué función permite calcular la ganancia del mes de febrero dependiendo de la cantidad de unidades vendidas si se sabe que la ganancia corresponde a lo vendido menos lo invertido?
3. Crea un problema que te permita modelar una función para su resolución. Luego resuélvelo.

Ponemos a prueba destrezas

ACTIVIDADES PARA APLICAR

1. Observa la gráfica y estudia las siguientes propiedades.



a) Dominio y recorrido.

b) Crecimiento y decrecimiento.

c) Máximos y mínimos.

d) Simetrías.

2. La tabla relaciona el volumen de los cilindros de 10 cm de altura con el radio de su base.

x (radio base)	1	3	5	10
y (volumen cilindro)	10π	90π	250π	$1\,000\pi$

a) Halla la ecuación de la relación.

b) Construye la gráfica de la función que relaciona el volumen de los cilindros con el radio de la base.

PROBLEMAS PARA APLICAR

3. Compara las siguientes tablas y determina ¿en cuál de ellas se representa una función?

x	-1	-2	-3	-5
y	3	5	3	-3

x	3	5	3	-3
y	-1	-2	-3	-5

4. Los gerentes de un conocido supermercado han realizado un estudio sobre el tiempo que tienen que esperar los clientes en la cola de caja.

Llegaron a las siguientes conclusiones:

- El tiempo en marcar todos los productos de un cliente es proporcional al número de productos que lleva en el carro.
- El tiempo que tarda la cajera en marcar un producto es de 4 segundos.
- Entre cada dos clientes se precisa de 2 min para imprimir y entregar la factura, cobrar el dinero y devolver el cambio.

a) Calcula cuánto tiempo tendrá que esperarse un cliente si delante tiene tres personas con 20, 15 y 25 productos, respectivamente

b) Escribe una expresión matemática que sirva para calcular el tiempo que tiene que esperar un cliente si delante tiene una única persona con *x* productos en su carro. Dibuja la gráfica de la función correspondiente.

5. Variación de la temperatura

La temperatura, en grados centígrados, durante el 21 de mayo en París se puede expresar mediante la función:

$$f(x) = \frac{-9x^2 + 200x + 1\,000}{100}$$

Donde *x* es la hora comprendida en el intervalo [0, 24].

a) Calcula la temperatura que había al comenzar y al terminar el día.

b) Calcula la hora en que hubo mayor temperatura y el valor de esta.

c) Indica la hora en que hubo menor temperatura y el valor de esta.

d) ¿Cómo varió la temperatura entre las 12:00 y las 18:00?

Matemática en contexto

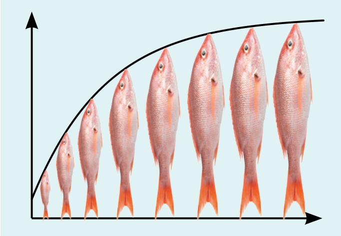
En el campo de la investigación, modelar significa interpretar y representar fenómenos reales mediante el lenguaje matemático. La función que expresa el comportamiento del fenómeno, en términos de ciertas variables, se denomina modelo matemático. Este puede describir la trayectoria elíptica de Mercurio en torno al Sol, el nivel de la marea cada hora en Santa Elena, la trayectoria de un misil antiaéreo, el peso ideal de una persona según su estatura, el crecimiento de la población humana en los últimos cincuenta años, la oferta y la demanda en el mercado de consumo para un nuevo producto, el porcentaje de absorción de un medicamento en la sangre según el tiempo tras haberlo ingerido, la temperatura de ebullición del agua según la altitud, el tiempo récord en la prueba de los cien metros planos en la historia de los juegos olímpicos modernos, entre muchos otros.

Algunos modelos son más confiables que otros. Los fenómenos determinísticos, como la energía potencial que tiene un balón a 10 metros sobre el nivel del suelo, se pueden expresar prácticamente libres de error mediante una función cuya validez ya ha sido comprobada científicamente. Los fenómenos aleatorios, como el comportamiento de la economía en nuestro país durante los próximos 20 años, dependen de decisiones humanas que no siempre son predecibles. En consecuencia la modelación de este tipo de fenómenos es más compleja.

Una técnica para modelar consiste en recabar datos sobre las variables que intervienen en un fenómeno, graficarlos y comparar la tendencia de los puntos con las de una función conocida, aplicando las transformaciones adecuadas.

Así, para predecir el peso que tendrá un bebé al cumplir ocho meses de edad se puede usar un modelo lineal (transformaciones de la función identidad) mientras que para predecir cuántos millones de habitantes seremos en el planeta para el año 2030 se usan transformaciones de la función exponencial, que dan lugar a un modelo conocido como logístico.

En la gráfica se muestra el modelo de crecimiento de Von Bertalanffy (1901-1972), biólogo austriaco fundador de la teoría general de sistemas. La curva es el resultado de varias transformaciones sobre la gráfica de una función exponencial. Por medio de ella se puede estimar la talla de un pez (eje y) como función de su edad (eje x).



En la actualidad se utiliza software especializado para graficar datos aislados (diagramas de dispersión) y ajustarlos a transformaciones de funciones.

Reflexiona con tus compañeros y responde.

» ¿Qué relevancia tendrá un modelo matemático para predecir la población mundial en el futuro? ¿Qué otras situaciones se pueden modelar a partir de la graficación de datos de la vida real? ¿Se podría desarrollar un modelo matemático para medir la emoción que se siente al escuchar una nueva pieza musical?

Razonamiento lógico

Las dos mechas

Se dispone de dos mechas, cada una de las cuales tarda una hora en consumirse completamente. Esto quiere decir que, una vez que se le prendió fuego por cualquiera de sus extremos, la mecha se termina exactamente en una hora. Además, ambas mechas no se consumen al mismo ritmo.

¿Cómo se pueden medir 45 min de tiempo, usando únicamente estas dos mechas?

Autoevaluación

Descripción	Valoración		
	Siempre	A veces	Nunca
Determino el dominio, recorrido, monotonía y comportamiento de funciones (1)			
Construyo gráficas de funciones a partir de tablas (2)			
Identifico los máximos y mínimos dadas ciertas condiciones de la función (3)			
Resuelvo problemas mediante funciones de varios tipos (4 y 5)			

2

Función exponencial y logarítmica

Bloque: Números y funciones.

El análisis y el estudio de la función exponencial sirven para describir cualquier proceso que evolucione de modo que el aumento o disminución en un pequeño intervalo de tiempo sea proporcional a lo que había al comienzo del mismo. Por ejemplo: el crecimiento de poblaciones, el interés del dinero acumulado o el proceso de la desintegración radioactiva.

¿Qué sabes?

En el módulo anterior aprendiste a identificar a una función, obtener su dominio, recorrido y también a encontrar la función inversa de una función uno a uno. Sabes además resolver ecuaciones de primer y de segundo grado. Ahora vamos a ampliar nuestro conocimiento al estudio de las funciones exponenciales y logarítmicas.

¿Qué aprenderás?

- **Aprenderás** sobre la función exponencial su gráfica, dominio y recorrido
- **Conocerás** la función logarítmica como la función inversa de la exponencial
- **Aplicarás** las propiedades fundamentales de los logaritmos
- **Resolverás** ecuaciones e inecuaciones exponenciales y logarítmicas

El Buen Vivir

Sexualidad con responsabilidad

Según la página web del INEC, en Ecuador se contabilizan más de 15 millones de habitantes, cifra que va en aumento. Uno de los factores de este crecimiento es el embarazo en las jóvenes, cuya tasa es de 23%, una de las más altas de la región; mientras que a escala mundial, el 25% de los más de 7 000 millones de habitantes proviene de partos de adolescentes.

En la actualidad existen adolescentes que llegan a esta etapa con falta de información sobre el tema, es hora de que la sexualidad deje de ser manejada como un tabú o algo misterioso.

- ¿Qué significa la tasa de crecimiento en embarazos de jóvenes?
- ¿Qué implicaciones tiene un embarazo durante la adolescencia?

Fuente: http://hechoschimborazo.com/index.php/546-segun-la-pagina-web-del-inec-en-ecuador-se-contabilizan-mas-de-15-millones-de-habitantes (Adaptación)

Iniciemos

Activación de conocimientos previos

Un pueblo tiene 600 habitantes y su población crece anualmente un 3%. ¿Cuántos habitantes habrá al cabo de 8 años?

Recuerda: el crecimiento vegetativo de una población viene dado por la diferencia entre nacimientos y defunciones. Si *Po* es la población inicial, *i* es el índice de crecimiento al cabo *t* años, entonces la nueva población es: $P = Po.(1 + i)^t$

Objetivos educativos del módulo

- Identificar, formular y resolver problemas que se modelan utilizando una función exponencial o logarítmica.
- Utilizar diferentes representaciones de funciones exponenciales y logarítmicas: tabla, gráfica y relación matemática.
- Estudiar el comportamiento local y global de funciones (de una variable) exponenciales y logarítmicas a través del análisis de su dominio, recorrido, monotonía, simetría, extremos, asíntotas, intersecciones con los ejes y sus ceros.
- Utilizar TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación)
  - Para graficar funciones exponenciales y logarítmicas.
  - Para analizar las características geométricas de funciones exponenciales y logarítmicas.

Función exponencial

Determinar el comportamiento local y global de las funciones exponenciales.

Sabemos que $2^2 = 4$ y $2^3 = 8$. Sin hacer uso de la calculadora, ¿cuánto estimas que valga $2^{2,5}$? Usa la calculadora para obtener el valor. Reflexiona qué tan buena fue tu estimación respecto al valor real.

Muchos fenómenos tienen un comportamiento semejante al de las funciones exponenciales, antes de adentrarnos en su estudio repasaremos algunos conceptos previos.

Exponentes

Aprendimos a usar los exponentes enteros, positivos y negativos, daremos un repaso a todos y definiremos los exponentes fraccionarios e irracionales.

Exponentes enteros

- Si a es cualquier número real y n es un número natural, entonces la **enésima potencia** de a se define como se muestra a continuación.

$$\underbrace{a^n = (a)(a)...(a)}_{n \text{ factores}}$$

- Si además $a \neq 0$, entonces:

$$a^0 = 1,$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Por ejemplo: $(-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125$; $\left(\frac{3\pi}{4}\right)^0 = 1$; $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Para definir los exponentes fraccionarios, es necesario hacer uso de los radicales.

Raíz enésima

- Si n es cualquier entero positivo, entonces la raíz enésima de a $(\sqrt[n]{a})$ es un número b tal que $b^n = a$.

Notemos que las raíces impares están definidas para todos los números reales, pero las raíces pares sólo están definidas para números positivos. Así, tenemos que $\sqrt[4]{81} = 3$ pues $3^4 = 81$; y $\sqrt[3]{-216} = -6$ pues $(-6)^3 = 216$.

Veamos a continuación cómo interpretar expresiones como $a^{\frac{3}{5}}$.

Ten en cuenta

No se escribe el índice en el caso de la raíz cuadrada.

$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

Exponentes fraccionarios

- Si $n > 0$, entonces definimos $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.
- En general, para cualquier racional $\frac{m}{n}$, escrito en forma simplificada, con m y n enteros, y $n > 0$, definimos $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ o, equivalentemente, $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$.
- Si n es par, entonces a necesariamente debe ser positiva.

Es decir, la potencia $\frac{m}{n}$ de a es la enésima raíz de la emésima potencia de a. Así, según esta definición:

$$4^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{4^3} = \sqrt{64} = 8; \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Notemos que si un número racional está expresado en forma decimal, por ejemplo 1,3, entonces $a^{1,3} = a^{\frac{13}{10}} = \sqrt[10]{a^{13}}$. Si $a > 0$.

Finalmente, para el caso de los exponentes irracionales, ¿cómo calculamos el valor de $3^{\sqrt{2}}$? Sabemos que $\sqrt{2}$ es irracional y que tiene una representación decimal infinita.

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562...$$

Consideremos la sucesión de números que se aproxima a $\sqrt{2}$ al agregar cifras de su expansión decimal.

$$\{1,\ 1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414,\ 1{,}4142,\ 1{,}41421,\ 1{,}414213...\}$$

Formemos otra sucesión a partir de la anterior.

$$\{3^1,\ 3^{1{,}4},\ 3^{1{,}41},\ 3^{1{,}414},\ 3^{1{,}4142},\ 3^{1{,}41421},\ 3^{1{,}414213}...\}$$

Sabemos cómo calcular cada número de esta sucesión, pues el exponente de cada término es un número racional. Mediante técnicas de cálculo, se demuestra que existe un único número real al cual se aproximan cada vez más los números de la sucesión. Definimos dicho número como $3^{\sqrt{2}}$. Usemos esta idea para aproximar el valor de $3^{\sqrt{2}}$ a seis decimales.

$$3^{\sqrt{2}} = 4{,}728804$$

De manera análoga se define a^y si y es cualquier número irracional. Si $a > 0$.

Las leyes que conocemos de los exponentes son válidas para cualquier exponente real.

Utiliza las TIC

Puedes usar cualquier calculadora científica para determianar la potencia de una base, basta usar la tecla [^] y poner el exponente al que hay que elevar la base.

Leyes de los exponentes

1. $a^m a^n = a^{m+n}$ **2.** $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ **3.** $(a^m)^n = a^{mn}$ **4.** $(ab)^n = a^n b^n$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ **6.** $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ **7.** $\frac{a^{-n}}{b^{m-n}} = \frac{b^m}{a^n}$

Ejemplo 1

Usa las leyes de los exponentes para evaluar o simplificar las expresiones.

a) $125^{\frac{-1}{3}}$

$$125^{\frac{-1}{3}} = \frac{1}{125^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{1}{125^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}$$

b) $\left(9x^{\frac{2}{3}}y^{-6}\right)^{\frac{-1}{2}}$

$$\left(9x^{\frac{2}{3}}\ y^{-6}\right)^{\frac{-1}{2}} = \left(\frac{1}{9x^{\frac{2}{3}}y^{-6}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{\left(9x^{\frac{2}{3}}\ y^{-6}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}\ x^{\frac{1}{3}}\ y^{-3}}$$

$$\frac{1}{9^{\frac{1}{2}}\ x^{\frac{1}{3}}\ y^{-3}} = \frac{y^3}{3\sqrt[3]{x}}$$

c) $\sqrt[4]{a^{\frac{1}{2}} + 15a^{\frac{1}{2}}}$

$$\sqrt[4]{16a^{\frac{1}{2}}}$$

$$(16a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}$$

$$(16)^{\frac{1}{4}}\ (a)^{\frac{1}{8}}$$

$$2 \cdot a^{\frac{1}{8}}$$

d) $\left(\frac{4^{\pi}}{2^2}\right)^3$

$$\left(\frac{4^{\pi}}{2^2}\right)^3 = \left(\frac{4^{\pi}}{4}\right)^3$$

$$\left(\frac{4^{\pi}}{4}\right)^3 = (4^{\pi-1})^3$$

$$(4^{\pi-1})^3 = 4^{3(\pi-1)} \approx 7380{,}77$$

e) Encuentra el valor de *m*.

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{16} = 2^m$$

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{16} = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{2^4}$$

$$\frac{2^{\frac{1}{3}}}{2^4} = 2^{-\frac{11}{3}}$$

$$m = -\frac{11}{3}$$

f) Encuentra el valor de *n*.

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = x^n$$

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = \left(x\left(xx^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(x\left(xx^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(x\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(xx^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(xx^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(x^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{7}{8}}$$

$$n = \frac{7}{8}$$

Función exponencial

Hasta aquí hemos visto expresiones de la forma a^n donde la base es una variable y el exponente, un número fijo. Si intercambiamos estos papeles, es decir, dejamos fija a la base y variamos el exponente, obtenemos una función exponencial, cuyo estudio resulta importante para la resolución de diversos problemas.

Sabías que...

En los enunciados de Euclides aparece un enunciado que hace referencia a los exponentes.
En la Edad Media, en el siglo XIV, Nicolle Oresme demuestra todas las reglas necesarias para trabajar con exponentes positivos.
Un siglo después N. Choquet retoma este trabajo y agrega los exponentes negativos.
Es en esta época cuando se trabajan con mayor fuerza las funciones exponenciales.
Este trabajo lo completa el matemático alemán Michael Stiefel, en el Siglo XVI sobre exponentes racionales.

Función exponencial

Si $a > 0$ y diferente de 1, entonces la **función exponencial de base a** se define como $f(x) = a^x$, donde x es cualquier número real.

Por ejemplo las funciones $f(x) = 2^x$, $g(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^x$ y $h(x) = (2{,}35)^x$ son funciones exponenciales, mientras que $f(x) = x^2$, $g(x) = x^{\frac{2}{7}}$ y $h(x) = x^{2{,}35}$ no lo son.

La función $f(x) = a^x$ tiene diferente comportamiento según sea $0 < a < 1$.

Ejemplo 2

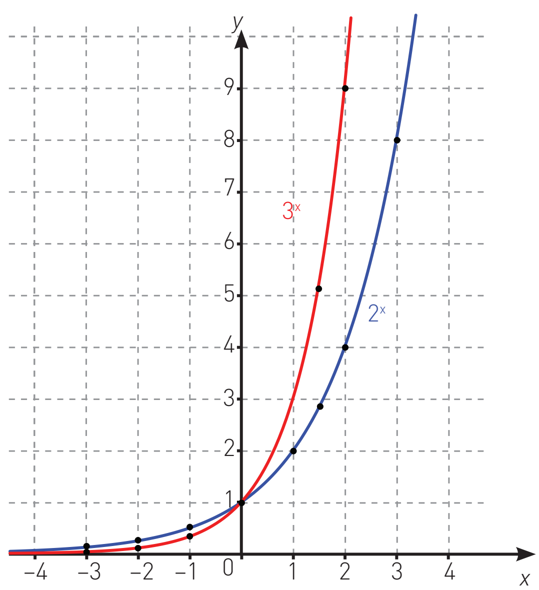
Grafica las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 3^x$ en un mismo plano.

Tabulamos para distintos valores de x y graficamos.

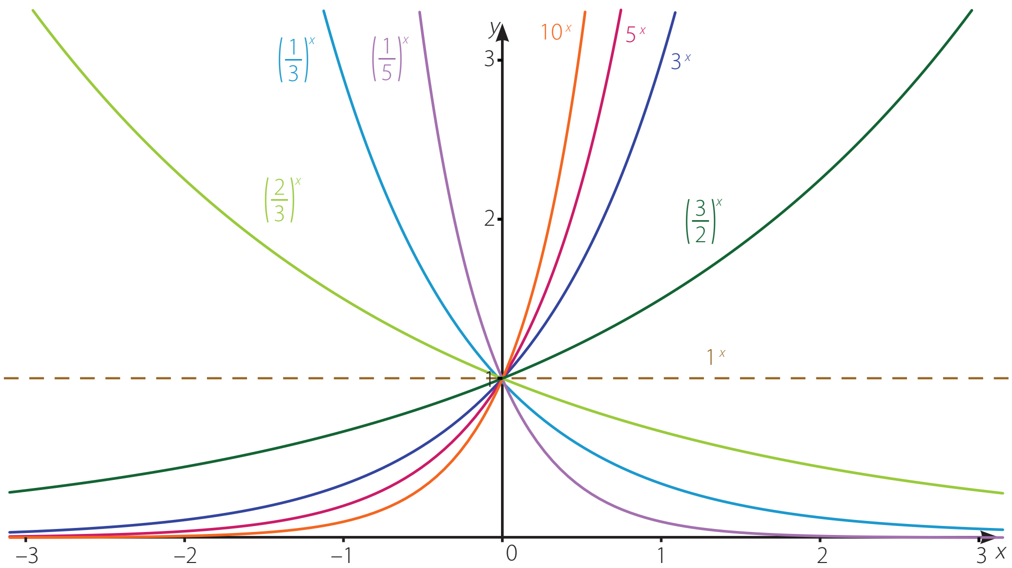
La gráfica hace evidente que a medida que x aumenta, los valores de 2^x y 3^x también lo hacen. Conforme x disminuye, los valores de las funciones se aproximan cada vez más a 0.

También apreciamos que la función 3^x crece más rápidamente que 2^x, esto se refleja en que la gráfica de 3^x se pega más al eje **y** que la gráfica de 2^x.

x	2^x	3^x
-3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{27}$
-2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
0	1	1
1	2	3
$\frac{3}{2}$	2,83	5.2
2	4	9
3	8	27



A continuación se muestran las gráficas de una familia de funciones $f(x) = ax$ para diferentes valores de a; a partir de estas se concluye la información del recuadro.



Características de la función exponencial a^x

- El dominio de la función $f(x) = a^x$ es el intervalo $(-\infty, \infty)$.
- $f(x) > 0$ para todo x, es decir, el rango de la función es el conjunto $(0, \infty)$.
- No cruza al eje x, corta al eje y en el punto $(0, 1)$ y pasa por el punto $(1, a)$.
- Si $a > 1$, la función siempre es creciente; si $0 < a < 1$, la función es siempre decreciente.
- La función crece más rápido si a es cada vez mayor y decrece más rápido conforme a es menor.

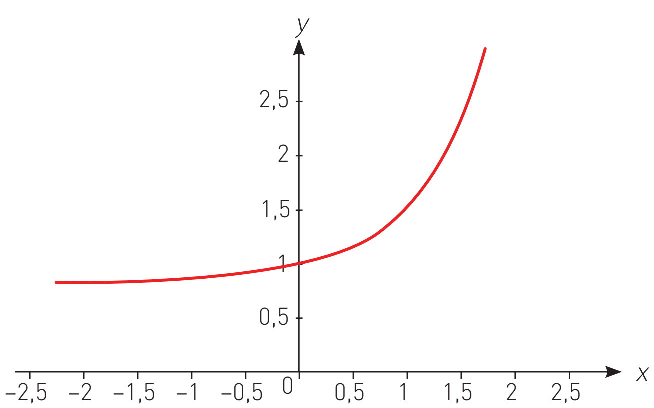
Ten en cuenta

- El punto $(0, 1)$ pertenece a todas las gráficas, esto sucede porque $a^0 = 1$ para $a \neq 0$.
- Si la base es $a = 1$, se obtiene la función constante $y = 1$.

Actividad resuelta

1. Estudia y representa la función $f(x) = 4^x$

x	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
y	0,031125	0,0625	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16	32



Es una función exponencial de base a = 4.

El dominio es los reales. ℝ.

El recorrido es $(0, +\infty)$

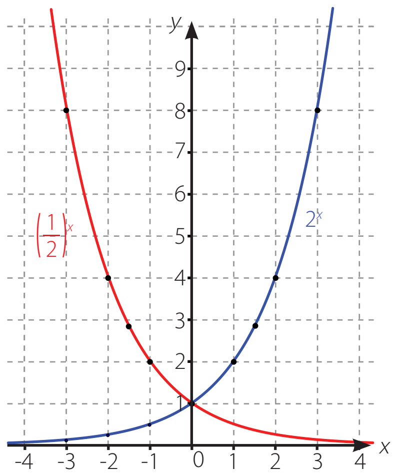
Es una función creciente.

La función es continua en los reales ℝ.

Actividad resuelta

2. Grafica la función $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

En este caso también localizaríamos los puntos en el plano y los uniríamos, pero optamos por obtener la gráfica a partir de la función de 2^x, ya que $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$.



Entonces, la gráfica de $h(x) = 2^{-x}$ es una reflexión respecto al eje y de la gráfica de $f(x) = 2^x$.

Actividades propuestas

Usa las leyes de los exponentes para evaluar o simplificar las siguientes expresiones.

3. $(2^4 2^2)^2$

4. $5^{\frac{1}{2}}\, 25^{\frac{1}{4}}$

5. $\left(\frac{25}{64}\right)^{\frac{3}{2}}$

6. $\dfrac{(x^3y^2)^4\,(x^4\,y)^{-3}}{xy^2}$

7. Encuentra el valor de m. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} = 2^m$

8. Encuentra los primeros cinco términos de la sucesión que se aproxima a 5^{π}.

Traza la gráfica de las funciones exponenciales.

9. $f(x) = 4^x$

10. $g(x) = 8^x$

11. $\left(\frac{1}{5}\right)^x$

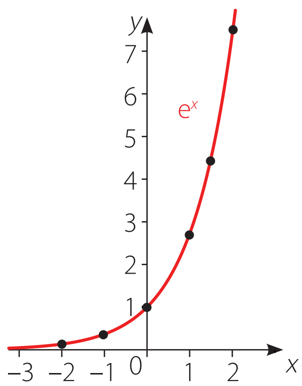
Función exponencial natural e^x y más gráficas

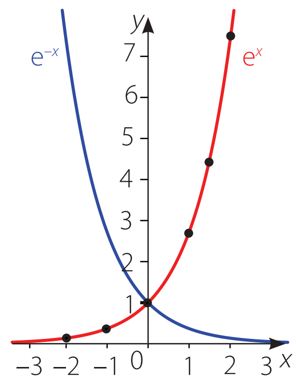
Cualquier número no negativo se puede usar como base para una función exponencial. Sin embargo uno de los más utilizados es el número irracional *e* (constante de Euler), cuyo valor aproximado a 14 decimales es $e = 2{,}71828182845905$.

La función exponencial natural es la función exponencial con base *e*: $f(x) = e^x$.

Tracemos la gráfica de $f(x) = e^x$ y $g(x) = e^{-x}$ y tabulemos para la primera gráfica.

x	e^x
-2	0,13
-1	0,37
1	2,72
1,5	4,48
2	7,39
2,2	9,03





Una vez trazada la gráfica de e^x, reflejamos en el eje *y* para obtener la de $y = e^{-x}$.

Ejemplo 1

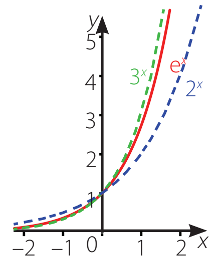
Usa la calculadora para evaluar la función $f(x) = e^x$ en cada caso.

a) $f(5)$
$e^5 \approx 148{,}41316$

b) $2f(\frac{1}{4})$
$2e^{0{,}25} \approx 2{,}56805$

c) $f(-0{,}48)$
$e^{-0{,}48} \approx 0{,}61878$

Ten en cuenta



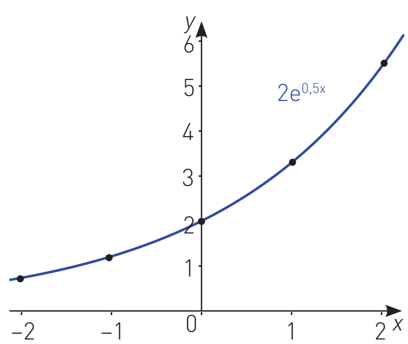
Como $2 < e < 3$, la gráfica de e^x está entre las funciones 2^x y 3^x.

Actividad resuelta

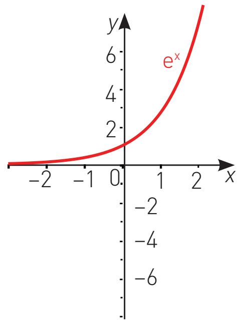
Traza la gráfica de $f(x)$.

a) $f(x) = 2e^{0{,}5x}$

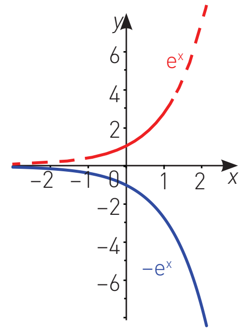
x	$f(x) = 2e^{0{,}5x}$
–2	0,74
–1	1,21
0	2
1	3,3
2	5,44



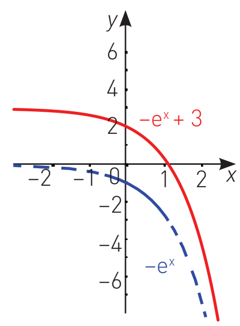
b) $f(x) = -e^x + 3$



Partimos de la gráfica de e^x.



Reflejamos sobre el eje x para obtener la gráfica de $-e^x$.



Finalmente la desplazamos hacia arriba tres unidades.

Actividades propuestas

Consolida

Calcula o simplifica.

1. $\left(-\dfrac{27}{8}\right)^{2/3}$

2. $\left(\dfrac{x^4y^3}{xy^2}\right)\left(\dfrac{y^2}{x^3}\right)$

3. e^{-3}

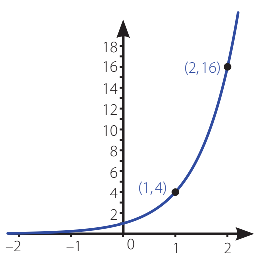
4. $\left(-\dfrac{2a^{1/3}}{a^{1/2}\,b^{1/6}}\right)^4$

5. $\left(\dfrac{3a^{-2}b^{2/3}}{8b^{1/3}}\right)^2$

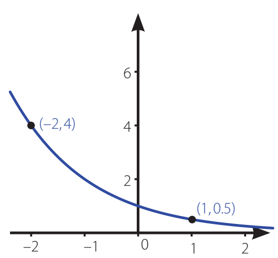
6. $3e^{-1/2}$

Identifica cuál es la función de cada gráfica.

7.



8.



Evalúa cada función para $x = 2.7$, $x = -3$, $x = \frac{1}{3}$, $x = e$, $x = \frac{1}{6}$.

9. $f(x) = 5^x$

10. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

11. $f(x) = -e^x$

12. $f(x) = e^{2x}$

Traza la gráfica de las siguientes funciones exponenciales

13. $f(x) = 8^x$

14. $g(x) = 6^x$

15. $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

16. $r(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

17. $f(x) = (0{,}7)^x$

18. $f(x) = (2{,}3)^x$

19. $f(x) = 2e^x$

20. $g(x) = 0{,}3e^x$

Grafica usando transformaciones de otras gráficas.

21. $h(x) = -8^{-x}$

22. $g(x) = 6^x - 4$

23. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-4}$

24. $s(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-x} + 5$

25. $f(x) = 1 - e^x$

26 $h(x) = -e^{x+3} - 4$

Aplica lo aprendido.

27. El número de bacterias (millones), en un cultivo en el tiempo t (horas), está dado por $f(t) = 20e^{\frac{t}{3}}$. ¿Cuál es la población en dos horas? ¿Cuál era la población al inicio del experimento?

Grafica las siguientes funciones.

28. $f(x) = 4e^{-x}$

29. $h(x) = e^{(x+3)}$

30. $g(x) = \dfrac{1}{2}\,e^{-x}$

Función logaritmo como inversa de la exponencial

Determinar el comportamiento local y global de las funciones logarítmicas a través de sus caracteristicas

Otro tipo de funciones que aparecen con mucha frecuencia en el momento de modelar fenómenos es el de las funciones logarítmicas. Analicemos su estudio.

Toda función exponencial de la forma $f(x) = a^x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$ es una relación biyectiva de $R \rightarrow (0, +\infty)$. Es fácil convencernos de eso mediante el criterio de la recta horizontal, visto anteriormente. De tal manera que la inversa de una función exponencial es también una función.

Función logaritmo

Una función logarítmica es la inversa de una función exponencial. Sea $a > 0$ y $a \neq 1$, la **función logaritmo con base a**, que denotamos por $\log_a$ se define como

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x.$$

Indagamos

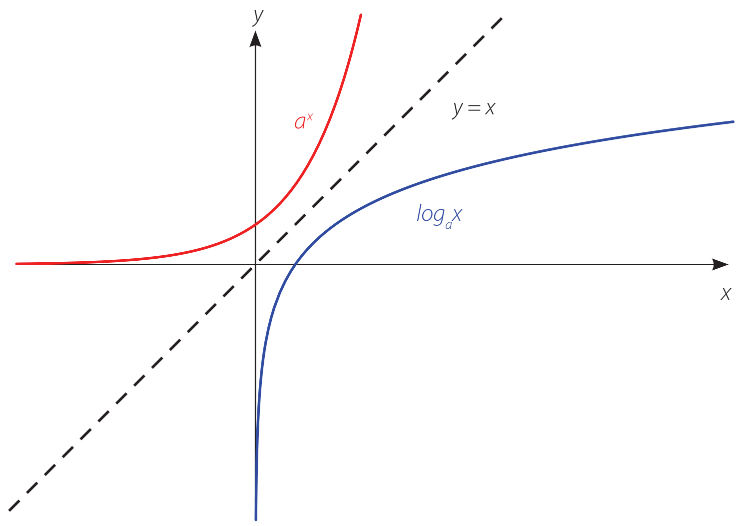
Encuentra el valor del exponente *n* que satisfaga cada ecuación.

$2^n = 16 \rightarrow n =$ _______;

$\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{27} \rightarrow n =$ _______;

$5^n = 25 \rightarrow n =$ _______

En consecuencia, $\log_a x$ es el **exponente** al cual hay que elevar la base *a* para obtener *x*. En el bloque 2, aprendimos cómo obtener la gráfica de la función inversa de otra función. De acuerdo con eso, la gráfica de una función logarítmica es una reflexión de $y = a^x$ respecto a la recta $y = x$.



Recordemos también que una función f y su inversa f^{-1} intercambian dominio y rango. Así, dado que una función exponencial $f(x) = a^x$ con $a > 0$ y $a \neq 1$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $\mathbb{R}^+$, su inversa, la función $f^{-1}(x) = \log_a x$, tiene dominio $\mathbb{R}^+$ y rango $\mathbb{R}^+$, como se aprecia en la gráfica. El rango de la función inversa debe ser igual al dominio de $f(x)$.

Sabías que...

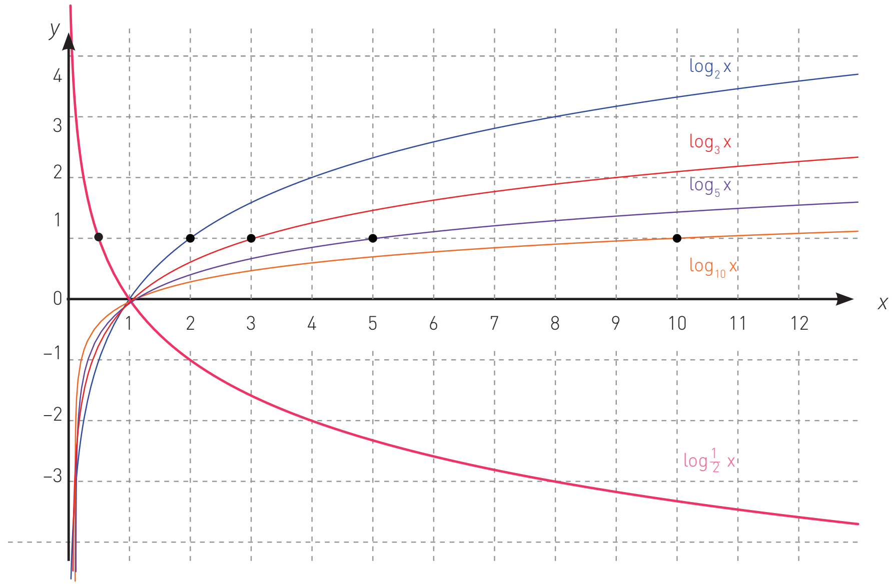
Inventor de los logaritmos

John Napier (1550-1617) inventó los logaritmos para simplificar cálculos con cantidades grandes en astronomía. Dicho trabajo le llevó más de 20 años.

Características de la función logarítmica $\log_a x$

- El dominio de la función $f(x) = \log_a x$ es el intervalo $(0, \infty)$.
- El recorrido de la función es $Rec(f) = (-\infty, \infty)$.
- Pasa por el punto $(a, 1)$. Cruza el eje *x* en el punto $(1, 0)$; no corta al eje *y*.
- Siempre es creciente si $a > 1$; siempre es decreciente cuando $0 < a < 1$.
- La función crece más lentamente si *a* aumenta y decrece más lento conforme *a* disminuye.

La siguiente figura muestra las gráficas de funciones del tipo $f(x) = \log_a x$ para diferentes valores de *a*. Las características de estas funciones se resumen en el recuadro.



Características de la función logarítmica $\log_a x$

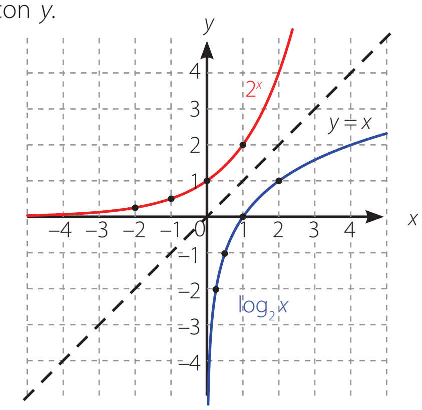
- El dominio de la función $f(x) = \log_a(x)$ es el intervalo $Dom(f) = (0, \infty)$.
- El recorrido de la función es $Rec(f) = (-\infty, \infty)$.
- Cruza el eje *x* en el punto (1, 0); no corta al eje y.
- Siempre es creciente si $a > 1$; siempre es decreciente cuando $0 < a < 1$.
- La función crece mas lentamente si *a* aumenta y decrece más lento conforme *a* disminuye.

Actividad resuelta

Grafica la función $f(x) = \log_2 x$.

1. De acuerdo con la definición, la ecuación $y = \log_2 x$ es equivalente a $x = 2^y$. Tabulamos valores para $y = 2^x$ y luego intercambiamos *x* con *y*.

$y = 2^x$		$x = 2^y$	
x	*y*	*x*	*y*
-2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	-2
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	-1
0	1	1	0
1	2	2	1
2	4	4	2



Actividades propuestas

Grafica las siguientes funciones logarítmicas: **2.** $f(x) = \log_4 x$ **3.** $f(x) = \log_6 x$

Relación entre las funciones logarítmicas y las exponenciales

Hemos visto que las funciones logarítmicas y las exponenciales son funciones inversas, por lo que cada ecuación en forma logarítmica tiene su equivalente en forma exponencial. Veamos cómo pasar de una forma a otra.

Ejemplo 1

Convierte las siguientes ecuaciones a su forma logarítmica.

a) $2^5 = 32$

$2^5 = 32 \Leftrightarrow 5 = \log_2 32$

b) $4^x = 64$

$4^x = 64 \Leftrightarrow x = \log_4 64$

c) $10^3 = 1\,000$

$10^3 = 1\,000 \Leftrightarrow 3 = \log_{10} 1\,000$

d) $y^{-1} = 6$

$y^{-1} = 6 \Leftrightarrow -1 = \log_y 6$

Ejemplo 2

Convierte las siguientes ecuaciones a su forma exponencial.

e) $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$

$\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3 \Leftrightarrow 2^{-3} = \frac{1}{8}$

f) $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$

$\log_{16} 4 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 16^{\frac{1}{2}} = 4$

g) $\log_5 9 = y$

$\log_5 9 = y \Leftrightarrow 5^y = 9$

h) $\log_a z = w$

$\log_a z = w \Leftrightarrow a^w = z$

Ten en cuenta

Equivalencia

Forma logarítmica

Exponente

$\log_a x = y$

Base

Forma exponencial

Exponente

$a^y = x$

Base

La base y el exponente son el mismo.

Logaritmos comunes y naturales

Las funciones logarítmicas más usadas son las de base 10 y base *e*. La primera es relevante por tener la misma base que nuestro sistema de numeración.

Logaritmo común

La función logaritmo con base 10 se llama **logaritmo** común y se denota por **log x**.

$$\log x = \log_{10} x$$

Ten en cuenta

Notación

$\log x = \log_{10} x$

Es decir, se omite la base.

El número *e* es otra base muy usada para funciones logarítmicas.

Logaritmo natural

La función logaritmo con base *e* se conoce como **logaritmo natural** y se denota por **ln x**.

$$\ln x = \log_e x$$

Notemos que por la definición tenemos que $\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$.

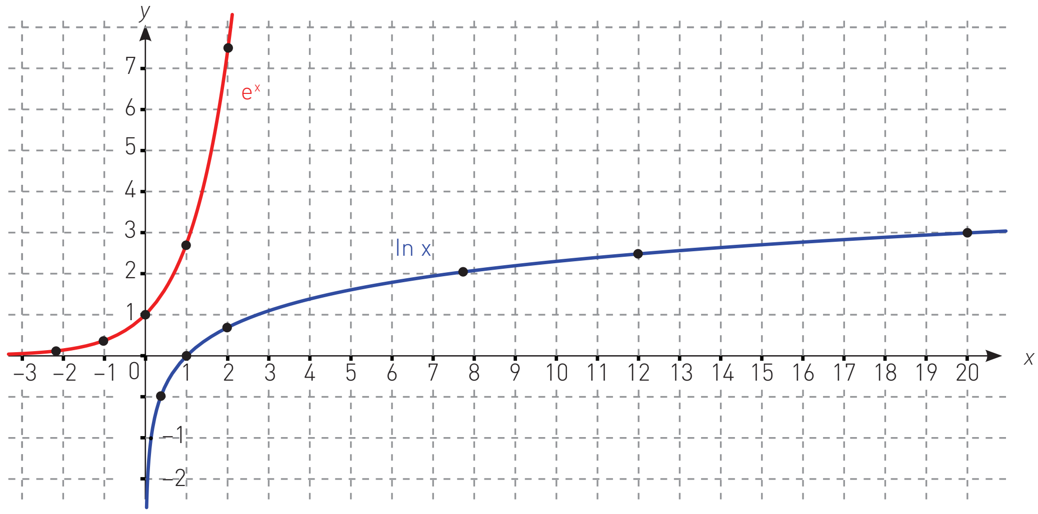
Ejemplo 3

i) Grafica en un mismo plano cartesiano las funciones e^x, ln x.

Usamos calculadora para elaborar las tablas.

y = e^x	
x	*y*
–2	0,14
–1	0,37
0	1
1	2,72
2	7,39

y = ln x	
x	*y*
0,14	–2
0,37	–1
1	0
2,72	1
7,39	2
12	2,48
20	3



Ejemplo 4

Simplifica las siguientes expresiones.

j) $\log_a a^x$

Sea $f(x) = a^x$, entonces $f^{-1}(x) = \log_a x$. Sabemos que cualesquiera dos funciones inversas cumplen que $f^{-1}(f(x)) = x$, por tanto,

$f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$.

k) $\log_3 3^7$

De acuerdo con el ejercicio anterior, $\log_3 3^7 = 7$ y a partir de la definición de logaritmo se verifica la igualdad anterior, pues $\log_3 3^7 = 7 \Leftrightarrow 3^7 = 3^7$.

l) $5^{\log_5 2}$

En este caso como $f(f^{-1}(x)) = x$, entonces $5^{\log_5 2} = 2$.

Sabías que...

Los logaritmos se inventaron alrededor de 1590 por John Napier, era un lord escocés, de carácter muy reservado cuyos vecinos pensaban que tenía un pacto con el diablo. Su enfoque de los logaritmos era muy diferente al nuestro; se basaba en la relación entre secuencias aritméticas y geométricas y no en la actual como función inversa (recíproca) de las funciones exponenciales. La tablas de Napier, publicadas en 1614, contenían los llamados logaritmos naturales y eran algo difíciles de usar.

Para todo número positivo $a \neq 1$, se tiene que

$$a^{\log_a x} = x; \qquad \log_a a^x = x.$$

Transformaciones de funciones logarítmicas

Veamos cómo obtener nuevas gráficas de funciones a partir de las gráficas que ya conocemos.

Ejemplo 5

m) Grafica la función $y = -\log_3(-x)$

Algunas calculadoras carecen de una tecla $\log_3$, partimos de la definición.

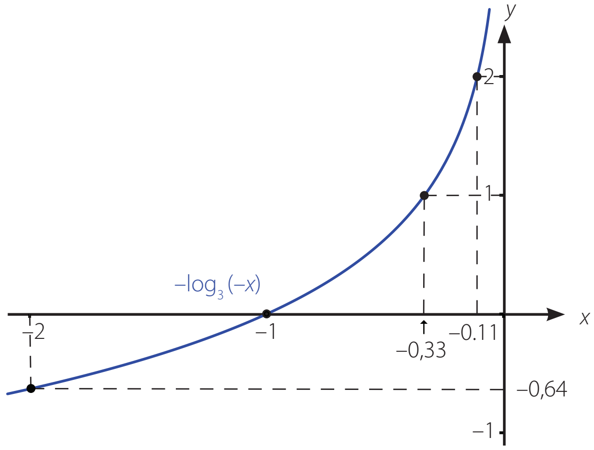
Notemos que $y = -\log_3(-x) \rightarrow -y = \log_3(-x) \rightarrow -x = 3^{-y} \rightarrow x = -\left(\frac{1}{3}\right)^y$.

$y = -2 \rightarrow x = -\frac{1}{3^{-2}} = -3^2 = -9$ $\qquad$ $y = 1 \rightarrow x = -\frac{1}{3^1} = -0{,}33$

$y = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{3^{-1}} = -3^1 = -3$ $\qquad$ $y = 2 \rightarrow x = -\frac{1}{3^2} = -0{,}11$

$y = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{3^0} = -1$

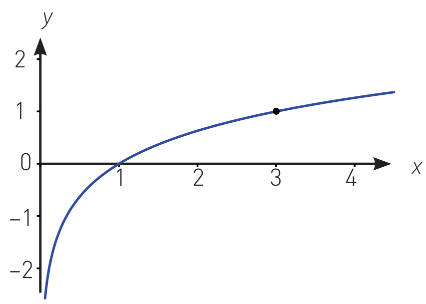
$y = -\log_3(-x)$	
x	y
–9	–2
–3	–1
–2	–0,64
–1	0
–0,33	1
–0,11	2



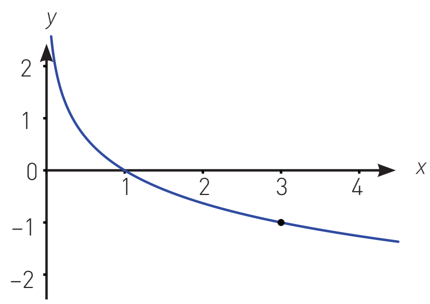
Las inversas de las funciones exponenciales se llaman **funciones logarítmicas**. Como la notación f^{-1}se utiliza para denotar una función inversa, entonces se utiliza otra notación para este tipo de inversas. Si $f(x) = b^x$, en lugar de usar la notación $f^{-1}(x)$, se escribe $\mathbf{\log_b (x)}$ para la inversa de la función con base b. Leemos la notación $\log_b(x)$ como el "**logaritmo de x con base b**", y llamamos a la expresión $\log_b(x)$ un **logaritmo**.

Actividad resuelta

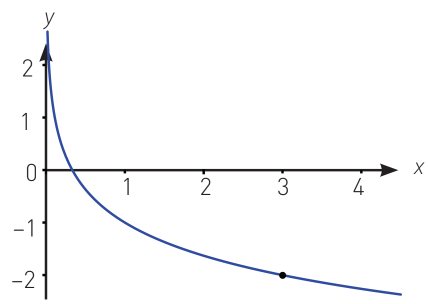
1. Grafica la función $f(x) = (-\log_3 x) - 1$.



Comenzamos con la gráfica de la función $\log_3 x$.



La reflejamos en el eje *y*.

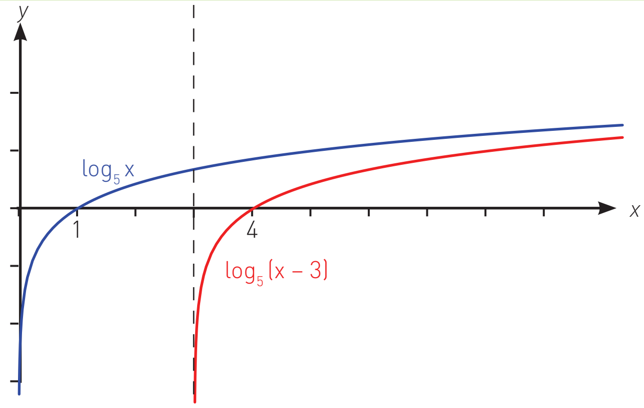


La desplazamos hacia abajo una unidad.

Actividad resuelta

2. Grafica la función $f(x) = \log_5 (x - 2)$.

Trazamos la gráfica de la función $g(x) = \log_5 x$ y la desplazamos tres unidades a la derecha.



Actividades propuestas

Convierte, según el caso, de la forma logarítmica a la exponencial o viceversa.

3. $\log_{10} 0,1 = -1$ **4.** $3^x = 81$ **5.** $\log_{\sqrt{3}} 3 = 2$ **6.** $x^0 = 1$

Traza la gráfica de las siguientes funciones.

7. $f(x) = \log_2 (-x)$ **8.** $g(x) = \log_{10} (x + 2) - 3$

Consolida

Grafica las siguientes funciones.

9. $\log_7 x$ **10.** $\log_9 x$ **11.** $\log_{\frac{1}{3}} x$ **12.** $\log_{\frac{1}{4}} x$

13. $\log_{1,4} x$ **14.** $\log_{3,7} x$ **15.** $\log_{12} x$ **16.** $\log_8 x$

Pasa la ecuación de logarítmica a exponencial o viceversa.

17. $e^5 = 148,41$ **18.** $e^{-4} = 0,018$ **19.** $e^{\frac{1}{3}} = 1,396$ **20.** $e^{-\frac{1}{2}} = 0,607$

21. $125^{\frac{1}{3}} = 5$ **22.** $81_{\frac{1}{4}} = 3$ **23.** $\log_7 49 = 2$ **24.** $\log_5 625 = 4$

25. $\log_{10} 0,01 = -2$ **26.** $\log_6 0,0046 = -3$ **27.** $\ln 0,0498 = -3$ **28.** $\log_5 0,2 = -1$

Simplifica las siguientes expresiones.

29. $\log 1000$ **30.** $\log 0,00001$ **31.** $\ln e^7$ **32.** $\ln e^{\frac{1}{4}}$

33. $10^{\log_5}$ **34.** $8^{\log_8 25}$ **35.** $e^{\ln y}$ **36.** $e^{\ln x^2}$

37. $\log_4 64$ **38.** $\log_2 32^{\log_2 32}$ **39.** $9^{\log_9 3x}$ **40.** $e^{\ln (3x - 2)}$

Grafica las siguientes funciones.

41. $f(x) = 3 \log_2 x$ **42.** $g(x) = 2 \log_5 x$ **43.** $f(x) = -\log_4 x$ **44.** $g(x) = 8 - \log_6 x$

45. $h(x) = \log (x - 7)$ **46.** $r(s) = -\log_3 (x + 4) - 2$ **47.** $f(t) = 12 - \log_6 (t - 1)$ **48.** $g(w) = \log_5 (x + 4) - 5$

Resuelve las siguientes ecuaciones.

49. $\log_8 x = \frac{1}{3}$ **50.** $\log_{25} x = \frac{1}{2}$

51. Si una sustancia radiactiva se desintegra según la fórmula $s(t) = e^{-5t}$, ¿en cuánto tiempo habrá la tercera parte de la cantidad inicial?

Leyes de los logaritmos

Como los logaritmos son exponentes, las leyes de los exponentes son la base para las leyes de los logaritmos.

Sea a un número positivo con $a \neq 1$. Sean $x > 0$, $y > 0$ y c números reales cualesquiera, entonces

1. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

2. $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

3. $\log_a x^c = c(\log_a x)$

Utiliza las TIC

Las calculadoras científicas tienen la tecla log para calcular el logaritmo en base diez de un número real positivo.

Para justificar la primera ley, supongamos que $\log_a x = u$ y $\log_a y = v$. Escribimos ambas ecuaciones en forma exponencial $x = a^u$; $y = a^v$, por tanto:

$$\begin{aligned} \log_a (xy) &= \log_a (a^u a^v) \\ &= \log_a (a^{u+v}) \\ &= u + v \\ &= \log_a x + \log_a y \end{aligned}$$

Las otras leyes se demuestran de manera similar. Veamos cómo usarlas.

Ejemplo 1

Si $\log_2 5 \approx 2{,}32$, aproxima el valor de las siguientes expresiones.

a) $\log_2 10$

$\log_2 10 = \log_2 (2 \cdot 5)$

$\log_2 (2 \cdot 5) = \log_2 2 + \log_2 5$

$\log_2 2 + \log_2 5 \approx 1 + 2{,}32 = 3.32$

b) $\log_2 \sqrt{5}$

$\log_2 \sqrt{5} = \log_2 5^{\frac{1}{2}}$

$\log_2 5^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right) \log_2 5$

$\left(\frac{1}{2}\right) \log_2 5 \approx 1{,}16$

Ejemplo 2

Usa las leyes de los logaritmos para evaluar las siguientes expresiones.

c) $\log_2 (4 \cdot 8)$

$\log_2 (4 \cdot 8) = \log_2 4 + \log_2 8$

$\log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$

d) $\log_3 \frac{9}{243}$

$\log_3 \frac{9}{243} = \log_3 9 - \log_3 243$

$\log_3 9 - \log_3 243 = 2 - 5 = -3$

e) $\log_5 125^2$

$\log_5 125^2 = 2\log_5 125$

$2\log_5 125 = 2 \cdot 3 = 6$

f) $\log \sqrt[3]{121}$

$\log \sqrt[3]{121} = \log 121^{\frac{1}{3}}$

$\log 121^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log 121 \approx 0{,}6943$

Sabías que...

Uso de los logaritmos en la tasa de crecimiento. Un caso de uso de los logaritmos es por ejemplo, si conoces la tasa de crecimiento promedio de una población, y quieres saber cuántos años tardará en llegar a cierta cantidad (por ejemplo duplicarse) necesitas el logaritmo. Para que entiendas este ejemplo, dada una población (base) y otra cantidad a la que hay que llegar (potencia), cuántas veces hay que aplicar la tasa de crecimiento (exponente) para llegar a esa cantidad; lo que necesitas obtener es el exponente, por lo que usas logaritmos.

Ejemplo 3

Reescribe como un único logaritmo y evalúa las siguientes expresiones.

g) $\log_4 21 + \log_4 5$

$\log_4 21 + \log_4 5 = \log_4 (21 \cdot 5)$

$\log_4 (21 \cdot 5) = \log_4 105$

h) $\log_6 36 - \log_6 216$

$\log_6 36 - \log_6 216 = \log_6 \left(\frac{36}{216}\right)$

$\log_6 \left(\frac{36}{216}\right) = \log_6 \left(\frac{1}{6}\right) = -1$

i) $3\log_5 \left(\frac{1}{7}\right)$

$3\log_5 \left(\frac{1}{7}\right) = \log_5 \left(\frac{1}{7}\right)^3$

$\log_5 \left(\frac{1}{7}\right)^3 = \log_5 \left(\frac{1}{343}\right)$

j) $\frac{1}{4}\log_3 16$

$\frac{1}{4}\log_3 16 = \log_3 (16)^{\frac{1}{4}}$

$\log_3 (16)^{\frac{1}{4}} = \log_3 \sqrt[4]{16}$

$\log_3 \sqrt[4]{16} = \log_3 2$

Ejemplo 4

Expresa, en términos de logaritmos de x, y, z, las siguientes expresiones.

k) $\log_7 (x^4\, y^6)$

$\log_7(x^4\, y^6) = \log_7 x^4 + \log_7 y^6$

$\log_7 x^4 + \log_7 y^6 = 4\log_7 x + 6\log_7 y$

l) $\log_9 \sqrt[4]{x^3 y^2}$

$\log_9 \sqrt[4]{x^3 y^2} = \frac{1}{4} \log_9 x^3\, y^2$

$\frac{1}{4} \log_9 x^3\, y^2 = \frac{1}{4} (\log_9 x^3 + \log_9 y^2)$

$\frac{1}{4} (\log_9 x^3 + \log_9 y^2) = \frac{3}{4} \log_9 x + \frac{1}{2} \log_9 y$

m) $\ln \left(\frac{xy^2}{\sqrt[5]{z}}\right)$

$\ln \left(\frac{xy^2}{\sqrt[5]{z}}\right) = \ln xy^2 - \ln \sqrt[5]{z}$

$\ln xy^2 - \ln \sqrt[5]{z} = \ln x + \ln y^2 - \frac{1}{5} \ln z$

$\ln x + \ln y^2 - \frac{1}{5} \ln z = \ln x + 2\ln y - \frac{1}{5} \ln z$

n) $\log_a \left(\sqrt[6]{\frac{xy}{z^5}}\right)$

$\log_a \left(\sqrt[6]{\frac{xy}{z^5}}\right) = \frac{1}{6} \log_a \frac{xy}{z^5}$

$= \frac{1}{6} (\log_a xy - \log_a z^5)$

$= \frac{1}{6} (\log_a x + \log_a y - 5 \log_a z)$

Ejemplo 5

Escribe como un solo logaritmo las siguientes expresiones.

o) $5 \ln x + \frac{1}{2} \ln (x + 3)$

$5 \ln x + \frac{1}{2} \ln (x + 3) = \ln x^5 + \ln \sqrt{x + 3}$

$\ln x^5 + \ln \sqrt{x + 3} = \ln (x^5 \sqrt{x + 3})$

p) $\frac{1}{3}\log_a x - 4\log_a y - \log_a z$

$\frac{1}{3}\log_a x - 4\log_a y - \log_a z = \log_a \sqrt[3]{x} - (\log_a y^4 + \log_a z)$

$\log_a \sqrt[3]{x} - (\log_a y^4 + \log_a z) = \log_a \sqrt[3]{x} - \log_a y^4 z$

$\log_a \sqrt[3]{x} - \log_a y^4 z = \log_a \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{y^4 z}\right)$

q) $3\ln x + \frac{2}{3}\ln y - 5\ln(y^2+1)$

$3\ln x + \frac{2}{3}\ln y - 5\ln(y^2+1) = \ln x^3 + \ln \sqrt[3]{y^2} - \ln(y^2+1)^5$

$\ln x^3 + \ln \sqrt[3]{y^2} - \ln(y^2+1)^5 = \ln\left(x^3\sqrt[3]{y^2}\right) - \ln(y^2+1)^5$

$\ln(x^3\sqrt[3]{y^2}) - \ln(y^2+1)^5 = \ln\left(\frac{x^3\sqrt[3]{y^2}}{(y^2+1)^5}\right)$

Cambios de base

En ocasiones es útil cambiar logaritmos en una base, a logaritmos en otra base distinta. Supongamos que conocemos $\log_a x$, pero queremos calcular $\log_b x$. Llamemos u a este último logaritmo, es decir,

$u = \log_b x$	
$b^u = x$	Reescribimos la ecuación en forma exponencial.
$\log_a b^u = \log_a x$	Formamos una nueva ecuación con los logaritmos en base a de ambos miembros.
$u\log_a b = \log_a x$	Simplificamos con la ley para el logaritmo de potencias.
$u = \frac{\log_a x}{\log_a b}$	Despejamos u.

Fórmula de cambio de base

Para cualesquiera bases a y b, y cualquier número positivo x,

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Actividad resuelta

Calcula los siguientes logaritmos.

1. $\log_7 21$

$\log_7 21 = \frac{\log 21}{\log 7} \approx 1{,}5646$

2. $\log_5 8$

$\log_5 8 = \frac{\ln 8}{\ln 5} \approx 1{,}292$

Ten en cuenta

El logaritmo de una suma no es la suma de los logaritmos

$\log_a (x+y) \neq \log_a x + \log_a y$.

Por ejemplo,

$\log_2 8 + \log_2 8$

$= 3 + 3 = 6$,

pero $\log_2 (8+8)$

$= \log_2 16 = 4$.

Simplificación incorrecta de un cociente

$\frac{\log_a x}{\log_a y} \neq \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$

Por ejemplo,

$\frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{3}{2}$, pero

$\log_3\left(\frac{27}{9}\right) = \log_3 3 = 1$

Un caso particular de la fórmula de cambio de base se presenta entre los logaritmos naturales y comunes, así tenemos

$$\ln a = \frac{\log a}{\log e}; \qquad \log A = \frac{\ln A}{\ln 10}$$

Ten en cuenta

Las calculadoras científicas sólo calculan logaritmos comunes y naturales; por ello, para calcular logaritmos con distinta base, cambiamos la base a 10 o *e*, y usamos log o ln.

Actividad resuelta

3. Si $\log 270 \approx 2{,}4314$, calcula $\ln 270$.

Como $\log e \approx 0{,}4343$, usamos la fórmula de cambio de base para ln y log, y obtenemos:

$$\ln 270 = \log \frac{270}{\log e} \approx \frac{2{,}4314}{0{,}4343} \approx 5{,}5984$$

Actividades propuestas

Considerando que $\log_7 4 \approx 0{,}71$, aproxima el valor de las siguientes expresiones.

4. $\log_7 28$

5. $\log_7 16$

Usa las propiedades de los logaritmos para evaluar las siguientes expresiones.

6. $\log_3 (9 \cdot 81)$

7. $\frac{1}{2} \log_8 (37)$

8. $(3 \log 5) - 4 \log 3$

Expresa, en términos de logaritmos de *x*, *y*, *z*, las siguientes expresiones.

9. $\log_a x^7 \sqrt[5]{y^2}$

10. $\log \left(\frac{\sqrt{x^3 y}}{z^3} \right)$

11. $\ln \left(\sqrt{x^5 y^{11}} \right)$

Expresa como un solo logaritmo y simplifica las siguientes expresiones.

12. $8 \log_a x + \frac{1}{3} \log_a (x - 5)$

13. $2 \log x - 4 \log y + \frac{1}{3} \log (x - 1)$

Encuentra los siguientes logaritmos.

14. $\log_{12} 1\,000$

15. $\log_{\frac{1}{2}} 18$

16. Considera que $\ln 902 = 6{,}8$ y aproxima el valor de $\log 902$

Ecuaciones exponenciales

Estas ecuaciones se resuelven usando leyes de exponentes o de logaritmos. Una ecuación exponencial es aquella en la cual la incógnita aparece en el exponente, es decir, contiene términos como a^x.

Ejemplo 1

Resuelve las ecuaciones para x.

a) $4^{x-1} = 64$

$4^{x-1} = 64 \Leftrightarrow$

$4^{x-1} = 4^3 \Leftrightarrow x - 1 = 3$

$\Leftrightarrow x = 4$

b) $8^{x+4} = 32^{x-2}$

$8^{x+4} = 32^{x-2} \Leftrightarrow$

$(2^3)^{x+4} = (2^5)^{x-2} \Leftrightarrow$

$3x + 12 = 5x - 10 \Leftrightarrow$

$22 = 2x \Leftrightarrow x = 11$

Ten en cuenta

Si $a \neq 0$,
$a^u = a^v \Leftrightarrow u = v$

Un método para resolver ecuaciones exponenciales

1. Reescribir la ecuación para que uno de sus lados tenga una única expresión exponencial con la variable como parte del exponente.
2. Formar una nueva ecuación cuyos miembros izquierdo y derecho sean los logaritmos de los respectivos miembros de la ecuación anterior.
3. Usar las leyes de los logaritmos para bajar el exponente.
4. Despejar la incógnita.

Ejemplo 2

Resuelve las siguientes ecuaciones para x.

c) $5^{x+3} = 11$

$\log(5^{x+3}) = \log 11$

$(x + 3) \log 5 = \log 11$

$x + 3 = \frac{\log 11}{\log 5}$

$x \approx 1{,}4899 - 3$

$x \approx -1{,}5101$

d) $4e^{3x} = 30$

$e^{3x} = 7{,}5$

$3x = \ln 7{,}5$

$x = \frac{\ln 7{,}5}{3}$

$x \approx 0{,}6716$

Ten en cuenta

Para reescribir la ecuación en la forma $a^u = a^v$, usamos las leyes de los logaritmos.

e) $e^{2x} + 3e^x - 10 = 0$

$(e^x)^2 + 3e^x - 10 = 0$

$(e^x - 2)(e^x + 5) = 0$

$e^x - 2 = 0$ $\qquad$ $e^x + 5 = 0$

$e^x = 2$ $\qquad$ $e^x = -5$

$x = \ln 2$ $\qquad$ sin solución

Solución única: $x = \ln 2 \approx 0{,}6931$.

f) $4^x = 5^{2x+1}$

$\log(4^x) = \log(5^{2x+1})$

$x \log 4 = (2x + 1)\log 5$

$0{,}602x = (2x + 1)(0{,}699)$

$0{,}602x = 1{,}398x + 0{,}699$

$-0{,}796x = 0{,}699$

$x = 0{,}878$

Ecuaciones logarítmicas

En las ecuaciones logarítmicas la variable aparece dentro del argumento de un logaritmo. Para resolverlas, las convertimos en ecuaciones exponenciales equivalentes.

Ejemplo 3

g) Resuelve, para x, la ecuación $\log_3 (2x - 5) = 2$.

Formamos una ecuación exponencial con la base del logaritmo

$\log_3 (2x - 5) = 2$; $3^{\log_3 (2x-5)} = 3^2$ (forma exponencial) $2x - 5 = 9$ $x = 7$

Para comprobar la solución, sustituimos el valor de x en el lado izquierdo de la ecuación original.

$\log_3 (2x - 5) = \log_3 (2(7) - 5) = \log_3 (14 - 5) = \log_3 9 = 2$

Cómo resolver ecuaciones logarítmicas

1. Obtener una única expresión logarítmica de un lado de la igualdad.

2. Escribir la ecuación como su equivalente en forma exponencial.

3. Despejar la variable.

Ten en cuenta

Un principio fundamental para resolver ecuaciones logarítmicas es $a^{\log_a u} = u$

Ejemplo 4

Resuelve las ecuaciones para x.

h) $\log_8 (x + 4) + \log_8 (x - 3) = 1$

$$\log_8 (x + 4) + \log_8 (x - 3) = 1$$
$$\log_8 (x + 4)(x - 3) = 1$$
$$(x + 4)(x - 3) = 8^1$$
$$x^2 + x - 12 = 8$$
$$x^2 + x - 20 = 0$$
$$(x - 4)(x + 5) = 0$$

Aunque la última ecuación tiene dos soluciones, $x_1 = 4$ y $x_2 = -5$, la única solución para la ecuación original es $x = 4$, pues $\log_8 (-5 -3)$ no está definido.

Ten en cuenta

No existen logaritmos de números negativos.

i) $\log (x^3 - 8x^2 + 25) - \log x = 1$

$$\log (x^3 - 8x^2 + 25) - \log x = 1$$
$$\log \left(\frac{x^3 - 8x^2 + 25}{x}\right) = 1$$
$$\log (x^2 - 8x + 25) = 1$$
$$x^2 - 8x + 25 = 10^1$$
$$x^2 - 8x + 15 = 0$$
$$(x - 3)(x - 5) = 0$$

Hay dos soluciones: $x_1 = 3$; $x_2 = 5$

j) $\log_2 x - \log_8 x = 6$

$\log_2 x - \log_8 x = 6$

pero como $\log_8 x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 8} = \dfrac{\log_2 x}{3}$

entonces, $\log_2 x - \dfrac{1}{3} \log_2 x = 6$

$\dfrac{2}{3} \log_2 x = 6$

$\log_2 x = 9$

$x = 2^9 = 512$

k) $\log_3 (\log_5 x^2) = 1$

$\log_3 (\log_5 x^2) = 1$

$\log_5 x^2 = 3^1$

$x^2 = 5^3 = 125$

$x = \pm \sqrt{125}$

$x_1 = \sqrt{125}$; $x_2 = -\sqrt{125}$

$x_1 \approx 11{,}18$; $x_2 \approx -11{,}18$

Ten en cuenta

En el ejemplo **j)** es necesario cambiar de base para obtener un único logaritmo.

Actividad resuelta

1. Resuelve la ecuación para x

$$\log_6 x + \frac{\log_6 216}{\log_6 x} = \frac{7}{2}$$

$$\log_6 x + \frac{\log_6 216}{\log_6 x} = \frac{7}{2} (\log_6 x)^2 - \frac{7}{2} \log_6 x + \log_6 216 = 0$$

$$2 (\log_6 x)^2 - 7 \log_6 x + 6 = 0$$

Hacemos un cambio de variable, sea $u = \log_6 x$

entonces $2u^2 - 7u + 6 = 0$

Al resolver la ecuación de segundo grado obtenemos

$u_1 = 2$; $u_2 = \dfrac{3}{2}$

Al sustituir u tenemos que $\log_6 x = 2$ $x_1 = 36$ y $\log_6 x = \dfrac{3}{2}$ $x_2 = \sqrt{6^3} \approx 14{,}7$

Actividades propuestas

Consolida

Considera que $\log_6 3 \approx 0{,}61$, para calcular lo siguiente.

1. $\log_6 18$ **2.** $\log_6 2$ **3.** $\log_6 27$ **4.** $\log_6 \sqrt[4]{3}$

Evalúa las siguientes expresiones.

5. $\log_6 8 + \log_5 9$ **6.** $\log_7 30 - \log_7 5$ **7.** $\log_2 \sqrt{2} + \log_3 \sqrt[3]{3^4}$ **8.** $\log_7 49 - \log_2 16$

9. $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{2}$ **10.** $\log_3 \sqrt[3]{729}$

Expresa en términos de logaritmos de x, y, z.

11. $\log_{\frac{1}{3}} x^5 \sqrt[3]{z}$ **12.** $\log_a z^3 \sqrt[4]{x^3 y}$ **13.** $\log_5 (x^5 y)^3$ **14.** $\sqrt[5]{\dfrac{x-2}{x+1}}$

15. $\log_a \left(\dfrac{z}{x^4 \sqrt[3]{z^2 - 1}} \right)$ **16.** $\log \sqrt{\dfrac{x^2+3}{(x^2+1)(x^3-5)^2}}$

Usa la fórmula de cambio de base para evaluar los logaritmos.

17. $\log_5 120$ **18.** $\log_{12} 690$ **19.** $\log_{\frac{1}{4}} 34$ **20.** $\log_7 60$

Expresa como un solo logaritmo y simplifica.

21. $\log_4 6 + 3 \log_4 3$ **22.** $3 \ln x - 2 \ln y$ **23.** $\log (x+y) + \log (x-y) - 3 \log z$

24. $\dfrac{1}{2} \log_5 49 - \dfrac{1}{3} \log_5 8 + 13 \log_5 1$ **25.** $\ln \left(\dfrac{x}{y} \right) + \ln \dfrac{1}{y^4} - 2 \ln x^3$

26. $\dfrac{1}{3} \ln (2x+1) + \dfrac{1}{2} [\ln (x-4) - \log (x^4 - x^2 - 1)]$

Resuelve las siguientes ecuaciones.

27. $e^{3x+1} = 260$ **28.** $4^{2x+3} = 64$ **29.** $4^{x-2} = 16^{x+2}$ **30.** $9^{x-3} = 27^{x+1}$

31. $2^{x^2+2x} = \dfrac{1}{2}$ **32.** $2^x + 2^{x+3} = 144$ **33.** $3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x = \dfrac{13}{9}$ **34.** $3^{2x} - 4(3^{x+1}) = -27$

35. $3^x = 5^{x+2}$ **36.** $7^{3x} = 9^{2x-1}$ **37.** $4^{x+1} = 5^x$ **38.** $2^{3x+1} = 3^{x-2}$

39. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ **40.** $e^{4x} + 4e^{2x} - 21 = 0$ **41.** $\log_5 4x = 2$ **42.** $\log_3 5x = 4$

43. $\log x + \log (x-3) = 1$ **44.** $\log x + \log (x+9) = 1$ **45.** $\log_9 (x+1) - \log_9 (x+1) = 2$

46. $\log_3 (4x-5) - \log_3 (2x+1) = 0$ **47.** $\ln (10+x) = \ln (3+4x)$

48. $\log x = 1 + \log \sqrt{x}$ **49.** $\log_3 (9x-5) = \log_3 (5x-7)$

50. $\log_2 (\log_3 x) = 2$ **51.** $\log_7 (\log_5 x) = 1$ **52.** $\log x^2 + \log x^3 + \log x^4 - \log x^6 = \log 16$

53. $\log_2 (x-3) - \log_2 (2x+1) = -\log_2 4$ **54.** $3 \log_2 x - 2 \log_4 x = 2$

55. $5^{2x+1} - 3(25^{2x-1}) = 550$ **56.** $\dfrac{2^x + 2^{-x}}{2} = \dfrac{5}{4}$

57. $\dfrac{50}{1+e^{-x}} = 4$ **58.** $\dfrac{\log_2 8^x}{\log_2 \frac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$ **59.** $2 (\log_2 x)^2 - 10 \log_2 x + 8 = 0$

60. La velocidad de un paracaidista t segundos después de saltar, está dada por $v(t) = 80(e^{-0.2t-1})$ ¿Después de cuántos segundos la velocidad es 90 m/s?

Inecuaciones exponenciales y logarítmicas

Se llaman inecuaciones exponenciales a aquellas que contienen la incógnita en el exponente y se denominan inecuaciones logarítmicas a aquellas que contienen la incógnita bajo el signo del logaritmo.

En la mayoría de los casos estas desigualdades se reducen a inecuaciones algebraicas.

Ejemplo 1

a) Resuelve la desigualdad:

$3^{3x-2} > 3^{x-5}$

$3x - 2 > x - 5$

$3x - x > -5 + 2$

$2x > -3$

$x > \frac{-3}{2}$

La solución de la inecuación es: $\left[-\frac{3}{2}, \infty\right]$

Ejemplo 2

b) Resuelve la desigualdad:

$\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-5} > \frac{1}{27}$

$\frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-5} > \left(\frac{1}{3}\right)^{3}$

Invertimos el sentido de la desigualdad: $4x - 5 < 3$ $\quad 4x < 8$ $\quad x < 2$

La solución de la desigualdad es: $]-\infty, 2[$

Ejemplo 3

c) Resuelve la desigualdad:

$\left(2^2\right)^x - 3 \cdot 2^x + 2 > 0$

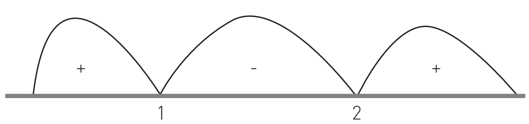
$(2^x)^2 - 3(2^x) + 2 > 0$

Si $u = 2^x$; entonces

$u^2 - 3u + 2 > 0$

$(u - 2)(u - 1) > 0$

Resolvemos la desigualdad por regiones



$u < 1$ o $u > 2$

$2^x < 1$ ó $2^x > 2$

$\log_2 2^x < \log_2 1$ ó $2^x > 2$

$\log_2 2^x < 0$ ó $x > 1$

$x < 0$ ó $x > 1$

La solución de la desigualdad es: $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$

Ten en cuenta

Para una base mayor que 1 se mantiene el sentido de las desigualdades en los exponentes.
Para una base menor que 1 se invierte el sentido de las desigualdades en los exponentes.

ACTIVIDAD RESUELTA

1. Resuelve la inecuación: $\log_5(2x + 1) < \log_5(8)$

Como el logaritmo está dado para números positivos se tiene:

$2x + 1 > 0$

Para cualquier base mayor que 1, se conserva el sentido de la desigualdad, entonces:

$2x + 1 < 8$

El sistema que debemos resolver es:
$2x + 1 > 0$ y $2x + 1 < 8$

- $2x + 1 > 0$; $x > -1/2$
- $2x + 1 < 8$; $x < 7/2$

La solución de la inecuación logarítmica es la intersección de las dos soluciones:

$$\left] -\frac{1}{2}, \frac{7}{2} \right[$$

2. Resuelve la siguiente inecuación logarítmica:

$\ln(2x-1)+ \ln(x+1) < 0$

Para resolver este ejercicio primero determinemos el dominio de $y = \ln(2x-1)$,

Entonces $x > 1/2$, por lo tanto el dominio es $(1/2,+\infty)$,

Y para $y = \ln(x+1)$, tenemos $x > -1$, por lo tanto su dominio es $(-1, +\infty)$

Hacemos una intersección y obtenemos el intervalo de la solución $(1/2,+\infty)$.

Ahora procedemos a resolver la inecuación

$\ln(2x-1) + \ln(x+1) > 0$

Aplicando propiedades de logaritmos $\ln a + \ln b = \ln(a\cdot b)$

$\ln(2x-1)(x+1) > 0$

Ahora transformamos a notación exponencial, el sentido de la inecuación no cambia ya que la función exponencial es creciente. $e^{(2x-1)(x+1)} > e^0$

$(2x - 1)(x + 1) > 1$ $\quad 2x^2 + x - 1 > 1$ $\quad 2x^2 + x > 2$ $\quad 2x^2 + x - 2 > 0$

Entonces tenemos que $(x - 0,78)(x + 1,28) > 0$

Haciendo la intersección nos queda $(x > 2) \vee (x < 1/2)$

Resolviendo la inecuación queda: (- infinito, -1,28] U [0,78, + infinito)

ACTIVIDADES PROPUESTAS

Resolver las siguientes inecuaciones.

3. $e^{(6x-1)} > 1$

4. $\ln\left(\frac{(x-1)}{(x+1)}\right) \leq 0$

5. $(2)^{-6} > 3^{-3} \cdot 3^x$

6. $2^{3x+5} > 4^{2x+4}$

7. $9^x - 2.3^x < 3$

8. $\log_2(2x+5) < 2$

9. $\log_3(5x+4) < \log_3 27$

El sistema de la forma: $\begin{cases} 2^x + 3^y = 5 \\ 2^{x+1} - 3^y = 7 \end{cases}$ es un sistema de ecuaciones exponenciales.

Ten en cuenta

Los números negativos no tienen logaritmos reales sino complejos.

Los sistemas de ecuaciones exponenciales están formados por un conjunto de ecuaciones, alguna de las cuales es exponencial.

Para resolver este tipo de sistemas resulta útil cambiar las incógnitas para transformar el sistema en uno más sencillo que pueda resolverse por sustitución o reducción.

En este caso, si $u = 2^x$ y $v = 3^y$, entonces:

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ 2u - v = 7 \end{cases}$$

La solución del sistema es: $u = 4$, $v = 1$

Deshaciendo el cambio:

$$\begin{cases} u = 2^x = 4 \Rightarrow x = 2 \\ v = 3^y = 1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Sistemas de ecuaciones logarítmicas

Los sistemas de ecuaciones logarítmicas están formados por un conjunto de ecuaciones, alguna de las cuales es logarítmica.

Los números que intervienen en logaritmos deben ser positivos.

Para resolver estos sistemas se utilizan los mismos métodos que se aplican a los sistemas de ecuaciones lineales y las propiedades de los logaritmos.

Actividades resueltas

1. Resuelve el sistema: $\begin{cases} 3 \cdot 5^x + 2 \cdot 6^{y+1} = 807 \\ 15 \cdot 5^{x-1} - 6^y = 339 \end{cases}$

Solución:

1. Se factorizan las potencias. $\begin{cases} 3 \cdot 5^x + 12 \cdot 6^y = 807 \\ 3 \cdot 5^x - 6^y = 339 \end{cases}$
2. Se hace el cambio de variable. $u = 5^x$, $v = 6^y$
3. El sistema resultante es $\begin{cases} 3u + 12v = 807 \\ 3u - v = 339 \end{cases}$
4. Se restan las ecuaciones. $13v = 468$
5. Se divide entre 13. $v = 36 = 6^y$
6. Resolviendo. $y = 2$
7. Se sustituye en la segunda. $3u - 36 = 339$
8. Se opera. $u = 125 = 5^x$
9. Se resuelve. $x = 3$

2. Resuelve el sistema de ecuaciones logarítmicas: $\begin{cases} 2\log x - 3\log y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$

Solución:

Se aplica el método de reducción.

$$\begin{array}{r} 2\log x - 3\log y = 7 \\ \underline{2\log x + 2\log y = 2} \\ -5\log y = 5 \Rightarrow \log y = -1 \Rightarrow y = 0.1 \end{array}$$

Si $\log y = -1$, entonces se sustituye en la segunda ecuación:

$$\log x - 1 = 1 \Rightarrow \log x = 2 \Rightarrow x = 100$$

Actividad resuelta

3. Resuelve el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} \log(2x-4)+\log y=2 \\ 4x=y-9 \end{cases}$

Solución:

Se escribe la primera ecuación en forma algebraica. $\log(2x-4)+\log y=2 \Rightarrow \log[(2x-4)y]=2 \Rightarrow (2x-4)y=100$

Ahora se resuelve por sustitución el sistema obtenido.

$$\begin{cases} (2x-4)y=100 \\ 4x=y-9 \end{cases} \Rightarrow y=4x+9 \Rightarrow (2x-4)(4x+9)=100 \Rightarrow 4x^2+x-68=0$$

De esta ecuación se obtienen estas dos soluciones: $\begin{cases} x=4 \Rightarrow y=25 \\ x=-\dfrac{17}{4} \Rightarrow y=-8 \end{cases}$

La segunda debemos desecharla, porque no satisface la ecuación logarítmica inicial; de hecho, no se puede calcular el logaritmo real de un número negativo.

4. Resuelve el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x-y=21 \\ \log x+\log y=2 \end{cases}$

Solución:

Se aplican las propiedades de los logaritmos para que las dos ecuaciones del sistema sean algebraicas.

$$\begin{cases} x-y=21 \\ \log x+\log y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=21 \\ \log(x\cdot y)=\log 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=21 \\ x\cdot y=100 \end{cases}$$

Se resuelve el sistema de segundo grado obtenido.

$$y=x-21 \Rightarrow x(x-21)=100 \Rightarrow x^2-21x-100=0 \Rightarrow \begin{cases} x=25 \\ x=-4 \end{cases}$$

La solución $x=-4$ no es válida ya que no existen los logaritmos reales de números negativos.

Si $x=25$, entonces: $y=4$

Actividades propuestas

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones exponenciales.

5. $\begin{cases} 2^x+5^y=9 \\ 2^{x+2}+5^{y+1}=4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3^x+7^y=16 \\ 3^{x-1}-7^{y+2}=-340 \end{cases}$

Resuelve las siguientes ecuaciones.

7. $3^{x+4}+2\cdot 3^{x-1}=2{,}205$

8. $7^{x+2}-7^{x+1}+7^x-43=0$

9. $5^{x+1}+5^x+5^{x-2}=151$

Resuelve estas ecuaciones:

11. $5^{2x+1}+9\cdot 5^x-2=0$

12. $9^x-2\cdot 3^{x+2}+81=0$

13. $7^{2x+3}-8\cdot 7^{x+1}+1=0$

14. $4^x-3\cdot 2^{x+1}+8=0$

15. Resuelve el sistema: $\begin{cases} 2^x+5^y=9 \\ 2^{x+2}+5^{y+1}=41 \end{cases}$

Resuelve los siguientes sistemas.

16. $\begin{cases} \log x+3\log y=5 \\ \log x-\log y=3 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x+2y=64 \\ \log x-\log y=1 \end{cases}$

18. Encuentra la solución del siguiente sistema de ecuaciones logarítmicas. $\begin{cases} x+y=70 \\ \log x+\log y=3 \end{cases}$

Resuelve los siguientes sistemas.

19. $\begin{cases} \log x+\log y=3 \\ \log x-\log y=1 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2\log x-3\log y=7 \\ \log x+\log y=1 \end{cases}$

Resuelve los siguientes sistemas.

21. $\begin{cases} \log x+5\log y=7 \\ \log\dfrac{x}{y}=1 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2\log x+\log y=5 \\ \log xy=4 \end{cases}$

23. Se sabe que la suma de dos números es 502 y que la suma de sus logaritmos decimales es 3. Halla dichos números.

Encuentra las soluciones de estos sistemas:

24. $\begin{cases} 2^x-5^y=3 \\ 4\cdot 2^x-5\cdot 5^y=7 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2^{x+1}-3^{y+1}=-1 \\ 2^{x+1}+8\cdot 3^y=32 \end{cases}$

26. $\begin{cases} \log x^3+\log y=6 \\ \log(xy)=4 \end{cases}$

27. $\begin{cases} \log x^2=2-2\log y \\ \log\left(\dfrac{x}{y}\right)=-1 \end{cases}$

Un automóvil que costó \$12 500, pierde 13,5% de su valor cada año. Calcula su valor dentro de 1, 2, 3, 4 y 5 años. ¿Puedes establecer una expresión para el valor del carro en el año n?

Las funciones exponenciales resultan muy efectivas para la representación de fenómenos biológicos, financieros o químicos, de crecimiento o decrecimiento a través del tiempo.

Biología: crecimiento de poblaciones

Mediante la experimentación, los biólogos y otros científicos han comprobado que la población de algunas especies tiene crecimiento exponencial.

Ejemplo 1

a) En condiciones ideales una población de cierta bacteria duplica su tamaño cada hora. Si el cultivo inicia con 500 bacterias, determina una expresión para el número de bacterias $n(t)$ después de t horas.

Si el cultivo inicia con 500 bacterias, entonces $n(0) = 500$; después de una hora tendremos 1 000 bacterias, luego de dos horas, 2 000, y así sucesivamente.

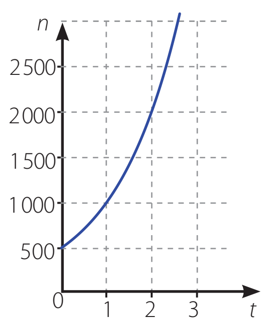
$n(0) = 500$

$n(1) = 500 \cdot 2$

$n(2) = (500 \cdot 2) \cdot 2 = 500(2^2)$

$n(3) = (500 \cdot 2^2) \cdot 2 = 500(2^3)$

$n(4) = (500 \cdot 2^3) \cdot 2 = 500(2^4)$



Concluimos que el número de bacterias después de t horas es $n(t) = 500(2^t)$.

Ejemplo 2

b) ¿Cuántas bacterias habrá después de cuatro horas y media?

Evaluamos la función anterior en 4,5: $n(4{,}5) = 500(2^{4{,}5}) \approx 11\,314$.

En general, para medir el crecimiento poblacional se usa como base el número e y el modelo es la expresión $n(t) = Ce^{kt}$, donde k es la tasa relativa de crecimiento de la población para el tiempo t. Por ejemplo, si $k = 0{,}03$ y el tiempo t se mide en años, la tasa de crecimiento de la población es de 3% anual; es decir, la población aumenta 3% cada año.

El modelo exponencial es un modelo demográfico y ecológico para representar el crecimiento de las poblaciones y la difusión epidémica de un rasgo entre una población, basado en el crecimiento exponencial.

Ejemplo 3

Supón que una población experimental de moscas crece de manera exponencial. Si dos días después de iniciar el experimento hay 100 moscas y después de cuatro días, 300 moscas, ¿cuántas había originalmente?

Sea $n(t) = Ce^{kt}$ la cantidad de moscas en el tiempo t, donde t se mide en días. Como $n(2) = 100$ y $n(4) = 300$, entonces $100 = Ce^{2k}$ y $300 = Ce^{4k}$. Despejamos C en la primera ecuación: $C = 100e^{-2k}$. Sustituimos esta expresión de C en la segunda ecuación para obtener $300 = 100e^{-2k}e^{4k}$, resolvemos para k y obtenemos

$$k = \ln_{\frac{3}{2}} \approx 0{,}5493.$$

Así, el modelo de crecimiento exponencial es $y = Ce^{\ln_{\frac{3}{2}} t} \approx Ce^{0.5493t}$. Calculamos C a partir de la condición inicial $n(2) = 100$; $100 = Ce^{2\ln_{\frac{3}{2}}} = Ce^{\ln_3} = 3C \rightarrow C = \dfrac{100}{3} = 33{,}333333...$

Por consiguiente, la población original (cuando $t = 0$) constó de 33 moscas. Y por tanto, el modelo matemático para la población de moscas en el tiempo t es

$$n(t) = 33e^{0{,}5493t}.$$

Decaimiento radiactivo

Los elementos radiactivos tienen átomos inestables que, al perder energía, se transforman en átomos con características distintas a las de los originales (pueden ser estables o inestables); así, la cantidad de cualquier substancia radiactiva (número de átomos inestables) decrece con el tiempo. Este fenómeno se conoce como **decaimiento radiactivo**.

El modelo matemático del decaimiento radiactivo es semejante al del crecimiento poblacional, aunque en este caso la cantidad de materia radiactiva disminuye con el tiempo, mientras que en el caso del crecimiento poblacional la cantidad de individuos en la población aumenta con el tiempo. La función exponencial que asocia al tiempo (t) la cantidad restante de sustancia radiactiva (m) es

$$m(t) = m_0e^{-kt}.$$

donde k es la tasa de decaimiento ($k > 0$) y m_0 es la masa inicial.

La constante k de decaimiento de un elemento se calcula a partir de su vida media, es decir, el tiempo que se requiere para que se desintegre la mitad de los átomos radiactivos.

Sabías que...

Vida media de algunas sustancias radiactivas

Uranio U^{238}	4 510 000 000 años
Plutonio Pu^{239}	24360 años
Carbono C^{14}	5 730 años
Radio Ra^{226}	1620 años
Einstenio Es^{254}	270 días
Nobelio No^{257}	23 s

Ejemplo 4

Durante un accidente en una planta nuclear, se liberaron 10 g del isotopo de plutonio-239. ¿En cuánto tiempo quedará únicamente 1 g de material radiactivo?

Sea m la masa, en gramos, de plutonio-239 en el tiempo t; en este caso la masa inicial (m_0) es 10 g, trabajaremos con la función $m = m_0e^{-kt}$, donde t se mide en años, con el fin de determinar el tiempo necesario para que quede 1 g de sustancia radiactiva.

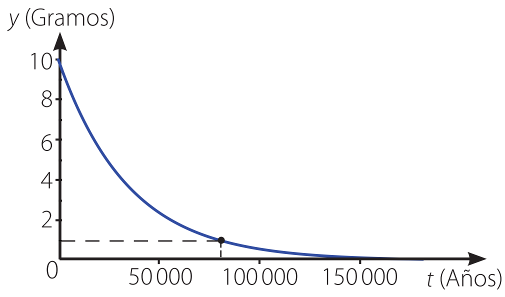
A partir de la vida media del plutonio, sabemos que $m = 5$ cuando $t = 24\,360$, entonces:

$5 = 10e^{k(24\,360)}$

$\frac{1}{2} = e^{24360k}$

$\frac{1}{24360} \ln \frac{1}{2} = k$

$k \approx -2{,}8454 \times 10^{-5}$.



Así, el modelo matemático particular de este ejemplo es $m(t) = 10e^{-0.000028454t}$.

El tiempo para que de los 10 g originales sólo quede 1 g de sustancia radiactiva se calcula al despejar t en la ecuación $1 = 10e^{-0.000028454t}$. La solución es aproximadamente 80 922 años.

Actividad de aplicación. Escala de Richter

La escala de Richter mide la energía liberada en un terremoto. La magnitud R de un terremoto de intensidad I se define como:

$$R = \log \frac{I}{I_0},$$

donde I_0 es la intensidad mínima de la escala y se usa como punto de referencia.

El sismo ocurrido en México en 1957, que provocó la caída de varios edificios, tuvo magnitud $R = 7{,}7$ en la escala de Richter; sin embargo, el terremoto que sacudió a la Ciudad de México el 19 de septiembre de 1985, con magnitud $R = 8{,}1$, superó al de 1957 en intensidad y daños.

Actividad resuelta

1. Los terremotos de 1957 y 1985 tuvieron magnitudes de 7,7 y 8,1 en la escala de Richter, respectivamente. ¿Cuántas veces fue más intenso el sismo de 1985 que el de 1957?

Sean I_{57} e I_{85} las intensidades de ambos terremotos, para determinar la razón $\frac{I_{85}}{I_{57}}$ consideremos la diferencia de las magnitudes en escala de Richter. De acuerdo con la definición, $R = \log \frac{I}{I_0}$ entonces $R_{85} - R_{57} = \log \frac{I_{85}}{I_0} - \log \frac{I_{57}}{I_0} = \log \frac{I_{85}}{I_0} \Big/ \frac{I_{57}}{I_0} = \log \frac{I_{85}}{I_{57}} \rightarrow 8.1 - 7.7 = \log \frac{I_{85}}{I_{57}}$.

Por tanto $\frac{I_{85}}{I_{57}} = 10^{0.4} \approx$,5, lo cual significa que fue 250% más intenso.

Actividades propuestas

Resuelve los siguientes problemas.

1. El número de bacterias en t horas en un cultivo está dado por $n(t) = (3000)2^t$.

a) ¿Cuántas bacterias habrá en seis horas?

b) ¿En cuántas horas el número de bacterias será 3 072 000?

2. Cierta sustancia radiactiva decae conforme la ecuación $A = Ce^{-0.03t}$, donde t se mide en años. Determina la vida media de dicho isotopo.

Aplicamos

Función exponencial y logarítmica

Usa la tecnología

GRAFICA

1. Halla el dominio de las siguientes funciones, utiliza un dispositivo o programa para graficar.
   a) $f(x) = \ln(x^2 + 2)$ b) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$
   c) $f(x) = 2x + 1$ d) $f(x) = 5e^x - \sqrt{x}$

2. Dadas las funciones logarítmicas:
   $f(x) = \log(x - 1)$, $g(x) = \log(x^2 + 1)$
   $h(x) = \log(x^2 - 1)$
   a) Calcula sus dominios.
   b) Utilizando el resultado del literal anterior, calcula el dominio de las siguientes funciones:
      $F(x) = (f + g)(x)$, $G(x) = (f - h)(x)$,
      $H(x) = (f + g - h)(x)$
   c) Utiliza las propiedades de los logaritmos para dar una expresión reducida de las funciones anteriores.

Calcula

MODELACIÓN

3. Con ayuda de la calculadora, completa las tablas de valores y representa los puntos en unos ejes de coordenadas. Traza una curva suave que una los puntos para obtener una gráfica aproximada de las funciones.

   Estudia el dominio y el recorrido, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y la tendencia de las funciones obtenidas.

   a)

x	0.001	0.1	1	10	100	1,000	10,000
$\log x$							

   b)

x	-10	-3	-2	-1	0	1	2	10	100
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$									

Comunica tus ideas

RAZONAMIENTO

4. Escribe verdadero o falso y justifica tu respuesta:
   a) $\log 2 + \log 3 = \log 5$ b) $\log 2 + \log 3 = \log 6$
   c) $\log 15 - \log 5 = \log 3$ d) $\log 15 - \log 5 = \log 10$

5. Completa los huecos utilizando la definición de logaritmo mentalmente:
   a) $\log_2 8 = \square$ b) $\log_3 \square = 4$ c) $\log_{\square} 125 = 3$

EJERCITACION

6. Aplicando la definición, calcula el valor de los logaritmos siguientes:
   a) $\log_2 \frac{1}{8}$ b) $\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{3}$ c) $\log \frac{1}{1,000}$
   d) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27}$ e) $\log_{\sqrt{8}} (2\sqrt{2})$ f) $\log_{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{9}\right)$

RAZONAMIENTO

7. Calcula, si es posible, el valor de x en cada una de las expresiones siguientes:
   a) $\log_x 8 = -3$ b) $\log_{-3} x = 9$
   c) $\log_3 81$ d) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x = -2$

8. Sabiendo que $\log 2 = 0{,}301$ y que $\log 3 = 0{,}477$, calcula los logaritmos decimales de los números siguientes:
   a) 250 b) 0,72 c) 5,4
   d) $\sqrt{18}$ e) $\sqrt[4]{6}$ f) 2,4

MODELACIÓN

9. Toma logaritmos decimales en las igualdades siguientes y desarrolla las expresiones:
   a) $P = 10x^3yz^3$ b) $Q = \dfrac{100x^2}{x + y}$
   c) $x = a^4 \cdot b^3 \cdot c^{\frac{3}{2}}$ d) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{a \cdot x}$

COMUNICACIÓN

10. Expresa el valor de E en cada caso sin que aparezcan logaritmos:
    a) $\log E = 2 - 3\log x + \log y - 5\log z$
    b) $\log E = 3\log 2 - 4\log x + 3\log y - 2\log z$

EJERCITACIÓN

11. Con la ayuda de la calculadora, obtén aproximaciones decimales hasta las milésimas de los logaritmos siguientes:
    a) $\log_3 20$ b) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{7}{5}$ c) $\log_{0.5} 60$
    d) $\log_{\sqrt{2}} 3$ e) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$ f) $\log_{\frac{2}{5}} \sqrt[3]{2}$

MODELACIÓN

12. Utilizando las propiedades de los logaritmos y siendo, $\log x = 0{,}70$ y $\log y = 1{,}18$calcula:
    a) $\log(x^2y)$ b) $\log\left(\dfrac{x^3}{y^2}\right)$ c) $\log\left(\sqrt{x}\,\sqrt[3]{y^2}\right)$

13. Transforma estas expresiones algebraicas en logarítmicas:

COMPLEJIDAD: ● BÁSICO ● MEDIO ● AVANZADO

a) $A = \dfrac{x^2y^3z^5}{t^4}$ b) $C = \dfrac{\sqrt{x}yz^2}{10t^3}$

c) $B = \dfrac{100x^3y}{t^2}$ d) $D = \dfrac{\sqrt{x}\,\sqrt[3]{y^2}\,z^{\frac{3}{4}}}{t^{\frac{2}{5}}}$

- **14**. Emplea la fórmula del cambio de base y los datos log2 = 0,301 y log3 = 0,477 para calcular los logaritmos siguientes:

  a) $\log_3 2$ **b)** $\log_2 9$ **c)** $\log_3 32$

  d) $\log_2 10$ **e)** $\log_2 30$ **f)** $\log_8 2$

Comunicación

- **15**. Expresa con un solo logaritmo los números siguientes:

  a) log6 + log8 – log3

  b) log 9 + log 28 - log 7 - log 9

Razonamiento

- **16**. Siendo a y b dos números enteros positivos, calcula el valor de:

$$\log_a \frac{1}{a} + \log_{\frac{1}{b}} b$$

- **17**. Si $\log_a N = 2$ y $\log_a (32 \cdot N) = 5$, ¿cuánto vale a? ¿Qué propiedad utilizas? Razona la respuesta.

Resuelve problemas

Modelación

- **18**. En un terremoto aparecen dos tipos de ondas sísmicas: las *P*, longitudinales y de velocidad de propagación rápida, y las ondas *S*, transversales y de velocidad menor. En la escala de Richter, la magnitud de un terremoto se calcula como:

$$M = \log A + 3\log(8t) - 2{,}92$$

donde *A* es la amplitud en milímetros de las ondas *S* (medidas en el sismógrafo), y *t*, el tiempo transcurrido, en segundos, entre la aparición de las ondas *P* y las *S*.

a) Copia y completa la tabla, calculando las características para tres sismos diferentes:

	$t(s)$	$A(mm)$	M
1	8	15	
2	15		4
3		45	7

- **19**. El pH mide el carácter ácido o básico de una sustancia, y se encuentra relacionado con la concentración de iones de hidrógeno de la misma, *x*, que se mide en mol por litro, según la fórmula pH = −log *x*.

  a) Representa la función del pH.

  b) El pH de un gel de ducha es 5,5. ¿Qué concentración de iones de hidrógeno tiene?

  c) Para valores de pH menores que 7, la sustancia es ácida y, en caso contrario, básica. ¿Cuántos moles por litro de iones de hidrógeno puede contener una sustancia en cada caso?

Comunicación

- **20**. Explica si puede haber alguna función racional cuyo dominio sean todos los números reales y, en caso afirmativo, escribe un ejemplo.

Ejercitación

- **21**. Resuelve las siguientes ecuaciones.

  a) $2\log x = 3 + \log \dfrac{x}{10}$

  b) $\log x + \log (x + 3) = 2\log (x + 1)$

  c) $\log 4 + 2\log (x - 3) = \log x$

MATEMATICS

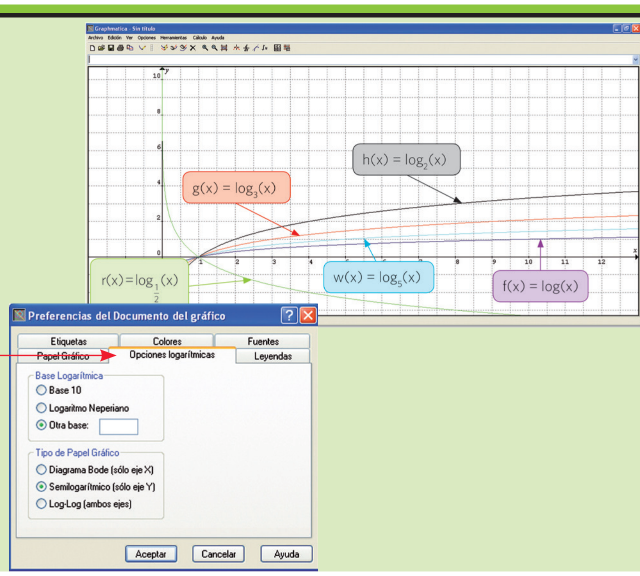
Graphmatica es un software de libre acceso con el que podrás graficar distintos tipos de funciones, entre otras aplicaciones.

Utilizando ***Graphmatica*** se graficaron las siguientes funciones en el plano cartesiano.

Para graficar la función $f(x) = \log_a x$, con $a \neq 10$, sigue los siguientes pasos:

(1) Presiona ***Opciones*** desde el menú.

(2) Selecciona la opción ***Papel gráfico***, y visualizarás un menú en donde podrás elegir la base del logaritmo que quieras graficar en ***Opciones logarítmicas***.



Resolvemos problemas

Etapas en la solución de problemas

1 Comprender el enunciado del problema.
Analizar es descomponer una situación, un texto o un problema dado en sus partes integrantes y determinar cómo se relacionan unas con otras y con una estructura o propósito general.

2 Proponer un plan
Tener un plan para resolver el problema matemático o en tu vida, te ahorra tiempo y esfuerzo.

Para resolver
un problema debes:
Comprender el enunciado
Proponer un plan
Ejecutar un plan
Revisar la solución

3 Ejecutar el plan
Recuerda **aplicar** o utilizar el procedimiento necesario en la situación planteada. **Interpretar** la información entregada en el problema y **emplear** el procedimiento de manera cuidadosa.

4 Revisar la solución
Es muy importante que determines si la respuesta encontrada es solución del problema y se ajusta al contexto de la situación modelada.

1 **ACTIVIDAD RESUELTA**

Problema

Cierta población de bacterias, que inicialmente tenía 1 800 microorganismos, aumenta a 3 000 bacterias en tres horas. Suponiendo que el crecimiento de esta población es exponencial, ¿cuántos de estos microorganismos habrá al cabo de 15 horas?

Comprender el enunciado del problema.

- ¿Qué datos son necesarios para responder la pregunta?
  Conocer la fórmula que permitirá calcular la cantidad de bacterias después de 15 horas.
- ¿Qué información entrega el enunciado del problema?
  La cantidad inicial de bacterias y el tipo de crecimiento que experimenta la población de microorganismos al transcurrir el tiempo.

Proponer un plan

- **Interpreta** los datos del problema.
  Como la población de bacterias crece exponencialmente es posible utilizar la siguiente fórmula para modelar la situación:

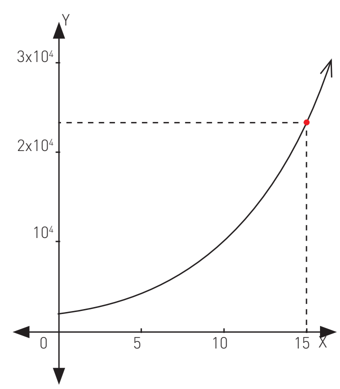
  $N(t) = N_0e^{kt}$ (N_0: *población inicial*) **(1)**

  Por otro lado, se sabe que el número de bacterias aumenta de 1 800 a 3 000 en tres horas. De lo cual es posible deducir que: $N(0) = 1\,800 \Rightarrow N_0e^0 = 1\,800 \Rightarrow N_0 = 1\,800$ **(2)**

  Luego de las tres horas, se tiene que:

  $N(3) = 3\,000 \Rightarrow 1\,800e^{3k} = 3\,000 \Rightarrow e^k = \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ (3)

  Entonces, de **(1)**, **(2)** *y* **(3)** *se tiene que:* $N(t) = N_0 \Rightarrow e^{kt} = 1\,800 \cdot \left(\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^t$ **(3)**

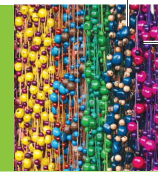


Ejecutar el plan

- **Emplea** el procedimiento.
  Como $N(t) = 1\,800e^{kt} = 1\,800(e^k)^t = 1\,800\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{t}{3}}$, *entonces al cabo de 15 horas, la cantidad de bacterias se calcula de la siguiente manera:*

  $N(15) = 1\,800\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{15}{3}} = 1\,800\left(\frac{5}{3}\right)^5 \approx 23\,148{,}148\,18.$

  Por lo tanto, la población será aproximadamente de 23 148 bacterias después de 15 horas.



Revisa la solución

Utilizando Graphmatica u otro sotware puedes graficar la función $N(t) = 1\,800\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{t}{3}}$ *y comprobar que el punto (15, N(15)) = (15, ≈23 148) pertenece al gráfico de* ***N****.*

2 **ACTIVIDAD RESUELTA**

Problema

Una población inicial de 10 000 bacterias que se duplica cada día, ¿cuántas bacterias habrá al cabo de 2 o 3 días. En estas condiciones y considerando que hubieran pasado *t* días, ¿cuál es la expresión que relaciona el crecimiento poblacional después de t períodos?

Comprende el enunciado del problema y resuelve

- Al cabo de un día habrá 10 000 · 2 = 20 000
- Al cabo de 2 días habrá 20 000 · 2 = 40 000 = 10,000 · 2^2 .
- Al cabo de 3 días habrá 40 000 · 2 = 80 000 = 10 000 · 2^3 .

En estas condiciones y considerando que hubieran pasado t días, el número de bacterias vendría dado por la expresión: $\boldsymbol{P} = 10\,000 \cdot 2^t$

Si el crecimiento de una población inicial de P_0 *individuos verifica que en cada período de tiempo la población se multiplica por una constante k, entonces, el número de individuos en la población después de t períodos de tiempo es:* $P = P_0 \cdot k^t$

3 **ACTIVIDAD RESUELTA**

Problema

Las sustancias radiactivas se desintegran a mayor o menor velocidad según sus características. Esta velocidad se puede medir mediante el denominado período de semidesintegración, es decir, mediante el tiempo que una cierta masa inicial de dicha sustancia tarda en reducirse a la mitad.

De esta forma, si se cuenta con m gramos de una sustancia radiactiva que tiene un período de semidesintegración de *d* años, al cabo de *t* años su masa se habrá reducido *a* · *m* = 0, 5 *t/d* gramos de dicha sustancia.

Calcula el tiempo que tardará una muestra radiactiva en reducirse a la centésima parte si su período de semidesintegración es de 14 años.

Comprende el enunciado del problema y resuelve

Aplicando la ecuación a la unidad de masa, será:

$m = 0{,}5^{\,t/d}$ $\qquad 0{,}01 = 0{,}5^{\,t/d}$

$t = \frac{14 - (-2)}{\log(0{,}5)}$ $\qquad t \approx 93$ años

Aplica la estrategia

Resuelve el siguiente problema. Para ello, guíate por los pasos estudiados anteriormente.

1. Resuelve el siguiente problema en tu cuaderno.

   Si el crecimiento de una población está modelado por la función $N(t) = N_0\left(\frac{3}{2}\right)^{kt}$, donde t representa el tiempo en minutos y $\frac{N(t)}{N_0} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$, ¿cuál es el valor de n si de una población inicial (N_0) de 1 000 individuos a los 3 minutos aumenta a 3 375?

2. Propón un problema que implique el planteamiento de ecuaciones exponenciales o logarítmicas y resuélvelo.

Ponemos a prueba destrezas

PROBLEMAS PARA APLICAR

1. **En cierta ciudad, con 20 000 habitantes, 275 personas están enfermas el día domingo y se reportan 57 nuevos casos el lunes.**

   a) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad para este caso?

   b) ¿Cuál será la cantidad de nuevos casos diarios hasta el domingo siguiente?

   c) Realiza la gráfica de los casos reportados de domingo a domingo.

   d) ¿Qué acciones se deben realizar para evitar la propagación de una enfermedad?

Mamíferos en cautiverio

Los mamíferos son aquellos animales que alimentan a sus crías recién nacidas con leche, los cuidan y enseñan a vivir. Hoy en día se encuentran muchas de estas especies en los zoológicos.

Estudios empíricos indican que el período de vida de un mamífero en cautiverio está relacionado con el tamaño de su cuerpo por medio de la función $L(M) = (11,8)M^{0.20}$ donde L es el período de vida en años y M es la masa del cuerpo en kilogramos.

2. **De acuerdo con la información anterior:**

   a) Realiza la gráfica de $L(M)$.

   b) ¿Qué tipo de función representa la gráfica?

   c) ¿Cuál es el máximo y mínimo valor de $L(M)$? Explica tu respuesta.

   d) ¿Cuál es el dominio de $L(M)$?

   e) ¿Cuál es el codominio?

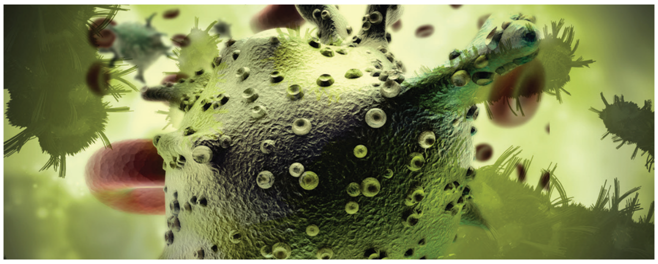
4. **En zoológico se encuentran diferentes mamíferos en cautiverio. Por ejemplo, hay elefantes con un peso aproximado de 4 100 kg, tigres con un peso promedio de 220 kg y orangutanes con un peso de 200 kg aproximadamente.**

   a) ¿Qué período de vida pueden tener los elefantes los orangutanes y los tigres en el Zoológico, según la función $L(M)$?

   b) Investiga el peso promedio de otros animales en cautiverio y calcula el período de vida de cada uno de ellos.

3. **Para el año 2011 se calculaba que la población de una región era de aproximadamente 250 000 habitantes, con un crecimiento anual del 1,5 %. Determina la fórmula de crecimiento poblacional y la cantidad de habitantes esperados para el año 2018.**

4. **En un cultivo de bacterias, el número se duplica cada dos días. Un día se contabilizan 3 000 bacterias.**



   a) Calcula el número de bacterias que habrá 15 días después.

   b) ¿Cuántos días han de pasar para que haya el triple de bacterias?

   c) Si el número inicial fuera de 6 000, ¿cuántos días tendrían que transcurrir para que hubiera el triple?

   d) Se supone que la población se estabiliza al alcanzar las 20 000 bacterias. ¿Cuánto tiempo ha de pasar?

5. **El elemento radiactivo carbono 14 se utiliza para determinar la antigüedad de ciertos fósiles. Si el carbono 14 decae a un velocidad de 0,012% anual, y un hueso animal tenía originalmente 20 gramos de carbono 14 hace 2000 años, ¿cuál es la cantidad de carbono 14 que tiene en la actualidad?**

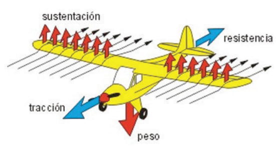
Matemática en contexto

Movimiento de fluidos

El principio de Bernoulli describe el comportamiento de un fluido; este principio afirma que donde la velocidad de un fluido es alta, la presión es baja, y donde la velocidad es baja, la presión es alta, en forma matemática se tiene:

$$\frac{1}{2V}v^2 m + p + \frac{m}{V}gy = 5k$$

Donde *m* es la masa de una unidad de volumen *V*, *v* es su rapidez, *p* su presión, *g* es la aceleración causada por la gravedad, *y* es la elevación y *k* es una constante. El vuelo de un avión es explicado por dicho principio, observa la siguiente ilustración:



"La inclinación hacia arriba, así como la superficie superior redondeada del ala, provoca que las líneas de corriente se fuercen hacia arriba y se apilen sobre el ala, la rapidez del aire aumenta sobre el ala donde las líneas de corriente están más juntas. Puesto que la rapidez del aire es mayor sobre el ala que debajo de ella, la presión sobre el ala es menor que la presión debajo de esta. De esta forma, existe una fuerza ascendente neta sobre el ala llamada sustentación dinámica" (*Tomado de* Física: principios con aplicaciones, *Volumen* 2, *de Douglas C. Giancoli y Víctor Campos Olguín, página* 272).

- Investiga cómo se presenta el principio de Bernoulli, en otras situaciones.

1. Si f es una función exponencial, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I. $Dom(f) = \mathbb{R}$

II. f es siempre creciente.

III. $Rec(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

a) Solo I. **b)** Solo II.
c) Solo I y II. **d)** Solo I y III.
e) I, II y III.

2. Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ con $g(x) = a^x$, ¿cuál es el valor de g(4)?

(1) $a \neq 0$

(2) (5, 243) pertenece al gráfico de g.

a) (1) por sí sola.
b) (2) por sí sola.
c) Ambas juntas (1) y (2).
d) Cada una por sí sola, (1) ó (2).
e) Se requiere información adicional.

3. En la ecuación $13 \cdot 3^x = 117$, ¿cuál es el valor de x?

a) 2 **b)** 3 **c)** 9 **d)** 13 **e)** 27

4. ¿Cuál es el valor de x si $\left(\frac{1}{2}\right)^{5x} = 2^{12x+9}$?

a) -9 **b)** $-\frac{9}{17}$ **c)** $\frac{9}{17}$ **d)** $\frac{9}{8}$ **e)** 17

5. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2^{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = 512 \\ \log\sqrt{yx} = 1 + \log 2 \end{cases}$$

Razonamiento lógico

Atracción

Si te has fijado, dos vehículos que viajan a gran velocidad en dirección contraria, generan una "atracción" entre sí, ¿por qué sucede esto?

¿Por qué resulta peligroso estar en el borde de la acera mientras pasan los vehículos, sobre todo camiones o buses grandes?

Autoevaluación			
Descripción	**Valoración**		
	Siempre	**A veces**	**Nunca**
Determinar el dominio, recorrido, monotonía de funciones exponenciales. (1 - 2)			
Reconocer las funciones logarítmicas como funciones inversas de lsa exponenciales. (3 - 4)			
Evaluar una función logarítmica mediante la función exponencial inversa. (3 - 4)			
Resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas (3 - 4 - 5)			

3

Sucesiones, teoría de juegos y teoría de números

Bloque: Números y funciones **Bloque: Matemática Discretas**

En la naturaleza hay muchos de elementos y sistemas como las nubes, nuestro aparato circulatorio, los helechos, los rayos, las cuencas hidrográficas, las costas, los romanescus y los copos de nieve, que tienen una curiosa propiedad: si se obtiene una imagen de ellos y se aumenta una parte, se observa que reproduce a una escala menor la forma del sistema completo, estas reproducciones periódicas se les conocen como fractales.

¿Qué sabes?

En años anteriores aprendiste a trabajar con series y patrones numéricos y alfanuméricos, sabes identificar la formación de una sucesión o serie y puedes identificar el elemento que continúa en una sucesión. En este módulo vamos a conocer claramente sobre las sucesiones aritméticas y geométricas.

¿Qué aprenderás?

- **Identificar** una función recursiva a partir de las fórmulas que la definen.
- **Calcular** varios parámetros de una progresión aritmética o geométrica.
- **Reconocer** parámetros que pueden ser modelados mediante progresiones aritméticas o geométricas.
- **Resolver** problemas utilizando modelos que utilicen progresiones aritméticas así como geométricas.
- **Identificar** problemas sencillos que se pueden resolver mediante teoría de juegos.
- **Comprender** el uso de números de identificación en el mundo cotidiano.

El Buen Vivir

La naturaleza

El término naturaleza hace referencia al mundo físico y también a la vida en general no incluye los objetos artificiales ni la intervención humana, en ella encontramos objetos cuya estructura básica está fragmentada o es irregular y se repite a diferentes escalas, tal es el caso de los fractales . Muchas estructuras naturales son de tipo fractal cuya propiedad matemática clave es que su dimensión métrica fractal es un número entero.

- ¿Cuáles son los números enteros?
- ¿Qué ejemplos de fractales puedes encontrar en la naturaleza?
- ¿De qué manera ayudas tú a cuidar la naturaleza?

Iniciemos

Activación de conocimientos previos

Analiza la siguiente situación: Juan decide ahorrar parte de lo que gana durante un año, empieza con $ 20. Si cada mes agrega $ 30 a su cuenta de ahorro. ¿Cuánto habrá ahorrado hasta el último mes?

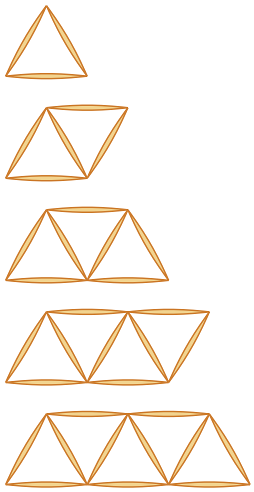
Objetivos educativos del módulo

- Reconocer sucesiones definidas en forma recursiva.
- Resolver problemas de economía y finanzas, principalmente, mediante las sucesiones aritméticas y geométricas.
- Utilizar la teoría de juegos y de números para resolver problemas en la administración de recursos, de decisión y de codificación.

1 Regularidades y sucesiones

Identificar una función recursiva a partir de las fórmulas que la definen.

Una secuencia es una lista de números u objetos que están en un orden especial, por ejemplo: 2, 6, 18, 54, ... es una secuencia geométrica, cada número es 3 veces el número anterior.



Ejemplo 1 En la figura de la izquierda aparece una secuencia de triángulos construidos con palillos. Para determinar cuántos palillos se necesitarán para construir una figura que tenga diez triángulos y una con n triángulos, se forma la tabla.

Números de triángulos	1	2	3	4	5	...	10	...	n
Número de palillos	3	5	7	9	11	...	?	...	?

Se observa que el número de palillos sigue una cierta secuencia. Para añadir un nuevo triángulo se necesitan dos palillos más. Así, para construir diez triángulos se necesitan tres palillos para el triángulo inicial y luego dos palillos por cada uno de los nueve triángulos restantes, es decir:

$$3 + 2 \cdot 9 = 21$$

Si se colocan n triángulos, se necesitarán tres palillos para el triángulo inicial y luego dos palillos por cada uno de los $n - 1$ triángulos restantes, es decir:

$$3 + 2(n - 1) = 3 + 2n - 2 = 2n + 1$$

Sucesiones de números reales

Una sucesión es una función a: $\begin{array}{l} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ a \rightarrow a(n) = a_n \end{array}$

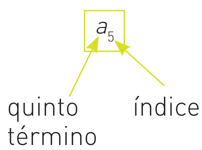
Las secuencias infinitas de números reales se llaman **sucesiones**.

Una sucesión de números reales se representa por: $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ o también $(\boldsymbol{a_n})$

Cada número se llama **término** y se designa por una letra y un número llamado **índice** que indica el lugar que ocupa en la sucesión. Así, a_1 es el primer término, a_2, el segundo, etc.; a $\boldsymbol{a_n}$ se le llama **enésimo término** o término general y representa un término cualquiera de la sucesión.

Ten en cuenta

Las sucesiones tienen primer término pero no último, es decir, tienen infinitos términos.



Ejemplo 2 Observa cómo se halla el siguiente término en las cadenas de números reales dadas a continuación.

a) {10, 7, 4, 1, −2, ...} **b)** {64, 32, 16, 8, 4, ...}

en **a)** Cada término se obtiene sustrayendo 3 al anterior, el siguiente es −5.

en **b)** Cada término se halla dividiendo el anterior entre 2, el siguiente es 2.

Dependiendo del comportamiento de sus términos, las sucesiones infinitas pueden ser: crecientes, decrecientes, oscilantes, alternadas o constantes.

Una sucesión es **creciente** si cada término es mayor o igual que el anterior.

Ejemplo 3 Son sucesiones crecientes:

{4, 8, 8, 12, 12, 12, 16, 16, 16, 16, ...} {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...}

Una sucesión es **decreciente** si cada término es menor o igual que el anterior.

Ejemplo 4 Los siguientes son ejemplos de sucesiones decrecientes:

{15, 14, 12, 9, 5, 0, −6, −13, ...} $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \ldots\right\}$

Una sucesión es **oscilante** si sus términos alternan de mayor a menor o viceversa.

Ejemplo 5 La sucesión {2, 1, 4, 2, 3, 2, 5, ...} es oscilante, pues al comparar sus términos se observa que el segundo es menor que el primero pero el tercero es mayor que el segundo, etc.

Una sucesión es **alternada** si se alternan los signos de sus términos.

Ejemplo 6 Observa los términos de la sucesión:

{-1, 2, -3, 4, -5, ...}

Esta sucesión es alternada, pues el primer término es negativo, el segundo, positivo, el tercero negativo, etcétera.

Una sucesión es **constante** cuando todos sus términos tienen el mismo valor.

Ejemplo 7 La siguiente es una sucesión constante.

{-3, -3, -3, -3, -3, ...}

Actividades resueltas

1. Halla los dos términos siguientes de las sucesiones.

a) 4, 8, 16, 32, 64, ... **b)** $7, \frac{7}{2}, \frac{7}{4}, \frac{7}{8}, \frac{7}{16}, \ldots$

Solución:

a) Son 128 y 256, ya que cada término se obtiene multiplicando por 2 el anterior.

b) Son $\frac{7}{32}$ y $\frac{7}{64}$ ya que cada término se halla multiplicando por $\frac{1}{2}$ el anterior.

2. Clasifica cada sucesión según sea creciente, decreciente, oscilante, alternada o constante.

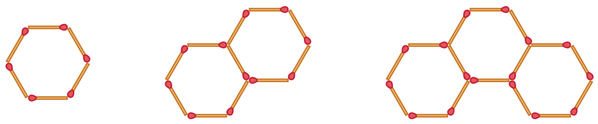
a) {1, 2, 3, 4, ...} **b)** $\{-5, 10, -15, 20, \ldots\}$ **c)** $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots\right\}$ **d)** $\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, \ldots\right\}$

Solución:

a) Creciente **b)** Alternada **c)** Constante **d)** Decreciente

Actividades propuestas

3. Con cerillas se construyeron las figuras.



a) ¿Cuántas cerillas se necesitan para formar una figura con 15 hexágonos?

b) ¿Cuántas cerillas se necesitan para formar una figura con *n* hexágonos?

4. Halla los tres términos siguientes de cada sucesión.

a) $12, 12, 12, 12, 12, \ldots$ **b)** $21, 23, 25, 27, 29, \ldots$

c) $80, 70, 60, 50, 40, \ldots$ **d)** $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \ldots$

5. Encuentra el término $\square$ en cada sucesión.

a) $17, 15, 13, \square, 9, 7, \ldots$ **b)** $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{9}{5}, \square, \frac{81}{5}, \ldots$

c) $60, 56, \square, 48, 44, \ldots$ **d)** $16, -8, \square, -2, 1, \ldots$

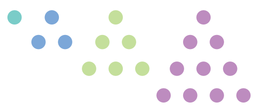
Término general de una sucesión. Sucesiones recurrentes

Identificar una función recursiva a partir de las fórmulas que la definen.

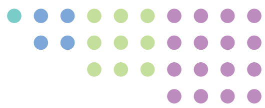
El **término general** de una sucesión es la expresión algebraica que permite calcular cualquier término en función del índice.

Sabías que...

Los números triangulares



y los números cuadrados



son algunos ejemplos de las sucesiones más conocidas y estudiadas por los pitagóricos en el siglo VI a. C.

Ejemplo 1 Observa el término general de algunas sucesiones.

$$\left\{\frac{n+2}{n+3}\right\} \qquad \{n+(-1)^{n+4}\} \qquad \left\{\frac{n-5}{n+5}\right\} \qquad \{6\}$$

Para determinar los términos de una sucesión a partir del término general, basta con reemplazar a n por el número natural que indica la posición de cada término en la sucesión.

Ejemplo 2 Encuentra los cuatro primeros términos de las sucesiones:

a) $\left\{\frac{n+2}{n+3}\right\}$ **b)** $\{n+(-1)^{n+4}\}$ **c)** $\left\{\frac{n-5}{n+5}\right\}$

se sustituye n sucesivamente por 1, 2, 3 y 4 en cada término general, así:

a) Para la sucesión $\left\{\frac{n+2}{n+3}\right\}$, se tiene:

$$a_1 = \frac{1+2}{1+3} = \frac{3}{4} \qquad a_2 = \frac{2+2}{2+3} = \frac{4}{5}$$

$$a_3 = \frac{3+2}{3+3} = \frac{5}{6} \qquad a_4 = \frac{4+2}{4+3} = \frac{6}{7}$$

Luego, la sucesión está dada por: $\left\{\frac{n+2}{n+3}\right\} = \left\{\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots\right\}$.

b) En la sucesión $\{n+(-1)^{n+4}\}$, los cuatro primeros términos son:

$$a_1 = 1 + (-1)^{1+4} = 0 \qquad a_2 = 2 + (-1)^{2+4} = 3$$

$$a_3 = 3 + (-1)^{3+4} = 2 \qquad a_4 = 4 + (-1)^{4+4} = 5$$

Por tanto, $\{n+(-1)^{n+4}\} = \{0, 3, 2, 5, \ldots\}$.

c) Dada la sucesión $\left\{\frac{n-5}{n+5}\right\}$, se obtiene que:

$$a_1 = \frac{1-5}{1+5} = -\frac{4}{6} \qquad a_2 = \frac{2-5}{2+5} = -\frac{3}{7}$$

$$a_3 = \frac{3-5}{3+5} = -\frac{2}{8} \qquad a_4 = \frac{4-5}{4+5} = -\frac{1}{9}$$

Luego, la sucesión es: $\left\{\frac{n-5}{n+5}\right\} = \left\{-\frac{4}{6}, -\frac{3}{7}, -\frac{2}{8}, -\frac{1}{9}, \ldots\right\}$.

Sucesiones recurrentes

Una **sucesión** es **recurrente** si sus términos, a partir de uno dado, se definen en función de los términos anteriores de acuerdo con una expresión algebraica conocida, denominada fórmula de recurrencia.

Ejemplo 3 Observa cómo se encuentran los primeros términos de la sucesión que cumple: $a_1 = 5$ y $a_n = a_{n-1} + 3$.

Con la expresión anterior se deduce que, en esta sucesión, cada término se obtiene a partir del anterior sumándole 3 unidades. De esta forma:

$a_2 = a_1 + 3 = 5 + 3 = 8$ $\quad a_3 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11$ $\quad a_4 = a_3 + 3 = 11 + 3 = 14$

Por tanto, la sucesión es {5, 8, 11, 14, ...}.

La sucesión de Fibonacci

La sucesión de Fibonacci es una secuencia de números enteros descubierta por matemáticos hindúes hacia el año 1135 y descrita por primera vez en Europa gracias a Fibonacci (Leonardo de Pisa).

La sucesión se define mediante la siguiente fórmula de recurrencia:

$a_1 = 1,\ a_2 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$

$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$

Si se continúa el proceso, se obtiene la recurrencia:

{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...}

Actividad resuelta

1. Forma la sucesión recurrente dada por:

$$a_1 = -2,\ a_2 = 3 \text{ y } a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Solución:

$a_3 = a_2 + a_1 = 3 + (-2) = 1;$ $\quad a_4 = a_3 + a_2 = 1 + 3 = 4$

$a_5 = a_4 + a_3 = 4 + 1 = 5;$ $\quad a_6 = a_5 + a_4 = 5 + 4 = 9$

Por tanto, la sucesión es: {-2, 3, 1, 4, 5, 9, ...}.

Sabías que...

Las abejas también tienen relación con las series de Fibonacci: si se observan las celdas hexagonales de una colmena y se coloca una abeja en una cualquiera de ellas, y se le permite alimentar a la larva, suponiendo que continuará siempre por la celda contigua de la derecha, veremos que hay sólo una ruta posible para la siguiente celdilla; dos hacia la segunda, tres hasta la tercera, cinco hasta la cuarta, ocho rutas posibles hacia la quinta, etcétera.

1, 1, 2, 3, 5, 8

¿Cuantos habrá hacia la sexta?

En este caso, los machos o zánganos de la colmena tienen árboles genealógicos que siguen estrictamente una distribución de Fibonacci.

Actividades propuestas

2. Calcula para cada sucesión los términos pedidos.

a) Los seis primeros de $a_n = \dfrac{n-2}{n+1}$

b) Los diez primeros de $b_n = 3(n+1)^2 + 1$

c) c_6 y c_{20} en $c_n = n^2 - n + 3$

d) d_3 y d_{10} en $d_n = +\sqrt{n^2 - 13n + 30}$

e) Los cuatro primeros, e_5, e_{10}, y e_{100}, en

$$e_n = \frac{2n^2}{n-1}.$$

3. Construye la sucesión recurrente definida por:

$a_1 = -2 \quad a_n = a_{n-1} + 5$

4. Forma la sucesión recurrente dada por:

$a_1 = \dfrac{1}{16} \quad a_n = a_{n-1} \cdot 2$

5. Calcula los primeros términos de la sucesión recurrente definida por:

$a_1 = 1 \quad a_2 = 3 \quad a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$

Progresiones aritméticas

Calcular uno o varios parámetros de una progresión aritmética conocidos otros parámetros.

Una sucesión de números reales es una **progresión aritmética** si cada término se obtiene a partir del anterior sumándole un número fijo o **diferencia**, que suele representarse por ***d***.

Ejemplo 1 La sucesión {3, 8, 13, 18, 23, ...} es una progresión aritmética porque cada término se obtiene sumando 5 al término anterior.

$$3 \xrightarrow{+5} 8 \xrightarrow{+5} 13 \xrightarrow{+5} 18 \xrightarrow{+5} \ldots$$

La sucesión {10, 7, 4, 1, −2, ...} es una progresión aritmética porque cada término se obtiene adicionando −3 al término anterior.

$$10 \xrightarrow{-3} 7 \xrightarrow{-3} 4 \xrightarrow{-3} 1 \xrightarrow{-3} \ldots$$

En una progresión aritmética: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots$ la diferencia de dos términos consecutivos es siempre la misma:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d$$

Ten en cuenta

Una progresión aritmética se puede considerar una sucesión recurrente, ya que, dado a_1, el resto de sus términos se pueden calcular a partir de:

$a_n = a_{n-1} + d$

siendo d la diferencia de la progresión.

Ejemplo 2 $a_n = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$ es una progresión aritmética de diferencia 2.

$b_n = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$ no es una progresión aritmética, ya que los términos no se obtienen sumándole al anterior un número fijo.

Término general de una progresión aritmética

En una progresión aritmética, a partir del primer término a_1 y de la diferencia d se puede obtener la expresión del término general a_n.

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$a_{20} = a_{19} + d = \ldots = a_1 + 19d$$

En general: $a_n = a_1 + (n - 1)d$

El término general de una progresión aritmética de primer término a_1 y diferencia d, es:

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d}$$

Ejemplo 3 Para hallar el término general de las progresiones aritméticas:

a) $a_n = \{3, 8, 13, 18, 23, \ldots\}$

b) $b_n = \{10, 8, 6, 4, 2, \ldots\}$

Se procede así:

a) $a_1 = 3;\ d = 5$ $\quad a_n = 3 + (n - 1)5 = 3 + 5n - 5 = 5n - 2$

$a_n = 5n - 2$

b) $b_1 = 10;\ d = -2$ $\quad b_n = 10 + (n - 1)(-2) = -2n + 12$

$b_n = -2n + 12$

A partir de la fórmula del término general de una progresión aritmética, se pueden obtener las siguientes:

$a_1 = a_n - (n - 1) \cdot d$, si se conocen el término enésimo y la diferencia.

$d = \dfrac{a_n - a_1}{n - 1}$, si se conocen los términos primero y enésimo.

$n = \dfrac{a_n - a_1 + d}{d}$, si se conocen los términos primero y enésimo y la diferencia.

Ejemplo 4 Si se sabe que en una progresión aritmética, $a_4 = 9$ y $d = 2$, entonces a_1 se calcula así:

$$a_1 = 9 - (4 - 1) \cdot 2 = 3$$

Por tanto, es posible determinar que la progresión está dada por:

$$\{3, 5, 7, 9, 11, ...\}$$

Actividad resuelta

1. El extracto mensual desde el primer mes de ahorro de una persona se muestra en la figura.

Nombre: Juan Pablo Monroy

Mes	enero	febrero	marzo	abril	mayo
capital ($)	4 000	4 200	4 400	4 600	4 800

a) ¿Cuál era el capital inicial?

b) ¿En cuánto aumenta el capital inicial mes a mes?

c) ¿Cuál es la fórmula general que expresa el monto de capital ahorrado cada mes?

d) ¿Cuál será el monto ahorrado a los siete meses? ¿Y a los doce meses? ¿Y al cabo de dos años?

Solución:

En este caso, los ahorros mensuales forman una progresión aritmética, tal que:

a) El primer término de la progresión es el capital incial. Luego, $a_1 = 4\,000$.

b) La diferencia es el ahorro mensual, es decir, $d = 200$.

c) La fórmula que expresa el capital ahorrado cada mes es el término general de la progresión. Por tanto, $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 4\,000 + (n - 1) \cdot 200$.

d) El monto ahorrado a los siete meses será: $a_7 = 4{,}000 + (7 - 1) \cdot 200 = 5\,200$

A los doce meses será: $a_{12} = 4\,000 + (12 - 1) \cdot 200 = 6\,200$

A los dos años será: $a_{24} = 4\,000 + (24 - 1) \cdot 200 = 8\,600$

Actividades propuestas

2. Halla el término general de la progresión aritmética:

$$a_n = \{5, 2, -1, -4, ...\}$$

3. En una progresión aritmética $a_1 = 4$ y la diferencia es $d = -7$. Halla el término octavo.

4. Una organización no gubernamental (ONG) que se dedica a la ayuda al Tercer Mundo se inició con 125 personas.

Si todos los meses se incorporan cinco voluntarios, ¿cuántas personas trabajarán en la ONG al cabo de dos años y medio?

4 Suma de los términos consecutivos de una progresión aritmética

Calcular uno varios parámetros de una progresión aritmética conocidos otros parámetros.

Ten en cuenta

En una progresión aritmética

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$

la suma de dos términos equidistantes de los extremos es constante e igual a la suma de los extremos:

1 2 3 ... 98 99 100

101

101

101

$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1}$
$= a_3 + a_{n-2} = \ldots$

Sabías que...

El matemático Gauss es famoso porque siendo niño calculó la suma de los primeros 100 números naturales de manera casi inmediata.

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética a_n es:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Para calcular la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética $\{a_n\}$:

$$\begin{array}{lcccccccc}
S_n = & a_1 & + & a_2 & + \ldots + & a_{n-1} & + & a_n \\
S_n = & a_n & + & a_{n-1} & + \ldots + & a_2 & + & a_1 \\
\hline
2S_n = & (a_1 + a_n) & + & (a_2 + a_{n-1}) & + \ldots + & (a_{n-1} + a_2) & + & (a_n + a_1)
\end{array}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) = n(a_1 + a_n)$$

Despejando: $S_n = \dfrac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$

Ejemplo 1 Los números naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... forman una progresión aritmética de razón $d = 1$.

Si se representa por S_{100} la suma de los 100 primeros números naturales, resulta:

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + \ldots \ldots + 98 + 99 + 100$$

o también $S_{100} = 100 + 99 + 98 + \ldots \ldots + 3 + 2 + 1$

sumando: $2S_{100} = 101 + 101 + 101 + \ldots \ldots + 101 + 101 + 101$

$$2S_{100} = 100 \cdot 101 \Rightarrow S_{100} = 100 \cdot \frac{(1 + 100)}{2} = 5\,050$$

La suma de los 100 primeros números naturales es 5 050.

Las progresiones aritméticas pueden ser utilizadas en la resolución de problemas.

Ejemplo 2

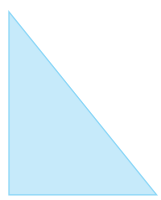
a) El cateto menor de un triángulo rectángulo mide 8 cm . Calcula los otros 2 lados sabiendo que los lados del triángulo forman una progresión artmética.

$a_1 = 8$ Cateto menor;

$a_2 = 8 + d$ Cateto mayor;

$a_3 = 8 + 2d$ Hipotenusa

$(8 + 2d)^2 = (8 + d)^2 + 8^2$; $d = \frac{8}{3}$



$a_1 = 8$ Cateto menor

$a_2 = \frac{32}{3}$ Cateto mayor

$a_3 = \frac{40}{3}$ Hipotenusa

b) La dosis de un medicamento es 100 mg el primer día y 5mg menos cada uno de los siguientes. El tratamiento dura 12 días. ¿Cuántos miligramos debe tomar el paciente durante el todo tratamiento?

$a_1 = 100$

$d = -5$

$n = 12$

$a_{12} = ?$

$a_{12} = a_1 + (n - 1)\, d$

$a_{12} = 100 + (12 - 1)(-5)$

$a_{12} = 45$

$S_{12} = \left(\frac{a_1 + a_{12}}{2}\right) n$

$S_{12} = \left(\frac{100 + 45}{2}\right) 12$

$S_{12} = 870$

El enfermo debe tomar 870 mg durante todo el tratamiento.

La fórmula de la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética puede ser usada para encontrar a_1, a_n o n, según sea el caso, porque:

$a_1 = \frac{2S_n}{n} - a_n$, si se conocen a_n y S_n.

$a_n = \frac{2S_n}{n} - a_1$, si se conocen a_1 y S_n.

$n = \frac{2S_n}{a_1 + a_n}$, si se conocen a_1, a_n y S_n.

Actividades resueltas

1. Suma los 20 primeros términos de la progresión aritmética: $a_n = \{4, 1, -2, -5, ...\}$

Solución:

$a_1 = 4$; $d = -3$

Se halla el término vigésimo: $a_{20} = a_1 + (20 - 1) \cdot d$

$$a_{20} = 4 + 19\,(-3) = -53$$

La suma de los primeros veinte términos es $S_{20} = \frac{4 + (-53)}{2} \cdot 20 = -490$

2. La suma de los siete primeros términos de una progresión aritmética es $\frac{35}{2}$. Si el primer término es 1, ¿cuál es séptimo término?

Solución:

Se tiene que $n = 7$, $a_1 = 1$ y $S_7 = \frac{35}{2}$.

Por tanto: $a_7 = \frac{2S_7}{7} - a_1 = \frac{2\frac{35}{2}}{7} - 1 = 4$

Es decir, el séptimo término de la progresión es 4.

Actividades propuestas

3. Halla la suma de los 40 primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas.

a) $a_n = \{39, 36, 33, 30, ...\}$

b) $b_n = \{7, 11, 15, 19, ...\}$

c) $c_n = \{17, 9, 1, -7, ...\}$

d) $d_n = \{-5, -3, -1, 1, ...\}$

4. El primer término de una sucesión aritmética es 1, la diferencia, 2, y la suma de los n primeros términos es 900.

¿Cuánto vale n?

5. Las edades de tres hermanos están en progresión aritmética de diferencia 4 y su suma es igual a 42 años.

¿Qué edad tiene cada uno?

6. Un ciclista recorrió el primer día 15 km, y cada día aumenta su recorrido en 1 km.

¿Cuántos kilómetros habrá recorrido al cabo de los 20 primeros días?

7. Responde:

a) ¿Cuál es la suma de los nueve primeros números pares?

b) ¿Cuál es la suma de los once primeros números impares?

c) ¿Cuál es la suma de los doce primeros múltiplos de 3?

8. El primer término de una progresión aritmética es $\frac{25}{24}$ y el séptimo es $\frac{12}{5}$. ¿Cuál es la diferencia?

Gráfica de una progresión aritmética

Para hacer la representación gráfica de una progresión aritmética podemos elaborar una tabla y una gráfica.

Ten en cuenta

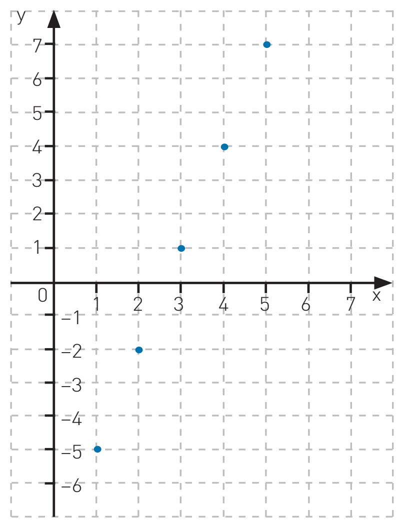
La gráfica de una progresión aritmética tiene la apariencia de una recta, si la razón es positiva la gráfica es creciente, si la razón o diferencia es negativa la gráfica es decreciente.

Actividad resuelta

9. ¿Cómo se representa gráficamente la progresión aritmética −5, −2, 1, 4, 7, ...?

Primero tabulamos y luego ubicamos los puntos en la gráfica.

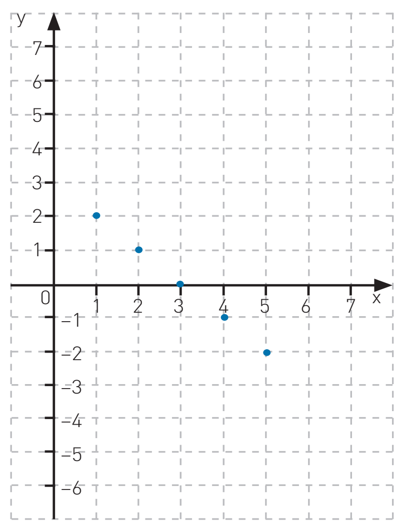
Término	Valor
1	−5
2	−2
3	1
4	4
5	7



10. Lo mismo hacemos si la progresión aritmética está dada por su fórmula general.

Sea $a_n = -n + 3$. Entonces, la tabla y la gráfica son las siguientes.

Término	$-n + 3$	Valor
1	$-1 + 3$	2
2	$-2 + 3$	1
3	$-0 + 3$	0
4	$-4 + 3$	−1
5	$-5 + 3$	−2



Observemos que los puntos de una progresión aritmética están en línea recta.

Actividades propuestas

Construye una tabla y una gráfica para las siguientes progresiones aritméticas.

11. −5, −3, −1, 1, 3, ...

12. $a_n = \frac{3}{2}n - 1$.

Una sucesión de números reales es una **progresión geométrica** si cada término se obtiene a partir del anterior multiplicándolo por un número fijo o **razón**, que suele representarse por ***r***.

Ten en cuenta

Una progresión geométrica se puede considerar una sucesión recurrente, ya que, dado a_1, el resto de sus términos se pueden calcular a partir de:
$a_n = a_{n-1} \cdot r$ siendo r la razón de la progresión.

Ejemplo 1 En la sucesión {4, 8, 16, 32, ...} cada término se obtiene multiplicando por 2 el término anterior.

$$4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{\times 2} 16 \xrightarrow{\times 2} 32 \xrightarrow{\times 2} \dots$$

En la sucesión {16, 8, 4, 2, ...} cada término se obtiene multiplicando por $\frac{1}{2}$ el término anterior.

$$16 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 8 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 4 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 2 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} \dots$$

Estas sucesiones se laman progresiones geométricas.

En una progresión geométrica

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots\}$$

el cociente de dos términos consecutivos es siempre el mismo:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \dots = r$$

Ejemplo 2 Para determinar la razón de la progresión geométrica:

$$\{243, 81, 27, 9, \dots\}$$

basta con dividir cualquiera de sus términos entre el término inmediatamente anterior. Así:

$$\frac{9}{27} = \frac{27}{81} = \frac{81}{243} = \frac{1}{3} \leftarrow \text{Razón}$$

Término general de una progresión geométrica

La expresión del término general a_n de una progresión geométrica se puede obtener a partir del primer término a_1 y la razón r.

$$a_2 = a_1\, r$$

$$a_3 = a_2\, r = (a_1\, r)\, r = a_1\, r^2$$

$$a_4 = a_3\, r = (a_1\, r^2)\, r = a_1\, r^3$$

$$a_5 = a_4\, r = (a_1\, r^3)\, r = a_1\, r^4$$

$$\dots \quad \dots \qquad \dots \qquad\qquad \dots$$

$$a_{20} = a_{19}\, r = \dots = a_1\, r^{19}$$

En general: $a_n = a_1\, r^{n-1}$

El término general de una progresión geométrica de primer término a_1 y razón r es:

$$\boldsymbol{a_n = a_1\, r^{n-1}}$$

Utiliza las TIC

Para calcular por ejemplo 2^{24}, debes utilizar la siguiente secuencia de teclas:

2 x^y 2 4 =

En la pantalla aparecerá:

Ejemplo 3

Una persona decide ahorrar una cantidad de dinero cada semana. La primera semana ahorra \$ 40; la segunda, \$ 80; la tercera, \$ 160, y así sucesivamente.

Se observa que la sucesión {40, 80, 160, ...} es una progresión geométrica cuyo término general está dado por:

$$a_n = a_1 r^{n-1} = 40 \cdot 2^{n-1}, \text{ porque } a_1 = 40 \text{ y } r = 2$$

Por tanto, si se quiere determinar la cantidad ahorrada en la séptima semana, se calcula:

$$a_7 = 40 \cdot 2^{7-1} = 40 \cdot 2^6 = 2\,560$$

Actividades resueltas

1. ¿Cuál de las siguientes sucesiones es una progresión geométrica?

a) $a_n = \{1, 3, 9, 27, 81, ...\}$ **b)** $b_n = \{6, 8, 10, 12, ...\}$

Solución:

en **a)** $a_n = \{1, 3, 9, 27, 81, ...\}$ es una progresión geométrica de razón 3, porque $\frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{27}{9} = \frac{81}{27} = 3$

en **b)** $b_n = \{6, 8, 10, 12, ...\}$ no es una progresión geométrica, se trata de una progresión aritmética de diferencia 2.

2. Halla el término general de la sucesión geométrica {4, −8, 16, −32, ...}

Solución:

$a_1 = 4$; $r = -2 \Rightarrow a_n = 4(-2)^{n-1}$

3. Una pelota elástica que se deja caer libremente desde una altura de 40 cm alcanza en cada rebote el 75% de la altura que alcanzó en el rebote anterior. ¿Cuál es la altura aproximada que alcanza en el quinto rebote?

Solución:

Las alturas alcanzadas por la pelota en los sucesivos rebotes forman una progresión geométrica en la cual $a_1 = 40$ y $r = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$. Luego:

$$a_5 = 40 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{5-1} = 40 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{4} = 12{,}65625$$

Concluimos que, en el quinto rebote la pelota alcanza una altura aproximada de 12,66 cm.

Actividades propuestas

4. Halla el término general de la progresión geométrica.

$$a_n = \{2, 6, 18, 54, ...\}$$

5. El primer término de una sucesión geométrica es $\frac{7}{3}$ y la razón es $\frac{2}{3}$.

Halla el término noveno.

6. Una fundación decidió realizar las siguientes donaciones a una asociación dedicada a la lucha contra el cáncer: \$ 600 el primer mes, \$ 1 200 el segundo, \$ 2 400 el tercero y así sucesivamente.

¿Qué cantidad entregó a los dos años de su primera donación? (Utiliza tu calculadora.)

Suma de los términos consecutivos de una progresión geométrica

Calcular uno o varios parámetros de una progresión geométrica conocidos otros parámetros.

Para calcular la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica a_n se escribe $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ y se multiplican los dos miembros por la razón r de la progresión: $r\,S_n = r\,a_1 + r\,a_2 + r\,a_3 + \ldots + r\,a_n$

Teniendo en cuenta que cada número multiplicado por la razón da el siguiente, se obtiene la igualdad:

$r\,S_n = r\,a_1 + r\,a_2 + r\,a_3 + \ldots + r\,a_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n\,r$

y se sustraen las dos expresiones: $r\,S_n - S_n$

$$\begin{aligned} r\,S_n &= a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_n\,r \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n \\ \hline r\,S_n - S_n &= a_n\,r - a_1 \Rightarrow S_n\,(r-1) = a_n\,r - a_1 \Rightarrow S_n = \frac{a_n\,r - a_1}{r-1} \end{aligned}$$

La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica a_n es:

$$S_n = \frac{a_n\,r - a_1}{r-1},\ \text{si } r \neq 1$$

Ejemplo 1 Se puede determinar cuánto suman los cinco primeros términos de la progresión geométrica $a_n = \{1, 3, 9, 27, 81, 243, \ldots\}$, de la siguiente manera:

Se quiere hallar la suma $S_5 = 1 + 3 + 9 + 27 + 81$

$$S_5 = \frac{81 \cdot 3 - 1}{3-1} = 121$$

Los cinco primeros términos de la progresión geométrica a_n suman 121.

Muchas situaciones de la vida cotidiana se pueden resolver usando las progresiones geométricas.

Ejemplo 2 Se tiene un tanque con 1 024 ℓ de agua. El primer día se extrae la mitad del contenido; el segundo, la mitad de lo que quedaba y así sucesivamente todos los días.

¿Qué cantidad de agua se ha extraído del tanque al cabo de siete días?

Para resolver el problema, se puede utilizar la progresión geométrica en la que

$$a_1 = \frac{1\,024}{2} = 512 \text{ y } r = \frac{1}{2}.$$

Estos datos permiten calcular la cantidad de agua extraída el séptimo día:

$$a_7 = a_1\,r^{7-1} = 512\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 8$$

Por tanto, la cantidad total de agua extraída al cabo de siete días es:

$$S_7 = \frac{a_7\,r - a_1}{r-1} = \frac{8\left(\frac{1}{2}\right) - 512}{\frac{1}{2} - 1} = 1\,016\ \ell$$

Utiliza las TIC

Si quieres saber más sobre la suma de los términos consecutivos de una progresión geométrica visita la siguiente página. *https://www.youtube.com/watch?v=BdQ19VL1ql8*

A partir de la expresión: $S_n = \dfrac{a_n r - a_1}{r - 1}$, con $r \neq 1$ se pueden obtener a_n, r o a_1:

$a_n = \dfrac{S_n(r - 1) + a_1}{r}$, si se conocen S_n, r y a_1.

$r = \dfrac{S_n - a_1}{S_n - a_n}$, si se conocen S_n, a_n y a_1.

$a_1 = (a_n - S_n)\, r + S_n$, si se conocen a_n, S_n, y r.

Ejemplo 3

La suma de los seis primeros términos de una progresión geométrica es 315. Si se sabe que el primer término es 5 y el sexto, 160, se puede calcular la razón de la progresión realizando lo siguiente:

$$r = \frac{S_6 - a_1}{S_6 - a_n} = \frac{315 - 5}{315 - 160} = 2$$

Actividad resuelta

1. Suma los doce primeros términos de la progresión $a_n = \left\{36,\ 18,\ 9,\ \dfrac{9}{2},\ ...\right\}$

Solución:

$a_1 = 36;\ r = \dfrac{1}{2}$

Se halla el término duodécimo: $a_{12} = a_1 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{12-1} = 36 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{11} = 0{,}0176$

La suma de los doce primeros términos es:

$$S_{12} = \frac{a_{12}\, r - a_1}{r - 1} = \frac{0{,}0176\left(\frac{1}{2}\right) - 36}{\frac{1}{2} - 1} = 71{,}98$$

Actividades propuestas

2. Halla la suma de los 20 primeros términos de la progresión geométrica $a_n = \left\{1,\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{9},\ \dfrac{1}{27},\ ...\right\}$

3. El primer término de una progresión geométrica es 4 y la razón es -2. Halla la suma de los diez primeros términos.

4. Un equipo de ciclismo programa su entrenamiento semanal en cinco etapas. En la primera etapa recorre una distancia de 40 km y cada etapa sucesiva es $\dfrac{5}{4}$ más larga que la anterior.

¿Cuántos kilómetros recorre el equipo a lo largo de la semana?

5. En cierto tratamiento médico se deben suministrar el primer día 100 mg de medicamento y cada uno de los días siguientes $\dfrac{3}{5}$ miligramos del medicamento suministrado el día anterior. ¿Cuántos miligramos de medicamento toma el enfermo durante diez días de tratamiento?

6. En un cuadrado de 1 m de lado, se unen dos a dos los puntos medios de sus lados para obtener un nuevo cuadrado. En cada nuevo cuadrado se repite el procedimiento.

¿Cuál es la suma de las áreas cuando se ha construido el cuarto cuadrado?

Series geométricas finitas

Una **serie geométrica finita** es la suma de los términos de una sucesión geométrica.

Si a_1 es el primer término de una progresión geométrica y la razón común r es tal que $r \neq 1$, entonces la **enésima suma parcial** de una serie geométrica está dada por

$$s_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

Ejemplo 1

a) Encuentra la quinta suma parcial de una progresión geométrica si $a_1 = 3$ y $r = 4$.

Para la fórmula $s_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$ tenemos que $n = 5$, $a_1 = 3$ y $r = 4$.

Entonces, $s_5 = \frac{3(4^5 - 1)}{4 - 1} \rightarrow s_5 = \frac{3(1\,024 - 1)}{3} \rightarrow s_5 = \frac{3\,069}{3} = 1\,023$.

b) Si $s_n = 93$, $a_1 = 3$ y $r = 2$, ¿cuánto vale n?

Sustituimos los valores de s_n, a_1 y r en la fórmula anterior y obtenemos que:

$$s_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} \rightarrow \quad 93 = \frac{3(2^n - 1)}{2}$$

$$93 = \frac{3(2^n - 1)}{1}$$

$$93 = 3(2^n - 1)$$

$$\frac{93}{3} = 2^n - 1$$

$$31 + 1 = 2^n$$

$$32 = 2^n$$

$$n = 5$$

Ten en cuenta

La media geométrica de dos números no negativos a y b se define por $\sqrt{ab}$.
Los números: a, $\sqrt{ab}$, b forman una progresión geométrica.

Ten en cuenta

Al comparar las tasas de crecimiento, debes tener presente que el crecimiento aritmético presenta un ritmo constante, que se puede representar gráficamente por una **recta**.

Por otro lado, el crecimiento geométrico se puede representar gráficamente por una curva exponencial.

La suma de los términos de una sucesión geométrica infinita forma una **serie geométrica infinita**. Las series infinitas tienen muchas aplicaciones en matemáticas y ciencias naturales.

Si a_1 es el primer término de una progresión geométrica y la razón común r es tal que $|r| < 1$, entonces $s_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$

Actividad resuelta

1. Determina la suma de los términos de la progresión geométrica infinita $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

Tenemos que $a_1 = 1$, $r = \frac{1}{2}$. Como $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, entonces $s_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.
Así, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2$.

Actividades propuestas

2. En una progresión geométrica, si $a_1 = 18$ y $r = 3$, ¿cuánto vale a_7?

3. En una progresión geométrica, si $a_1 = 2$ y $r = \frac{1}{2}$, ¿cuánto vale a_8?

4. En una progresión geométrica, $s_n = 10\,160$, $a_1 = 80$ y $r = 2$. Encuentra n.

5. En una progresión geométrica, $s_n = \frac{127}{8}$, $a_1 = 8$ y $r = \frac{1}{2}$. Encuentra n.

6. Determina la suma de los términos de la progresión geométrica infinita $8, \frac{16}{3}, \frac{32}{9}, \frac{64}{27}, \ldots$

7. Determina la suma de la serie geométrica infinita $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \ldots$

Gráfica de una progresión geométrica

Para construir la representación gráfica de una progresión geométrica, primero tabulamos y luego ubicamos los puntos en la gráfica.

Ten en cuenta

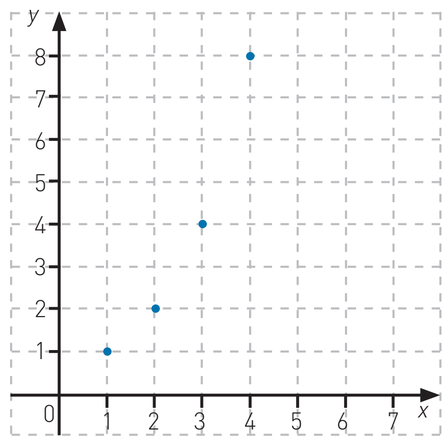
La gráfica de una progresión geométrica tiene la apariencia de una rama de parábola, si la razón es positiva la gráfica es creciente, si la razón es negativa la gráfica es decreciente.

Actividad resuelta

8. ¿Cómo se representa gráficamente la progresión geométrica 1, 2, 4, 8, ...?

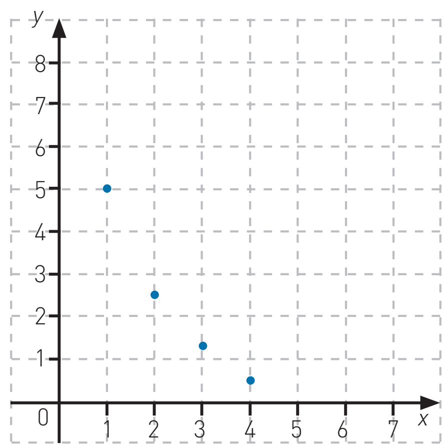
Tabulamos y ubicamos los puntos.

Término	Valor
1	1
2	2
3	4
4	8



9. Si la progresión geométrica está dada por su fórmula general, por ejemplo $a_n = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, entonces la tabla y la gráfica son las siguientes.

Término	–n + 3	Valor
1	$5\left(\frac{1}{2}\right)^0$	5
2	$5\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\frac{5}{2}$
3	$5\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{5}{4}$
4	$5\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\frac{5}{8}$



Observemos que los puntos de una progresión geométrica forman una curva, llamada exponencial.

Actividades propuestas

10. Construye una tabla y una gráfica para las siguientes progresiones geométricas.

11. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

12. $8, 4, 2, 1, \ldots$

13. $a_n = (-1)\,3^{n-1}$,

14. $a_n = -\left(\frac{1}{2}\right)4^{n-1}$

Determina cuáles de las siguientes sucesiones son PG.

15. $3, 12, 48, 192, \ldots$

16. $5, 15, 45, 135, \ldots$

17. $\frac{1}{3}, 1, 3, 6, \ldots$

18. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

Escribe los primeros cuatro términos de la progresión geométrica cuyo primer término y razón común se indican.

19. $a_1 = 3, r = 3$

20. $a_1 = 4, r = 2$

21. $a_1 = -15, r = -2$

22. $a_1 = -12, r = -1$

Escribe el enésimo término de cada PG.

23. $2, -6, 18, -54, \ldots$

24. $1, -2, 4, -8, \ldots$

25. $5, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$

26. $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$

27. Encuentra el séptimo término de la progresión geométrica, considerando que $a_1 = 18$ y $r = 3$.

28. Encuentra el décimo término de la progresión geométrica, considerando que $a_1 = -20$ y $r = -2$.

29. En una progresión geométrica, $a_1 = -30$ y $r = -\frac{1}{2}$.

Encuentra lo que se pide en cada PG.

30. La novena suma parcial cuando $a_1 = 35$ y $r = \frac{1}{5}$.

31. La quinta suma parcial, considerando que $a_1 = 1$ y $r = 0{,}3$.

32. La sexta suma parcial, considerando que $a_1 = 1$ y $r = 0{,}25$

Resuelve.

33. En una serie geométrica, si $s_n = 160$, $a_1 = 5$ y $r = 3$, ¿cuánto vale n?

34. En una serie geométrica, si $s_n = 6\,141$, $a_1 = -3$ y $r = 2$, ¿cuánto vale n?

Determina la suma de los términos de cada progresión geométrica.

35. $9, -1, \frac{1}{9}, -\frac{1}{81}, \ldots$

22. $\frac{5}{3}, 1, \frac{3}{5}, \frac{9}{25}, \ldots$

Determina cuáles de las siguientes sucesiones son progresiones geométricas.

36. $1, -x^2, -x^4, -x^6, \ldots$

24. $1, -x^2, x^4, -x^6, \ldots$

Resuelve.

37. Encuentra el enésimo término de la progresión geométrica 300, −30, 3, −0.3, ...

38. ¿Cuánto vale la suma $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$?

39. Calcula la serie infinita $-60 + 20 - \frac{20}{3} + \frac{20}{9} - \ldots$

40. El salario de Javier aumenta 15% cada año. Si el salario inicial es de $2 000, ¿cuál será su salario al inicio del año número 25?

41. En una progresión geométrica, $a_2 = 24$ y $a_5 = 648$, encuentra los términos a_1, a_3 y a_4.

Resuelve.

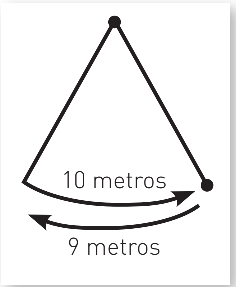
42. ¿Existe la suma de la serie geométrica infinita 3, 9, 27, 81, ...? Explica detalladamente tu respuesta.

43. Encuentra dos medias geométricas entre 2 y 686.

44. En cada oscilación, cierto péndulo recorre 90% de la distancia recorrida en la oscilación anterior.

Por ejemplo, si la oscilación a la derecha fue de 10 metros, la oscilación de regreso hacia la izquierda es de 0,9 × 10 = 9 metros.

Si la primera oscilación es de 10 metros, determina la distancia total recorrida por el péndulo hasta el momento en que se detiene.



Indagamos

Cuando se pretende estudiar el crecimiento de una población es necesario disponer de algún método que permita analizar dicho crecimiento en el transcurso del tiempo.

- ¿Qué métodos crees que existen para predecir el crecimiento poblacional?

Tasas de crecimiento

Una **tasa de crecimiento aritmético** (T_{ca}) es un indicador porcentual asociado a los crecimientos aritméticos, es decir, aquellos que varían linealmente en una unidad de tiempo, y permiten realizar ciertas proyecciones demográficas. Dichas proyecciones son posibles de hacer con:

$$P_n = P_0\left(1+\frac{r_a \cdot n}{100}\right)$$

P_n: población final.

P_0: población inicial.

n: período de proyección de la población en unidad de tiempo.

r_a: tasa de crecimiento aritmético (T_{ca}).

$$r_a = \left(\frac{P_n - P_o}{P_o \cdot n}\right) \cdot 100$$

Una **tasa de crecimiento geométrico** (T_{cg}) es un indicador porcentual asociado a los crecimientos geométricos, es decir, a crecimientos correspondientes a un porcentaje uniforme de la población actual del período. Para realizar proyecciones demográficas es posible utilizar:

$$P_n = P_0\left(1+\frac{r_g}{100}\right)^n$$

P_n: población final.
P_0: población inicial.
n: período de proyección de la población en unidad de tiempo.
r_g: tasa de crecimiento geométrico (T_{cg}).

$$r_g = \left(\sqrt[n]{\frac{P_n}{P_0}} - 1\right) \cdot 100$$

Ten en cuenta

Una tasa de crecimiento (Tc), también denominada tasa de crecimiento porcentual, porcentaje de cambio, tasa de cambio, etc., es un indicador porcentual que sirve para determinar si la población en estudio está creciendo o disminuyendo en un área específica. Se calcula por medio de la expresión:

$$Tc = \left(\frac{\text{Cantidad final - cantidad inicial}}{\text{cantidad inicial}}\right) \cdot 100$$

Ejemplo 1

1. La tabla muestra tres censos realizados en una misma ciudad, en distintos períodos.

Censos en una ciudad			
Año	1971	1981	2011
Población	12 125	13 356	19 827

a) ¿Cuál es la tasa de crecimiento aritmético poblacional entre los años 1971 y 1981? ¿Y entre los años 1981 y 2011?

De acuerdo a la información entregada, se tiene que P_0 = 12 125, P_1 = 13 356 y P_2 = 19 827.

Así, la tasa de crecimiento aritmético entre los años 1971 y 1981, con n = 10, es:

$$r_{a(1971\text{ y }1981)} = \frac{13\,356 - 12\,125}{12\,125 \cdot 10} \cdot 100 \approx 1{,}02\,\%\text{ anual}$$

Por otra parte, la tasa de crecimiento aritmético entre los años 1981 y 2011, con n = 30, es:

$$r_{a(1981\text{ y }2011)} = \frac{19\,827 - 13\,356}{13\,356 \cdot 30} \cdot 100 \approx 1{,}62\,\%\text{ anual}$$

Se puede observar que en la ciudad estudiada, en el período de 1971 a 1981, la tasa de crecimiento poblacional fue de 1,02 % anual, pero entre los años 1981 y 2011, la población presentó una tasa de crecimiento poblacional del 1,62 % anual; lo que representa un ritmo de crecimiento más rápido.

b) ¿Cuál podría ser una estimación de la población para el año 2030 en la ciudad?

Se tiene P_0 = 19 827, P_n = población en el año 2030 y n = (2030 – 2011) = 19.
Además, en la actividad anterior se obtuvo $r_{a(1971 \text{ y } 1981)} \approx 1{,}02$ y $r_{a(1981 \text{ y } 2011)} \approx 1{,}62$.

Para estimar la población de la ciudad en el año 2030, se considera una ponderación de las tasas de crecimiento entre los años 1971 y 1981 y, entre los años 1981 y 2011. Esto se calcula de la siguiente forma:

$$r_a = \frac{r_{a(1971 \text{ y } 1981)} \cdot (1\,981 - 1971) + r_{a(1981 \text{ y } 2011)} \cdot (2011 - 1981)}{(1\,981 - 1971) + (2011 - 1981)}$$

$$= \frac{1{,}02 \cdot 10 + 1{,}24 \cdot 30}{40} = 1{,}185\,\% \text{ anual}$$

De esta manera, la población estimada para el año 2030 es de 24 291 habitantes, ya que:

$$P_n = 19\,827\left(1 + \frac{1{,}185 \cdot 19}{100}\right) \approx 24\,291$$

Actividad resuelta

1. La tasa de crecimiento geométrico entre los años 1971 y 1981, con n = 10, es:

$$r_{g(1971 \text{ y } 1981)} = \left(\sqrt[10]{\frac{13\,356}{12\,125}} - 1\right) \cdot 100 \approx 0{,}97\,\% \text{ anual}$$

De manera análoga, la tasa de crecimiento geométrico entre los años 1981 y 2011, con n = 30, es:

$$r_{g(1981 \text{ y } 2011)} = \left(\sqrt[10]{\frac{19\,827}{13\,356}} - 1\right) \cdot 100 = 1{,}33\,\% \text{ anual}$$

La población estimada para el año 2030 en la ciudad es $P_n = 19\,827\left(1 + \frac{r_g}{100}\right)^{19}$, donde:

$$\frac{r_{g(1971 \text{ y } 1981)} \cdot (1\,981 - 1971) + r_{g(1981 \text{ y } 2011)} \cdot (2011 - 1981)}{(1\,981 - 1971) + (2011 - 1981)} = \frac{0{,}97 \cdot 10 + 1{,}33 \cdot 30}{40} = 1{,}24\,\% \text{ anual}$$

Luego, $P_n = 19\,827\left(1 + \frac{r_g}{100}\right)^{19} = 19\,827\left(1 + \frac{1{,}24}{100}\right)^{19} \approx 25\,058$.

Por lo tanto, para el año 2030, en la ciudad se proyecta una población de 25 058 habitantes.

Actividades propuestas

2. Responde las siguientes preguntas considerando la actividad anterior.

a) ¿Qué diferencias existen entre las tasas de crecimiento aritmético y geométrico?

b) ¿Cuál de ellas resulta más efectiva para analizar el crecimiento de la población de la ciudad? Fundamenta tu respuesta.

9 Módelos de problemas de progresiones aritmeticas y geometrica

Resolver problemas mediante modelos que utilicen progresiones aritméticas y geométricas.

Ten en cuenta

¿Cómo plantear y resolver problemas?

Paso 1. Comprender el problema y hacer una estimación del posible resultado.

Paso 2. Implementar una estrategia y desarrollarla.

Paso 3. Verificar la solución obtenida.

Ejemplo 1

Resuelve los siguientes problemas de progresiones aritméticas.

a) Cada oscilación de un péndulo es 7 cm menor que la anterior. Si la primera oscilación es de 2,4 m, ¿cuántos metros recorre en la duodécima oscilación?

Paso 1. Observamos que cada oscilación decrece 7 cm, es decir, una cantidad constante. Entonces, podemos representar las oscilaciones como una progresión aritmética y encontrar el duodécimo término.

Haciendo una estimación, vemos que en diez oscilaciones decrecerá 70 cm. Entonces, en la duodécima oscilación recorrerá menos de 240 – 70 = 1,7 m.

Paso 2. Debemos trabajar en metros; entonces 7 cm = 0,07 m. Cada oscilación decrece 0,07 m. Luego, la diferencia común es $d = -0{,}07$. Como el primer término de la progresión aritmética es $a_1 = 2{,}40$, tenemos que $a_{12} = 2{,}4 + (11)(-0{,}07) = 1{,}63$. Así, en la duodécima oscilación recorre una distancia de 1,63 m.

Paso 3. Comprobando, obtenemos que $1{,}63 + 11(0{,}07) = 2{,}4$.

b) María pide al banco \$5 000 con 1% de interés mensual. Cada mes está dispuesta a pagar \$ 200,00 al capital, más el interés de 1% en el balance, es decir, a lo que deba del préstamo. ¿Cuánto deberá pagar en total en el tiempo que está pagando el préstamo?

Paso 1. Debemos calcular cuánto pagará cada mes, considerando el pago fijo de \$200 y el interés de 1% en el balance, para después calcular el total.

Paso 2. Primer mes paga: 200 + 0,01(5 000) = 200 + 50 = 250. Luego, para el segundo mes solo debe \$ 4 800 del préstamo. Segundo mes paga: 200 + 0,01(4 800) = 200 + 48 = 248. Así, para el tercer mes solo debe \$4 600 del préstamo.

Siguiendo con este razonamiento vemos que los pagos mensuales son: 250, 248, 246, 244, ... que es una progresión aritmética donde el primer término es $a_1 = 250$ y con diferencia común $d = -2$. El número total de pagos es $n = \frac{5\,000}{200} = 25$, entonces,

$$a_{25} = a_1 + 24d = 250 + 24(-2) = 202 \text{ y } s_{25} = \frac{25(250 + 202)}{2} = 5\,650.$$

Luego, la cantidad pagada al banco es de \$5 650. Esto es, María pagó \$650 de intereses.

Paso 3. Comprobamos que 5 650 = 25(200) + 650, y 650 = 48 + 46 + 44 + ... + 2.

Actividad resuelta

1. Una máquina se compró en 10 000 dólares y se deprecia anualmente a una tasa de 20% de su valor. Si el valor de desecho es de 3 000 dólares, ¿cuántos años han de transcurrir antes de que su valor depreciado sea menor que su valor de desecho?

Paso 1. Debemos calcular cuánto costará la máquina al término de cada año, para después calcular en cuántos años valdrá menos de 3 000 dólares.

Haciendo una estimación, vemos que, si cada vez fuera 20% de depreciación sobre los 10 000 dólares, en cinco años ya no tendría valor la máquina. Lo mismo sucedería en diez años si cada vez fuera 10% de depreciación sobre los 10 000 dólares. Luego, la respuesta será un número mayor que 5 y menor que 10.

Paso 2. Como el valor de la máquina se deprecia 20% cada año, al término del primer año valdrá 80% de su valor, que es lo mismo que $\frac{4}{5}$ de 10 000, es decir, valdrá $\frac{4}{5}(10\,000)$. Al término del segundo año, el valor en dólares será de $\frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}(10\,000)\right) = (10\,000)\left(\frac{4}{5}\right)^2$.

Así, tenemos la PG $10\,000\left(\frac{4}{5}\right), 10\,000\left(\frac{4}{5}\right)^2, 10\,000\left(\frac{4}{5}\right)^3, \ldots$ cuyo quinto y sexto término son $a_5 = 10\,000\left(\frac{4}{5}\right)^5 = 3\,276{,}8$ y $10\,000\left(\frac{4}{5}\right)^6 = 2\,621{,}44$. Entonces, la vida útil de la máquina es de seis años.

Paso 3. Como la máquina se deprecia 20% de su valor cada año, su valor al término de los primeros seis años será 8 000,00, 6 400,00, 5 120,00, 4 096,00, 3 276,80 y 2 621,44 dólares.

2. Se deja caer una pelota de goma desde 10 m de altura. Después de cada rebote, la pelota recorre aproximadamente la mitad de la distancia que recorrió en el rebote anterior. ¿Cuál será aproximadamente la distancia total que recorra antes de detenerse?

Paso 1. Encontramos las distancias que recorre la pelota después de cada rebote y las sumamos.

Paso 2. Primero recorre 10 m. Después del primer rebote recorre $\frac{1}{2}(10)$. Al bajar recorre $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(10)\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2(10)$. Después del segundo rebote recorre $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2(10) = \left(\frac{1}{2}\right)^3(10)$. Continuando con este procedimiento, obtenemos una progresión geométrica cuyo primer término es 10 y cuya razón común es $\left(\frac{1}{2}\right)$. Para obtener cuántos metros recorre en total debemos considerar que al final los rebotes son muy pequeños y, por tanto, también las distancias que recorre. Luego tenemos que calcular la serie infinita. Como $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, tenemos lo siguiente.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{10}{1-\frac{1}{2}} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20$$

Por tanto, la pelota recorrerá 20 m.

Actividades propuestas

3. Enrique salda un préstamo de \$3 250 pagando \$20 en el primer mes y después aumentando el pago en \$15 cada mes. ¿Cuánto tiempo le tomará liquidar su préstamo?

4. Cierto tipo de bacteria se duplica en cantidad cada hora. Si inicialmente existen 1 000 bacterias, ¿cuánto tiempo tardarán en ser 64 000?

Consolida

5. Una empresa instala una máquina que cuesta 700 dólares. El valor de la máquina se deprecia anualmente 150 dólares. Si el valor de desecho es de 200 dólares, ¿cuál es el tiempo de vida útil de la máquina?

6. Si una máquina tiene un costo de 2 000 dólares y se deprecia anualmente 160 dólares, ¿cuál es la vida útil de la máquina si su valor de desecho es de 400 dólares?

7. Una persona invierte \$1 000 en un plan de ahorros del cual percibe intereses con una tasa fija de 10% capitalizable anualmente. ¿Cuál es el valor de este plan de ahorros después de diez años?

8. José invierte \$ 2 000 en una cuenta de ahorros que gana un interés de 10% capitalizable anualmente. Calcula el valor de su inversión después de 20 años?

9. Una pila de troncos tiene 24 de ellos en la primera capa, 23 en la segunda, 22 en la tercera, 21 en la cuarta y así sucesivamente. La última capa tiene diez maderos. Encuentra el número total de troncos de la pila.

10. En una sección de un estadio hay 30 asientos en la primera fila, 32 asientos en la segunda, 34 en la tercera, y así sucesivamente hasta la décima, tras la cual hay nueve filas más, cada una con 50 asientos. ¿Cuántos asientos hay en la sección del estadio?

11. La población de una ciudad se incrementará 10% anual durante cuatro años. ¿Qué tanto por ciento aumentará la población después de los cuatro años?

Teoría de juegos

Identificar problemas sencillos que pueden solucionarse mediante Teoría de Juegos. Escribir la matriz de ganancias con dos jugadores.

Sabías que...

John Nash desarrolló la definición de la estrategia óptima para juegos de múltiples jugadores, donde el óptimo no se había definido previamente, este juego es conocido como el equilibrio de Nash. Este equilibrio es suficientemente general, permitiendo el análisis de juegos no cooperativos además de los juegos cooperativos.

Ten en cuenta

La Teoría de juegos clasifica a los juegos en categorías:

Juego asimétricos y asimétricos

Juego de suma cero y no cero

Criterio de maximin y minimax

Equilibrio de Nash

Juegos Cooperativos

Juegos simultáneos y secuenciales

Juegos de información perfecta

Juegos de información infinita (los superjuegos)

La Teoría de Juegos estudia de manera formal y abstracta las decisiones óptimas que deben tomar diversos adversarios en conflicto, pudiendo definirse como el estudio de modelos matemáticos que describen el conflicto y la cooperación entre entes inteligentes que toman decisiones. en el juego actúan teniendo en cuenta las acciones que tomarían los demás.

Ejemplo 1

Dilema del Prisionero

Se arresta a dos sospechosos por robo, y se les condena, cada uno recibirá una sentencia de 10 años. Sin embargo, si ninguno confiesa, la evidencia bastaría para una sentencia de 1 año por posesión de bienes robados. Se interroga a cada sospechoso por separado y no se permite comunicación entre ellos. El fiscal promete impunidad al que confiese, pero la totalidad de la sentencia de 10 años al que no confiese. Si confiesan ambos, cada uno obtiene una sentencia reducida de 5 años.

La matriz de rendimiento en esta causa interpretando el problema es:

		Sospechoso B	
		Confiesa	No Confiesa
Sospechoso A	Confiesa	5,5	0,10
	No confiesa	10,0	1,1

Interpretación

Las posibilidades de condena en función de la decisión tomada por ambos son las siguientes:

Nadie confiesa. Si ninguno de los dos delatase al otro a la policía, entonces cada uno recibiría una condena de 5 años: (5, 5)

Uno confiesa. Si uno de los prisioneros confiesa y el otro no, entonces el que confiesa recibirá la absolución de su condena y el otro pasará en prisión los 10 años. (0, 10) o (10, 0)

Ambos confiesan. Si ambos deciden confesar entonces recibirán una condena de 1 año para cada uno (1, 1).

La conclusión que explica este ejercicio, es que el pensamiento lógico por separado de cada prisionero hace que al final cada uno tome por separado la decisión que es mejor para él individualmente y no la que sería la mejor decisión para el bien común.

Si nos ponemos en la piel de uno de los dos prisioneros, sabemos que nuestra mejor decisión será la de delatar al otro en cualquier caso, pues así siempre minimizaremos nuestra condena, independientemente de lo que el otro haga. Y dado que el otro prisionero es igual de inteligente y razonará de la misma manera, lo que al final ocurrirá es que ambos acabarán pasando 10 años entre rejas (10, 10), mientras que si ambos hubieran confesado habrían sido condenados sólo 1 año (1, 1) y hubiera existido equilibrio para los dos prisioneros.

Criterios Maximin y Minimax en juegos de estrategia pura

El criterio Maximin: identifica los mínimos por renglón y selecciona el mayor

El criterio Mínimax: identifica los máximos por columna y selecciona el menor.

Si el valor maximin del primer jugador es igual al minimax del segundo jugador, entonces el juego es de estrategia pura (existe un punto de ensilladura). El valor del juego para el primer jugador es su valor maximin.

Utiliza las TIC

Para conocer más sobre la teroría de juegos puedes ingresar a: *http://www.auladeeconomia.com/microap-material9b.htm*

Actividad resuelta

1. Dos gasolineras se encuentran una frente a la otra.

Los consumidores están pendientes del precio y cada gasolinera debe decidir si cobra un precio alto o uno bajo. La matriz de recompensa es la siguiente:

		Gasolinera A		Mínimos
		Precio Alto	Precio Bajo	
Gasolinera B	Precio alto	0, -2	-2, +2	0
	Precio bajo	+2, -2	0, 0	2

Resolviendo y aplicando los criterios maximin y minimax:

		Gasolinera A		Mínimos			
		Precio Alto	Precio Bajo				
Gasolinera B	Precio alto	0, -2	-2, +2	0	0	←	maximin
	Precio bajo	+2, -2	0, 0	2			
Máximos		+2	0 ↑ minimax				

Dado que el maximin del primer jugador es igual al minimax del segundo jugador, entonces el juego es de estrategia pura (existe un punto de ensilladura). Ampos jugadores escogen bajar sus preciso. El valor del juego para el primer jugador es 0 y para el según también.

Actividades propuestas

2. Supón el siguiente juego, completa la tabla, determina el maximin y minimax. Escribe una conclusión.

		Susana		Mínimos
		x	Precio Bajo	
Juan	x	2, 2	-4, 3	
	y	-3, -4	4, 4	

Buen Vivir

Cumplir con las leyes permite una convivencia armónica entre los seres humanos, por lo tanto debemos mantener en todo momento coherencia basada en principios familiares y sociales aprendidos a lo largo de nuestra vida.

El sistema binario es un sistema de numeración natural que trabaja con dos números 1 y 0. En el campo electrónico, utilizar estos códigos intermedios resulta más favorable que utilizar el sistema decimal.

Ten en cuenta

Sistema binario. El sistema de numeración binario es el conjunto de elementos {0,1} con las operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación y lógicas OR, AND y NOT. Los elementos del conjunto binario se denominan bits.

Ejemplo 1

a) Transforma del sistema decimal al sistema binario, para ello divide sucesivamente la cantidad para 2, tomando siempre los residuos. El último resto obtenido es el bit.

Convertie el número 153 a base 2.

153 | 2
1 76 | 2
0 38 | 2
0 19 | 2
1 9 | 2
1 4 | 2
0 2 | 2
0 1

El número 153 a base 2 es 10011001_2

b) Transforma del sistema binario al sistema decimal, para ello multiplica cada uno de los términos por potencias crecientes de 2 a partir de la coma decimal y hacia la izquierda y realiza la suma de operaciones.

Convierte a decimal 10101110_2

El número 10101110_2 convertido a número decimal es: 174

1 0 1 0 1 1 1 0

$0 \cdot 2^0 = 0$

$1 \cdot 2^1 = 2$

$1 \cdot 2^2 = 4$

$1 \cdot 2^3 = 8$

$0 \cdot 2^4 = 0$

$1 \cdot 2^5 = 32$

$0 \cdot 2^6 = 0$

$1 \cdot 2^7 = 128$ $\boxed{2 + 4 + 8 + 32 + 128 = 174}$

Utiliza las TIC

Para conocer más sobre las operaciones binarias puedes ingresar al siguiente enlace: http://ocw.usal.es/ensenanzas-tecnicas/aplicaciones-informaticas-para-humanidades/contenidos/Temas/Tema3-Representacion_de_la_Informacion_-_2ppt.pdf

c) Realiza la suma binaria, para ello procede igual que en el sistema de numeración decimal teniendo en cuenta que si se excede la base lleva como acarreo una unidad en la siguiente cifra de orden superior.

		1	1	0	0	← Acarreos
1 = Cout		1	1	0	1	← A
	+	1	1	0	0	← B
	1	1	0	0	1	← S

		1	1	1	1	← Acarreos
1 = Cout		1	1	1	1	← A
	+	0	0	0	1	← B
	1	0	0	0	0	← S

d) Realiza la resta binaria, para ello procede igual que en el sistema de numeración decimal teniendo en cuenta que si se excede la base lleva como acarreo una unidad en la siguiente cifra de orden superior.

$$\begin{array}{rcccccl} & 0 & 1 & 1 & 0 & \leftarrow & \text{Acarreos} \\ 0 = \text{Cout} & 1 & 0 & 0 & 1 & \leftarrow & \text{A} \\ + & 0 & 0 & 1 & 1 & \leftarrow & \text{B} \\ \hline & 0 & 1 & 1 & 0 & \leftarrow & \text{R} \end{array} \qquad \begin{array}{rcccccl} & 1 & 1 & 1 & 0 & \leftarrow & \text{Acarreos} \\ 1 = \text{Cout} & 1 & 0 & 0 & 1 & \leftarrow & \text{A} \\ + & 1 & 1 & 1 & 0 & \leftarrow & \text{B} \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 1 & \leftarrow & \text{R} \end{array}$$

Actividad resuelta

1. Multiplica los siguientes números binarios para ello procede igual que en el sistema decimal, teniendo en cuenta las sumas en binario.

$$\begin{array}{cccccccl} & & 1 & 0 & 0 & 1 & \leftarrow & \text{A} \\ & & \times & 1 & 0 & 1 & \leftarrow & \text{B} \\ \hline & & 1 & 0 & 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \leftarrow & \text{P} \end{array} \qquad \begin{array}{cccccccccl} & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & \leftarrow & \text{A} \\ & & & \times & 1 & 0 & 1 & 1 & \leftarrow & \text{B} \\ \hline & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & & \\ & & & 1 & 1 & 0 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & & & & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \leftarrow & \text{P} \end{array}$$

Códigos de barra

Elementos del código de barras.

Módulo: Es la unidad mínima o básica de un código. Las barras y espacios están formados por un conjunto de módulos.

Barra: El elemento oscuro dentro del código. Se hace corresponder con el valor binario 1.

Espacio: El elemento claro dentro del código. Se hace corresponder con el valor binario 0.

Carácter: Formado por barras y espacios. Normalmente se corresponde con un carácter alfanumérico.

Los códigos de barras tienen distintas aplicaciones como por ejemplo en la industria, sistemas de paqueterías, pólizas, tarjetas, cerficación de documentos entre otros.

Utiliza las TIC

Cómo crear un código de barras en Excel

1. Baja un paquete de fuentes de códigos de barras en Excel.

2. Abre una nueva hoja de cálculo en Excel. Escribe la fórmula que estarás usando para los códigos de barras en la columna A.

3. Dale formato a la columna B de forma que sea suficientemente ancha para ver el código de barras entero.

4. Haz doble clic en la fórmula en la columna A. Haz click con el botón derecho y selecciona "Copiar". Pega la fórmula en la celda adyacente en la columna B.

5. Selecciona la fórmula en la columna B. Pincha el menú desplegable "Fuente" y busca hasta encontrar la fuente del código de barras y selecciónalo. La fórmula se transformará en un código de barras. Selecciona el código de barras y ajusta su tamaño usando el menú desplegable del tamaño de fuente.

6. Revisa el código de barras de la columna B con la fórmula en la columna A para asegurarte de que tiene el formato correcto. Los errores de formato son bastante comunes cuando se crean códigos de barras, por eso chequea cada código.

Actividades propuestas

2. Indaga, entre los documentos que poseen tus padres, cuáles tiene código de barras.
3. Transforma del sistema decimal al sistema binario: **a)** 43 **b)** 89 **c)** 129 **d)** 432
4. Transforma del sistema binario al sistema decimal: **a)** 101_2 **b)** 101010_2 **c)** 100001_2 **d)** 00101_2

12 Aritmética modular

Comprender el uso de números de identificación en el mundo cotidiano: supermercado, la cédulo de identidad, cuentas bancarias, etc.

Indagamos

Los bancos, las aseguradoras, los usuarios de correos electrónicos, en general los seres humanos , a través de la historia, han inventado mecanismos para proteger los mensajes y ponerlos a salvo de ataques de jackers, sabes tú ¿cómo protegen los bancos a sus usuarios de personas inescrupulosas que quieren entran en sus cuentas?

La ciencia de proteger información, así como ponerla al descubierto se llama criptografía y su origen es tan antiguo como la historia misma. Etimológicamente criptografía viene del griego kryptos que significa oculto. Otras palabras de igual origen son "crípto" y cripta". La primera significa "inentendible", la segunda describe el lugar oculto donde se mantienen restos de muertos ilustres.

Ten en cuenta

Cuando tienes una clave intervienen: Tú, el mensaje, el amigo y el intruso que definen los cuatro elementos básicos de la criptografía. La cuál tiene doble misión:

1. Crear métodos para codificar mensajes y hacerlos crípticos, es decir protegerlos de los ataques de intrusos.
2. Crear métodos para quebrar códigos ajenos, es decir hacer entendibles los mensajes crípticos.

Aritmética modular

En matemática, la artimética modular es un sistema aritmético para clases de equivalencia de números enteros, llamadas clases de congruencia.

Un caso particular de la aritmética modular es la llamada aritmética del reloj.

Ejemplo 1

Cuando a las 10 de la mañana se le agrega 5 horas se llega a las 3 de la tarde, es decir:

$10 + 5 = 15$ o 3 de la tarde.

También si a las 2 de la tarde se le quita 4 horas, el resultado es la 10, lo que equivale a decir:

$14 - 4 = 10$, o 10 de la mañana.

Esta aritmética del reloj se llama más generalmente aritmética módulo 12 y se realiza dentro del conjunto $Z12 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ cuyos elementos se llaman enteros módulo 12.

Sabías que...

Durante la segunda guerra mundial los Estados Unidos usaron el lenguaje de los indios navajos, para enviar mensajes a los comandos en el frente del Pacífico. Ni japoneses ni alemanes pudieron descifrar la compleja sintaxis del lenguaje.

En cambio en esta misma guerra, la inteligencia británica, con ayuda del espionaje checoslovaco, fue capaz de descifrar los mensajes codificados del alto comando alemán a la flota del Atlántico, hecho que ayudó a cambiar el destino de la guerra.

Cualquier número entero es equivalente a un entero módulo 12 que se obtiene como el residuo , "nunca negativo" de la división entre 12.

Ejemplo 2

Si hoy es miércoles y faltan 23 días para mi cumpleaños,¿ en qué día, el nombre del día, celebraré mi cumpleaños?

Al dividir 23 días para 7 días que tiene una semana, obtenemos 3 como cociente y 2 como residuo, es decir, en 23 días caben 3 semanas y 2 días. Se tiene, entonces, la siguiente igualdad:

$23 = 7 \times 3 + 2$

Para determinar qué día es el de mi cumpleaños, añadimos 2 días a miércoles, es decir, mi cumpleaños cae en viernes.

Ejemplo 3

¿A qué es equivalente el número entero 29 con relación al módulo 12?

Para lograrlo divide:

29 ÷ 12 = 2 y residuo 5.

Entonces: 29 es equivalente a 5 módulo 12

Se escribe: $29 \equiv 5 (\text{mod } 12)$ o también se puede expresar como: $\text{mod}(29,12) \equiv 5$

Actividad resuelta

1. Observa lo que sucede al residuo, cuando incrementamos números de uno en uno
y luego lo dividimos entre 3.

0 ÷ 3 = 0 residuo 0

1 ÷ 3 = 0 residuo 1

2 ÷ 3 = 0 residuo 2

3 ÷ 3 = 1 residuo 0

4 ÷ 3 = 1 residuo 1

5 ÷ 3 = 1 residuo 2

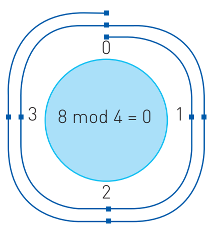
Como puedes observar el residuo comienza en 0 y se incrementa 1 cada vez, hasta que el número alcanza uno menos que el número entre el cual estamos dividiendo.

Después de eso la secuencia se repite

2. Halla 8 mod 4 = ¿?

Con un módulo de 4 podemos hacer un reloj con los números 0, 1, 2, 3

Podemos comenzar en = e ir a través de 8 en una secuencia en el sentido de las manecillas del reloj,1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 0



Terminamos en cero 0.

Por lo tanto 8 mod 4 = 0

Si tenemos A mod B e incrementamos A en un múltiplo de B terminaremos en el mismo punto, es decir:

A mod B = (A + K × B) mod B para cualquier entero K.

Actividades propuestas

1. Resuelve los siguientes ejercicios

a) 1 5 mod 4 **b)** 7 mod 2 **c)** 12 mod 5 **d)** 45 mod 12

2. Realiza un diagrama de reloj con 0, 1 y 2 y calculo 5 mod 3.

3. Resuelve los siguientes problemas:

a) Si hoy es sábado y faltan 32 días para mi cumpleaños, ¿cae en fin de semana mi cumpleaños?, ¿qué día cae?

b) Estamos en el mes de febrero, ¿ en qué mes estaremos 34 meses más tarde?

Utiliza las TICS

En tu calculadora si buscas en el catálogo de funciones encontrara "mod" que cuando selecciones esta función aparecerá "mod("
y tienes que digitar el número, una coma y el módulo . Queda entonces "mod(29, 12) y al diitar enter obtendrás 5.

Sabías que...

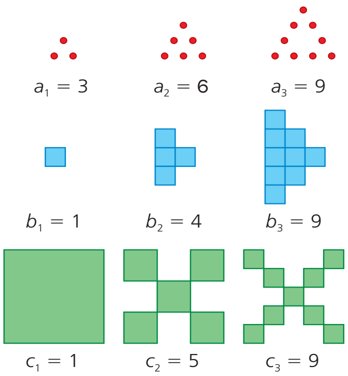
Muchos lenguajes de programación y calculadoras, tienen un operador mod, típicamente representado por el símbolo % .
Si calculas el resultado del resultado de un número negativo, algunos lenguajes te darán resultado negativo.
Por ejemplo: -5 % 3 = -2

Aplicamos

Sucesiones

Modela

1. Encuentra el término general de las sucesiones estudiando sus regularidades



Razonamiento

2. Completa el término que falta en cada sucesión.

   a) 8, 10, 12, ☐, 16, ... **b)** 35, ☐, 25, 20, 15, ...

   c) 0, 3, ☐, 9, 12, ... **d)** $5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \square, \frac{5}{81}, \ldots$

Comunicación

3. Dadas las sucesiones:

   $a_n = 4n - 3 \qquad b_n = (-1)^n \cdot 2n \qquad c_n = n^2 + 2$

   a) Escribe los cinco primeros términos de cada sucesión.

   b) Halla el término general de las sucesiones:

   - $(a_n + b_n)$
   - $(b_n c_n)$
   - $3a_n$
   - $a_n(b_n + c_n)$

Progresiones aritméticas y geométricas

Modelización

Razonamiento

4. Estudia si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas y, en caso afirmativo, halla el término general:

   a) $-8, -4, 0, 4, 8, \ldots$

   b) $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots$

   c) 3, 9, 27, 81, 243, ...

   d) 1, 1, 1, 1, 1, ...

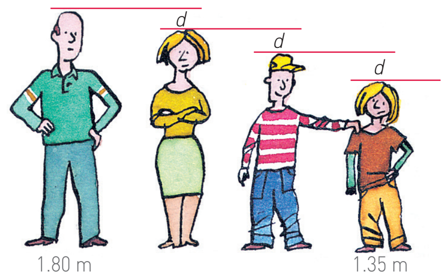
Ejercitación

5. Halla el primer término y el término general de una progresión aritmética cuyo quinto término es 19 y la diferencia es 3.

6. Halla el primer término de la progresión aritmética cuyo término vigésimo es 100 y la suma de los 20 primeros términos es 1 050.

Resolución de problemas

7. La figura representa las alturas de los miembros de una familia. ¿Cuánto mide la madre?, ¿y el hijo?



Resolución de problemas

8. Al comienzo del año, Juan decide ahorrar para comprarse una consola de videojuegos. En enero mete en su alcancía \$ 600 y cada mes introduce la misma cantidad que el mes anterior y \$ 60 más. ¿Cuánto dinero habrá ahorrado al finalizar el año?

Razonamiento

9. ¿Cuántos términos de la progresión aritmética: 4,8,12,16, ... hay que tomar para que el resultado de su suma sea 220?

Resolución de problemas

10. Las anotaciones obtenidas por las cinco jugadoras de un equipo de baloncesto están en progresión aritmética. Si el equipo consiguió 70 puntos y la máxima anotadora obtuvo 24 puntos, ¿cuántos puntos anotaron las restantes jugadoras?

Ejercitación

11. De una progresión geométrica se sabe que su cuarto término es $\frac{27}{8}$ y que la razón es $\frac{3}{2}$. Halla el primer término.

Razonamiento

12. Estudia si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas y, en caso afirmativo, halla el término general:

    a) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{81}, \ldots$

    b) 1, 2, 4, 8, 16, ...

    c) 4, 8, 12, 16, 20, ...

    d) $5, 3, \frac{9}{5}, \frac{27}{25}, \frac{81}{125}, \ldots$

Razonamiento

13. Estudia si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas y, en caso afirmativo, halla el

Complejidad: ● Básico ● Medio ● Avanzado

término general:

a) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{81}, \ldots$

b) 1, 2, 4, 8, 16, ...

c) 4, 8, 12, 16, 20, ...

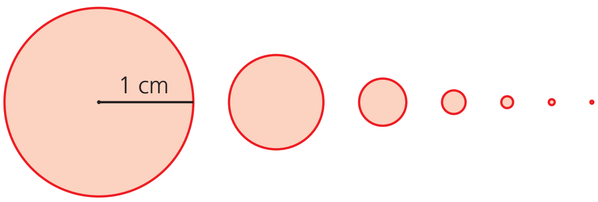
d) $5, 3, \frac{9}{5}, \frac{27}{25}, \frac{81}{125}, \ldots$

Ejercitación

- **14.** El cuarto término de una progresión geométrica es 225 y la razón es 3. Halla la suma de los ocho primeros términos.

Modelación

- **15.** El radio de cada círculo de la figura es la mitad que el del anterior.



Calcula:

a) El área del círculo que ocupa el quinto lugar.

b) La suma de las áreas de los seis primeros círculos de la sucesión.

Resolución de problemas

- **16.** Toma un folio y dóblalo por la mitad. Obtienes dos cuartillas que juntas tendrán un grosor doble que el grosor del folio. Ahora dobla nuevamente las dos cuartillas y obtienes cuatro octavillas, con un grosor cuádruple que el del folio. Si la hoja inicial tiene un grosor de 0,1 mm y fuese tan grande que pudieras repetir la operación 100 veces, ¿qué grosor tendría el fajo resultante?

Refuerza

Ejercitación

- **17.** Escribe el término general de cada progresión aritmética.

a) $-5, -1, 3, 7, \ldots$

b) $-4, \frac{-7}{2}, -3, \frac{-5}{2}, \ldots$

c) $\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \ldots$

Resolución de problemas

- **18.** El número de donantes de sangre en un hospital el primer día de cierto mes de 30 días fue de 30 personas. Si cada día el número de donantes aumentó en siete personas, ¿cuántas personas donaron sangre el último día del mes?

Ejercitación

- **19.** Halla el décimo término de una progresión aritmética cuyo primer término es 4 y la suma de los diez primeros términos es 355.

- **20.** ¿Cuál es la suma de los múltiplos de 7 comprendidos entre 1 y 100?

- **21.** Halla el término general de las progresiones geométricas.

a) $\frac{1}{3}, \frac{1}{15}, \frac{1}{75}, \frac{1}{375}, \ldots$ b) $5, -1, \frac{1}{5}, \frac{-1}{25}, \ldots$

c) $1, \frac{1}{7}, \frac{1}{49}, \frac{1}{343}, \ldots$

- **22.** Calcula el primer término de una progresión geométrica cuyo tercer término es 192 y la razón es 8.

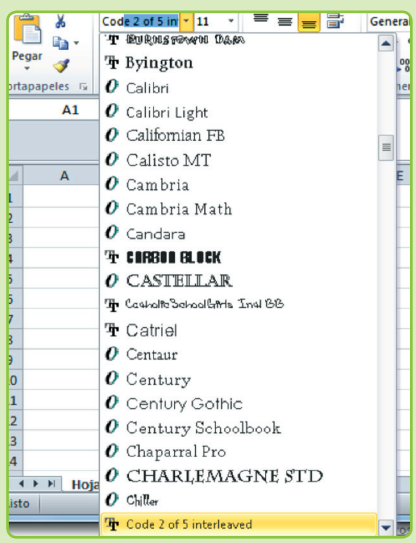
MATEMATICS

Los códigos de barras pueden ser creados fácil y rápidamente usando ***Microsoft Excel.*** La aplicación de la hoja de cálculo puede tomar una fórmula y generar automáticamente un código de barras. Crear códigos de barras en Excel te permite tener una hoja de cálculo de los códigos que puede ser modificada, clasificada y editada.

1. Descarga la fuente Code 2 of 5 interleaved para Excel
2. Guarda el archivo descargado donde creas conveniente, luego procede a descomprimirlo.

Si usas Windows 7

3. Haz clic derecho sobre code25I.ttf y luego en instalar.
4. Después desde Excel verifica que tengas ya instalada la fuente, de ser todo correcto ya puedes empezar a crear tus códigos de barras.



Resolvemos problemas

Etapas en la solución de problemas

El primer paso para resolver un problema es leer el enunciado con atención. No empieces a resolver a ciegas, antes busca estrategias. A veces es útil:

- Experimentar con casos más sencillos.
- Buscar regularidades en el problema y tratar de encontrar una regla general.

Para resolver
un problema debes:
Comprender el enunciado
Proponer un plan
Ejecutar un plan
Revisar la solución

1 **Actividad resuelta**

Problema

¿Cuántas cartas serán necesarias para construir un castillo de seis pisos como el de la figura derecha?, ¿y para n pisos?

Comprender el enunciado del problema.

Tras leer y comprender el enunciado, se experimenta con casos más sencillos que el propuesto.

¿Cuántas cartas serán necesarias para construir un castillo de un piso?, ¿y de dos pisos?...

Proponer un plan

Haz un dibujo esquemático para cada caso.

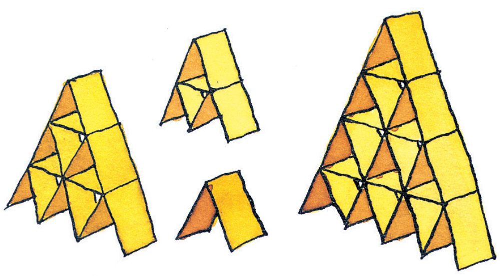
¿Se puede encontrar el número de cartas necesarias para construir los siguientes castillos?

Para buscar regularidades es conveniente organizar los datos en una tabla.

¿Se puede encontrar el número de cartas necesarias para construir cualquier castillo?

A partir de las regularidades encontradas se busca una fórmula para el caso general.

Ejecutar el plan



Número de pisos	Número de cartas	
1	2	$2 = 3 \cdot 1 - 1$
2	7	$7 = 3(1 + 2) - 2$
3	15	$15 = 3(1 + 2 + 3) - 3$
4	26	$26 = 3(1 + 2 + 3 + 4) - 4$
5	...	....
6	...	....

Dibuja los casos más sencillos y se construye una tabla
Para construir un castillo de seis pisos se necesitan $3(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) - 6 = 57$ cartas.
Para n pisos, el número de cartas necesario sará: $3(1 + 2 + 3 + ... + n) - n$
Como el paréntesis es la suma de los n primeros números naturales que forman una progresión aritmética de razón 1, resulta:

$$\text{Número de cartas} = 3 \cdot s_n - n = 3 \cdot \frac{(1 + n) \cdot n}{2} - n = \frac{3n + 3n^2}{2} - n$$

R/ Luego, si el castillo tiene n pisos se necesitan $= \dfrac{3n + 3n^2}{2} - n$ cartas.

2 Actividad resuelta

Problema

Analizando los procesos de calidad en dos empresas de textiles, se contrata a un auditor para estudiar los salarios de los operarios de acuerdo con los aumentos en horas extras. Para esto el auditor pide el salario con que iniciaron los operadores cuando empezaron a ser parte de la empresa hace dos años y cuánto fue el ajuste mensual por sus horas extras. Las empresas le pasaron al auditor la siguiente información:

Empresa 1: El salario mensual inicial era de 10 900 UM y se incrementaba mensualmente en 240 UM por concepto de horas extras.

Empresa 2: El salario mensual inicial era de 8 000 UM y se incrementaba mensualmente en 800 UM por concepto de horas extras.

¿Cuál de las dos empresas pagó más dinero a sus operarios al cabo de 2 años? ¿Cuánto dinero más?

Resolución

Empresa 1

Primer pago

10 900 + 240 = 11 140

Segundo pago

11 140 + 240 = 11 380

Tercer pago

11 380 + 240 = 11 620

Cuarto pago

11 620 + 240 = 11 860

Empresa 2

Primer pago

8 000 + 800 = 8 800

Segundo pago

8 800 + 800 = 9 600

Tercer pago

9 600 + 800 = 10 400

Cuarto pago

10 400 + 800 = 11 200

Como se quiere estudiar el valor dentro de dos años o 24 meses, se pueden aplicar las siguientes fórmulas:

Empresa 1: $S_{24} = 11\,140 + 11\,380 + \ldots + a_{24}$, con $n = 24$, $a_1 = 10\,900$ y $d = 240$.

Por tanto:

$$S_{24} = \frac{24}{2}\,(2(10\,900) + (24 - 1)\,240) = 327\,840$$

Empresa 2: $S_{24} = 8{,}800 + 9{,}600 + \ldots + a_{24}$, con $n = 24$, $a_1 = 8\,000$ y $d = 800$, se reemplaza en la fórmula, así:

$$S_{24} = \frac{24}{2}\,(2(8\,000) + (24 - 1)\,800) = 412\,800$$

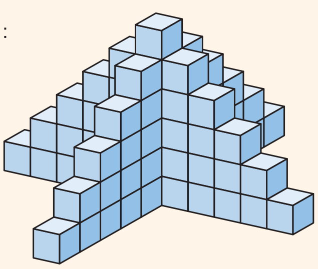
R/ Al cabo de dos años la empresa 2 fue la que pagó más dinero, 84 960 UM más que la empresa 1.

Aplica la estrategia

1. Observa la siguiente secuencia

¿Cuántos puntos se necesitan para construir la figura n-ésima?

2. Observa la torre de cubos: ¿Cuántos cubos se necesitan para construir una figura con diez pisos? ¿Y una figura con n pisos?



Ponemos a prueba destrezas

El problema de los conejos

Andrés, el nieto de don Pascual, regaló a su abuelo una pareja de conejos recién nacidos, para que él los tenga en su finca.

1. Andrés le contó a su abuelo que los conejos tardan un mes en alcanzar la fertilidad y que a partir de entonces tienen una nueva pareja de conejos cada mes. El número de conejos que habría en la finca del abuelo cada mes se observa en la figura.

a) ¿Cuántos conejos tendrá don Pascual en su finca al cabo de seis meses? Explica cómo hiciste el cálculo.

b) Si don Pascual recibió los conejos el 7 de marzo del 2012, ¿cuántos conejos tendrá el 7 de abril del 2013?

c) Elabora una tabla con los datos obtenidos anteriormente y realiza la gráfica de la misma.

d) ¿Encuentras alguna regularidad en la cantidad de conejos que tiene don Pascual cada mes con respecto a los anteriores meses? haz la justificación de tu respuesta.

e) ¿Se puede establecer una sucesión con todos estos números? Si es así, ¿cuál sería?

2. Los números que encontraste anteriormente hacen parte de la sucesión de Fibonacci, la cual fue construida por Leonardo de Pisa (1170-1250).

Algunos términos de la sucesión de Fibonacci son:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, ...

a) Suma los primeros cinco términos de la sucesión. ¿Qué otro número de la sucesión está relacionado con este resultado? ¿Por qué crees que ocurre esto?

b) ¿Puedes adivinar la suma de los primeros trece términos de la sucesión sin sumarlos? Explica tu respuesta.

3. Construye un triángulo rectángulo cuyos catetos tengan una longitud que coincida con dos números consecutivos de la sucesión de Fibonacci.

a) ¿El valor de la hipotenusa se relaciona con algún número de la sucesión de Fibonacci?

b) Construye otros triángulos y determina si es posible generalizar la relación encontrada, teniendo en cuenta la posición de los números. ¿Cuál es la forma general?

4. Toma tres números de la sucesión de Fibonacci. Suma los dos mayores y sustrae el otro del resultado.

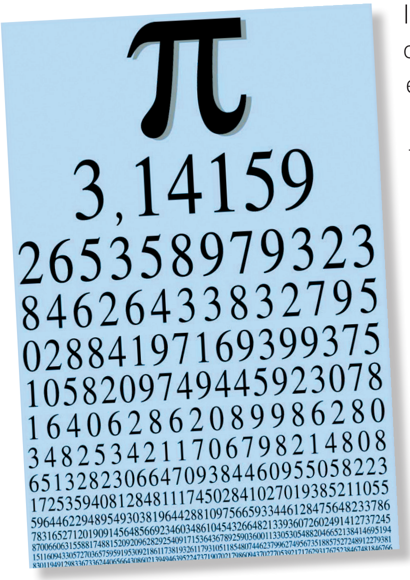
a) ¿Qué observas en el resultado?

b) Repite esto mismo con otras ternas de números y escribe una conclusión utilizando términos matemáticos.

5. Las ramas y las hojas de las plantas se distribuyen buscando siempre recibir el máximo de luz. Por eso ninguna hoja nace justo en la vertical de la anterior. La distribución de las hojas alrededor del tallo de las plantas se produce siguiendo la sucesión de Fibonacci.

Investiga otros fenómenos de la naturaleza que siguen la sucesión de Fibonacci y comenta tus hallazgos en la clase.

Matemática en contexto



Intentar determinar los decimales del número pi, que es una secuencia infinita, ha sido uno de los objetivos de numerosos matemáticos a lo largo de la historia, desde que Arquímedes concibió el método de medir el perímetro de polígonos inscritos y circunscritos en un círculo.

Este sistema se mantuvo durante milenios, pero se trata de un sistema muy laborioso en el cual conseguir un nuevo decimal es sumamente trabajoso. El paradigma de la monumentalidad de esta tarea es el caso del holandés Ludolph van Ceulen, que dedicó la mayor parte de su vida a ello, llegando a determinar 35 decimales empleando polígonos de 2,4 trillones de lados. Una tarea lamentable teniendo en cuenta que existen sucesiones que permiten, con mucho menor trabajo, obtener un resultado mejor. Por ejemplo, se puede conseguir una buena aproximación empleando las siguientes sumas de términos de sucesiones:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \ldots \text{ o también,}$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \ldots$$

1. En cada sucesión escribe *PA*, *PG* o *N* para indicar si la sucesión es una progresión aritmética, una geométrica o ninguna de las dos.

a) 502, 612, 722, … **b)** $a_n = 2^n + 1$

c) 3, 9, 27, … **d)** 5, −10, 15, −20, …

2. Una sucesión donde cada término, después del primero, difiere del anterior en una constante es una…

a) progresión geométrica.

b) sucesión alternante.

c) progresión aritmética.

3. Escribe el enésimo término de cada sucesión.

a) 5, 3, 1, −1, … **b)** 3, −6, 12, −24, …

4. Encuentra los términos indicados de las sucesiones dadas.

a) El décimo término de 2, 7, 12, 17, …

b) El octavo término de 2, 6, 18, 54, …

6. Encuentra los cinco primeros términos de una progresión geométrica que se inicia por $-\frac{3}{2}$ y cuya razón común es $-\frac{1}{2}$.

7. Encuentra la suma para las progresiones que satisfacen las condiciones dadas.

a) $a_1 = -9$, $d = 3$ y $n = 10$ **b)** $a_1 = 9$, $r = \frac{1}{2}$ y $n = 6$

c) $a_1 = 1$, $r = -2$ y $n = 12$ **d)** $a_1 = -4$, $d = -2$ y $n = 7$

8. Escribe el número 54 en el sistema de numeración binario.

9. Escribe el número 101001_2 en el sistema de numeración decimal.

Razonamiento lógico

La bombilla

Al final de un largo pasillo hay una habitación dentro de la cual hay una bombilla. La puerta de la habitación está cerrada de tal manera que no deja pasar ni un solo rayo de luz. Inicialmente, la bombilla está apagada. A lo largo del pasillo, a intervalos de 2 m, hay tres interruptores, pero sólo uno de ellos apaga y enciende la bombilla. Se tiene que avanzar por el pasillo y en cada interruptor decidir si se acciona o no, pero con la condición de que no se puede retroceder luego de pasar por un interruptor. Luego se puede abrir la puerta y entrar en la habitación.

¿Qué hay que hacer para saber cuál es el interruptor que enciende la bombilla?

Autoevaluación

Descripción	Valoración		
	Siempre	A veces	Nunca
Reconoce si una progresión es aritmética o geométrica. (1 - 2)			
Determina uno de los parámetros de una progresión aritmética o geométrica. (3 - 4)			
Resuelve problemas de progresiones. (3 - 4)			
Reconoce si una sucesión está definida recursivamente (3 - 5)			
Obtén un número natural de base 10 en sistema binario. (8)			
Representa un número en base 10 en el sistema binario. (9)			

4

Cónicas. Circunferencia

Bloque: Álgebra y geometría

Es difícil no apreciar la presencia de formas geométricas, y en particular la circunferencia, a nuestro alrededor. Por ejemplo, la bicicleta es un conjunto de tubos metálicos con dos ruedas que aplican la geometría perfectamente.

¿Qué sabes?

En años anteriores aprendiste sobre los elementos del círculo y la circunferencia tales como el radio, cuerda, diámetro, secante y la tangente. En este módulo vamos a determinar la ecuación de la circunferencia canónica y general y a partir de ella vamos a identificar los elementos mas importantes.

¿Qué aprenderás?

- **Reconocer** a la circunferencia a través de la ecuación que la representa.
- **Encontrar** la ecuación de la circunferencia conocidos diferentes elementos: centro, radio.
- **Hallar** la ecuación de la circunferencia con base a la descripción geométrica.
- **Reconocer** una cónica degenerada y el lugar geométrico que representa a partir de la ecuación que se describe.
- **Representar** y analizar cónicas con la ayuda de las TIC.

El Buen Vivir

La matemática está presente en todas las disciplinas deportivas, el incorporar la práctica de algún deporte a nuestras actividades diarias mejora nuestra salud y calidad de vida.

Iniciemos

Activación de conocimientos previos

La rapidez de aceleración de una bicicleta aumenta si las llantas son más ligeras, por esta razón las bicicletas de carretera y las de pista tienen ruedas ligeras y finas y neumáticos estrechos. En cambio, que las bicicletas de montaña, que se utilizan para saltar rocas y depresiones del terreno, requieren –por ende– de mayor resistencia y exigen mayor destreza en su manejo; éstas usan ruedas más anchas, pesadas y neumáticos más robustos.

- ¿Qué principios geométricos crees que se utilizan en la construcción de las ruedas de la bicicleta?
- ¿Qué relación se puede establecer entre el diámetro de la rueda de la bicicleta y la capacidad de aceleración y de velocidad?

Objetivos educativos del módulo

- Reconocer los diferentes tipos de cónicas y utilizarlas en problemas de aplicación a la física y a la astronomía.
- Encontrar los elementos de una cónica a partir de su ecuación y –recíprocamente– determinar ecuaciones de cónicas a partir del conocimiento de diferentes propiedades.

Fotografía Ministerio del Deporte Ecuador

1 Secciones cónicas

Reconocer una cónica degenerada y el lugar geométrico que representa a partir de la ecuación.

Indagamos

Cuando hablamos de las curvas cónicas nos estamos refiriendo a la circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola. Pero la pregunta es ¿por qué se llama cónicas a dichas curvas?

Sabías que...

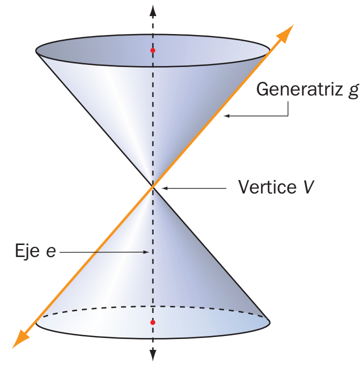
La superficie iluminada por una lámpara sobre una pared adopta una forma circular, elíptica o hiperbólica según la inclinación con la que se proyecte.

Una **superficie cónica** es aquella que se obtiene al hacer girar una recta ***g*** llamada **generatriz** alrededor de otra recta ***e*** llamada eje, cuando ***g*** y ***e*** son secantes. El punto de corte de las dos rectas se llama **vértice *V*** de la superficie.

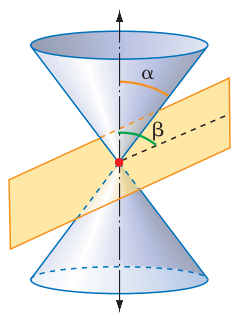
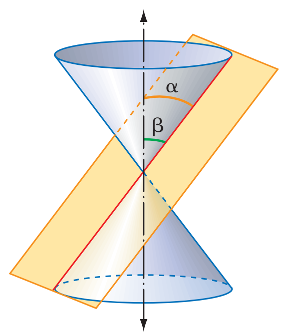
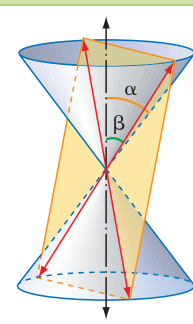
Esta superficie está compuesta por dos conos adosados por el vértice y simétricos uno del otro con respecto al vértice.

Desde otro punto de vista, la superficie está formada por infinitas generatrices que pasan por ***V*** y forman el mismo ángulo con el eje (una de ellas es la recta ***g***).

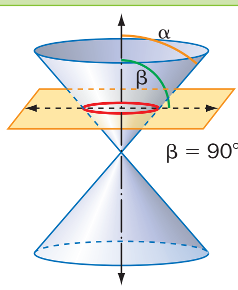
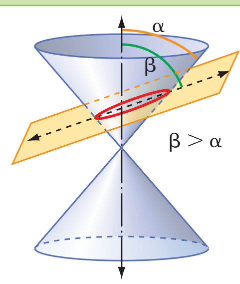
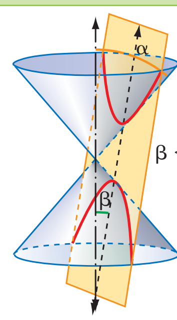
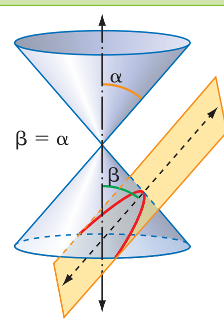
Al cortar la superficie cónica con un plano se obtienen unas **secciones** que se llaman **cónicas**.



- Cuando el plano contiene al vértice se obtienen las llamadas **cónicas degeneradas**. Según la relación que haya entre el ángulo α que forma la generatriz con el eje y el ángulo β que forma el plano con el eje, se obtiene un punto, una recta o un par de rectas secantes.

Un punto	Una recta	Par de rectas secantes
		
$\alpha < \beta$	$\alpha = \beta$	$\alpha > \beta$

- Cuando el plano no contiene al vértice de la superficie, se obtienen las **cónicas no degeneradas**. Se pueden dar los cuatro casos representados a continuación, dependiendo del valor de los ángulos comprendidos entre el eje y el plano secante (β) y entre el eje y la generatriz (α).

Circunferencia	Elipse	Hipérbola	Parábola
			
El plano secante es perpendicular al eje.	El plano secante forma con el eje un ángulo mayor que con las generatrices.	El plano secante forma con el eje un ángulo menor que con las generatrices y corta a las dos hojas de la superficie cónica.	El plano secante es paralelo a una generatriz y corta solo a una de las hojas.
La cónica es una curva cerrada y corta a todas las generatrices.		La cónica es una curva abierta y no corta a todas las generatrices.	

Ecuación general de segundo grado

La ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde A, B, C, D, E y F son números reales y A, B y C son diferentes de cero, se denomina ecuación general de segundo grado y permite determinar una sección cónica.

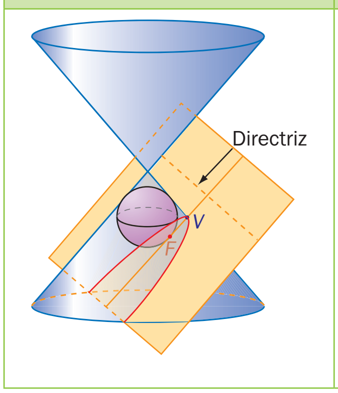
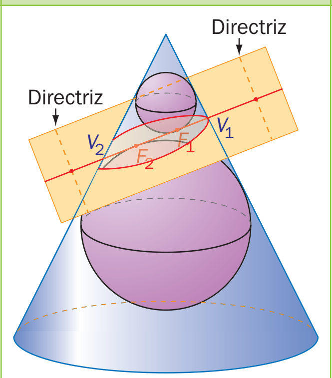
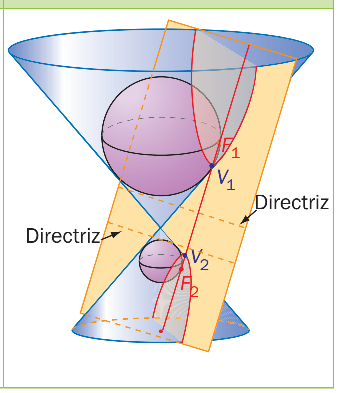
Si la cónica es no degenerada, de acuerdo al signo de $B^2 - 4AC$ se puede establecer de qué tipo es. Así:

- Si $B^2 - 4AC < 0$, se trata de una elipse.
- Si $B^2 - 4AC = 0$, la curva es una parábola.
- Si $B^2 - 4AC > 0$, es una hipérbola.

La expresión $B^2 - 4AC$ se llama **discriminante** de la ecuación.

Elementos de las cónicas

- El **foco** F o los **focos** de una sección cónica son los puntos de tangencia del plano secante que genera la cónica con las esferas inscritas al cono, que son tangentes, a la vez, al plano.
- La **directriz** de una curva cónica es la recta de intersección del plano secante con el plano que contiene a la circunferencia de tangencia entre el cono y la esfera que, siendo tangente al plano secante, está inscrita en la circunferencia cónica.
- Dado un punto de la cónica, se llama **excentricidad** a la razón constante entre la distancia de dicho punto al foco y a la directriz correspondiente.

PARÁBOLA	ELIPSE	HIPÉRBOLA
		

Ten en cuenta

La excentricidad de una cónica siempre es positiva.

Utiliza las TIC

Mira el video interactivo que muestra la generación de las cónicas, para ello ingresa a: *http://www.youtube.com/watch?v=TN6mudrIdbk*

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1. Usa el discriminante para determinar si la ecuación dada corresponde a una parábola, elipse o hipérbola.

a) $x^2 + 2xy + y^2 + x - y = 0$

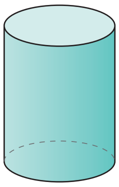
b) $153x^2 + 192xy + 97y^2 = 225$

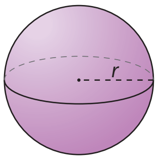
c) $9x^2 - 24xy - 16y^2 = 100x - 100y - 100$

d) $25x^2 - 120xy = -144y^2 + 156x + 65y$

e) $53x^2 + 72xy + 73y^2 - 40x + 30y = 75$

2. Dibuja dos secciones producidas al trazar dos planos secantes en el cilindro y en la esfera.

a) 

b) 

Ecuación ordinaria y canónica de la circunferencia en el plano

Encontrar la ecuación de una circunferencia conocidos diferentes elementos.

Ten en cuenta

Un **lugar geométrico** en el plano es un conjunto de puntos que satisfacen una propiedad o condición geométrica determinada.

Indagamos

Si una circunferencia es simétrica respecto al origen, ¿cuáles son las coordenadas de su centro?

Ten en cuenta

El **diámetro** es la cuerda de mayor longitud de una circunferencia.

En esta lección veremos cómo encontrar la ecuación ordinaria de la circunferencia. Antes de empezar, recordaremos algunas de sus características y elementos que estudiamos en años anteriores.

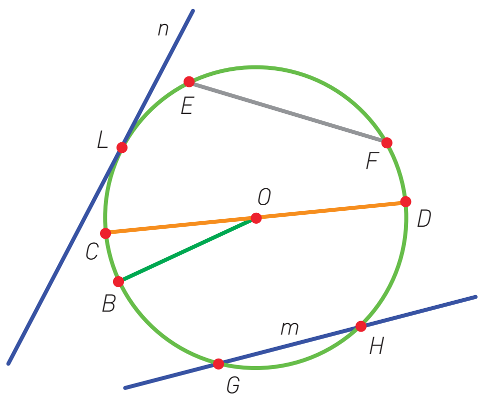
En sentido estricto, los términos **círculo** y **circunferencia** no son sinónimos, aunque están intrínsecamente relacionados.

La **circunferencia define a una curva**, formada por un conjunto de puntos en el plano, que equidistan de un punto fijo llamado centro. En cambio, el **círculo se refiere a una superficie** formada por los puntos interiores de la circunferencia, además de ella. En otras palabras, el círculo es la superficie delimitada por una circunferencia.

Si O es el centro de una circunferencia cuyo radio mide $r > 0$, cualquier punto P de la circunferencia cumple con la condición $\overline{OP} = r$.

En el caso del círculo, si O es su centro, su radio es $r > 0$, y P es un punto cualquiera en él, la condición que lo define como lugar geométrico es $\overline{OP} \leqslant r$.

Por consiguiente, cada vez que se forma una circunferencia queda definido un círculo: la superficie delimitada por esta. Es claro que ambos comparten el mismo centro y radio; quizá por este motivo muchos usan indistintamente dichos conceptos, aun cuando no signifiquen lo mismo.



Ahora definiremos las rectas notables de una circunferencia.

Radio: un segmento cuyos extremos son el centro y un punto cualquiera de la circunferencia. Por ejemplo, el segmento $\overline{OB}$ en la figura.

Cuerda: un segmento cuyos extremos son dos puntos cualesquiera de la circunferencia. Por ejemplo, el segmento $\overline{EF}$ en la figura.

Diámetro: una cuerda que pasa por el centro. Por ejemplo, el segmento $\overline{CD}$ en la figura.

Secante: una recta que interseca a la circunferencia en dos puntos. Por ejemplo, la recta m que pasa por G y H en la figura.

Tangente: una recta que interseca a la circunferencia en un solo punto. Por ejemplo, la recta n que interseca a la circunferencia en el punto L de la figura. El punto donde la recta tangente interseca a la circunferencia se denomina punto de tangencia.

Las rectas notables de la circunferencia cumplen algunas propiedades que ya conoces:

a) Una recta tangente a una circunferencia en un punto P es perpendicular al radio que pasa por ese punto.

b) Las semirrectas tangentes a una circunferencia desde un punto P exterior al círculo tienen la misma longitud.

En conclusión, dados el centro de la circunferencia (O), su radio ($r > 0$), y un punto cualquiera en ella (P), la condición que define a la circunferencia como lugar geométrico es $\overline{OP} = r$.

Para encontrar la ecuación de la circunferencia, se consideran las coordenadas de estos puntos. Si $O = (h, k)$ y $P = (x, y)$, se tiene que

$$\overline{OP} = r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

de donde, al elevar al cuadrado obtenemos

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad \boldsymbol{E_1}$$

Recíprocamente, si un punto $Q(x_1, y_1)$ satisface la ecuación $\boldsymbol{E_1}$, se tiene que

$$(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 = r^2$$

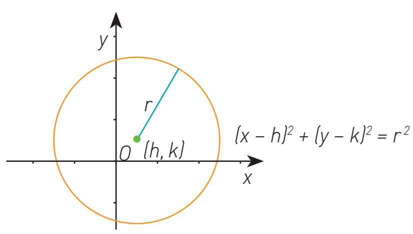
al calcular la raíz cuadrada obtenemos

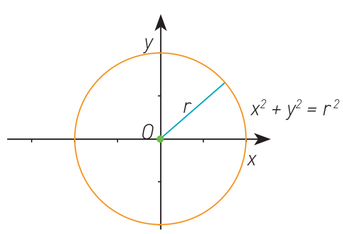
$$\sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2} = r = \overline{OQ}$$

La distancia de Q a O es r y, por lo tanto, el punto Q está en la circunferencia.

En el caso que el punto O sea el origen, $h = 0$ y $k = 0$, la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio $r > 0$ es

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \mathrm{E_2}$$





La ecuación $\boldsymbol{E_1}$ se le llama ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en (h, k) y radio r. Esta se reduce a la forma canónica, ecuación $\boldsymbol{E_2}$, cuando $h = 0$ y $k = 0$. Independientemente del nombre, la ecuación en esta forma, que incluye los binomios sin desarrollar, muestra de modo explícito las coordenadas del centro y el cuadrado del radio.

> La **ecuación ordinaria** de una circunferencia con centro en el punto $\boldsymbol{(h, k)}$ y radio $\boldsymbol{r > 0}$ es $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$. Si la circunferencia tiene **centro en el origen**, la ecuación se reduce a la **forma canónica**, $x^2 + y^2 = r^2$.

De la definición anterior es posible afirmar que si se conocen el centro y el radio de una circunferencia, se determinará su ecuación en la forma ordinaria.

Sabías que...

La distancia entre dos puntos en el plano, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, está dada por

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo 1

Determina la ecuación correspondiente a cada circunferencia.

a) Con centro en el punto $P(3, -4)$ y radio 6.

Como la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en el punto de coordenadas (h, k) y radio r es $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, la ecuación buscada es

$$(x - 3)^2 + (y - (-4))^2 = 6^2 \rightarrow$$

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 36$$

b) Con centro en el punto $P(0, 0)$ y radio 5.

En este caso la ecuación buscada es

$$x^2 + y^2 = 5^2 \rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

c) Con centro en punto $(-1, 4)$ y pasa por el punto $(4, 5)$.

Para determinar el radio del círculo, calculamos la distancia del centro $(-1, 4)$ al punto en la circunferencia $(4, 5)$:

$$r = \sqrt{(-1 - 4)^2 + (4 - 5)^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$$

Por lo tanto, la ecuación buscada es

$$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 26$$

Buen Vivir

Los redondeles de la ciudades son construidos en forma de circunferencia para dar mayor fluidez al tránsito vehicular. Solo en Quito hay aproximadamente 33 redondeles muchos de los cuales van a ser reestructurados para dar una mejor armonía a la ciudad y garantizar una fluidez del tránsito más efectiva para mejorar la calidad de vida de las personas.

Ejemplo 2

Encuentra el centro y el radio de la circunferencia dada su ecuación.

a) $x^2 + y^2 = 16$

Por la forma de la ecuación sabemos que la circunferencia tiene centro en el origen y que $r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$.

b) $(x - 8)^2 + (y + 3)^2 = 49$

En este caso, por la ecuación sabemos que la circunferencia tiene centro en el punto $(8, -3)$ y que $r^2 = 49 \Rightarrow r = 7$.

Ejemplo 3

Determina en cada caso la ecuación ordinaria de la circunferencia determinada por las condiciones propuestas. Construye su gráfica.

a) Los puntos $(9, 0)$ y $(-3, 0)$ son extremos de uno de sus diámetros.

Sabemos que cualquier diámetro pasa por el centro de la circunferencia, y que el centro es el punto medio de cualquier diámetro, por lo tanto, el centro tiene coordenadas (h, k) tales que

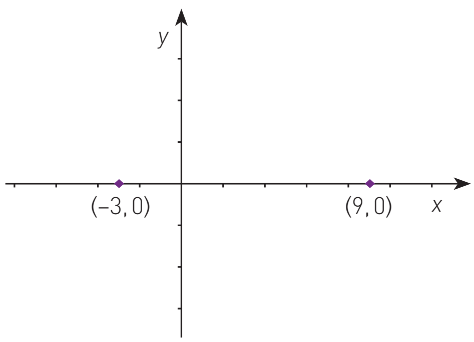
$$h = \frac{9 + (-3)}{2} = \frac{6}{2} = 3 \qquad k = \frac{0 + 0}{2} = 0$$

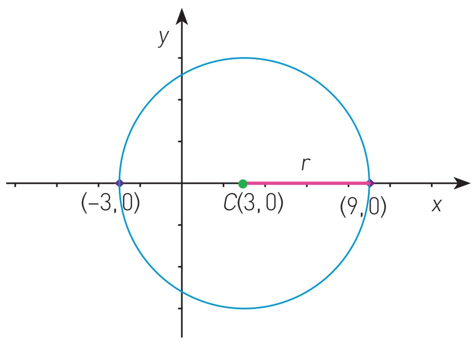
Entonces el centro de la circunferencia es $C(3, 0)$. Para conocer el radio, calculamos la distancia entre el centro y cualquiera de los extremos del diámetro. Ya que los extremos y el centro de la circunferencia están sobre el eje x, se tiene

$$r = |9 - 3| = |6| = 6$$

Así, la ecuación buscada es

$$(x - 3)^2 + y^2 = 36$$





b) Es concéntrica con la circunferencia $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 17$ y tangente a la recta $2x + y = -6$.

Como la circunferencia que buscamos tiene el mismo centro que la circunferencia dada, sólo se necesita encontrar su radio. Puesto que la circunferencia buscada es tangente a la recta $2x + y = -6$, el radio por el punto de tangencia debe ser perpendicular a esta recta. Buscamos la ecuación de la perpendicular a la recta dada que pase por el centro de la circunferencia; esta recta pasa por el punto $(5, 5)$ y tiene pendiente $\frac{1}{2}$. Su ecuación es $-x + 2y = 5$.

Ahora bien, para localizar el punto de tangencia, encontramos la intersección de estas dos rectas:

$$2x + y = -6 \qquad \boldsymbol{E_1}$$

$$-x + 2y = 5 \qquad \boldsymbol{E_2}$$

Para encontrar la intersección de dos rectas, encontramos una pareja de números reales que sean solución común de ambas ecuaciones, esto es, resolvemos el sistema de ecuaciones lineales. Al hacerlo, encontramos el punto de intersección de las rectas ***E*** con coordenadas $(-\frac{17}{5}, \frac{4}{5})$. Podemos así determinar el radio que es la distancia entre los puntos C y E, es decir,

$$r = \sqrt{\left(5 + \frac{17}{5}\right)^2 + \left(5 + \frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{441}{5}}$$

entonces la ecuación ordinaria de la circunferencia buscada es:

$$(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = \frac{441}{5}$$

Ten en cuenta

El **punto medio** (x, y) de dos puntos en el plano, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, está dado por

$$x = \frac{x_2 + x_1}{2}$$

$$y = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

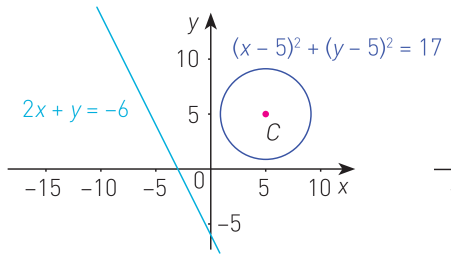
Ten en cuenta

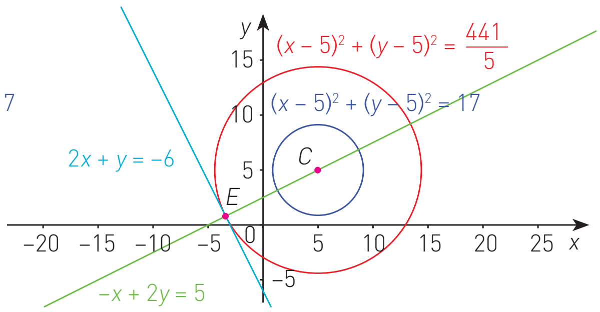
$Ax + By + C = 0$, es la **ecuación general de la recta**, donde la pendiente (m) de la recta está determinada por la expresión $m = -\frac{A}{B}$.

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si $m_1 m_2 = -1$.

Utiliza las TIC

Existen calculadoras programables como la fx 9860 SDII que te permiten graficar de forma rápida la circunferencia conociendo la ecuación general o la forma canónica.





Actividad resuelta

Halla en cada caso la ecuación ordinaria de la circunferencia determinada por las condiciones propuestas. Traza su gráfica.

1. Pasa por el punto (2, 1) y es tangente a la recta $x + 3y + 1 = 0$ en el punto (5, –2).

Sean (h, k) las coordenadas del centro de la circunferencia. Como los puntos (2, 1) y (5, –2) están en la circunferencia, se sabe que equidistan del centro:

$$\sqrt{(h-2)^2 + (k-1)^2} = \sqrt{(h-5)^2 + (k+2)^2} \qquad \boldsymbol{E_1}$$

elevamos al cuadrado para eliminar los radicales:

$$(h-2)^2 + (k-1)^2 = (h-5)^2 + (k+2)^2$$

desarrollamos los cuadrados:

$$h^2 - 4h + 4 + k^2 - 2k + 1 = h^2 - 10h + 25 + k^2 + 4k + 4$$

simplificamos:

$$-h + k + 4 = 0 \qquad \boldsymbol{E_2}$$

Además, como la recta $x + 3y + 1 = 0$ es tangente a la circunferencia en el punto (5, –2), el centro del círculo se encuentra sobre la perpendicular a la recta por ese punto.

La pendiente de la recta $x + 3y + 1 = 0$ es $-\frac{1}{3}$; por lo tanto, la pendiente de una recta perpendicular es 3. La ecuación de la recta perpendicular a la recta $x + 3y + 1 = 0$, que pasa por (5, –2) y en la que se ubica el centro de la circunferencia, es entonces $-3x + y + 17 = 0$. Como el centro se encuentra en esta recta, sus coordenadas satisfacen su ecuación:

$$-3h + k + 17 = 0 \qquad \boldsymbol{E_3}$$

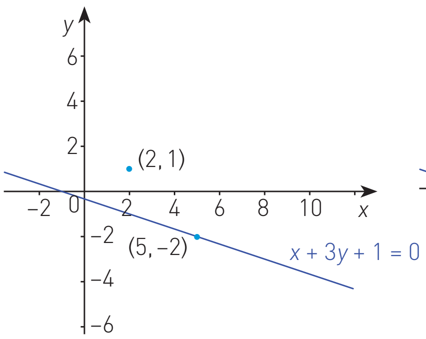
Resolvemos el sistema de ecuaciones $\boldsymbol{E_2}$ y $\boldsymbol{E_3}$ y obtenemos las coordenadas del centro.
Al despejar h en ambas ecuaciones, se tiene

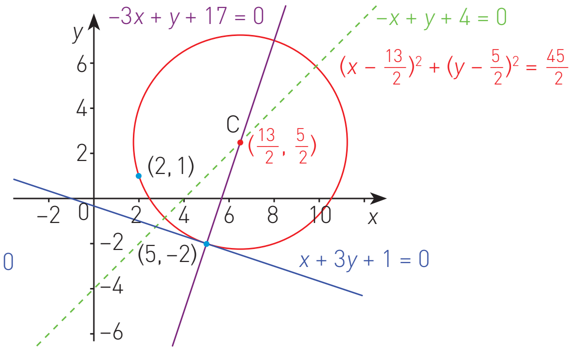
$$k + 4 = \frac{k+17}{3} \rightarrow 3k + 12 = k + 17 \rightarrow 2k = 5 \rightarrow k = \frac{5}{2}$$

Al sustituir el valor de k en $\boldsymbol{E_2}$ se tiene que $h = \frac{13}{2}$. Para determinar el radio, se sustituye el valor de h y k en algún miembro de la ecuación $\boldsymbol{E_1}$:

$$r = \sqrt{\left(\frac{13}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{45}{2}}$$

La ecuación ordinaria de la circunferencia es $\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{45}{2}$.





2. Pasa por los puntos (2, 4) y (4, 0) y su centro está sobre la recta $2x + 3y = 5$.

Para determinar el centro del círculo, y su radio, llamemos (h, k) a las coordenadas del centro y r, a la medida del radio. La distancia del centro del círculo (h, k) a los puntos (2, 4) y (4, 0) es igual al radio del círculo (r). Por lo tanto,

$$r = \sqrt{(h-2)^2 + (k-4)^2} \qquad \boldsymbol{E_{1a}}$$

$$r = \sqrt{(h-4)^2 + (k-0)^2} \qquad \boldsymbol{E_{1b}}$$

De donde, igualamos las ecuaciones E_{1a} y E_{1b}:

$$\sqrt{(h-2)^2 + (k-4)^2} = \sqrt{(h-4)^2 + (k-0)^2}$$

elevamos al cuadrado para eliminar las raíces:

$$(h-2)^2 + (k-4)^2 = (h-4)^2 + (k-0)^2$$

desarrollamos los binomios:

$$h^2 - 4h + 2^2 + k^2 - 8k + 4^2 = h^2 - 8h + 4^2 + k^2$$

simplificamos:

$$h - 2k = -1 \qquad \boldsymbol{E_2}$$

Además, como el centro de la circunferencia pertenece a la recta $2x + 3y = 5$, sus coordenadas deben satisfacer esa ecuación, por consiguiente, sustituimos x y y por las coordenadas del centro h y k, respectivamente:

$$2h + 3k = 5 \qquad \boldsymbol{E_3}$$

Resolvemos el sistema $\boldsymbol{E_2}$, $\boldsymbol{E_3}$ y obtenemos

$$k = 1 \quad \text{y} \quad h = 1$$

Sustituimos los valores de h y k en la ecuación $\boldsymbol{E_{1b}}$.

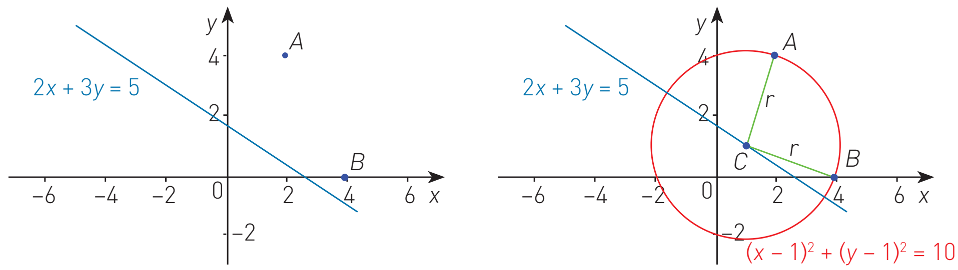
$$r = \sqrt{(h-4)^2 + (k-0)^2} = \sqrt{(1-4)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10}$$

Sabías que...

Una forma de resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos variables consiste en despejar una variable en ambas ecuaciones, e igualar las expresiones obtenidas para encontrar el valor de la otra variable.

Buen Vivir

La constancia, decisión y orden en la resolución de sistemas cuadráticos es fundamental para la solución de los problemas matemáticos y de la vida.



Por lo tanto, la ecuación ordinaria de la circunferencia es

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 10$$

Ten en cuenta

La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus extremos; se construye trazando la perpendicular por su punto medio.

Actividades propuestas

Encuentra la ecuación ordinaria de cada circunferencia.

1. Con centro en el punto $(-1, -1)$ y radio 6.

2. Con centro en el punto $(0, 2)$ y radio 5.

3. Con centro en el origen y radio 11.

Encuentra la ecuación ordinaria de la circunferencia.

4. Con centro en $(-2, -1)$ y radio $\sqrt{10}$.

5. Con centro en el origen y radio 4.

6. Con centro en $(-5, 8)$ y radio $\dfrac{3}{2}$.

Encuentra el centro y el radio de cada circunferencia dada su ecuación en la forma ordinaria o canónica.

7. $x^2 + y^2 = 13$

8. $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 15$

9. $(x-3)^2 + y^2 = 16$

10. $x^2 + (y-5)^2 = 10$

Encuentra el centro y el radio de cada circunferencia.

11. $x^2 + y^2 = 23$

12. $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = 10$

13. $x^2 + (y+1)^2 = 17$

14. $x^2 + y^2 = 5$

Determina la ecuación ordinaria de cada circunferencia y construye su gráfica.

15. Los puntos $(2, 2)$ y $(6, 4)$ son extremos de uno de sus diámetros.

16. Los puntos $(3, 1)$ y $(-1, -3)$ son extremos de uno de sus diámetros.

17. Es concéntrica con la circunferencia $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 8$ y tangente a la recta $x - y - 1 = 0$.

Determina la ecuación ordinaria de cada circunferencia y construye su gráfica.

18. Pasa por los puntos $(1, 1)$ y $(5, 5)$ y su centro está en la recta $x - 2y = 3$.

19. Pasa por los puntos $(2, -3)$ y $(2, 1)$ y su centro está en la recta $x - y = 0$.

20. Pasa por el punto $(10, 2)$ y es tangente a la recta $x + y = 3$ en el punto $(4, -1)$.

21. Pasa por el punto $(10, 0)$ y es tangente a la recta $-2x + y = 0$ en el punto $(2, 4)$.

La forma general de la ecuación cuadrática en dos variables x, y es

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

donde A, B, C, D, E y F son constantes, y al menos un valor de A, B o C es diferente de cero, ya que si las constantes A, B y C son todas cero, se obtiene una ecuación lineal. Los términos cuadráticos (de grado dos) de la ecuación son Ax^2, By^2 y Cxy.

Hemos visto con anterioridad cómo construir gráficas en el plano cartesiano a partir de ecuaciones con dos variables, además de la relación que existe entre las ecuaciones lineales con dos variables y las rectas que se representan en el plano cartesiano.

Conviene preguntarse en qué condiciones una ecuación cuadrática con dos variables tiene asociada una curva en el plano, y de qué tipo es la gráfica. En esta lección analizaremos la forma de la ecuación general de la circunferencia e identificaremos la relación entre los coeficientes de su ecuación, las coordenadas de su centro y la longitud de su radio.

Indagamos

La ecuación de una circunferencia es:

$x^2 + y^2 - 2x - 4x - 11 = 0$. Encuentra la longitud de la cuerda que está sobre la recta $x - y - 4 = 0$.

Forma de la ecuación general

En el caso de la circunferencia con centro en el punto (h, k) y radio $r > 0$, se ha encontrado que su ecuación ordinaria es $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$. Si desarrollamos los binomios de la ecuación ordinaria, obtenemos

$$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 = r^2$$

reagrupamos términos:

$$x^2 + y^2 - 2xh - 2yk + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

Si hacemos $D = -2h$, $E = -2k$, $F = h^2 + k^2 - r^2$, se puede escribir la ecuación como:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad \textbf{E}_1$$

Por consiguiente, de la ecuación ordinaria de la circunferencia se obtiene una ecuación cuadrática de la forma E_1, a la cual llamamos ecuación general de la circunferencia. En esta ecuación cuadrática, $C = 0$ y $A = B = 1$.

Ahora, cabe preguntarse si toda ecuación cuadrática de la forma E_1 corresponde a una circunferencia en el plano. Para responder esta interrogante, veamos en qué condiciones se convierte la ecuación cuadrática de la forma E_1 en la ecuación ordinaria de una circunferencia.

Sabías que...

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen la misma solución.

Al sumar o restar a los dos miembros de una ecuación el mismo número, no se modifica la igualdad.

Sea

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

una ecuación cuadrática cualquiera.

Reagrupamos y completamos los cuadrados:

$$(x^2 + Dx) + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + (y^2 + Ey) + \left(\frac{E}{2}\right)^2 = -F + \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = -F + \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

de donde

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

Esta ecuación es semejante a la ecuación ordinaria de la circunferencia con centro en $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y radio $\sqrt{\frac{D^2+E^2-4F}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$. Pero la raíz sólo es real si $D^2 + E^2 - 4F \geqslant 0$, en consecuencia , se tiene que:

a) si $D^2 + E^2 - 4F < 0$, su raíz no es real y, por lo tanto, no existe circunferencia asociada en el plano cartesiano. En ocasiones se dice que esa circunferencia es imaginaria;

b) si $D^2 + E^2 - 4F = 0$, su raíz es 0 y tampoco existe circunferencia en el plano cartesiano, pues el lugar geométrico se reduce al punto $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$. En ocasiones se hace referencia a este punto como un círculo de radio cero;

c) si $D^2 + E^2 - 4F > 0$, la ecuación representa una circunferencia con centro en el punto $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$. Conviene indicar que se toma el valor positivo de la raíz, ya que las distancias siempre se consideran magnitudes positivas.

Ten en cuenta

Al dividir los dos miembros de una ecuación entre el mismo número, distinto de cero, se obtiene una ecuación equivalente.

$\frac{0}{a} = 0$, pero $\frac{a}{0}$ no está definido.

La **ecuación general** de una circunferencia en el plano es una ecuación cuadrática con dos variables de la forma $\boldsymbol{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$, si y sólo si $\boldsymbol{D^2 + E^2 - 4F} > 0$.

En ese caso las coordenadas de su centro son $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y su radio mide $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$.

Utiliza las TIC

Las calculadoras fx 9860 SD y otras programables permiten graficar la circunferencia y obtener varios elementos como el centro, radio, interceptos con los ejes, entre otros.

Ejemplo 1

Determina si la ecuación representa una circunferencia en el plano cartesiano.

a) $3x^2 + 3y^2 - 27 = 0$

Conviene simplificar para encontrar una ecuación equivalente en la que los coeficientes A y B, los coeficientes del término en x^2 y el término en y^2, puedan igualarse a 1. Dividiendo entre 3 los dos miembros de la ecuación tenemos que $x^2 + y^2 - 9 = 0$. Por lo tanto $A = 1$, $B = 1$, $D = 0$, $E = 0$ y $F = -9$. Ahora bien, $D^2 + E^2 - 4F = 36$, por lo tanto la ecuación representa una circunferencia con centro en $(0, 0)$ y radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{36} = 3$.

b) $6x^2 + 3y^2 - 27 = 0$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación entre 3 se obtiene la ecuación equivalente $2x^2 + y^2 - 9 = 0$; la ecuación no corresponde a una circunferencia, pues $B = 1$, pero $A = 2$. Observa que para encontrar una ecuación equivalente en la cual los dos coeficientes sean iguales a 1, ambos deben ser idénticos en la ecuación original.

c) $5x^2 + 5y^2 + 10x - 30x - 25 = 0$

Como los coeficientes de los términos en x^2 y y^2 son iguales, dividimos los dos miembros de la ecuación entre 5 para encontrar una ecuación equivalente en la cual estos coeficientes sean iguales a 1. Tenemos que $x^2 + y^2 + 2x - 6x - 5 = 0$, donde $D = 2$, $E = -6$ y $F = -5$. Por lo tanto, $D^2 + E^2 - 4F = 4 + 36 + 20 = 60$; la ecuación corresponde a una circunferencia.

d) $7x^2 + 7y^2 + 14x - 28y + 77 = 0$

Como los coeficientes de los términos en x^2 y y^2 son iguales, dividimos entre 7 ambos miembros de la ecuación para encontrar una ecuación equivalente en la cual estos coeficientes sean iguales a 1, entonces tenemos $x^2 + y^2 + 2x - 4x + 11 = 0$, donde $D = 2$, $E = -4$ y $F = 11$. Por lo tanto, $D^2 + E^2 - 4F = 4 + 16 - 44 = -24$; la ecuación no es de una circunferencia.

De la ecuación general a la ecuación ordinaria

Como hemos visto, dada una ecuación cuadrática en dos variables, examinando sus coeficientes se identifica si corresponde a una circunferencia.

Asimismo, mediante sus coeficientes se conocen las coordenadas de su centro y la medida de su radio, por consiguiente, es posible encontrar su ecuación ordinaria.

Actividad resuelta

Determina si la ecuación es de una circunferencia examinando sus coeficientes y, si es el caso, encuentra su ecuación ordinaria.

1. $x^2 + y^2 + 5x - 2y + 5 = 0$

Los coeficientes de la ecuación son $A = B = 1$, $D = 5$, $E = -2$ y $F = 5$; por lo tanto, $D^2 + E^2 - 4F = 25 + 4 - 20 = 9 > 0$ y la ecuación es de una circunferencia. Las coordenadas de su centro son $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{2}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, 1\right)$ y su radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \frac{1}{2}\sqrt{9} = \frac{3}{2}$.

La ecuación ordinaria de la circunferencia es $(x - (-\frac{5}{2}))^2 + (y - 1)^2 = \frac{9}{4}$, es decir,

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{9}{4}$$

Observa que también se llega a la ecuación ordinaria completando directamente los cuadrados de los binomios en x y en y que aparecen en la ecuación general,

$$x^2 + y^2 + 5x - 2y + 5 = 0$$

Reordenamos los términos:

$$x^2 + 5x + y^2 - 2y + 5 = 0$$

completamos los cuadrados:

$$(x^2 + 5x) + \frac{25}{4} + (y^2 - 2y) + 1 + 5 = \frac{25}{4} + 1$$

factorizamos los trinomios y simplificamos términos independientes:

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{9}{4}$$

Como ves llegamos a la ecuación ordinaria de cualquiera de las dos formas. De hecho, al hacerlo de la primera manera (analizando directamente los coeficientes), se está usando el hecho de que ya se completaron los cuadrados en la ecuación general y se encontró de modo general su relación con el centro y el radio.

Sabías que...

En cada lugar o circunstancia que nos encontramos, debemos tomar iniciativas, resolver situaciones y enseñar a los demás a trabajar a crear una mejor convivencia y a llevar una vida mejor. El hecho de cada día aprender más dentro del campo de la matemática no es para ser un erudito sino para servir y colaborar mejor para el bienestar común.

Ten en cuenta

Considera lo siguiente.

$$\sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

2. $3x^2 + 3y^2 + 18x - 12y + 7 = 0$

Dividiendo los dos miembros de la ecuación entre 3, se obtiene una ecuación equivalente a la original, tal que los coeficientes A y B son iguales a 1.

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + \frac{7}{3} = 0$$

Los coeficientes de la nueva ecuación son $A = B = 1$, $D = 6$, $E = -4$ y $F = \frac{7}{3}$.

Por lo tanto,

$D^2 + E^2 - 4F = 36 + 16 - \frac{28}{3} = \frac{128}{3} > 0$; la ecuación sí es de una circunferencia. Las coordenadas de su centro son $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) = \left(-\frac{6}{2}, -\frac{4}{2}\right) = (-3, 2)$ y su radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{128}{3}}$.

La ecuación ordinaria de la circunferencia es entonces

$$(x - (-3))^2 + (y - 2)^2 = \frac{128}{12}$$

es decir,

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = \frac{32}{3}$$

3. $4x^2 + 5y^2 + 6x - 10y + 9 = 0$

Puesto que $A \neq B$, no podemos encontrar una ecuación equivalente en la cual $A = B = 1$; por lo tanto, la ecuación no corresponde a una circunferencia.

4. $\frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}y^2 + 5x + 10y - 3 = 0$

Ya que $A = B$, buscamos una ecuación equivalente en la que $A = B = 1$. Multiplicamos los dos miembros de la ecuación por $\frac{2}{5}$. Se tiene entonces

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - \frac{6}{5} = 0$$

Por lo tanto, en la nueva ecuación equivalente $A = B = 1$, $D = 2$, $E = 4$ y $F = -\frac{6}{5}$. Ahora, $D^2 + E^2\ 4F = \frac{124}{5} > 0$ y, entonces, la ecuación es de una circunferencia con centro en el punto de coordenadas $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) = \left(-\frac{2}{2}, -\frac{4}{2}\right) = (-1, -2)$ y radio $r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}} = \sqrt{\frac{124}{20}} = \sqrt{\frac{31}{5}}$.

Entonces, la ecuación ordinaria de la circunferencia es

$$(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = \frac{31}{5}$$

5. $x^2 + y^2 + x + y + 1 = 0$

Se tiene que $A = B = D = E = F = 1$. Además, $D^2 + E^2 - 4F = 1 + 1 - 4 = -2 < 0$, por lo tanto, la ecuación no es una circunferencia, aun cuando $A = 1$ y $B = 1$.

Actividades propuestas

Determina, a partir de los coeficientes, si cada ecuación corresponde a una circunferencia.

1. $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 4 = 0$

2. $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 64 = 0$

3. $2x^2 + y^2 + 16 = 0$

4. $x^2 + y^2 + 8x + 2y + 16 = 0$

5. $x^2 + y^2 + 3x - 4y + 5 = 0$

6. $x^2 + 3y^2 + 5x - y + 27 = 0$

Determina si cada ecuación corresponde a una circunferencia y –si es el caso– encuentra su ecuación ordinaria y su gráfica.

7. $4x^2 + 4y^2 - 16x + 16y - 4 = 0$

8. $3x^2 + 2y^2 + 3x - 2y + 16 = 0$

9. $6x^2 + 6y^2 + 18 = 0$

10. $\frac{7x^2}{2} + \frac{7y^2}{2} + 5x + 5y - 5 = 0$

Encuentra la ecuación ordinaria de cada circunferencia.

11. Con centro en (3, 1) y radio 2.

12. Con centro en el origen y radio 5.

Encuentra la ecuación general de cada circunferencia.

13. Con centro en (2, –3) y radio 6.

14. Con centro en (0, 4) y radio 7.

15. Con centro en el origen y radio 1.

Determina si la ecuación es de una circunferencia y –de ser el caso– encuentra su ecuación ordinaria y su gráfica.

16. $6x^2 + 2y^2 - 2x - 2y + 5 = 0$

17. $4x^2 + 4y^2 + 3x - 2y + 1 = 0$

18. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$

19. $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}y^2 + x - y + 1 = 0$

20. $6x^2 + 6y^2 + 12x - 12y + 8 = 0$

21. $x^2 + 6y^2 + x - 7y + 1 = 0$

22. $x^2 + y^2 + x - y = 0$

23. $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + x - y + 1 = 0$

24. $3x^2 + 3y^2 + 15x - 12y - 3 = 0$

25. $\frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}y^2 + \frac{17}{2}x - \frac{13}{2} = 0$

26. $x^2 + 7y - 3 = 0$

27. $2x^2 + 2y^2 + 5x + 7y - 9 = 0$

28. $x^2 + y^2 + x - y + 2 = 0$

29. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + x - 1 = 0$

30. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} + x + y - 1 = 0$

Dados la circunferencia que tiene como ecuación ordinaria $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ y el punto $P(x_0, y_0)$ en el exterior de la misma.

31. Encuentra la longitud de la tangente desde P a la circunferencia.

Se llama eje radical de dos circunferencias, al lugar geométrico de los puntos tales que las tangentes a ellas son de igual longitud.

32. Encuentra la ecuación del eje radical de las circunferencias:

$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$

$x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$

Ecuación de la circunferencia a partir de las tres condiciones

Encontrar la ecuación de una circunferencia conocidos diferentes elementos.

Como ya sabemos, la ecuación de una circunferencia está dada en su forma ordinaria o en su forma general. La ecuación ordinaria es de la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$. Para determinarla, se deben encontrar los valores de h, k y r, que son independientes.

La ecuación general de una circunferencia es de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, en este caso se determinan tres valores, D, E y F, que también son independientes.

En general, para determinar analíticamente una circunferencia, se requieren tres ecuaciones que es posible obtener de tres condiciones independientes. En cada caso se necesita analizar en qué forma, ordinaria o general, se representará a la circunferencia.

Indagamos

¿Existe una circunferencia que pase por los puntos $(-6, -4)$, $(0, 2)$, $(-6, 2)$ y $(0, -4)$?

Ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos no colineales

Una circunferencia en el plano queda determinada por tres condiciones independientes, por ejemplo, tres puntos A, B y C no colineales, el centro de la circunferencia es la intersección de las mediatrices del triángulo formado por los tres puntos, y su radio es la distancia del centro a cualquiera de ellos. Cabe notar que si tres puntos son colineales, no hay circunferencia que pase por todos, pues alguno (por ejemplo, C) estaría sobre la cuerda que pasa por los otros dos (el segmento $\overline{AB}$), es decir, C sería un punto interior a la circunferencia.

Buen Vivir

Una recta puede determinarse por dos condiciones:

- Dos puntos.
- Un punto y su pendiente.

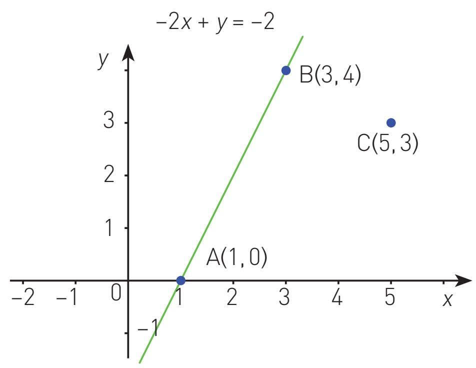
Estas condiciones se llaman independientes porque sus valores varían independientemente uno del otro.

Ejemplo 1

Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos dados.

a) $A(1, 0)$, $B(3, 4)$ y $C(5, 3)$

En primer lugar, verificamos si los puntos son colineales. Podemos comprobar gráficamente que no lo son. También es posible verificar de forma analítica: la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B es $-2x + y = -2$. Sustituimos las coordenadas de C en la ecuación y obtenemos que $-2(5) + 3 = -7 \neq -2$.



Por consiguiente, el punto C no está en la recta que pasa por A y B. Una vez que lo hemos verificado, procedemos de varias maneras. Una de ellas es utilizando la ecuación general.

La forma general de la ecuación buscada es $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$. Por lo tanto, encontrando los coeficientes D, E y F determinamos la circunferencia buscada. Si los puntos están sobre ella, sus coordenadas son solución de la ecuación, entonces, al sustituir en la ecuación general se obtienen tres ecuaciones:

$$1^2 + 0^2 + D(1) + E(0) + F = 0 \qquad \boldsymbol{E_1}$$

$$3^2 + 4^2 + D(3) + E(4) + F = 0 \qquad \boldsymbol{E_2}$$

$$5^2 + 3^2 + D(5) + E(3) + F = 0 \qquad \boldsymbol{E_3}$$

Al simplificar se obtiene:

$$D + \qquad F = -1 \qquad \boldsymbol{E_4}$$

$$3D + 4E + F = -25 \qquad \boldsymbol{E_5}$$

$$5D + 3E + F = -34 \qquad \boldsymbol{E_6}$$

que es un sistema de ecuaciones lineales de 3 × 3. La solución de este sistema nos da los valores de D, E y F a partir de las coordenadas de los tres puntos, con ellos se determina la ecuación de la circunferencia buscada.

El determinante del sistema, Δ, y los determinantes ΔD, ΔE y ΔF son:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \Delta D = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -25 & 4 & 1 \\ -34 & 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \Delta E = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -25 & 1 \\ 5 & -34 & 1 \end{vmatrix} \qquad \Delta F = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -25 \\ 5 & 3 & -34 \end{vmatrix}$$

$\Delta = 1(4 - 3) - 0\,(3 - 5) + 1(9 - 20) = 1 - 11 = -10$

$\Delta D = -1(4 - 3) - 0(-25 + 34) + 1(-75 + 136) = -1 + 61 = 60$

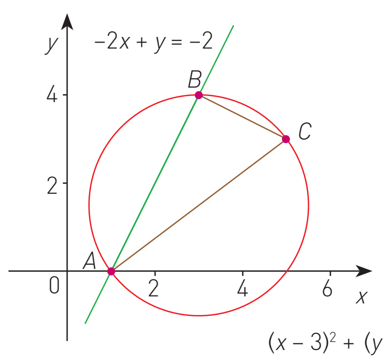
$\Delta E = 1(-25 + 34) + 1(3 - 5) + 1(-102 + 125) = 9 - 2 + 23 = 30$

$\Delta F = 1(-136 + 75) - 0(-102 + 125) - 1(9 - 20) = -61 + 11 = -50$

por lo tanto,

$$D = \frac{\Delta D}{\Delta} = \frac{60}{-10} = -6 \qquad E = \frac{\Delta E}{\Delta} = \frac{30}{-10} = -3 \qquad F = \frac{\Delta F}{\Delta} = \frac{30}{-10} = 5$$

La ecuación de la circunferencia es entonces $x^2 + y^2 - 6x - 3y + 5 = 0$; su centro es $(3, \frac{3}{2})$ y su radio $r = \sqrt{\dfrac{D^2 + E^2 - 4F}{4}} = \sqrt{\dfrac{36 + 9 - 20}{4}} = \sqrt{\dfrac{25}{4}} = \dfrac{5}{2}$.



$$(x - 3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

Ten en cuenta

Regla de Kramer

La solución por determinantes del sistema

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

está dada por

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

si $\Delta \neq 0$, donde

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Δ = determinante del sistema.

Para comprobar que el resultado es correcto, sustituimos los valores que se obtuvieron para D, E y F en las ecuaciones y verificamos.

$(-6) + 5 = -1$ E_4 ✔

$3(-6) + 4(-3) + 5 = -25$ E_5 ✔

$5(-6) + 3(-3) + 5 = -34$ E_6 ✔

A partir de los valores de D, E y F, se puede obtener también la ecuación ordinaria de la circunferencia. Como $h = -\frac{-D}{2} = -\frac{-6}{2} = 3$; $k = -\frac{-E}{2} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$, la ecuación ordinaria es entonces:

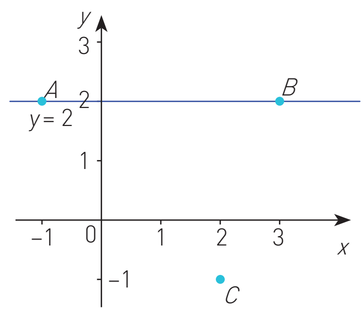
$$(x-3)^2 + \left(y - \tfrac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

Ten en cuenta

Aun cuando las ecuaciones que se obtuvieron son cuadráticas, al igualarlas, los términos cuadrados se cancelan y se obtiene una ecuación lineal.

Como los puntos A, B y C son vértices de un triángulo, se dice que la circunferencia está **circunscrita** al triángulo ABC.

b) $A(-1, 2)$, $B(3, 2)$ y $C(2, -1)$



Nuevamente, verificamos si los puntos son colineales. La ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B es $y = 2$. Sustituimos las coordenadas de C en la ecuación y tenemos que $-1 \neq 2$. Por lo tanto, el punto C no está en la recta determinada por A y B. Ahora, en lugar de la ecuación general, usaremos la ecuación ordinaria:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Sustituyendo las coordenadas de los tres puntos en la ecuación, obtenemos un sistema de tres ecuaciones cuadráticas:

$(-1-h)^2 + (2-k)^2 = r^2$ E_1

$(3-h)^2 + (2-k)^2 = r^2$ E_2

$(2-h)^2 + (-1-k)^2 = r^2$ E_3

La solución de este sistema de tres ecuaciones nos dará los valores de h, k y r que determinan la ecuación ordinaria de la circunferencia que pasa por los tres puntos.

Desarrollamos los cuadrados y simplificamos:

$h^2 + 2h + k^2 - 4k + 5 = r^2$ E_4

$h^2 - 6h + k^2 - 4k + 13 = r^2$ E_5

$h^2 - 4h + k^2 + 2k + 5 = r^2$ E_6

Al igualar E_4 y E_5 se tiene que

$$h^2 + 2h + k^2 - 4k + 5 = h^2 - 6h + k^2 - 4k + 13$$

simplificamos:

$$8h = 8 \rightarrow h = 1$$

Sustituimos $h = 1$, en las ecuaciones E_4 y E_5, las igualamos y simplificamos:

$$k^2 - 4k + 8 = k^2 + 2k + 2 \rightarrow k = 1$$

Sustituimos los valores $h = 1$ y $k = 1$ en una de las ecuaciones originales para obtener el valor de $r = \sqrt{5}$.

Por lo tanto, la ecuación ordinaria de la circunferencia es

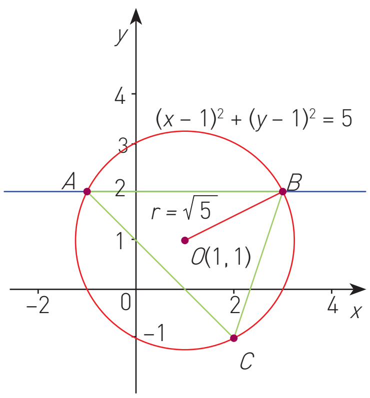
$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$$

y su ecuación general,

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$$

Podemos verificar que la solución es correcta haciendo una gráfica o bien, sustituyendo las coordenadas de los puntos dados en una de las ecuaciones de la circunferencia.

En algunos problemas los tres puntos por donde pasa una circunferencia se dan indirectamente, por medio de las intersecciones de diferentes lugares geométricos. En el ejercicio siguiente dos de los puntos están dados por la intersección de circunferencias.



Ten en cuenta

Las coordenadas de un punto P cualesquiera se pueden escribir $P(x, y)$, $P = (x, y)$, o simplemente (x, y).

Actividad resuelta

1. Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto P(10, 2) y la intersección de las circunferencias $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$; $4x^2 + 4y^2 - 64x - 16y + 144 = 0$.

En primer lugar dividimos la segunda ecuación entre 4, para obtener una ecuación equivalente en que los coeficientes de x y y sean iguales a 1. Ya que queremos encontrar las coordenadas de los puntos de intersección de las circunferencias, es decir, los puntos cuyas coordenadas satisfacen las dos ecuaciones, igualamos estas últimas para obtener una nueva:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = x^2 + y^2 - 16x - 4y + 36$$

simplificamos y obtenemos

$$x = 4$$

Observa que los términos cuadráticos se eliminan entre sí, pues sus coeficientes son iguales. En general se obtiene una ecuación lineal en x y y, pero en este caso, el término en y también se elimina porque su coeficiente es igual en las dos ecuaciones.

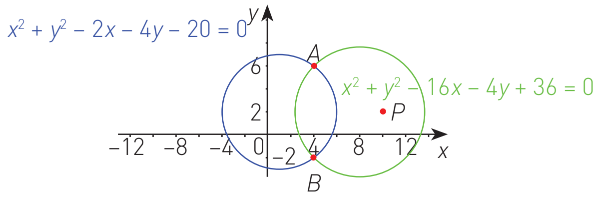
Sustituimos, en alguna de las ecuaciones originales, el valor obtenido para x:

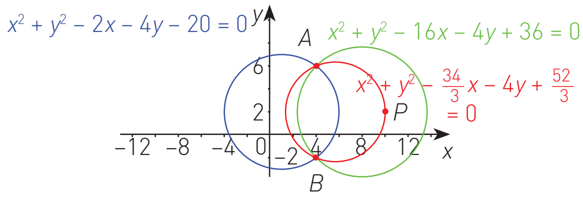
$$4^2 + y^2 - 2(4) - 4y - 20 = 0$$

simplificamos:

$$y^2 - 4y - 12 = 0$$

Esta ecuación tiene dos soluciones: $y_1 = 6$, $y_2 = -2$. Como ambos valores corresponden al valor $x = 4$, los puntos de intersección de las dos circunferencias son $A = (4, 6)$ y $B = (4, -2)$. Por lo tanto, el problema se reduce ahora a encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(4, 6)$, $B(4, -2)$ y $P(10, 2)$.





Al sustituir las coordenadas de los puntos en la ecuación general de la circunferencia y simplificar se obtienen tres ecuaciones:

$$4D + 6E + F = -52 \qquad E_1$$
$$4D - 2E + F = -20 \qquad E_2$$
$$10D + 2E + F = -104 \qquad E_3$$

La solución de este sistema, que nos da los valores de D, E y F, determina la ecuación de la circunferencia.

El determinante del sistema, Δ, y los determinantes ΔD, ΔE y ΔF son

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 48 \qquad \Delta D = \begin{vmatrix} -52 & 6 & 1 \\ -20 & -2 & 1 \\ -104 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -544$$

$$\Delta E = \begin{vmatrix} 4 & -52 & 1 \\ 4 & -20 & 1 \\ 10 & -104 & 1 \end{vmatrix} = -192 \qquad \Delta F = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -52 \\ 4 & -2 & -20 \\ 10 & 2 & -104 \end{vmatrix} = 832$$

De donde,

$$D = \frac{\Delta_D}{\Delta} = \frac{-548}{48} = \frac{-34}{3} \qquad E = \frac{\Delta_E}{\Delta} = \frac{-192}{48} = -4 \qquad F = \frac{\Delta_F}{\Delta} = \frac{832}{48} = \frac{52}{3}$$

Por lo tanto, la ecuación general de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 - \frac{34}{3}x - 4y + \frac{52}{3} = 0$$

y su ecuación ordinaria es

$$\left(x - \frac{34}{6}\right)^2 + (y - 2)^2 = \frac{169}{9}$$

Actividades propuestas

Determina la ecuación ordinaria y general de la circunferencia que pasa por los tres puntos. Traza su gráfica.

2. $(1, 1)$, $(2, 2)$ y $(3, 5)$ **3.** $(2, -1)$, $(-4, 1)$ y $(-8, -3)$

4. $(8, -4)$, $(12, 0)$ y $(8, -10)$ **5.** $(0, 1)$, $(8, 5)$ y $(-1, 3)$

6. $(-6, -4)$, $(0, 2)$ y $(-6, 2)$ **7.** $(5, -6)$, $(12, 3)$ y $(6, -9)$

Determina la ecuación ordinaria y general de la circunferencia que pasa por el punto dado y la intersección de las circunferencias.

8. $x^2 + y^2 - 4x - 36 = 0$; $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 20 = 0$; $P(-2, -8)$

9. $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$; $x^2 + y^2 - 20x - 4y + 64 = 0$; $P(-6, -4)$

Ecuación de circunferencias determinadas por varias condiciones

Las tres condiciones independientes que se requieren para determinar una circunferencia no necesariamente deben darse de manera directa en términos de tres puntos por donde esta pasa. Existen otras condiciones que la determinan: de hecho, cuando en la primera lección se estableció la circunferencia que pasa por dos puntos y tiene su centro en una recta dada, o bien, la circunferencia que pasa por un punto y es tangente a una recta en un punto dado, encontramos circunferencias determinadas por tres condiciones independientes.

En ocasiones, tres condiciones establecidas determinan dos o más circunferencias que satisfacen las condiciones dadas, en vez de una única circunferencia.

Ejemplo 1

Encuentra la ecuación ordinaria y general de las circunferencias y construye su gráfica.

a) Es tangente a la recta $3x + 4y + 3 = 0$ en el punto $(-1, 0)$; su radio mide 5 unidades.

Como tenemos el valor del radio, basta con encontrar el centro de la circunferencia para determinarla. Sean (h, k) las coordenadas del centro; para que la circunferencia sea tangente a la recta, la distancia de su centro a la recta $3x + 4y + 3 = 0$, debe ser igual al radio, es decir, igual a 5. Por lo tanto,

$$5 = \frac{|3h + 4k + 3|}{\sqrt{9 + 16}} \rightarrow 3h + 4k = \pm 22 \qquad \boldsymbol{E_1}$$

Observa que la ecuación E_1 en realidad se conforma por dos ecuaciones, una para el valor positivo de 22 y otra para -22. Llamemos E_2 a la ecuación obtenida para el valor positivo de $\boldsymbol{E_1}$, y $\boldsymbol{E_3}$ a la que se consigue para el valor negativo de $\boldsymbol{E_1}$.

Se tiene además que $(h + 1)^2 + k^2 = 25$, ya que la circunferencia pasa por $(-1, 0)$ y su radio es igual a 5.

Desarrollamos los cuadrados y simplificamos:

$$h^2 + 2h + k^2 = 24 \qquad \boldsymbol{E_4}$$

Si consideramos el sistema formado por las ecuaciones $\boldsymbol{E_2}$ y $\boldsymbol{E_4}$,

$$3h + 4k = 22 \qquad \boldsymbol{E_2}$$

$$h^2 + 2h + k^2 = 24 \qquad \boldsymbol{E_4}$$

su solución determina las coordenadas del centro de una circunferencia, que es tangente a la recta $3x + 4y + 3 = 0$ y pasa por $(-1, 0)$. De $\boldsymbol{E_2}$ se tiene que $k = \frac{22 - 3h}{4}$

Sustituimos el valor de k en la ecuación E_4:

$$h^2 + 2h + \left(\frac{22 - 3h}{4}\right)^2 = 24 \rightarrow h^2 - 4h + 4 = 0 \rightarrow (h - 2)^2 = 0 \rightarrow h = 2$$

Por lo tanto, sustituyendo el valor de h en la ecuación E_2, se tiene que $k = 4$

Resolviendo el sistema de ecuaciones E_3 y E_4 obtenemos $h = -4$, $k = -4$. Tenemos entonces dos soluciones: $h_1 = 2$, $k_1 = 4$; $h_2 = -4$, $k_2 = -4$. Es decir, hay dos circunferencias que cumplen las condiciones dadas.

Ten en cuenta

Dados un punto $P(h, k)$ y una recta con ecuación

$$Ax + By + C = 0,$$

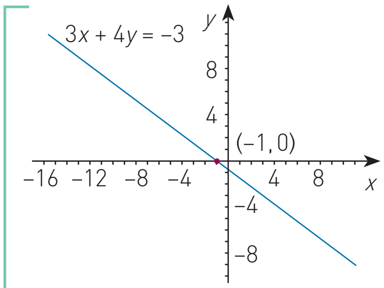
la distancia de P a la recta es igual a la longitud del segmento perpendicular a la recta por P. Está dada por

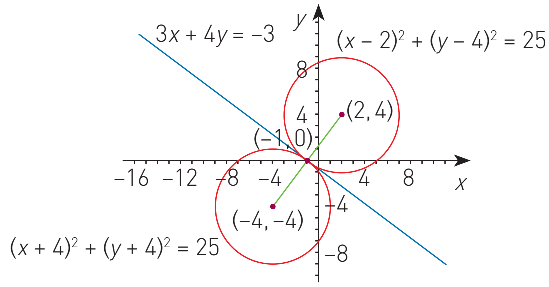
$$d = \frac{|Ah + Bk + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Esta expresión es equivalente a:

$$d = \frac{Ah + Bk + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \begin{cases} \dfrac{Ah + Bk + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} & \text{si es} > 0 \\ -\dfrac{(Ah + Bk + C)}{\sqrt{A^2 + B^2}} & \text{si es} < 0 \end{cases}$$





Las ecuaciones ordinarias son

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25; \quad (x+4)^2 + (y+4)^2 = 25$$

Las ecuaciones generales son

$$x^2 - 2x + y^2 - 8y - 5 = 0; \quad x^2 + 8x + y^2 + 8y + 7 = 0$$

Ten en cuenta

Para determinar la intersección de dos lugares geométricos, se encuentran las soluciones comunes a sus ecuaciones, es decir, se resuelve el sistema constituido por sus ecuaciones.

Si $ab = 0$, entonces $a = 0$, o $b = 0$, o

$a = b = 0$

Actividad resuelta

1. Pasa por la intersección de la recta $x + y - 2 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$, y es tangente a la recta $-2x + y - 1 = 0$.

Encontramos la intersección de la recta y la circunferencia; para ello, resolvemos el sistema de ecuaciones.

$$x + y - 2 = 0 \qquad \boldsymbol{E_1}$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0 \qquad \boldsymbol{E_2}$$

Despejamos x en la ecuación E_1:

$$x = 2 - y \qquad \boldsymbol{E_3}$$

Sustituimos este valor en E_2:

$$(2 - y)^2 + y^2 - 4(2 - y) - 2y + 4 = 0$$

de donde,

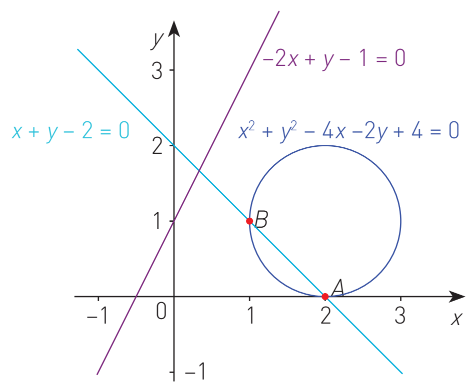
$$y^2 - y = 0 \rightarrow y(y - 1) = 0$$

Entonces,

$$y_1 = 0; \quad y_2 = 1$$

Sustituimos estos valores en $\boldsymbol{E_3}$,

$$x_1 = 2; \quad x_2 = 1$$



Los puntos de intersección de la recta y la circunferencia son entonces $A(2, 0)$ y $B(1, 1)$.

Ahora, sólo resta encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2, 0)$ y $B(1, 1)$, y es tangente a la recta $-2x + y - 1 = 0$.

Sea $O(h, k)$ el centro de la circunferencia que buscamos; la distancia de O a los puntos A y B, debe ser igual al radio, por lo tanto,

$$\sqrt{(h-2)^2 + k^2} = \sqrt{(h-1)^2 + (k-1)^2} \qquad \boldsymbol{E_4}$$

elevamos al cuadrado para eliminar las raíces y simplificamos:

$$h - k - 1 = 0 \qquad \boldsymbol{E_5}$$

Como la circunferencia es tangente a la recta $-2x + y - 1 = 0$, la distancia de su centro a la recta debe ser igual al radio, es decir,

$$\sqrt{(h-2)^2 + k^2} = \frac{-2h + k - 1}{\sqrt{4+1}} \qquad \boldsymbol{E_6}$$

Como la circunferencia es tangente a la recta $-2x + y - 1 = 0$, la distancia de su centro a la recta debe ser igual al radio, es decir,

$$\sqrt{(h-2)^2 + k^2} = \frac{-2h + k - 1}{\sqrt{4+1}} \qquad \boldsymbol{E_6}$$

elevamos al cuadrado para eliminar las raíces:

$$(h-2)^2 + k^2 = \frac{(-2h + k - 1)^2}{5}$$

desarrollamos y simplificamos:

$$h^2 + 4k^2 + 4hk - 24h + 2k + 19 = 0 \qquad \boldsymbol{E_7}$$

Sustituimos, en la ecuación $\boldsymbol{E_7}$, el valor de h obtenido en $\boldsymbol{E_5}$ y simplificamos:

$$9k^2 - 16k - 4 = 0 \qquad \boldsymbol{E_8}$$

Resolvemos la ecuación:

$$k_1 = 2 \qquad k_2 = -\frac{2}{9}$$

Al sustituir los valores de k_1 y k_2 en la ecuación E_5, se obtienen los valores de h_1 y h_2:

$$h_1 = 3 \qquad h_2 = \frac{7}{9}$$

Por consiguiente, hay dos circunferencias: una con centro $C_1(3, 2)$ y otra con centro $C_2\left(\frac{10}{2} - \frac{2}{9}\right)$. Para determinar el radio de cada una se usa algún miembro de la ecuación E_4. El radio de la circunferencia con centro en C_1 es $r_1 = \sqrt{5}$; el radio de la circunferencia con centro en C_2 es $r_2 = \frac{\sqrt{125}}{9}$. Por lo tanto, en su forma ordinaria las ecuaciones de las circunferencias con las condiciones pedidas son

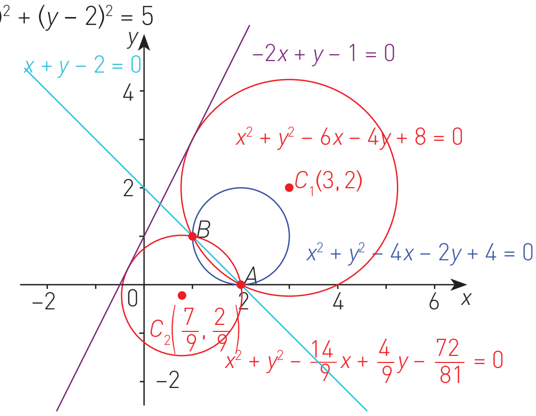
$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$$

$$\left(x - \frac{7}{9}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{9}\right)^2 = \frac{125}{81}$$

Sus ecuaciones generales son

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$$

$$x^2 + y^2 - \frac{14}{9}x + \frac{4}{9}y - \frac{72}{81} = 0$$



Nuevamente tenemos dos soluciones para las condiciones dadas. Esto se debe a que existen dos soluciones para la ecuación cuadrática $\boldsymbol{E_7}$.

Buen Vivir

La comunicación es indispensable para mantener las buenas relaciones en todos los ámbitos de nuestra vida, particularmente en la familia, el colegio y con personas cercanas o compañeros de estudio. En el caso particular de la matemática, es conveniente comunicar los resultados obtenidos en la solución de los problemas.

Actividades propuestas

Encuentra las circunferencias, determina sus ecuaciones y construye su gráfica.

1. Es tangente a la recta $x - 2y = 0$ en el punto $(8, 4)$ y su radio es 6.
2. Es tangente a la recta $3x - y + 6 = 0$ en el punto $(0, 6)$ y su radio es $\sqrt{40}$.
3. Pasa por la intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 14y + 40 = 0$ y la recta $x - 4 = 0$, y es tangente a la recta $-7x + y + 6 = 0$.
4. Pasa por los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 - 18x - 2y + 72 = 0$ y la recta $48x + 16y - 352 = 0$, y es tangente a la recta $-x + y + 2 = 0$.

Aplicamos

Cónicas. La circunferencia

Interpreta y resuelve

ANALIZA

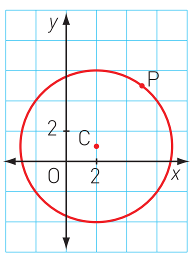
- **1.** Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).
  - **a)** Una recta secante a una circunferencia corta la circunferencia en dos puntos.
  - **b)** Una recta tangente y una secante a una circunferencia se pueden intersecar en tres puntos.
  - **c)** Dos rectas secantes a una circunferencia pueden intersecar a la circunferencia en cuatro puntos.
  - **d)** Si dos segmentos tangentes a una misma circunferencia se intersecan en el exterior de la circunferencia, se puede afirmar que los segmentos tienen la misma medida.

Calcula

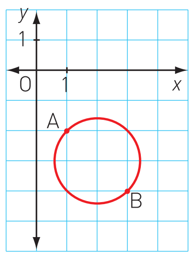
EJERCITACIÓN

- **2.** Calcula la ecuación de las siguientes circunferencias.

a)



b)



  - **c)** De centro $C(2, -3)$ y pasa por el punto $P(5, 1)$.
  - **d)** De centro el punto $C(5, -2)$ y tangente al eje de abscisas.

RAZONAMIENTO

- **3.** Determina el centro y el radio de la circunferencia que pasa por los puntos $A(0, 0)$, $B(0, 2)$ y $C(2, 4)$.

- **4.** Confirma si las siguientes ecuaciones representan una circunferencia. En caso afirmativo, dibújalas e indica el centro y el valor del radio.
  - **a)** $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$
  - **b)** $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$
  - **c)** $2x^2 + 2y^2 - 6x = 0$
  - **d)** $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$

MODELA

- **5.** Halla la posición relativa de cada punto y de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.
  - **a)** $A(5, 5)$ **b)** $B(3, 3)$ **c)** $C(-4, 3)$

CALCULA

- **6.** Calcula la máxima y la mínima distancia del punto $P(5, 2)$ a la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$$

- **7.** Para cada caso, estudia la posición relativa de la recta con la circunferencia que se indica.
  - **a)** $2x + y + 1 = 0$ con $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$
  - **b)** $x - 2 = 0$ con $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$
  - **c)** $x + 7y = 30$ con $x^2 + y^2 - 10x = 0$

RAZONAMIENTO

- **8.** Halla en función del parámetro positivo a, la posición relativa de la circunferencia de ecuación $(x - 2)^2 + y^2 = a$ y la recta de ecuación $y = x$.

Entrena

RAZONAMIENTO

- **9.** Estudia la posición relativa de la circunferencia

$$2x^2 + 2y^2 - 6x - 6y + 7 = 0$$

con cada una de las siguientes circunferencias.
  - **a)** $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$
  - **b)** $2x^2 + 2y^2 = 5$
  - **c)** $x^2 + y^2 - 2x - 3y + 3 = 0$
  - **d)** $x^2 + y^2 - 3y + 2 = 0$

CALCULA

- **10.** Calcula la potencia de cada punto respecto de la circunferencia indicada y señala su posición relativa.
  - **a)** $P(1, 3)$ y $8x^2 + 8y^2 - 79x - 32y + 95 = 0$
  - **b)** $P(1, -1)$ y $2x^2 + 2y^2 - x = 0$
  - **c)** $P(5, 3)$ y $x^2 + y^2 - 7x - 8y = 0$

RESUELVE

- **11.** Encuentra la ecuación ordinaria de la circunferencia.
  - **a)** Con centro en $(-2, -1)$ y radio $\sqrt{10}$.
  - **b)** Con centro en el origen y radio 4.
  - **c)** Con centro en $(-5, 8)$ y radio 3/2.

CALCULA

- **12.** Encuentra el centro y el radio de cada circunferencia.
  - **a)** $x^2 + y^2 = 23$
  - **b)** $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = 10$
  - **c)** $x^2 + (y + 1)^2 = 17$
  - **d)** $x^2 + y^2 = 5$

Razonamiento

- **13.** Determina la ecuación ordinaria de cada circunferencia y construye su gráfica.
  - **a)** Los puntos (-4, -1) y (–2, 3) son extremos de uno de sus diámetros.
  - **b)** Los puntos (–2, 3) y $(\frac{7}{2}, -4)$ son extremos de uno de sus diámetros.
  - **c)** Pasa por los puntos (5, -2) y (1, 2), y tiene su centro en la recta $2y - x + 1 = 0$.
  - **d)** Pasa por los puntos (-3, 4) y (-2, 2), y tiene su centro en la recta $3x + y - 15 = 0$.
- **14.** Determina si cada circunferencia es simétrica respecto a los ejes y al origen.
  - **a)** $(x + 3)^2 + (y - 1/3)^2 = 9$
  - **b)** $(x - 1)^2 + y^2 = 16$
  - **c)** $x^2 + (y - 5)^2 = 5$
- **15.** Determina la ecuación ordinaria de cada circunferencia y traza su gráfica.
  - **a)** Pasa por el punto (5, 4) y es tangente a la recta $2x + 5y - 5 = 0$ en el punto (5, -1).
  - **b)** Pasa por el punto (6, 2) y es tangente a la recta $x + 2y - 4 = 0$ en el punto (4, 0).

Consolida

- **16.** Con centro en (3, 1) y radio 2.
- **17.** Con centro en el origen y radio 5.
- **18.** Encuentra la ecuación general de cada circunferencia.
  - **a)** Con centro en (2, -3) y radio 6.
  - **b)** Con centro en (0, 4) y radio 7.
  - **c)** Con centro en el origen y radio 1.

Comunicación de ideas

- **19.** Determina si la ecuación es de una circunferencia y, de ser el caso, encuentra su ecuación ordinaria y su gráfica.
  - **a)** $6x^2 + 2y^2 - 2x - 2y + 5 = 0$
  - **b)** $4x^2 + 4y^2 + 3x - 2y + 1 = 0$
  - **c)** $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$
  - **d)** $6x^2 + 6y^2 + 12x - 12y + 8 = 0$
  - **e)** $x^2 + 6y^2 + x - 7y + 1 = 0$
  - **f)** $x^2 + y^2 + x - y = 0$

Modela

Dados la circunferencia que tiene como ecuación ordinaria $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ y el punto $P(x_0, y_0)$ en el exterior de la misma.

- **20.** Encuentra la longitud de la tangente desde P a la circunferencia.

  Se llama eje radical de dos circunferencias, al lugar geométrico de los puntos tales que las tangentes a ellas son de igual longitud.
- **21.** Encuentra la ecuación del eje radical de las circunferencias:

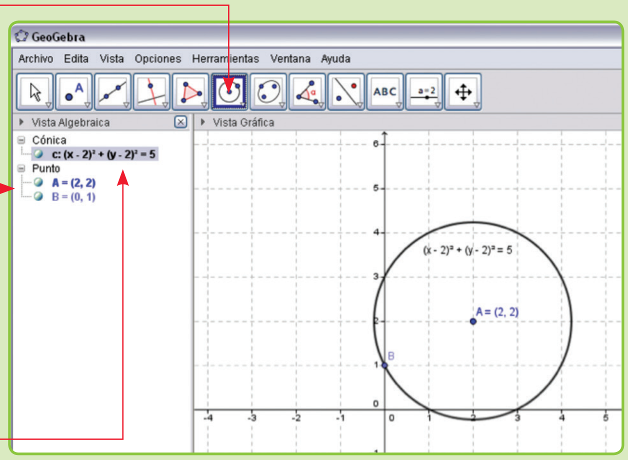
$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$$
$$x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$$

MATEMATICS

El programa ***Geogebra*** nos ayuda en el estudio del círculo ya que nos permite graficar los diferentes casos de esta cónica.

1. Para hallar la ecuación de una circunferencia damos clic en este botón
2. Seleccionamos cuál es el tipo de circunferencia que se quiere, en este caso la circunferencia dados su centro y uno de sus puntos.
3. Una vez seleccionada la circunferencia procedemos a señalar el centro A(2, 2), y un punto B(0,1).

   El programa dibuja y también nos da la ecuación de la circunferencia.



Resolvemos problemas

Etapas en la solución de problemas

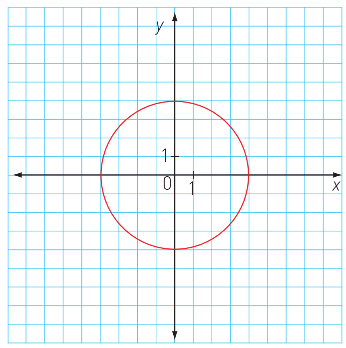
La información presentada en una situación se puede organizar por medio de tablas de datos, para ser luego analizada como estrategia en la resolución de los problemas. Es importante elegir en principio las variables que se van a relacionar en la tabla para construirla de forma adecuada.

Para resolver un problema debes:
Comprender el enunciado
Proponer un plan
Ejecutar un plan
Revisar la solución

1 **Actividad resuelta**

Problema

El radar de un aeropuerto envía información por medio de ondas sonoras a los aviones que se encuentran en un radio de 4 kilómetros alrededor del aeropuerto. Si se sitúa el radar en el centro de un plano cartesiano con los ejes hacia los puntos cardinales y de escala 1 kilómetro como lo muestra la figura, encuentra cuatro puntos máximos a donde llegue la información. ¿Cómo se puede hallar cualquier punto máximo de alcance para los aviones? Propón algunos ejemplos.



Comprender el enunciado del problema.

El radio de 4 kilómetros determina puntos de corte de la circunferencia con los ejes.

- Con la gráfica se establecen algunos puntos máximos del radar como, por ejemplo, los puntos (4, 0), (−4, 0), (0, 4) y (0, −4).

Proponer un plan

Para encontrar la coordenada de un punto máximo de alcance para los aviones, es decir, que esté sobre la circunferencia, se debe plantear la ecuación general de la misma. Para ello se parte de la ecuación general que corresponde a $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ y se reemplazan los valores conocidos en la ecuación. Como $r = 4$ y $C(0, 0)$

Ejecutar el plan

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 4^2$$

Se eliminan los paréntesis y se obtiene:

$$x^2 + y^2 = 16$$

Ahora, para obtener las coordenadas de cualquier punto máximo de alcance, se reemplaza el valor deseado de $x \in [-4, 4]$ en la ecuación para hallar el valor de y; así, por ejemplo, si se quiere conocer el máximo alcance cuando se está a 3 kilómetros al oeste, se sustituye el valor $x = -3$ (el signo es negativo porque el oeste está a la izquierda del origen de coordenadas) en la ecuación obtenida:

$$(-3)^2 + y^2 = 16$$

Despejando y, se tiene:

$$y^2 = 7 \text{ kilómetros}^2$$

De donde $y = \pm\sqrt{7}$ kilómetros. De acuerdo al signo que se tome, la posición cardinal cambia.

Revisa la solución

R/ Para establecer los puntos máximos de alcance de la onda del radar, se utiliza la ecuación $x^2 + y^2 = 16$, y se ordenan los resultados en la tabla de la siguiente forma:

Valor en x	Valor en y	Posición cardinal	Valor en x	Valor en y	Posición cardinal
4	0	Este	3	2.6	Noreste
0	4	Norte	3	−2.6	Sureste
−4	0	Oeste	−3	−2.6	Suroeste
0	−4	Sur	−3	2.6	Noroeste

2 Actividad resuelta

Problema

Determina si la ecuación $3x^2 + 3y^2 + 12x + 12y + 3 = 0$ corresponde a una circunferencia. Si es el caso, encuentra su centro y radio.

Comprende el enunciado del problema y resuelve

Dividimos la ecuación entre 3 para obtener una ecuación equivalente con coeficientes de x^2 y y^2 iguales a 1; se obtiene que $D = 4$, $E = 4$, $F = 1$. Entonces,

$$D^2 + E^2 - 4F = 4^2 + 4^2 - 4(1) = 28 > 0$$

por lo tanto, la ecuación sí es de una circunferencia.

Las coordenadas de su centro son $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) = (-2, -2)$ y su radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \frac{1}{2}\sqrt{28} = \sqrt{\frac{28}{4}} = \sqrt{7}$.

Su ecuación ordinaria es $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 7$.

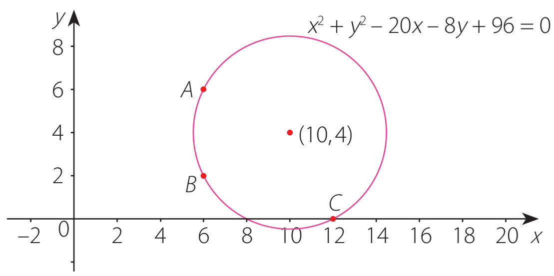
3 Actividad resuelta

Problema

Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (6, 6), (12, 0) y (6, 2).

Comprende el enunciado del problema y resuelve

Al sustituir las coordenadas de los puntos en la ecuación general se forma un sistema de tres ecuaciones. Al resolver el sistema se obtiene que $D = -20$; $E = -8$; $F = 96$. En este caso las coordenadas del centro son (10, 4) y el radio es $\sqrt{20}$.



Aplica la estrategia

1. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$ y la recta $4x + 3y = 34$.
   a) Busca el centro y el radio de la circunferencia y la distancia del centro a la recta.
   b) Resuelve el sistema de ecuaciones formado por la circunferencia y la recta y compara el resultado con el del literal a.
2. Las trayectorias de dos partículas se describen mediante las circunferencias $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$. Halla la posición relativa de las trayectorias. ¿Es posible que las partículas se encuentren?
3. Estudia la posición relativa de las circunferencias. $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 25 = 0$; $x^2 + y^2 - 1 = 0$

   ¿Qué tipo de circunferencias son?

Ponemos a prueba destrezas

PROBLEMAS PARA APLICAR

Resuelve y señala la respuesta correcta.

1. ¿Cuáles son el centro y el radio de la circunferencia con ecuación ordinaria $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = \frac{3}{4}$?

a) $(-5, 2)$ y $r = \frac{3}{4}$ **b)** $(5, 2)$ y $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $(-5, 2)$ y $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$

¿Cuáles son el centro y el radio de la circunferencia con ecuación general $4x^2 + 4y^2 + 8x + 12y - 4 = 0$?

a) $(-2, -3)$ y $r = \frac{17}{4}$ **b)** $(-1, -\frac{3}{2})$ y $r = \frac{\sqrt{17}}{2}$

c) $(2, 3)$ y $r = \frac{\sqrt{17}}{2}$

2. ¿Cuál es la ecuación general de la circunferencia con centro en $(-1, 2)$ y radio 5?

a) $x^2 + y^2 - x + 2y + 5 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$

c) $x^2 + y^2 - \frac{x}{2} + y - 20 = 0$

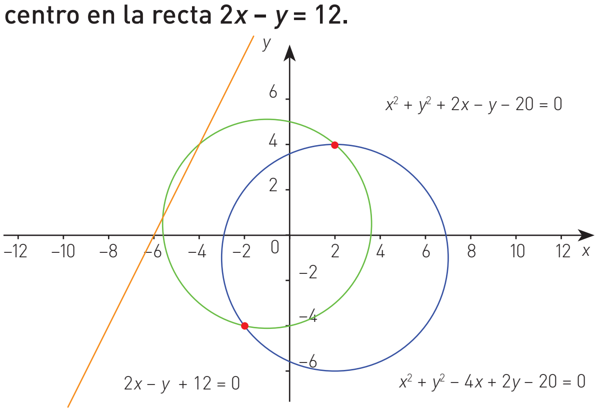
3. ¿Cuál de los siguientes puntos no pertenece a la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$?

a) $(-5, 5)$ **b)** $(-5, 1)$

c) $(-4, 6)$ **d)** $(-4, -3)$

4. Resuelve con un compañero el problema.

Encuentren la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos de intersección de las circunferencias $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$; $x^2 + y^2 + 2x - y - 20 = 0$, y con centro en la recta $2x - y = 12$.



Resuelve. Explica el procedimiento que seguiste para obtener el resultado.

5. Determina en cada caso si la ecuación corresponde a una circunferencia.

	Sí	No
a) $4x^2 + 4y^2 + 12x + 8y - 4 = 0$	_____	_____
b) $x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0$	_____	_____
c) $4x^2 - 4y^2 + 12x + 8y - 4 = 0$	_____	_____

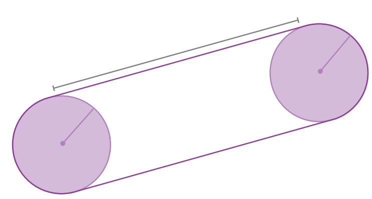
6. Determina la ecuación general de la familia de circunferencias concéntricas con la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - y = 20$. ¿Qué valores de la ecuación general cambian para las diferentes circunferencias? ¿Cuáles se mantienen constantes?

7. Determina la ecuación ordinaria de la circunferencia cuyo centro se encuentra en la recta $6x + y = 12$ y es tangente a la recta $x - y + 8 = 0$ en el punto $(-4, 4)$.

8. Muestra analíticamente que no se intersecan las circunferencias $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 12 = 0$; $x^2 + y^2 - 8x - 8y - 96 = 0$.

9. Muestra analíticamente que el cuadrilátero ABCD es inscriptible, es decir, que los puntos $A(-3, \frac{15}{4})$, $B(8, 8)$, $C(8, -4)$ y $D(0, -4)$ están sobre una misma circunferencia.

10. Una banda se ajusta estrechamente alrededor de dos poleas circulares cuyas ecuaciones son: $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$ y $x^2 - 10x + y^2 - 8y + 32 = 0$. ¿Cuál es la longitud de la banda?



11. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia concéntrica con la de ecuación $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$, y qué pasa por el punto $(-3, 4)$?

12. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen y tiene su centro en el punto de intersección de las rectas:

$x - 2y - 1 = 0$, y, $x + 3y - 6 = 0$

Matemática en contexto

Algo sobre el Universo

Durante más de 20 siglos se ha avanzado en el conocimiento del Universo, desde los modelos que suponían a la Tierra en el centro, pasando por el de Copernico, con la Tierra y los planetas girando alrededor del Sol en orbitas circulares, y finalmente por el modelo de Kepler, que considera órbitas elípticas y al Sol en uno de sus focos.

Este último modelo estableció la forma y el movimiento de nuestro sistema planetario, pero el Sol es sólo una estrella de un enorme conglomerado de estrellas y nubes de gas que integran la galaxia conocida como Vía Láctea. Por mucho tiempo se supuso que el Sol era el centro de esta galaxia, pero a principios del siglo XX se proporcionaron las bases científicas para demostrar que no era así. Se calculó, además, que nuestra galaxia es sólo una entre cientos de miles de millones.

Pero ¿Cómo conocemos muchas de las características del Universo si es tan inmenso? Las estrellas, como el Sol, emiten luz y radiaciones. Estas se perciben con telescopios y radiotelescopios, estos últimos, en lugar de captar y medir la luz visible emitida por los objetos del Universo, reciben las ondas de radiofrecuencia que producen.

La teoría de la gravitación universal, la de la relatividad, la mecánica cuántica y la teoría electromagnética son algunas de las teorías científicas que ayudan a interpretar muchos fenómenos del Universo, además de tener otras aplicaciones.

Aun cuando actualmente se sabe mucho sobre el Universo y hay teorías aceptadas por la generalidad de los científicos, falta todavía más información por conocer y confirmar.

1. Resuelve y subraya la respuesta correcta.
La ecuación de la circunferencia de centro C (-4, 1) y radio 3 es:

a) $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 16 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 16 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 9 = 0$

2. Identifica la cónica, determina sus elementos y grafica.

a) $x^2 + y^2 = 25$ **b)** $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$

3. Los extremos del diámetro de una circunferencia son los puntos A(-5, 3) y B(3,1). ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia?

a) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 12 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 12 = 0$

d) $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 12 = 0$

4. Escribir la ecuación de la circunferencia de centro (3, 4) y radio 2. Grafica

a) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$

b) $2x^2 + 2y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 21 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 6x + 12y - 21 = 0$

5. Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en (2, –3) y es tangente al eje de abscisas. Grafica.

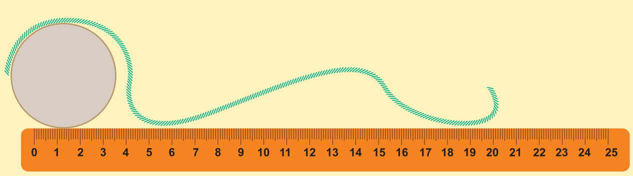
a) $x^2 + y^2 - 4x + 4 = 0$ **b)** $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 9 = 0$ **d)** $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 6 = 0$

Razonamiento lógico

Experimentando con los círculos

Construye un círculo de cartón y mide la distancia del centro al borde. Enrolla un trozo de cordel alrededor del contorno del círculo. Desenróllalo después y mídelo. Divide la segunda cantidad entre la primera y anota el resultado. Puedes repetir el experimento con círculos de distintos tamaños. ¿Qué puedes decir de los resultados que obtienes?



Autoevaluación			
Descripción	**Valoración**		
	Siempre	**A veces**	**Nunca**
Reconoce las cónicas como conjuntos de puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen una ecuación cuadrática. (1 - 2)			
Identifica una cónica a partir de su gráfico. (3 - 4)			
Determina la ecuación de la circunferencia a partir de sus parámetros. (3 - 4)			
Grafica una circunferencia dada su ecuación cartesiana. (3 - 4 - 5)			

5

Cónicas. Parábolas, elipses e hipérbolas

Bloque: Álgebra y geometría

Las curvas cónicas tienen una gran importancia en la Arquitectura, son aplicadas como composición de volúmenes y también como limitadores de espacios arquitectónicos. Su forma permite diseñar obras con una buena resistencia estructural, estética y su uso se observa en puentes, escaleras, cúpulas, estadios entre otros. También las vemos en la caída de agua de las piletas, en las olas del mar y en otras manifestaciones de la naturaleza.

¿Qué sabes?

En el módulo anterior aprendiste sobre las ecuaciones y propiedades de la circunferencia, puedes determinar el centro, radio y demás elementos que la constituyen. En este módulo vamos a ampliar nuestro estudio a la parábola, elipse e hipérbola, cónicas de gran importancia en la arquitectura, óptica, física, biología e informática.

¿Qué aprenderás?

- **Reconocer** a las cónicas a través de la ecuación que las representa.
- **Encontrar** la ecuación de las cónicas conocidos diferentes elementos.
- **Hallar** la ecuación de las cónicas con base a la descripción geométrica.
- **Reconocer** una cónica degenerada y el lugar geométrico que representa a partir de la ecuación que se describe.
- **Representar** y analizar cónicas con la ayuda de las TIC.
- **Resolver** problemas de física utilizando las cónicas y sus propiedades.

El Buen Vivir

El entorno en que vivimos

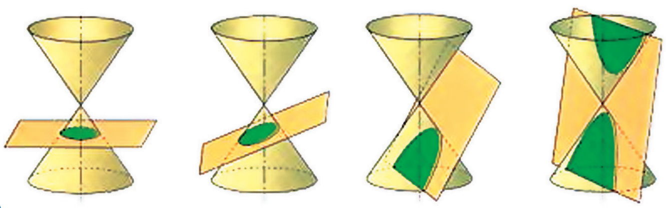
Si observamos a nuestro alrededor, las edificaciones, las casas, los parques, puentes y demás estructuras tienen formas curvas y rectas. En la actualidad y para atenuar la rigidez de las formas se aprovechan las reglas de la cromoterapia para contribuir tanto al aspecto ambiental como a la necesaria armonía de los seres humanos.

- ¿Qué formas curvas o cónicas observas en las edificaciones aledañas a tu colegio?
- Indaga ¿qué es la cromoterapia?
- ¿Cómo la utilización de los colores en la vivienda ayuda a mejorar la calidez del hogar?

Iniciemos

Activación de conocimientos previos

Conoces que una cónica es la sección obtenida al cortar un cono por un plano, esta es la definición más clásica, luego se dijo que es el lugar geométrico de los puntos que verifican una determinada relación de distancias. Ahora, observa los cortes del plano con el cono y enuncia el nombre de la cónica generada.



Objetivos educativos del módulo

- Reconocer los diferentes tipos de cónicas y utilizarlas en problemas de aplicación a la física y a la astronomía.
- Encontrar los elementos de una cónica a partir de su ecuación y, recíprocamente, determinar ecuaciones de cónicas a partir del conocimiento de sus diferentes propiedades.

1

La parábola y sus ecuaciones ordinarias

Reconocer una parábola a través de la ecuación que la representa.

Indagamos

Encuentra una ecuación adecuada en dos variables (x, y) para describir un lugar geométrico que contenga los puntos de la siguiente tabla.

x	0	100	200	300	400	500	600
y	0	12,5	50	112,5	200	312,5	400

En años anteriores, definimos a la **parábola** como la curva que se obtiene al graficar una función cuadrática. A lo largo de esta lección, ampliaremos nuestro conocimiento de las parábolas estudiando algunas de las propiedades que presenta su muy particular geometría. Asimismo, desarrollaremos competencias para su representación algebraica y gráfica.

Ten en cuenta

- Para calcular la distancia del punto $P(x_1, y_1)$ al punto $Q(x_2, y_2)$ usamos la fórmula

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- Para calcular la distancia de la recta $\mathscr{L}: Ax + By + C = 0$ al punto $P(r, s)$ usamos la fórmula

$$d(P, \mathscr{L}) = \frac{|Ar + Bs + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

La parábola como lugar geométrico

Existen varias formas de definir o caracterizar una parábola. Una de las alternativas para construirla es a partir de un punto fijo, al que llamamos **foco**, y una recta fija, a la que denominamos **directriz**.

La **parábola** es el lugar geométrico formado por los puntos $P(x, y)$ del plano cartesiano tales que equidistan de un punto fijo F (**foco**) y una recta fija D (**directriz**).

Entonces, $P(x, y)$ pertenece a la parábola si y solo si $d(P, F) = d(P, D)$.

Ejemplo 1

Encuentra la ecuación en dos variables que debe cumplir cualquier punto $P(x, y)$ de la parábola generada por el foco $F(2, 1)$ y la directriz $x - 2y + 14 = 0$.

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la parábola. Comenzamos calculando la distancia del punto P al foco F, usando para ello la fórmula para la distancia entre dos puntos:

$$d(P, F) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d(P, F) = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}$$

Después, usamos la fórmula para la distancia de un punto a una recta y calculamos la distancia de P a la directriz D.

$$d(P, D) = \frac{|Ax\ By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d(P, D) = \frac{|x - 2y + 14|}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2}} = \frac{|x - 2y + 14|}{\sqrt{5}}$$

Si P es un punto de la parábola, entonces las distancias al foco F y a la directriz D deben ser iguales.

$$d(P, F) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{|x - 2y + 14|}{\sqrt{5}} = d(P, D)$$

Por último, elevamos al cuadrado y simplificamos de manera que un miembro de la ecuación sea cero:

$$\left(\sqrt{5}\,\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}\right)=(|x-2y+14|)^2$$

$$(\sqrt{5})^2\,\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}\,)=(x-2y+14)(x-2y+14)$$

$$(5)(x^2-4x+4+y^2-2y+1)=x^2-2xy+14x-2xy+4y^2-28y+14x-28y+196$$

$$5x^2-20x+20+5y^2-10y+5=x^2-4xy+4y^2+28x-56y+196$$

$$4x^2+4xy+y^2-48x+46y-171=0$$

Por lo tanto, todos los puntos $P(x, y)$ de esta parábola cumplen con la ecuación anterior.

Sabías que...

Por sus propiedades geométricas, la parábola es, después de la circunferencia, una de las figuras curvas más relevantes. Desde la antigüedad, 2000 años antes de la invención del plano cartesiano, los matemáticos ya estudiaban a las parábolas por sus importantes propiedades. Científicos, ingenieros e inventores de todos los tiempos las han explotado para desarrollar la tecnología que facilita la vida de las personas.

La parábola como figura

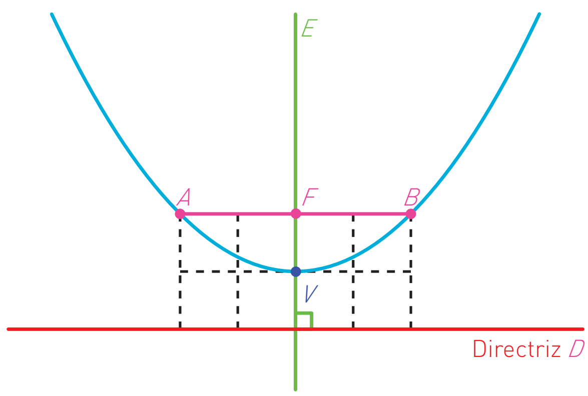
Para estudiar las ecuaciones cartesianas, primero conviene analizar el aspecto gráfico o visual de todas las parábolas.

En la figura ilustramos el trazo de la **parábola** con **foco** *F* y **directriz** *D*.

Si trazamos la perpendicular a la directriz que pasa por el foco, observamos que esta recta debe ser el **eje de simetría** *E* de la parábola.

Ubicado sobre el eje de simetría y a la mitad de la distancia entre el foco y la directriz, se encuentra el **vértice** *V*, que es un punto muy importante de la parábola.

Por último notamos que, al igual que el vértice, los puntos simétricos *A* y *B* están a la misma distancia del foco y de la directriz, por lo tanto, estos cumplen la propiedad que define al lugar geométrico y deben estar ubicados sobre la parábola. Al segmento $\overline{AB}$ se le conoce como el **lado recto** (LR) de la parábola y es una referencia para bosquejar rápidamente su gráfica con la curvatura adecuada.



Actividad resuelta

Instrumentos de dibujo para trazar parábolas

Un **parabolígrafo** es un instrumento diseñado especialmente para trazar arcos parabólicos. A lo largo de la historia se han construido diferentes tipos de curvígrafos, pero, en todos los casos, sus distintos mecanismos trabajan con base en alguna de las propiedades que caracterizan a la parábola como lugar geométrico.

Uno de los más simples es el parabolígrafo de hilo tenso, cuyo funcionamiento se explica a partir de la propiedad que define a la ***parábola*** como el lugar geométrico formado porlos puntos P que equidistan del foco F y la recta directriz D. *Ver la figura de la página anterior.*

Para construir un parabológrafo de hilo tenso necesitamos una regla T o una escuadra y un hilo. Fijamos este último al foco F y al extremo A de la regla; colocamos la punta P del lápiz sobre el hilo, manteniéndolo tenso sobre la orilla de la regla T. (*Figura A*)

Conforme la regla T se desliza por la directriz D, el punto P se mueve sobre el plano trazando un arco de parábola. (*Figura B*)

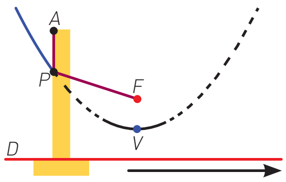


Figura A

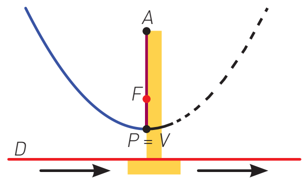


Figura B

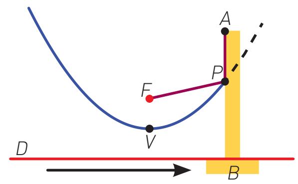


Figura C

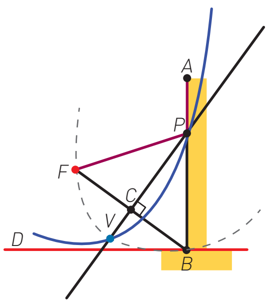


Figura D

Analizando la construcción, podemos descubrir rápidamente el principio geométrico que explica su funcionamiento.

Sabemos que la longitud total del hilo es constante y mide $\overline{AP} + \overline{PF}$. Cuando la regla T pasa sobre el foco F (*Figura B*), tenemos que el punto P coincide con el vértice V (es decir, $P = V$) y la longitud del hilo es:

$$\overline{AP} + \overline{PF} = \overline{AV} + \overline{VF}$$

Si llamamos B al punto donde la regla T corta a la directriz D (*Figura D*), entonces, como V equidista del foco y la directriz, tenemos que $\overline{VF} = \overline{VB}$, Por lo que la longitud del hilo también se expresa como:

Cuando deslizamos la regla T sobre la directriz D y mantenemos alineados los puntos A, P y B en cualquier posición, tenemos que:

$$\overline{AP} + \overline{PF} = \overline{AV} + \overline{VF} = \overline{AV} + \overline{VB} = \overline{AB}$$

$$\overline{AP} + \overline{PF} = \overline{AB} \quad \text{y} \quad \overline{PF} = \overline{PB}$$

Así, el punto P se mueve de modo que la distancia que lo separa de F y de B siempre es la misma (*Figura D*). Como el segmento $\overline{AB}$ es perpendicular a la directriz, tenemos que la longitud de $\overline{PB}$ es igual a la distancia de P a esta. Entonces, P equidista del foco F y la directriz D; por lo tanto, siempre está sobre la parábola.

Ten en cuenta

Como $\overline{PF} = \overline{PB}$, entonces ΔFBP es isósceles. Dado que C es el punto medio de $\overline{FB}$, la recta PC es al mismo tiempo mediatriz y bisectriz del triángulo.

Actividades propuestas

En cada caso, encuentra la ecuación de la parábola dados su foco F y directriz D.

1. $F(1, 1)$; $D: x + y = 0$ **2.** $F(2, 1)$; $D: 3x - 2y + 6 = 0$ **3.** $F(0, 0)$; $D: x - 5y - 3 = 0$

Lleva a cabo la siguiente actividad.

4. Usando materiales sencillos (escuadra, cartón grueso, cordel y madera), construye tu propio parabológrafo. Úsalo para trazar parábolas en las que $d(F, V) = 5$, 8 y 10 cm.

Ecuaciones de la parábola con directriz horizontal

Encontrar la ecuación de una parábola conocidos diferentes elementos.

Ecuaciones cartesianas de las parábolas

En el ejemplo 1 del tema 1, obtuvimos la ecuación cartesiana de una parábola y observamos que el procedimiento no es muy complicado. Para ello sólo necesitamos conocer la ecuación de su directriz y las coordenadas del foco, y aplicar las fórmulas para calcular las distancias punto-punto y punto-recta.

Sin embargo, si conocemos la ecuación de la parábola y a partir de ella queremos determinar las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz, las coordenadas de su vértice o simplemente trazar su gráfica, requerimos otra estrategia.

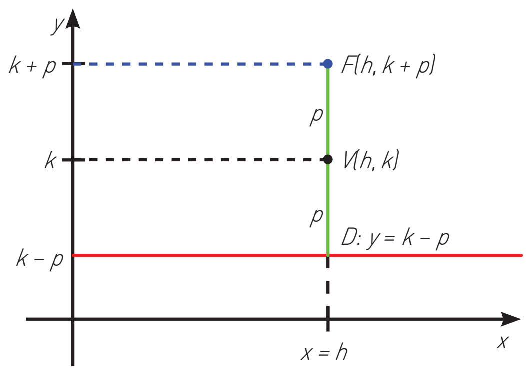
Para hacerlo, como en el caso de las circunferencias, será necesario desarrollar ecuaciones ordinarias a partir de las cuales podamos determinar por inspección todos los elementos de la figura.

Ecuaciones ordinarias de parábolas con directriz horizontal

En lo que sigue, desarrollaremos las ecuaciones ordinarias de las parábolas generadas a partir de una **directriz horizontal** (paralela al eje x). Comenzamos considerando la situación donde el foco está colocado por encima de la recta directriz.

Sea $\boldsymbol{V(h, k)}$ el vértice de la parábola y usemos la letra $\boldsymbol{p}$ para representar la distancia que separa al vértice del foco (o al vértice de la directriz). Entonces, las coordenadas del foco deben ser $F(h, k + p)$, y la ecuación de la directriz está dada por $y = k - p$; lo cual equivale a que tiene la forma general:

$$D: 0x + 1y + (p - k) = 0$$



Sea $\boldsymbol{P(x, y)}$ un punto cualquiera de la parábola, entonces sabemos que la distancia del punto P al foco F es igual que la distancia del punto P a la directriz D: $\boldsymbol{d(P, F)} = \boldsymbol{d(P, D)}$. Usando las fórmulas para las distancias punto-punto y punto-recta, obtenemos:

$$d(P, F) = \sqrt{(x - h)^2 + [y - (k - p)]^2} = \frac{|0x + 0y + (p - k)|}{\sqrt{(0)^2 + (1)^2}} = d(P, D)$$

De donde se sigue que:

$$\left(\sqrt{1}\ \sqrt{(x - h)^2 + (y - k - p)^2}\right)^2 = (|y + p - k|)^2 \rightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x - h)^2 + (y - k - p)^2}\right)^2 = (y + p - k)^2 \rightarrow$$

$$(x - h)^2 + (y - k - p)^2 = (y + p - k)^2$$

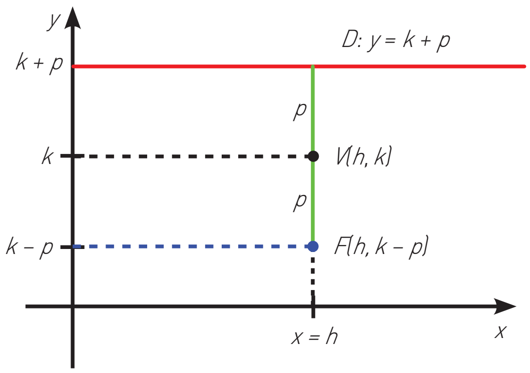
Ten en cuenta

En las ecuaciones de la parábola, el parámetro p representa una distancia y, en consecuencia, siempre estaremos suponiendo que $p > 0$.

Por último, despejamos $(x - h)^2$ y simplificamos el miembro derecho de la ecuación:

$$(x - h)^2 = (y + p - k)^2 - (y - k - p)^2$$
$$(x - h)^2 = [(y + p - k) + (y - k - p)]\,[(y + p - k) - (y - k - p)]$$
$$(x - h)^2 = [y + p - k + y - k - p]\,[y + p - k - y + k + p)]$$
$$(x - h)^2 = [2(y - k)]\,[2p]$$
$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Por lo tanto, la ecuación es $(x - h)^2 = 4p(y - k)$.



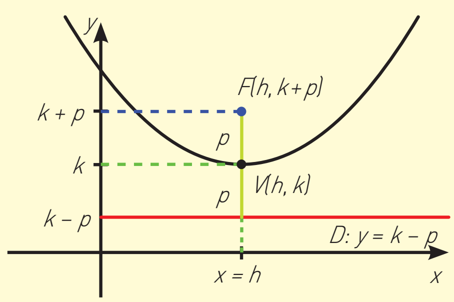
Ahora, si invertimos las posiciones relativas de la directriz, el vértice y el foco (es decir, colocamos a la directriz por encima del vértice y al foco por debajo de él), entonces las coordenadas de este son $F(h, k - p)$, y la ecuación de la directriz está dada por $y = k + p$, la cual, transformada a su forma general, queda como D: $0x + 1y + (-p - k) = 0$.

Ten en cuenta

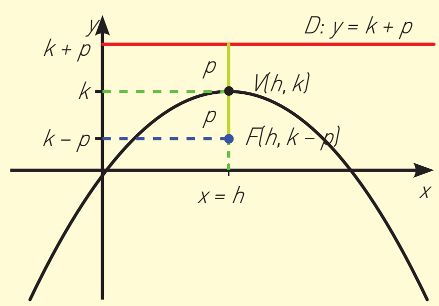
- Vértice en el eje x, $V(h, 0)$:
  $(x - h)^2 = \pm 4p(y - k) \rightarrow$
  $(x - h)^2 = \pm 4py$
- Vértice en el eje y, $V(0, k)$:
  $(x - h)^2 = \pm 4p(y - k) \rightarrow$
  $x^2 = \pm 4p(y - k)$
- Vértice en el origen, $V(0, 0)$:
  $(x - h)^2 = \pm 4p(y - k) \rightarrow$
  $x^2 = \pm 4py$

Notamos que, excepto por el signo de ***p***, la situación es idéntica a la del caso anterior. Por lo tanto, concluimos que la ecuación correspondiente es $(x - h)^2 = -4p(y - k)$.

Ecuaciones ordinarias de las parábolas con directriz horizontal y $V(h, k)$



$(x - h)^2 = -4p(y - k)$



$(x - h)^2 = -4p(y - k)$

Ejemplo 1

A partir de la ecuación ordinaria, traza la gráfica de la parábola y determina todos sus elementos: vértice, foco, directriz, eje de simetría y extremos del lado recto (LR).

a) $(x + 2)^2 = -12(y - 1)$

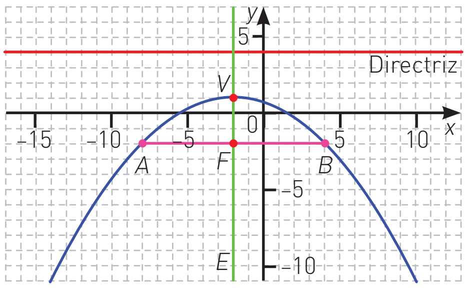
Comparando esta ecuación con la ecuación ordinaria $(x - h)^2 = -4p(y - k)$, concluimos que tenemos una parábola que se abre hacia abajo.

Analizando la ecuación $(x + 2)^2 = -12(y - 1)$

$\rightarrow [x-(-2)]^2 = -4(3)[(y-(1)],$

deducimos que $h = -2$, $k = 1$ y $4p = 12$, por lo cual $p = \frac{12}{4} = 3$.

Entonces, las coordenadas del vértice son $(-2, 1)$ y la distancia de este al foco o a la directriz es $p = 3$.



Elementos	
Vértice	$(-2, 1)$
Foco	$(-2, -2)$
Directriz	$y = 4$
Eje de simetría	$x = -2$
Extremos LR	$(-8, -2)$ y $(4, -2)$

Utiliza las TICS

Puedes acceder al siguiente enlace para conocer cómo se grafica la parábola en geogebra *http://www.geogebra.org/en/upload/files/mluisamh/FUNCIONES/CUADRATICA/6.%20Graficaelementosparabola.pdf*

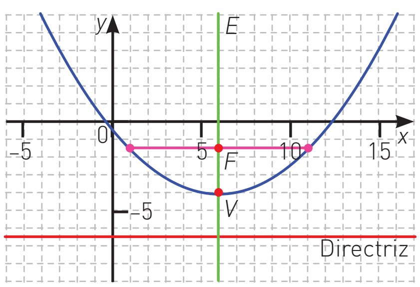
b) $(x-6)^2 = 10(y+4)$

Comparando esta ecuación con la ecuación ordinaria $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, concluimos que tenemos una parábola que se abre hacia arriba.

Analizando la ecuación $(x-6)^2 = 10(y+4)$

$\rightarrow [x-(+6)]^2 = -4\left(\frac{5}{2}\right)[y-(-4)]$, determinamos que $h = 6$, $k = -4$, y $4p = 10$, por lo tanto, $p = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$.

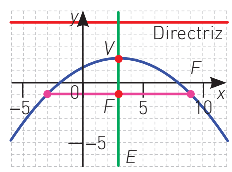
Entonces, las coordenadas del vértice son $(6, -4)$ y la distancia de este a la directriz o al foco es $p = \frac{5}{2}$.



Elementos	
Vértice	$(6, -4)$
Foco	$\left(6, -\frac{3}{2}\right)$
Directriz	$y = -\frac{13}{2}$
Eje de simetría	$x = 6$
Extremos LR	$\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ y $\left(11, -\frac{3}{2}\right)$

Ten en cuenta

En general, el trazo de una gráfica es muy útil para visualizar sus elementos.



Actividad resuelta

En cada caso, a partir de los datos y conociendo que la directriz de la parábola es horizontal, encuentra su ecuación ordinaria.

1. $V(3, 2)$; la distancia del foco al vértice mide 3 unidades y la parábola se abre hacia abajo.

Como la parábola tiene directriz horizontal y se abre hacia abajo,

sabemos que su ecuación es de la forma $(x-h)^2 = -4p(y-k)$. Como $V = (3, 2)$, entonces $h = 3$ y $k = 2$.

Finalmente, como $p = d(F, V) = 3$, tenemos que:

$$(x-h)^2 = -4p(y-k)$$

$$\rightarrow (x-3)^2 = -4(3)(y-2) \rightarrow (x-3)^2 = -12(y-2)$$

Por lo tanto, la ecuación buscada es $(x-3)^2 = -12(y-2)$.

2. $F(-4, 5)$ y $V(-4, -2)$

Comenzamos calculando la distancia del vértice al foco para determinar el valor del parámetro p:

$$d(F, V) = \sqrt{[-4 - (-4)]^2 + [5 - (-2)]^2} = \sqrt{0^2 + 7^2} = \sqrt{49} = 7$$

Como el foco está colocado por encima del vértice, concluimos que la parábola se abre hacia arriba y su ecuación es de la forma $(x - h)^2 = 4p(y - k)$.

Finalmente, sustituyendo $h = -4$, $k = -2$ y $p = 7$, tenemos que:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \rightarrow [x - (-4)]^2 = 4(7)[y - (-2)] \rightarrow (x + 4)^2 = 28(y + 2)$$

Por lo tanto, la ecuación buscada es $(x + 4)^2 = 28(y + 2)$.

c) $F(3, -6)$; D: $y + 1 = 0$

Comenzamos calculando la distancia del foco a la directriz:

$$d(F, D) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|0\,(3) + 1\,(6-) + 1|}{\sqrt{(0)^2 + (1)^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{1}} = 5$$

Como la distancia del foco a la directriz mide $2p$, entonces $2p = 5$ y, por lo tanto, $p = \frac{5}{2}$.

Sabemos que foco y vértice están alineados sobre el eje de simetría vertical, entonces, el segundo está sobre la recta $x = 3$, justo a la mitad de la distancia entre el foco $F(3, -6)$ y el punto $Q(3, -1)$ de la directriz. Por lo tanto:

$$V = PM_{FQ}\left(3 + \frac{3}{2}, -6 - \frac{1}{2}\right) \rightarrow V = \left(3, -\frac{7}{2}\right)$$

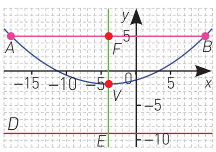
Finalmente, sustituyendo $h = 3$, $k = -\frac{7}{2}$ y $p = \frac{5}{2}$, tenemos que:

$$(x - h)^2 = -4p(y - k) \rightarrow (x - 3)^2 = -4\left(\frac{5}{2}\right)\left[y - \left(-\frac{7}{2}\right)\right]$$

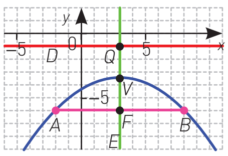
Por lo que la ecuación buscada es $(x - 3)^2 = -10\left(y + \frac{7}{2}\right)$.

Ten en cuenta

La gráfica es:



La gráfica es:



Actividades propuestas

Traza las gráficas y encuentra todos los elementos de las parábolas descritas por las siguientes ecuaciones.

3. $(x - 3)^2 = -4(y + 5)$ **4.** $x^2 = 6(y - 1)$ **5.** $x^2 = 8y$

A partir de los elementos conocidos, encuentra la ecuación ordinaria de cada una de las parábolas.

6. $V(-5, 1)$; D: $y = -3$ **7.** $F(3, -9)$; D: $y = 9$ **8.** $V(-1, 5)$; D: $y = 1$

Traza la gráfica y determina los elementos de cada parábola.

9. $(y - 1)^2 = 28(x - 2)$ **10.** $(y + 4)^2 = 12(x - 1)$ **11.** $(y + 3)^2 = -4(x - 3)$

12. $(y - 2)^2 = -8(x + 2)$ **13.** $(x - 2)^2 = -4y$ **14.** $(x + 4)^2 = 24(y - 3)$

Usa los datos proporcionados para encontrar la ecuación de la parábola.

15. $F(3, 0)$; $V(0, 0)$ **16.** $F(0, -11)$; $V(0, 0)$ **17.** $F(1, 7)$; $V(6, 7)$

18. $F(-4, -1)$; $V(-6, -1)$ **19.** $F(-6, 4)$; $V(-6, -2)$ **20.** $F(-1, -1)$; $V(-1, 16)$

Ecuaciones ordinarias de parábolas con directriz vertical

Al igual que en el caso de las parábolas con directriz horizontal, comenzaremos nuestra construcción a partir de las coordenadas del vértice $V(h, k)$ y, de manera análoga, consideramos dos casos.

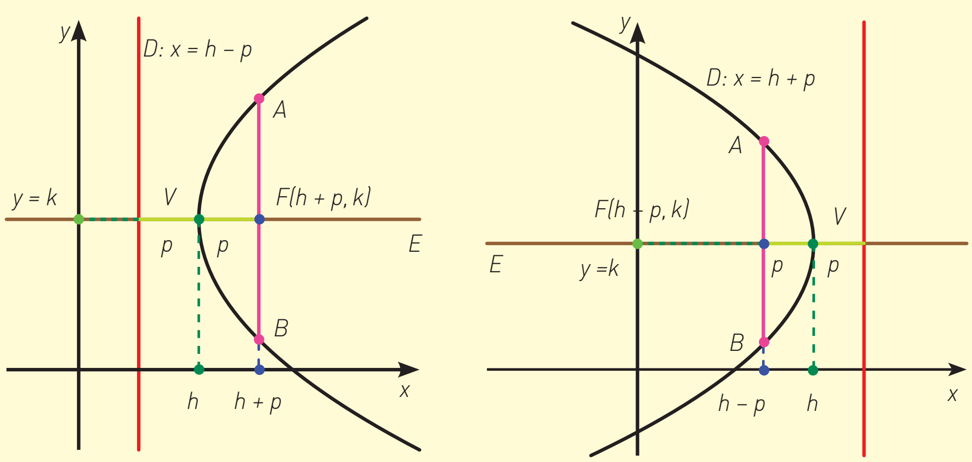
Caso 1. La directriz se ubica a la izquierda del vértice, y el foco, a la derecha.

Caso 2. La directriz se ubica a la derecha del vértice, y el foco, a la izquierda.

Al comparar estas parábolas con las de directriz horizontal encontramos que tanto las coordenadas de los focos como las ecuaciones de las directrices se pueden obtener unas de otras al invertir los papeles de las variables x y y.

Por lo tanto, la única diferencia entre las ecuaciones de las parábolas con directrices verticales y las de aquellas con directrices horizontales es que los papeles de x y y están invertidos o intercambiados.

Ecuaciones ordinarias de las parábolas con directriz vertical y $V(h, k)$



Ten en cuenta

Vértice en el eje x, $V(h, 0)$:

$(y - k)^2 = \pm 4p(x - h)$

$\rightarrow y^2 = \pm 4p(x - h)$

Vértice en el eje y, $V(0, k)$:

$(y - k)^2 = \pm 4p(x - h) \rightarrow$

$(y - k)^2 = \pm 4px$

Vértice en el origen, $V(0, 0)$:

$(y - k)^2 = \pm 4p(x - h) \rightarrow$

$y^2 = \pm 4px$

Ejemplo 1

A partir de la ecuación, traza la gráfica de la parábola y determina todos sus elementos: vértice, foco, directriz, eje de simetría y extremos del lado recto (LR).

a) $(y - 3)^2 = 16(x + 4)$

Analizando la ecuación concluimos que es de la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, por lo cual tenemos una parábola con directriz vertical que se abre hacia la derecha.

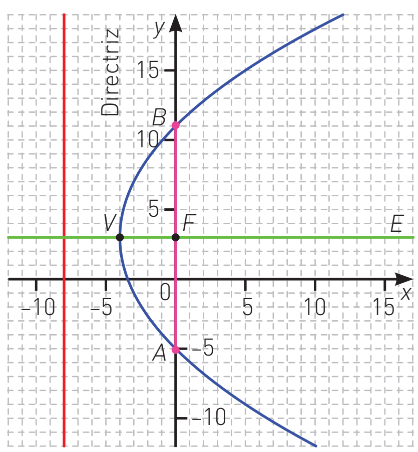
Observando la ecuación $(y - 3)^2 = 16(x + 4)$

$\rightarrow (y - 3)^2 = 16[x - (-4)]$,

concluimos que $h = -4$, $k = 3$, y $4p = 16$, por lo que $p = \frac{16}{4} = 4$.

Entonces, las coordenadas del vértice son $(-4, 3)$ y la distancia de este al foco o a la directriz es $p = 4$.

Elementos	
Vértice	$(-4, 3)$
Foco	$(0, 3)$
Directriz	$x = -8$
Eje de simetría	$y = 3$
Extremos LR	$(0, -5)$ y $(0, 11)$



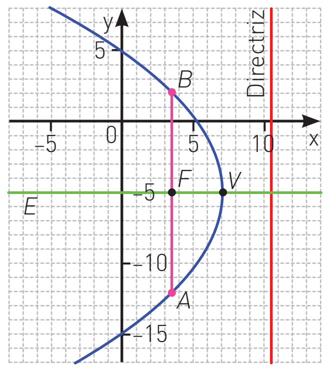
b) $(y + 5)^2 = -14(x - 7)$

Analizando la ecuación concluimos que es de la forma $(y - k)^2 = -4p(x - h)$, y que tenemos una parábola con directriz vertical que se abre hacia la izquierda.

Observando la ecuación $(y + 5)^2 = -14(x - 7)$, concluimos que $h = 7$, $k = -(-5) = -5$ y $4p = 14$, por lo cual $p = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$.

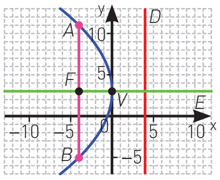
Entonces, las coordenadas del vértice son $(7, -5)$ y la distancia de este al foco o a la directriz es $p = \frac{7}{2}$.

Elementos	
Vértice	$(7, -5)$
Foco	$\left(\frac{7}{2}, -5\right)$
Directriz	$x = \frac{21}{2}$
Eje de simetría	$y = -5$
Extremos LR	$\left(\frac{7}{2}, -12\right)$ y $\left(\frac{7}{2}, 2\right)$

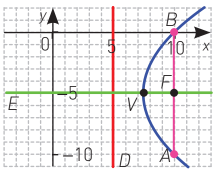


Ten en cuenta

La gráfica es:



La gráfica es:



Actividad resuelta

A partir de los datos conocidos de cada parábola, encuentra su ecuación ordinaria.

1. $V(0, 3)$ y $F(-4, 3)$

Como las ordenadas del vértice y el foco coinciden, el eje de simetría es $y = 3$ y su directriz está colocado a la izquierda del vértice, la parábola se abre hacia la izquierda y su ecuación ordinaria es de la forma: $(y - k)^2 = -4p(x - h)$.

Para calcular el valor del parámetro p, simplemente calculamos la distancia del vértice al foco:

$p = d(F, V) = \sqrt{[0 - (-4)]^2 + (3 - 3)^2} = \sqrt{16} = 4$. Como las coordenadas del vértice son $(0, 3)$, entonces $h = 0$ y $k = 3$; la ecuación buscada es $(y - 3)^2 = -4(4)(x - 0) \rightarrow (y - 3)^2 = -16x$.

2. $F(10, -5)$ y D: $x - 5 = 0$

Como la directriz $x = 5$ es una recta vertical y está colocada a la izquierda del vértice, entonces la parábola abre hacia la derecha y su ecuación ordinaria es de la forma $(y - k)^2 = 4p(x - h)$.

Para determinar el valor de k, sabemos que el eje de simetría es $y = -5$, el foco es $(10, -5)$, Por lo tanto, $k = -5$ y $V = (h, -5)$. Para determinar el valor de h, calculamos las intersecciones de la directriz $x = 5$ y el foco $x = 10$ con el eje de la parábola y determinamos el punto medio de las intersecciones, h es la abscisa de ese punto; es decir, $h = \frac{5 + 10}{2} = \frac{15}{2}$. Por consiguiente, $V\left(\frac{15}{2}, -5\right)$.

Finalmente, el valor del parámetro p se obtiene calculando la distancia del vértice al foco:

$p = d(F, V) = \sqrt{\left(10 - \frac{15}{2}\right)^2 + [-5 - (-5)]^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$ Entonces, la ecuación buscada es

$[y - (-5)]^2 = 4\left(\frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{15}{2}\right) \rightarrow (y + 5)^2 = 10\left(x - \frac{15}{2}\right)$.

Actividades propuestas

Traza las gráficas y encuentra los elementos de las siguientes parábolas.

3. $(y - 3)^2 = 10(x + 1)$ **4.** $(y - 4)^2 = -16(x - 2)$

Encuentra la ecuación de cada parábola a partir de los elementos conocidos.

5. $V(5, 3)$; D: $x = 0$ **6.** $F\left(15/25, 1\right)$; D: $x = -3$

En este tema analizaremos las ecuaciones generales de las parábolas con directrices alineadas con los ejes cartesianos. Después, desarrollaremos técnicas para transitar de la forma ordinaria de la ecuación de una parábola a su forma general y viceversa. Por último, reflexionaremos sobre la conveniencia de elegir, según lo que se desea resolver, una u otra forma de la ecuación cartesiana de la parábola.

La forma general de la ecuación de una parábola

Recordemos que la ecuación general de un lugar geométrico se distingue por las siguientes características:

- no tiene paréntesis o fracciones;
- uno de los miembros de la ecuación es 0; y
- sus coeficientes están simplificados al máximo (su máximo común divisor es igual a 1).

Es fácil concluir que las formas generales de las ecuaciones generales de las parábolas siempre corresponden a una ecuación de segundo grado en dos variables.

La ecuación general de segundo grado en dos variables x y y más completa que podemos tener es de la forma: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. En el bloque anterior, vimos que dicha ecuación corresponde a una circunferencia si y solo si $B = 0$, $A = C = 1$ y $D^2 + E^2 - 4F > 0$.

Ahora veremos las condiciones que deben cumplir los coeficientes A, B, C, D, E y F para que la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ defina un lugar geométrico cuya gráfica en el plano cartesiano corresponda a una parábola.

Comencemos analizando el caso de las parábolas cuyas directrices están alineadas con los ejes cartesianos. A partir de las ecuaciones ordinarias, observamos lo siguiente.

Directriz horizontal

$(x - h)^2 = \pm 4p(y - k)$

$x^2 - 2xh + h^2 = \pm 4py \pm 4pk$

$x^2 + (-2h)x + (\pm 4p)y + (h^2 \pm 4pk) = 0$

$x^2 + Dx + Ey + F = 0$

Donde:

$D = -2h;\ E = \pm 4p;\ F = h^2 \pm 4pk$

Directriz vertical

$(y - k)^2 = \pm 4p(x - h)$

$y^2 - 2yk + k^2 = \pm 4px \pm 4ph$

$y^2 + (\pm 4p)x + (-2k)y + (k^2 \pm 4ph) = 0$

$y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Donde:

$D = \pm 4p;\ E = -2k;\ F = k^2 \pm 4ph$

En ambos casos los coeficientes D, E y F pueden tomar cualesquiera valores reales, que determinan y están determinados por los valores de h, k y p.

Indagamos

Usa argumentos geométricos para determinar el vértice de las siguientes parábolas.

- Los extremos de su lado recto son los puntos $(-2, 2)$ y $(-2, -14)$.
- Pasa por los puntos $A = (1, 1)$, $B = (1, -1)$ y $C = (0, 0)$ y la directriz es horizontal.
- Su eje de simetría es la recta $x - y = 0$, además sabemos que su ecuación general es $x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y = 0$.

Ecuaciones generales de las parábolas

Las siguientes ecuaciones generales de segundo grado corresponden a parábolas con directrices paralelas con los ejes cartesianos.

- $x^2 + Dx + Ey + F = 0$, parábola con directriz horizontal y eje de simetría vertical;
- $y^2 + Dx + Ey + F = 0$, parábola con directriz vertical y eje de simetría horizontal.

En conclusión, la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, define una parábola con directriz paralela a algún eje cartesiano si y solo si $B = 0$, $A \neq C$ y $AC = 0$.

Ten en cuenta

En $x^2 + Dx + Ey + F = 0$ tenemos que $A = 1$, $B = 0$ y $C = 0$

En $y^2 + Dx + Ey + F = 0$ tenemos que $A = 0$, $B = 0$ y $C = 1$

En ambos casos se cumple que

$AC = (1)(0) = (0)(1) = 0$

Recordemos que se definió la parábola como lugar geométrico. Desarrollamos un ejemplo donde encontramos la ecuación general de una parábola con directriz oblicua, es decir, no alineada con los ejes cartesianos. A partir de la directriz $x - 2y + 14 = 0$ y el foco con coordenadas (2, 1), obtuvimos la ecuación $4x^2 + 4xy + y^2 - 48x + 46y - 171 = 0$.

La ecuación general en dos variables, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, determina una **parábola** si y solo si los coeficientes A, B y C cumplen que $B^2 - 4AC = 0$.

Para ejemplificar este hecho, podemos observar que en la ecuación obtenida en el ejemplo citado, $4x^2 + 4xy + y^2 - 48x + 46y - 171 = 0$, tenemos que $A = 4$, $B = 4$ y $C = 1$. Si calculamos la expresión $B^2 - 4AC$, observamos que $(4)^2 - 4(4)(1) = 16 - 16 = 0$.

De la ecuación ordinaria a la ecuación general

Al final de la página anterior, transformamos los dos tipos de ecuaciones ordinarias de parábolas a su forma general. Para convertir la ecuación de una parábola de forma ordinaria a la forma general, una opción sería memorizar y aplicar las fórmulas para calcular los coeficientes D, E y F (seis en total, pues son tres para cada caso). Sin embargo, en la mayoría de las situaciones lo más práctico es efectuar los desarrollos y simplificar directamente.

Ejemplo 1

A partir de la información proporcionada, encuentra la ecuación general de la parábola.

a) Su ecuación ordinaria es $(x + 1)^2 = (6y + 4)$.

Desarrollamos el binomio al cuadrado del lado izquierdo $(x + 1)^2$.

$$(x + 1)^2 = (6y + 4) \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 6y + 4$$

Simplificamos y ordenamos los términos para que un miembro de la ecuación sea cero.

$$x^2 + 2x + 1 - 6y - 4 = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 6y - 3 = 0$$

b) El vértice tiene coordenadas $V = (0, -1)$ y el foco $F = (10, -1)$.

Observamos que $h = 0$, $k = -1$ y $p = d(F, V) = |10 - 0| = 10$.

Además, el vértice y el foco están sobre el eje de simetría horizontal $y = -1$, entonces su directriz es vertical.

Como el foco está a la derecha del vértice, la ecuación ordinaria de la parábola es

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

$$\to [y-(-1)]^2 = 4(10)(x-0) \to (y+1)^2 = 40x.$$

Finalmente, desarrollamos el lado derecho y simplificamos para obtener la ecuación general

$$y^2 + 2y + 1 = 40x$$

$$\to y^2 - 40x + 2y + 1 = 0$$

De la ecuación general a la ecuación ordinaria

Para obtener la forma ordinaria a partir de la ecuación general de una parábola que tiene su directriz alineada con los ejes cartesianos llevamos a cabo los pasos siguientes.

Transformación de ecuaciones generales a ordinarias

- Identificamos cuál de las dos variables es la que está elevada al cuadrado. Si su coeficiente es distinto de 1, dividimos toda la ecuación entre él.
- Acomodamos la ecuación, dejando en el lado izquierdo los términos en los que aparece dicha variable (la que está al cuadrado) y los demás en el lado derecho.
- Del lado izquierdo completamos el binomio para formar un trinomio cuadrado perfecto (TCP) y del lado derecho agregamos el mismo valor para conservar la igualdad.
- Finalmente, factorizamos de ambos lados y obtenemos la forma ordinaria.

Si queremos trazar la gráfica de una parábola o conocer alguno de sus elementos, la ecuación ordinaria es más adecuada porque con ella los deducimos directamente. Por ello, si conocemos la ecuación general, conviene transformarla a su forma ordinaria y obtener así la información requerida.

Sabías que...

La forma de parábola se produce naturalmente en el mundo físico. Los seres humanos también utilizan formas parabólicas en el diseño de objetos que van desde los puentes hasta las antenas parabólicas.

Actividad resuelta

Resuelve los siguientes problemas.

1. Encuentra el vértice de la parábola dada por la ecuación $y^2 - 5x - 4y - 31 = 0$.

Primero acomodamos la ecuación: $y^2 - 4y = 5x + 31$. Después completamos el TCP y factorizamos:

$y^2 - 4y + 4 = 5x + 31 + 4$

$\to (y-2)^2 = 5x + 35$

$\to (y-2)^2 = 5(x+7)$.

Por lo tanto, concluimos que el vértice de la parábola es $V = (-7, 2)$.

2. Encuentra el foco de la parábola dada por la ecuación $x^2 - 18x + 64y + 17 = 0$.

Acomodamos la ecuación dejando los términos con la variable x del lado izquierdo y los demás del lado derecho: $x^2 - 18x = -64y - 17$.

Ahora, completamos el binomio del lado izquierdo para formar un TCP, compensamos del lado derecho y factorizamos en ambos lados.

$$x^2 - 18x + 81 = -64y - 17 + 81$$
$$\rightarrow (x-9)^2 = -64y + 64$$
$$\rightarrow (x-9)^2 = -64(y-1)$$

Por lo tanto, se trata de una parábola con directriz horizontal, que abre hacia abajo y tiene su vértice en el punto $V = (9, 1)$. Además, como $4p = 64$, tenemos que $p = 16$ y como el foco debe estar colocado por debajo del vértice, las coordenadas del foco son $F = (9, 1 - 16) = (9, -15)$.

3. Encuentra la directriz y el eje de simetría de la parábola con ecuación $y^2 - x = 0$.

En este caso observamos que: $y^2 - x = 0$

$$\rightarrow y^2 = x$$
$$\rightarrow (y-0)^2 = 1(x-0).$$

Por lo tanto, el vértice de la parábola está en el origen $V = O = (0, 0)$ y como $4p = 1$, tenemos que $p = \frac{1}{4}$. Por la forma de su ecuación ordinaria, concluimos que la parábola tiene directriz vertical, eje de simetría horizontal y que se abre hacia la derecha.

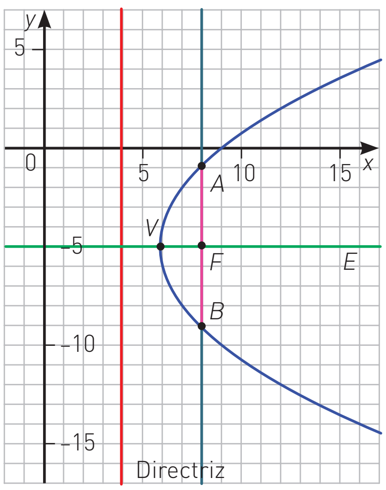
Entonces, como $k = 0$, el eje de simetría coincide con el eje x, cuya ecuación es $y = 0$.

Finalmente, como $V = (0, 0)$, $p = \frac{1}{4}$ y la parábola se abre a la derecha, sabemos que la directriz está a la izquierda del vértice y su ecuación es $x = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$, que en forma general se escribe como $4x + 1 = 0$.

4. Traza la gráfica de la parábola dada por la ecuación $2y^2 - 16x + 20y + 146 = 0$.

Dividimos la ecuación entre 2, $y^2 - 8x + 10y + 73 = 0$, y la convertimos a su forma ordinaria.

$$y^2 + 10y + 25 = 8x - 73 + 25$$
$$\rightarrow (y+5)^2 = 8x - 48$$
$$\rightarrow (y+5)^2 = 8(x-6)$$



Por lo tanto, la directriz es vertical, el eje de simetría es horizontal y la parábola se abre hacia la derecha.

Entonces, las coordenadas del vértice son

$$V = (h, k) = (6, -5)$$

y la distancia del vértice al foco o del vértice a la directriz es $p = \frac{8}{4} = 2$.

Elementos	
Vértice	$(6, -5)$
Foco	$(8, -5)$
Directriz	$x = 4$
Eje de simetría	$y = -5$
Extremos LR	$(8, -9)$ y $(8, -1)$

Parábolas alineadas con los ejes y que pasan por tres puntos dados

Como hemos visto, para determinar los elementos o trazar la gráfica de una parábola preferimos la ecuación en forma ordinaria. Sin embargo, para resolver otros problemas resulta más conveniente trabajar con la ecuación en forma general.

Estudiamos que para determinar de manera única a una circunferencia, es necesario definir tres condiciones. En el caso de las parábolas, la situación es más compleja y para determinarlas de forma única, en lugar de tres, son necesarias cuatro condiciones.

Si requerimos encontrar la ecuación de una parábola a partir de algunos de sus puntos, necesitamos conocer las coordenadas de al menos cuatro de ellos. En caso de conocer la directriz, para obtener la ecuación sólo necesitamos las coordenadas de tres de sus puntos.

Actividad resuelta

3. Traza la gráfica y determina los elementos de la parábola que tiene eje de simetría horizontal y pasa por los puntos $P(-4, 10)$, $Q(-1, 4)$ y $R(-13, -8)$.

Como la parábola tiene eje de simetría horizontal y directriz vertical, entonces su ecuación general es de la forma: $y^2 + Dx + Ey + F = 0$. Al considerar que las variables de esta ecuación representan cualquiera de los puntos con coordenadas (x, y) pertenecientes a la parábola, entonces sustituimos, en esta, las coordenadas de los puntos P, Q y R.

Punto P: $(10)^2 + D(-4) + E(10) + F = 0 \rightarrow -4D + 10E + F = -100 \quad \boldsymbol{E_1}$

Punto Q: $(4)^2 + D(-1) + E(4) + F = 0 \rightarrow -D + 4E + F = -16 \quad \boldsymbol{E_2}$

Punto R: $(-8)^2 + D(-13) + E(-8) + F = 0 \rightarrow -13D - 8E + F = -64 \quad \boldsymbol{E_3}$

Ahora, resolvemos el sistema de ecuaciones para encontrar los valores de D, E y F.

Eliminamos $\boldsymbol{F}$ de $\boldsymbol{E_1}$ y $\boldsymbol{E_2}$

$$\begin{array}{rrl} & -4D + 10E + F & = -100 \\ (\boldsymbol{E_2})(-1) \rightarrow & D - 4E - F & = 16 \\ \hline & -3D + 6E & = -84 \quad \boldsymbol{E_4} \end{array}$$

Eliminamos $\boldsymbol{F}$ de $\boldsymbol{E_1}$ y $\boldsymbol{E_3}$

$$\begin{array}{rrl} & -4D + 10E + F & = -100 \\ (\boldsymbol{E_3})(-1) \rightarrow & 13D + 8E - F & = 64 \\ \hline & 9D + 18E & = -36 \quad \boldsymbol{E_5} \end{array}$$

Eliminamos D de $\boldsymbol{E_4}$ y $\boldsymbol{E_5}$

$$\begin{array}{rrl} \frac{\boldsymbol{E_4}}{3} \rightarrow & -D + 2E & = -28 \\ \frac{\boldsymbol{E_5}}{9} \rightarrow & D + 2E & = -4 \\ \hline & 4E = -32 \rightarrow E & = -8 \end{array}$$

Encontramos D y F por sustitución

$D + 2E = -4 \rightarrow D + 2(-8) = -4 \rightarrow D = 12$

$-D + 4E + F = -16 \rightarrow -44 + F = -16 \rightarrow F = 28$

Actividades propuestas

Encuentra la ecuación general de las siguientes parábolas.

4. $(y + 8)^2 = 20(x - 6)$ **5.** $(x + 1)^2 = -18(y - 4)$ **6.** $(y - 3)^2 = -2(x + 6)$

7. $V = \left(\frac{3}{2}, -4\right)$; $F = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ **8.** $V = \left(-1, \frac{25}{2}\right)$; $D: x = 5$ **9.** $V = \left(-\frac{25}{2}, 3\right)$; $D: y = -\frac{3}{2}$

Traza la gráfica y encuentra todos los elementos de las siguientes parábolas.

10. $x^2 - 2x + 8y - 23 = 0$ **11.** $y^2 + 28x - 6y + 93 = 0$ **12.** $x^2 - 18x - 6y + 54 = 0$

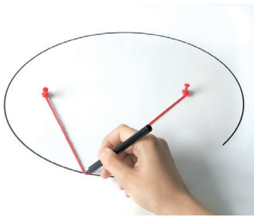
13. $x^2 - 18x + 8y + 57 = 0$ **14.** $4y^2 + 36x + 24y + 135 = 0$ **15.** $3x^2 - 18x - 12y - 5 = 0$

5 La Elipse

Reconocer una elipse a través de la ecuación que la representa.

La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

Indagamos



Para construir la elipse por el método del jardinero se sujetan con chinches los extremos de una cuerda y se desliza el lápiz de forma que dicha cuerda esté siempre tensa. Se obtiene una elipse con focos situados en los puntos donde están clavados los chinches y cuyo eje mayor mide lo mismo que la longitud de la cuerda.

Elementos de la elipse

Se considera una elipse centrada en el origen de coordenadas y cuyos ejes se encuentran sobre los ejes de coordenadas tal y como muestra la figura.

Semieje mayor: a

Semieje menor: b

Distancia focal: $F'F$

Semidistancia focal: c

Centro: $O(0, 0)$

Focos: $F(c, 0)$; $F'(-c, 0)$

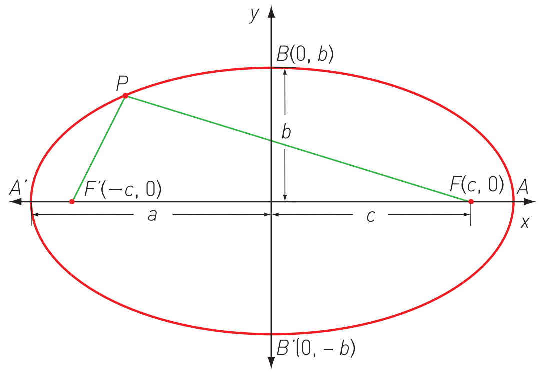
Vértices:

$A(a, 0)$; $A'(-a, 0)$

$B(0, b)$; $B'(0, -b)$

Radios vectores del punto P:

$\overline{PF'}$ y $\overline{PF}$



Relación fundamental

1. Por definición, la suma de distancias $PF' + PF$ es constante para cualquier punto P de la elipse. En particular, esta propiedad también se verifica para el vértice A. Por lo tanto:

$$PF' + PF = AF' + AF = AF' + F'A' = AA' = 2a$$

2. El punto B es un punto de la elipse y, por consiguiente, verifica que $BF' + BF = 2a$

Como $BF' = BF \Rightarrow BF = BF' = a$

Mediante la aplicación del teorema de Pitágoras se obtiene:

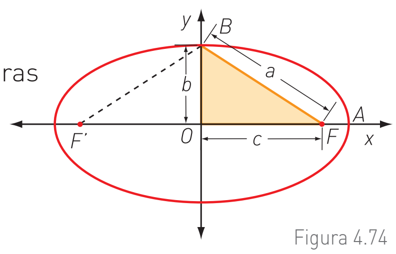


Figura 4.74

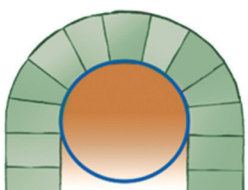
$a^2 = b^2 + c^2$ **Relación fundamental de la elipse**

Excentricidad de la elipse

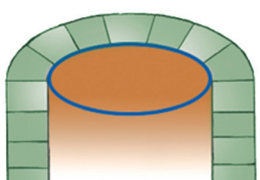
La excentricidad de una elipse se define como el cociente $e = \dfrac{c}{a}$.

La excentricidad determina el mayor o menor achatamiento de la curva.

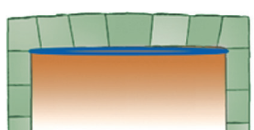
- Si c tiende a **0**, la excentricidad tiende a 0 y la elipse es menos achatada.
- Si $c = 0$, los dos focos coinciden en el centro y la elipse se convierte en una circunferencia.
- Cuando c tiende a a, la excentricidad tiende a 1, los focos se acercan a los vértices y la elipse adopta una forma más achatada. $0 < e < 1$



$e = 0.01$



$e = 0.50$



$e = 0.99$

Ecuación reducida de la elipse

Para hallar la ecuación reducida o canónica de la elipse se aplica el método general del cálculo de lugares geométricos.

1. Se considera un punto genérico $P(x, y)$ de la elipse centrada en el origen de coordenadas y con los focos situados en los puntos $F'(-c, 0)$ y $F(c, 0)$.
2. Se obliga a que P cumpla la condición de pertenencia a la elipse:

$$PF' + PF = 2a$$

3. Se aplica la fórmula de la distancia entre dos puntos y se simplifica:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \qquad \sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

4. Se eleva al cuadrado:

$$x^2 + c^2 + 2cx + y^2 = 4a^2 + x^2 + c^2 - 2cx + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$4a\sqrt{x^2+c^2-2cx+y^2} = 4a^2 - 4cx \qquad a\sqrt{x^2+c^2-2cx+y^2} = a^2 - cx$$

Y se eleva otra vez:

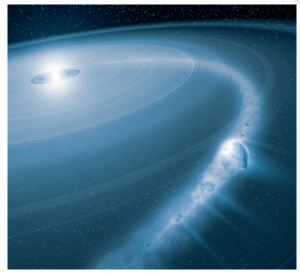
$$a^2x^2 + a^2c^2 - 2a^2cx + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2 - 2a^2cx \Leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Recordando que $b^2 = a^2 - c^2$ queda: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Y dividiendo por a^2b^2, se obtiene finalmente:

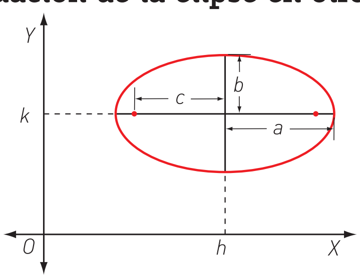
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ **Ecuación reducida de la elipse**

Sabías que...



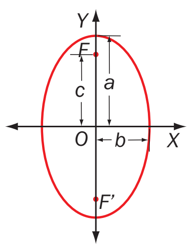
En mecánica celeste, un cuerpo sometido a la atracción gravitatoria de otro y que gira a su alrededor, describe una órbita elíptica ideal.

Ecuación de la elipse en otros casos



Elipse centrada fuera del origen

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



Elipse con los focos en el eje de ordenadas

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Actividad resuelta

1. Dada la elipse de ecuación $4x^2 + 9y^2 = 36$, calcula el valor de sus semiejes, su semidistancia focal, su excentricidad, y las coordenadas de los focos y vértices.

Solución:

Dividiendo por 36:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow a = 3,\ b = 2,\ c = \sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5} \qquad e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Focos: $F\left(\sqrt{5},0\right)$ y $F'\left(-\sqrt{5},0\right)$. Vértices: $A(3, 0)$; $A'(-3, 0)$; $B(0, 2)$ y $B'(0, -2)$

Actividades propuestas

2. La cubierta de un estadio olímpico tiene forma de elipse. Halla su ecuación reducida si se conocen los siguientes datos.

   Centro: $(0, 0)$; $a = 13$; $F(12, 0)$

3. Dibuja e indica los elementos de cada una de las siguientes elipses.

   a) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$ b) $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$

La hipérbola

Reconocer una hipérbola a través de la ecuación que la representa.

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

Elementos de la hipérbola

Se considera una hipérbola centrada en el origen de coordenadas y cuyos ejes se encuentran sobre los ejes de coordenadas tal y como muestra la figura.

Semieje real: a

Semieje imaginario: b

Distancia focal: $F'F$

Semidistancia focal: c

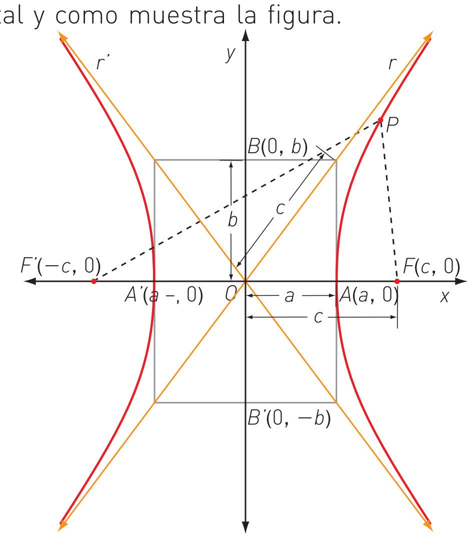
Centro: $O(0, 0)$

Focos: $F(c, 0)$; $F'(-c, 0)$

Vértices: $A(a, 0)$; $A'(-a, 0)$

$B(0, b)$; $B'(0, -b)$

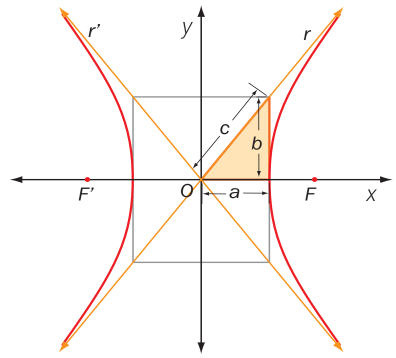
Radios vectores del punto P: $\overline{PF'}$ y $\overline{PF}$



Relación fundamental

1. Por definición, la diferencia de distancias $PF' - PF$ es constante para cualquier punto P de la hipérbola. En particular, esta propiedad también se verifica para el punto A. Por lo tanto:

$$PF' - PF = AF' - AF = AF' - F'A'$$
$$= \overline{AA'} = 2a$$



2. Análogamente al caso de la elipse se obtiene:

$c^2 = a^2 + b^2$ **Relación fundamental de la hipérbola**

Asíntotas de la hipérbola

Son las rectas r y r' que pasan por el centro de la hipérbola y verifican que se acercan a las ramas de la misma tanto más cuanto más lejos se esté del centro de la hipérbola.

Las ecuaciones de las asíntotas son: r: $y = \frac{b}{a}x$ r': $y = -\frac{b}{a}x$

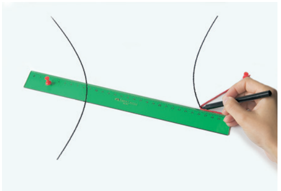
Excentricidad de la hipérbola

La excentricidad se define como en la elipse, $e = \frac{c}{a}$

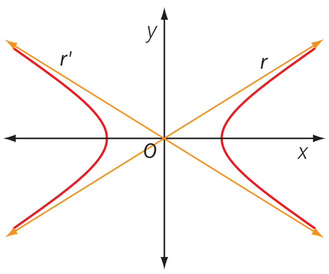
Como en las hipérbolas la semidistancia focal c es mayor que el semieje real a, se verifica que la excentricidad es siempre mayor que la unidad. $e > 1$

El valor de e indica lo abiertas o cerradas que están las ramas de la hipérbola. Cuanto más próxima a 1 sea e, más cerradas serán las ramas de la hipérbola.

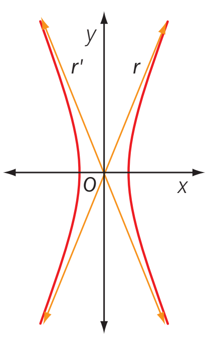
Indagamos



Para construir la hipérbola por el método del jardinero, se fija el extremo de una cuerda al extremo de una regla. El extremo libre de la cuerda se fija a uno de los focos, y el de la regla, al otro. Con un lápiz se dibuja una de las ramas de la hipérbola manteniendo la cuerda tensa. Para dibujar la otra rama, se intercambian las posiciones de la regla y la cuerda situadas en los focos.



$e = 1.4$



$e = 2.5$

Ecuación reducida o canónica de la hipérbola

Se aplica el método general de cálculo de lugares geométricos.

1. Se considera un punto genérico $P(x, y)$ de la hipérbola centrada en el origen de coordenadas y con los focos situados en los puntos $F'(-c, 0)$ y $F(c, 0)$.
2. Se obliga a que P cumpla la condición de pertenencia a la hipérbola:
$$PF' - PF = 2a$$
3. Se aplica la fórmula de la distancia entre dos puntos y se simplifica:
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \qquad \sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
4. Se eleva al cuadrado:
$$x^2 + c^2 + 2cx + y^2 = 4a^2 + x^2 + c^2 - 2cx + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$\Leftrightarrow 4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{x^2+c^2-2cx+y^2} \Leftrightarrow cx - a^2 = -a\sqrt{x^2+c^2-2cx+y^2}$$
Y se eleva otra vez:
$$c^2x^2 + a^2 - 2a^2cx = a^2x^2 + a^2c^2 - 2a^2cx + a^2y^2 \Leftrightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$
Recordando que $b^2 = c^2 - a^2$ queda: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$
Y dividiendo por a^2b^2, se obtiene finalmente:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \textbf{Ecuación reducida de la hipérbola}$$

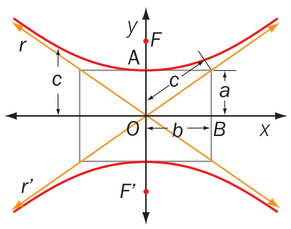
Ten en cuenta

La excentricidad para las cónicas es:

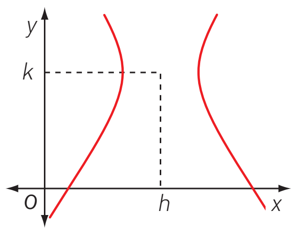
Elipse: $e < 1$
Parábola: $e = 1$
Hipérbola: $e > 1$

Esto indica que la parábola es el caso límite entre las elipses y las hipérbolas.

Ecuación de la hipérbola en otros casos



Hipérbola con los focos en el eje de ordenadas
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



Hipérbola centrada fuera del origen
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Ten en cuenta

Si los semiejes a y b son iguales, la ecuación reducida es: $x^2 - y^2 = a^2$ y la hipérbola se llama hipérbola equilátera. Las asíntotas son las bisectrices de los ejes de coordenadas, $y = \pm x$.

Actividad resuelta

1. Dada la hipérbola de ecuación $x^2 - 9y^2 = 9$, calcula sus elementos.

Solución:

Dividiendo toda la ecuación por 9:
$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow a = 3,\ b = 1,\ c = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$
Focos: $F(\sqrt{10}, 0)$ y $F'(-\sqrt{10}, 0)$.
Vértices: $A(3, 0)$; $A'(-3, 0)$; $B(0, 1)$ y $B'(0, -1)$

Actividades propuestas

2. Calcula las ecuaciones de estas hipérbolas.
   a) Vértice en $A(5, 0)$ y foco en $F(8, 0)$.
   b) Foco en $F\left(\frac{15}{4}, 0\right)$, y pasa por $P(5, 3)$.
   c) Asíntota en $y = 2x$, y eje real $2a$.

3. Dibuja e indica los elementos de cada una de las siguientes hipérbolas.
   a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$
   b) $x^2 - y^2 = 16$
   b) $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{2} = 1$
   d) $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

Aplicamos

Parábola

Calcula

EJERCITACIÓN

1. Calcula la ecuación de las siguientes parábolas. (Salvo otra indicación, el vértice es el origen.)
   - **a)** Foco: $F(2, 0)$, y directriz: $x = 6$.
   - **b)** Foco: $F(0, 4)$, directriz: $y = 1$.
   - **c)** Parámetro: $p = 2$ y abierta hacia la derecha.
   - **d)** Parámetro: $p = 4$ y abierta hacia la izquierda.

RAZONAMIENTO

2. Para las siguientes parábolas, halla el vértice, el foco y la ecuación de la directriz.
   - **a)** $y^2 = 10x$
   - **b)** $x^2 = 2y$
   - **c)** $y^2 = 2(x - 4)$
   - **d)** $(y - 1)^2 = 8(x - 1)$

RAZONAMIENTO

3. Halla el vértice, el foco y la ecuación de la directriz en cada una de las siguientes parábolas.
   - **a)** $y^2 - 4y - 2x + 2 = 0$
   - **b)** $x^2 - 2x - y + 1 = 0$

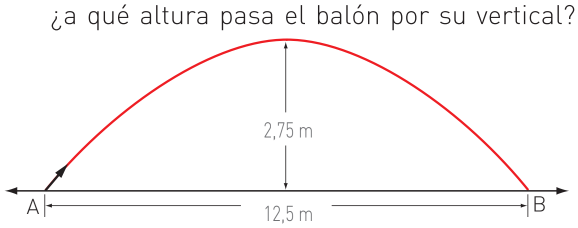
Resuelve problemas

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

4. Cuando se patea un balón, la trayectoria que describe el mismo es una parábola. El tipo de parábola depende del ángulo con el cual se patea el balón y de la velocidad inicial que toma el mismo.

   Un jugador A pateó un balón hacia su compañero B y consiguió las siguientes distancias.
   - Altura máxima alcanzada por el balón: 2,75 m.
   - Distancia hasta el punto donde el balón cae: 12,5 m.

   Con estos datos:
   - **a)** Escribe la ecuación de la trayectoria tomando una referencia adecuada.
   - **b)** Indica las coordenadas del foco y del vértice, y la ecuación de la directriz.
   - **c)** Si el otro jugador C se encuentra a 5 m de A, ¿a qué altura pasa el balón por su vertical?



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

5. Un avión de la ONU está lanzando víveres sobre un punto del suelo situado en un campamento de refugiados. Si el avión se mueve a una velocidad de 150 m/s, y la ecuación que relaciona la altura h a la que se encuentra la carga sobre el suelo con el tiempo medido desde que cae del avión es

   $h = 400 - 4{,}9t^{2}$:
   - **a)** Calcula cuánto tiempo tardará la carga en alcanzar el suelo.
   - **b)** Determina a qué distancia del punto elegido debe soltar la carga el piloto para que esta aterrice en el punto marcado.

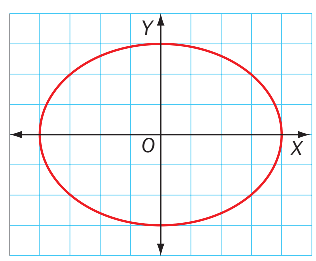
   Supón que la acción del aire es despreciable.

Elipse

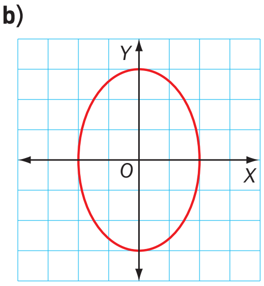
Comunicación de ideas

6. Para cada una de las elipses, indica las medidas de sus semiejes y de su semidistancia focal, escribe las coordenadas de los vértices y de los focos, y calcula el valor de la excentricidad. Escribe su ecuación.

a)



b)



COMUNICACIÓN

7. Para cada una de las siguientes elipses, indica las medidas de sus semiejes y de su semidistancia focal, escribe las coordenadas de los vértices y de los focos, y calcula el valor de la excentricidad. Dibújalas.
   - **a)** $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$
   - **b)** $16x^2 + 25y^2 = 400$
   - **c)** $\dfrac{(x^2 - 3)^2}{10} + \dfrac{(y^2 + 2)^2}{6} = 1$
   - **d)** $2(x - 1)^2 + y^2 = 2$

MODELIZACIÓN

8. Calcula la ecuación de las siguientes elipses (salvo otra indicación, el centro es el origen).
   - **a)** $a = 5$, $c = 3$.

COMPLEJIDAD: ● BÁSICO ● MEDIO ● AVANZADO

b) Foco: $F(3, 0)$, y vértice: $A(4, 0)$.

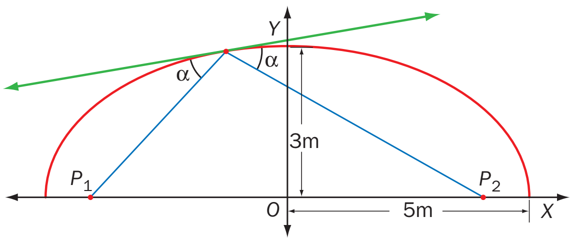
c) Vértices: $A(6, 0)$ y $B(0, 3)$.

d) Foco: $F'(-2, 0)$, y excentricidad: $e = 0.4$.

Resuelve problemas

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

9. El techo de una estación de metro tiene forma elíptica tal y como muestra la figura.



a) Suponiendo las distancias y el sistema de referencia indicado, halla la ecuación de la elipse del techo y calcula las coordenadas de los focos.

b) Si dos personas se sitúan una en cada foco y una de ellas habla en cualquier dirección, el sonido rebota de manera que el ángulo α que forma esta dirección con la tangente es el mismo que el que forma la dirección rebotada con esa misma tangente. ¿Hacia dónde se dirigirá el sonido rebotado con toda seguridad?

c) Comprueba la propiedad anterior suponiendo que la primera persona hable en dirección al punto $\left(4, \frac{9}{5}\right)$ de la elipse. Para ello calcula la ecuación de la recta correspondiente al sonido rebotado y estudia si pasa por el otro foco.

Hipérbola

Calcula

EJERCITACIÓN

10. Halla la ecuación de las siguientes hipérbolas (salvo indicación, el centro es el origen).

a) $a = 3$, $c = 5$.

b) Semidistancia focal: 10, y los radios vectores de un punto miden 10 y 2.

c) Foco: $F(4, 0)$, y vértice: $A(2, 0)$.

d) Vértices: $A(6, 0)$ y $B(0, 3)$.

e) Foco: $F'(26, 0)$, y excentricidad: $e = 1{,}25$.

f) Pasa por los puntos $P(3, 0)$ y $Q(5, 23)$.

g) Pasa por $P(2, 3)$ y su excentricidad es $e = 1{,}5$.

h) Pasa por $P(15, 4)$, y su distancia focal vale $2\sqrt{90}$.

RAZONAMIENTO

11. Encuentra la ecuación de la hipérbola que tiene por focos los puntos $F(3, 0)$ y $F'(-3, 0)$ y que pasa por el punto $P(8{,}5\ \sqrt{3})$.

COMUNICACIÓN

12. Para cada una de las siguientes hipérbolas, indica las medidas de sus semiejes y de su semidistancia focal, escribe las coordenadas de los vértices y de los focos, y calcula las ecuaciones de las asíntotas y el valor de la excentricidad. Dibújalas.

a) $\dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{25} = 1$

b) $\dfrac{(x + 1)^2}{8} - \dfrac{(y - 2)^2}{6} = 1$

c) $-x^2 + 2(y^2 + 1) = 2$

MATEMATICS

Cónicas con Wiris. Con WIRIS podrás hallar ecuaciones de rectas, rectas paralelas y perpendiculares a una dada, mediatrices y bisectrices, cónicas, intersección de rectas y de cónicas y también representar gráficamente todos los elementos geométricos que utilizas.

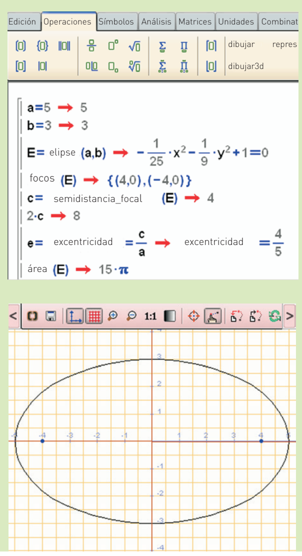
Elipse

Una forma de determinar una elipse es conociendo sus semiejes, su centro y la dirección del eje mayor que se indica con un vector. Se hace de la siguiente forma:

E = elipse (a, b, C, v). Si no se indica el centro C ni la dirección del eje mayor, el programa entiende por defecto que es $C(0, 0)$ y $v = (1, 0)$.

Halla la ecuación de la elipse de semiejes:

$a = 5$, $b = 3$, centrada en el origen y eje mayor sobre el eje de abscisas. Determina los focos, la distancia focal, el área, y represéntala gráficamente.



Resolvemos problemas

Etapas en la solución de problemas

Para resolver
un problema debes:
Comprender el enunciado
Proponer un plan
Ejecutar un plan
Revisar la solución

1 Comprender el enunciado del problema.
Simplificar el problema.

Cuando en el enunciado de un ejercicio aparezcan expresiones complicadas, trata de conseguir otras más manejables.

2 Proponer un plan
En esta sección proponemos que se trate de dividir el problema planteado en expresiones más simples.

3 Ejecutar el plan
Es necesario tener claro cómo ejecutar el plan en este caso la subdivisión del problema en etapas más sencillas.

4 Revisar la solución
Es importante revisar si la solución encontrada es la solución del problema y se ajusta a la situación modelo.

1 **Actividad resuelta**

Problema

En astronomía es frecuente medir las distancias en unidades astronómicas (UA).

Se define como la longitud del eje mayor de la órbita terrestre.

1 UA = 149 600 km

La excentricidad de la órbita de la Tierra es e ≈ 0,017. Si la mitad del eje mayor mide a ≈ 149 600 km, ¿cuáles son las distancias mínimas y máximas de la Tierra al Sol?

Comprender el enunciado del problema.

- ¿Qué se quiere dar a conocer una vez resuelto el problema?

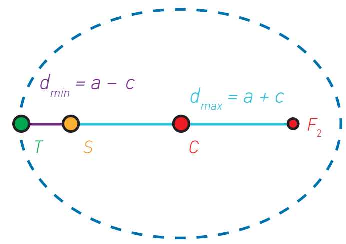
  Se requiere hacer conocer cuáles son las distancias mínimas y máximas de la Tierra al Sol.
- ¿Qué información entrega el enunciado del problema?

  El problema da a conocer la excentricidad y la longitud del semieje mayor.

Proponer un plan

- **Determina** de qué manera se va a resolver el problema

Vamos a utilizar los datos presentados así como también el gráfico que relaciona los datos dados.



Ejecutar el plan

- **Emplea** el procedimiento.

Es fácil convencerse de que los puntos con distancia máxima y mínima a un foco fijo de cualquier elipse son los extremos del eje mayor, de forma que:

dmin = a − c; dmax = a + c.

Sabemos que a ≈ 149 600.

Ahora, si e = c/a , tenemos que:

c = ea ≈ (149 600) (0,017) = 2 543,2 km.

Por lo tanto:

dmin = a − c ≈ 147 057 km y dmax = a + c ≈ 152 143 km.

Revisa la solución

Si divides el valor de c ÷ a obtienes el valor de la excentricidad.

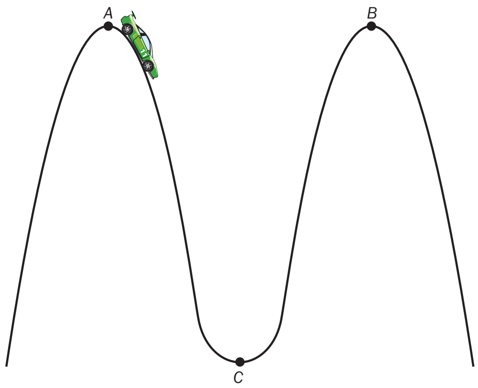
2 **ACTIVIDAD RESUELTA**

Problema

Un automóvil viaja de un punto A, sobre la cima de una montaña, al punto B, ubicado en la cima de otra montaña, pasando por el punto C, el cual se encuentra en la base de las dos montañas. El recorrido tiene la forma de formando una parábola.

a) ¿Cuál es la ecuación de esta parábola si tiene foco en el punto (0, 4) y una directriz paralela al eje X pasando por el punto (0, −4)?

b) ¿Qué característica tienen los valores de y si $-3 \leqslant x \leqslant 3$?



Resolución

Primero se halla la ecuación correspondiente analizando los datos: el foco $F(0, -4)$ se encuentra sobre el eje Y y el vértice está en el origen, entonces la parábola es de la forma $x^2 = 2py$. La distancia del foco a la directriz es $p = 8$.

Luego, se reemplazan estos valores en la ecuación obtenida:

$$x^2 = 2(8)y$$

De donde $y = \dfrac{x^2}{16}$.

Para analizar la característica de los valores de y cuando $-3 \leqslant x \leqslant 3$, se utiliza la tabla:

x	y
-3	0,5625
-2,5	0,390625
-1	0,0625
0	0
1,5	0,140625
2,3	0,330625
3	0,5625

R/ La ecuación correspondiente es $y = \dfrac{x^2}{16}$. Cuando $-3 \leqslant x \leqslant 3$, se cumple que $0 \leqslant x \leqslant 0{,}5625$.

Aplica la estrategia

1. Si en la primera actividad resuelta, los técnicos logran aumentar el alcance del radar para los aviones en 18 millas, ¿qué cambios tiene la ecuación?, ¿cómo quedaría representada en el plano cartesiano la nueva distancia máxima para todos los puntos cardinales? Elabora una tabla para organizar los datos correspondientes y luego grafícalos.

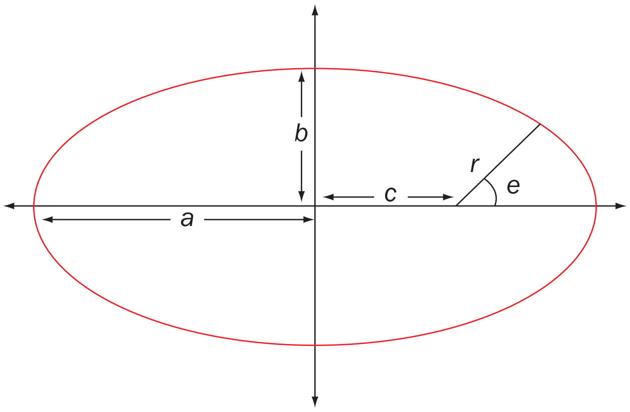
2. En un puente, los extremos de la parábola sobre la carretera tienen una distancia de 450 m y su altura es de 825 m. Ubica el origen del plano cartesiano en el vértice y determina la ecuación de la parábola.

3. Propón un nuevo problema sobre las cónicas y resuélvelo.

Ponemos a prueba destrezas

LAS LEYES DE KEPLER

En 1609, Johannes Kepler (1571-1630) publicó, utilizando las observaciones de su maestro Brahe, su obra *Astronomía Nova* donde enunció las dos primeras leyes referentes a las órbitas de los planetas.
Las leyes de Kepler sirven para explicar el movimiento de los planetas alrededor del Sol y muestran que el desplazamiento de los planetas describe orbitas elípticas ubicando al Sol en uno de sus focos.



1. Si el afelio de un planeta es su distancia mayor al Sol y el perihelio su distancia menor, la distancia media de un planeta al Sol es la longitud del semieje mayor de la órbita elíptica.

a) La distancia media de la Tierra al Sol es de 150 millones de kilómetros. Si el afelio de la Tierra es de 152 millones de kilómetros, ¿cuál es su perihelio? Justifica tu respuesta.

b) Realiza un dibujo donde se muestre la relación entre los elementos de la elipse y el sistema solar. Escribe ecuaciones para hallarlos.

c) Si la órbita del planeta Mercurio tiene como eje mayor una longitud de 116 millones de kilómetros y como eje menor una longitud de113 millones de kilómetros calcula el perihelio y el afelio entre Mercurio y el Sol.

d) Si la órbita de un asteroide al Sol mide 250 millones de millas en el eje mayor y 51,5 millones de millas en el eje menor, calcula el perihelio.

2. ¿Por qué crees que el movimiento planetario es de forma elíptica? ¿Que sucedería si fuese de forma circular?

3. Busca en Internet otros contextos en los que se utilice una elipse u otros movimientos que describan una forma elíptica.

Galería de murmullos

En la acústica, se utiliza la propiedad reflectante de la elipse para el diseño y construcción de "galerías de murmullos": si la forma de la cúpula de un auditorio o de una galería es elíptica, entonces un susurro o murmullo débil emitido en un foco casi no es percibido en la mayor parte del salón excepto en el otro foco. Esta propiedad ha sido utilizada en el Salón de las Estatuas del capitolio de Washington, en el tabernáculo mormón de Salk Lake City, en el palacio Taj Mahal de la India, y en otras edificaciones.

4. Un salón está construido sobre una base elíptica plana a partir de rotar 180° una semielipse alrededor de su eje mayor. Por la propiedad de reflexión de la elipse, algo que se ha susurrado en un foco se oirá nítidamente en el otro foco.

a) Si la altura es de 5,5 metros y la longitud es de 12,8 metros, halla la ubicación del susurro y el lugar donde se escucha. Justifica tu respuesta.

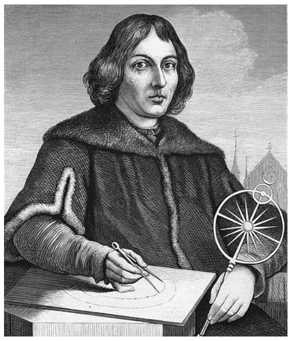
5. Una mujer se sitúa en el foco de una galería de murmullos a 6 m de la pared y su pareja se encuentra a 100 m de distancia, en el otro foco. Determina la longitud de la galería y la altura que tiene el techo en el centro. Explica tu respuesta a partir de la gráfica de la situación.

6. Investiga otras construcciones arquitectónicas que estén diseñadas de forma elíptica. Discute con tus compañeros de clase sobre las principales motivaciones de los arquitectos para elegir estos diseños.

Matemáticas en contexto

La teoría heliocéntrica

El astrónomo polaco Nicolás Copérnico (1473-1543) fue el primero en sostener que los planetas giraban alrededor del Sol (teoría heliocéntrica) y no alrededor de la Tierra, como hasta ese entonces se creía. Esta teoría estaba basada en argumentos matemáticos, pero no servía para predecir la trayectoria de los planetas.



La teoría heliocéntrica encontró oposición rápidamente, unos de los primeros detractores fueron los teólogos protestantes. También la Iglesia católica se opuso, e incluyó el trabajo de Copérnico en el Index Librorum Prohibitorum (lista de libros que estaba prohibido leer). Sin embargo, la obra del polaco sirvió de base para los estudios de Galileo, Brahe y Kepler, que crearon la astronomía moderna.

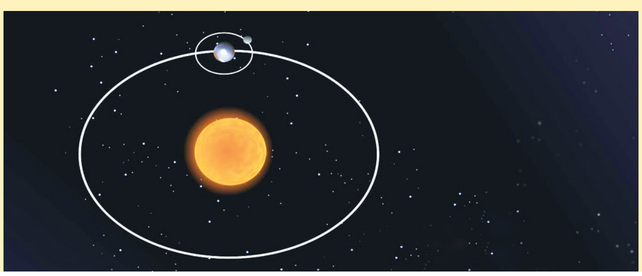
En 1609, el astrónomo alemán Johannes Kepler (basándose en los datos del astrónomo danés Tycho Brahe) publicó su Astronomía Nova, en la cual enunció sus leyes sobre el movimiento planetario.

- ¿Cuál crees que fue la causa para que la Iglesia católica incluyera la obra de Copérnico en la lista de los libros prohibidos?

Razonamiento lógico

Elipses

La Tierra, según mostró Kepler, describe una trayectoria elíptica alrededor del Sol. La excentricidad, que se puede entender como un parámetro que determina el grado de desviación de una sección cónica con respecto a una circunferencia, no siempre es la misma, en algunas ocasiones este valor llega a ser de 0,005. De manera gráfica, muestra qué implica este valor.



1. Los tres tipos de cónicas se pueden definir a la vez de la siguiente manera: "Una cónica es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el cociente de las distancias a un punto fijo llamado foco y a una recta fija llamada directriz es constante".

- Si la constante es menor que la unidad, es una elipse.
- Si la constante es igual a la unidad, es una parábola.
- Si la constante es mayor que la unidad, es una hipérbola.

Comprueba lo anterior hallando:

a) El lugar geométrico de los puntos del plano tales que el cociente de las distancias al punto $F(3, 0)$ y a la recta $x = \frac{25}{3}$ es 0,6.

b) El lugar geométrico de los puntos del plano tales que el cociente de las distancias al punto $F(5, 0)$ y a la recta $x = \frac{16}{3}$ es 1,25

2. Encuentra la ecuación general de la parábola generada por el foco F y la directriz D.

a) $F = (0, 2)$; D: $2x - y = 0$

b) $F = (1, -1)$; D: $x + 3y - 1 = 0$

3. Traza la gráfica y determina los elementos de las parábolas.

a) $(x - 3)^2 = -12(y + 4)$

b) $4y^2 + 4x - 32y + 49 = 0$

4. Determina las características de la cónica a partir de su ecuación.

a) $4x^2 - 4y^2 + 3x - 2y^2 - 1 = 0$ **b)** $2x^2 + y - 20 = 0$

c) $4x^2 + 4y^2 - 3x - 2y + 1 = 0$ **d)** $6x^2 + 2y^2 - 2x - 2y + 5 = 0$

Autoevaluación

Descripción	Valoración		
	Siempre	A veces	Nunca
Reconoce las cónicas como conjuntos de puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen una ecuación cuadrática.(1)			
Identifica una cónica a partir de su gráfico (2, 3, y 4)			
Determina la ecuación de la cónica a partir de sus parámetros.(2)			
Grafica una cónica dada su ecuación cartesiana.(4)			

6

Estadística y Probabilidad

Bloque: Estadística y Probabilidad

Existen muchas situaciones en que es posible identificar aplicaciones del cálculo de probabilidades. Por ejemplo, un supermercado recibe una cantidad regular de clientes diariamente, que compran cierto listado de productos. Al querer pagar, los clientes eligen la caja que creen les tomará menos tiempo, pero ¿qué consideraciones toman para elegir una u otra caja?

¿Qué sabes?

En años anteriores aprendiste a reconocer experimentos en los que se requiere utilizar la probabilidad condicionada mediante el análisis de la dependencia de eventos involucrados. De igual manera utilizaste el Teorema de Bayes para el cálculo de probabilidades. En este módulo vamos a iniciarnos con la introducción a la Estadística Inferencial.

¿Qué aprenderás?

- **Identificar** las variables aleatorias en un problema.
- **Obtener** la distribución, esperanza y varianza de los resultados de un experimento sujeto a una ley de distribución binomial.
- **Obtener** la distribución, esperanza y varianza de los resultados de un experimento sujeto a una ley de distribución normal.
- **Obtener** la recta de regresión mediante el método de ajuste de la curva
- **Resolver** problemas para estimar resultados futuros.
- **Hallar** la recta de regresión utilizando TIC.

El Buen Vivir

Los productos que consumimos

Cuando vamos al supermercado y compramos ciertos productos, tomamos varias alternativas antes de decidir por uno u otro enlatado, siempre verificamos que contenga: información nutricional, fecha de elaboración, fecha de caducidad, los ingredientes, el tipo de almacenamiento, entre otros.

Si existe un producto que no tiene la información ni descripción alguna y sólo fue recomendado por alguna persona que lo consumió, ¿cuál es la probabilidad de que tú lo compres?

¿Por qué crees que es necesario que los productos empacados presenten la información nutricional?

Iniciemos

Activación de conocimientos previos

Cuando asistes en busca de atención médica en algún centro asistencial. El tiempo de espera es una cuestión incierta, por lo cual se hace muy difícil estimarlo. Pero, ¿qué factores o condiciones considerarías para calcular el tiempo en que serás atendido?

¿Por qué consideras que este ejemplo corresponde al cálculo de probabilidades?

Objetivos educativos del módulo

- Reconocer experimentos cuyos resultados están distribuidos en forma binomial o en forma normal.
- Utilizar TIC para resolver problemas estadísticos distribuidos en forma binomial o en forma normal.
- Comprender y utilizar la regresión lineal para predecir resultados en problemas de aplicación en la vida real.

Función de probabilidad de una variable aleatoria discreta

Identificar las variables aleatorias en un problema. Determinar la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta

Indagamos

Al lanzar tres monedas se obtiene el siguiente espacio muestral (Ω):

Ω = {CCC, CCS, CSC, SCC, SSC, SCS, CSS, SSS}; donde C: cara y S: sello.

Si se define la variable aleatoria **X**: número de caras obtenidas, los elementos del conjunto Ω se pueden agrupar para:

- cero caras, X = 0, que corresponde al conjunto {SSS}.
- una cara, X = 1, que corresponde al conjunto {CSS, SCS, SSC}.
- dos caras, X = 2, que corresponde al conjunto {CCS, CSC, SCC}.
- tres caras, X = 3, que corresponde al conjunto {CCC}.

Luego, la probabilidad de que el número de caras obtenidas sea 0, 1, 2 o 3 es:

$$P(X=0)=P(SSS)=\frac{1}{8}=0{,}125$$

$$P(X=1)=P(CSS, SSC, SCS)=\frac{3}{8}=0{,}375$$

$$P(X=2)=P(CCS, CSC, SCC)=\frac{3}{8}=0{,}375$$

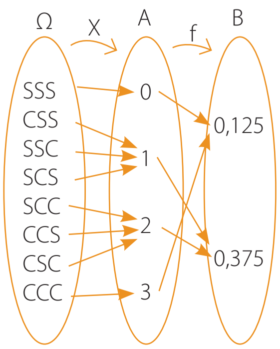
$$P(X=3)=P(CCC)=\frac{1}{8}=0{,}125$$

Se puede observar que cada valor del recorrido de la variable aleatoria **X** se relaciona con un valor de probabilidad **$P(X = x_i)$**, los cuales se resumen en la siguiente tabla:

x_i	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$	$x_4 = 3$
$P(X = x_i)$	0,125	0,375	0,375	0,125

Ten en cuenta

Una forma de representar la relación entre la variable aleatoria X y su función de probabilidad f es mediante un diagrama sagital. En el ejemplo, el diagrama es:



Donde:

- Ω es el dominio de la variable aleatoria X.
- A es el recorrido de la variable aleatoria X y además es el dominio de la función de probabilidad f, donde $A \subset \mathbb{R}$.
- B es el recorrido de la función de probabilidad f, donde $B \subseteq [0, 1]$.

Indagamos

¿Cuál es la suma de la probabilidad de todos los valores de x_i? ¿Qué puedes concluir al respecto?

Con respecto a una variable aleatoria discreta X, se define una función de probabilidad f que asocia una probabilidad a todos los valores de x_i pertenecientes al recorrido de X. Es decir, para la variable aleatoria X con dominio Ω y recorrido A = $\{x_1, x_2,..., x_n\}$, se tiene:

$$f : A \rightarrow [0, 1]$$

$$x_i \rightarrow f(x_i) = P(X = x_i)$$

Ejemplo 1

Se lanzan dos monedas y se define la variable aleatoria X: diferencia entre el número de caras y el número de sellos obtenidos. Entonces se tiene que Ω = {CC, CS, SC, SS}.

- Para {CC}, X = 2 – 0 = 2, luego $P(X = 2) = \frac{1}{4} = 0{,}25$.
- Para {CS, SC}, X = 1 – 1= 0, luego $P(X = 0) = \frac{2}{4} = 0{,}5$.
- Para {SS}, X = 0 – 2 = –2, luego $P(X = -2) = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Por lo tanto, la función de probabilidad asociada a X está dada por f: $A \rightarrow [0, 1]$, donde $A = \{2, 0, -2\}$

$$f(x)=\begin{cases}0{,}25 & \text{si } x=-2\\ 0{,}5 & \text{si } x=0\\ 0{,}25 & \text{si } x=2\end{cases}$$

Para una función de probabilidad $f(x_i) = P(X = x_i)$, con $i = 1, 2, 3,..., n$, y n el número de elementos del recorrido de la variable aleatoria X, se cumple:

- $0 \leqslant f(x_i) = P(X = x_i) \leqslant 1$
- $f(x_1) + f(x_2) +...+ f(x_n) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + ... + P(X = x_n) = 1$

Gráfico de una función de probabilidad

Otra forma de representar una función de probabilidad es mediante un gráfico de barras, de tal modo que resulte más expedita la comparación entre la probabilidad asociada a los elementos del recorrido de la variable aleatoria **X**.

Ejemplo 2

Se lanzan dos dados y se define la variable aleatoria X: diferencia de puntos obtenida en las caras de los dados. Su recorrido es A = {0, 1, 2, 3, 4, 5} y la función de probabilidad asociada es f: A → [0, 1], tal que:

Finalmente, se obtiene el siguiente gráfico de la función de probabilidad **f**:

Posibles resultados del experimento						
	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Para el ejemplo del lanzamiento de dos dados se tiene:

(1) Los casos en que:

X = 0, son 6
X = 1, son 10
X = 2, son 8
X = 3, son 6
X = 4, son 4
X = 5, son 2

(2) Por lo tanto, las probabilidades asociadas al recorrido de la variable aleatoria *X* son:

$$P(X=0)=\frac{6}{36}=0{,}1\overline{6} \qquad P(X=1)=\frac{10}{36}=0{,}2\overline{7} \qquad P(X=2)=\frac{8}{36}=0{,}\overline{2}$$

$$P(X=3)=\frac{6}{36}=0{,}1\overline{6} \qquad P(X=4)=\frac{4}{36}=0{,}\overline{1} \qquad P(X=5)=\frac{2}{36}=0{,}0\overline{5}$$

a) Se determina la cantidad de casos favorables en que se obtiene cada valor del recorrido de X.

b) Se calcula la probabilidad de cada caso dividiendo los casos favorables por los casos posibles. En este caso son 36.

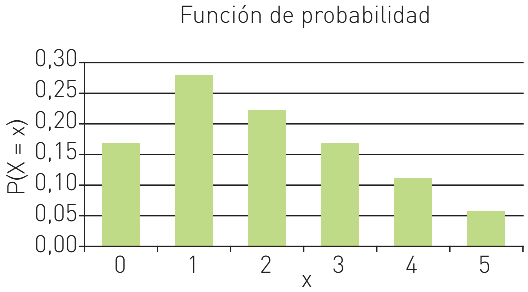
$$f(x)=\begin{cases} 0{,}1\overline{6} & \text{si } x=0 \\ 0{,}2\overline{7} & \text{si } x=1 \\ 0{,}\overline{2} & \text{si } x=2 \\ 0{,}1\overline{6} & \text{si } x=3 \\ 0{,}\overline{1} & \text{si } x=4 \\ 0{,}0\overline{5} & \text{si } x=5 \end{cases} \longleftrightarrow$$

Función de probabilidad	
x	P(X = x)
0	$0{,}1\overline{6}$
1	$0{,}2\overline{7}$
2	$0{,}\overline{2}$
3	$0{,}1\overline{6}$
4	$0{,}\overline{1}$
5	$0{,}0\overline{5}$

Indagamos

Considerando únicamente el gráfico de diagrama de barras de *f*, ¿qué conclusiones puedes obtener?

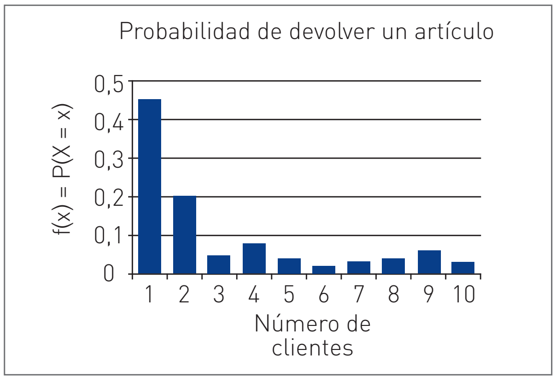
Finalmente, se obtiene el siguiente gráfico de la función de probabilidad **f**:



El gráfico de una función de probabilidad *f*, asociada a una variable aleatoria discreta *X*, es un gráfico de barras en el cual los valores del eje horizontal o abscisas corresponden a los elementos del recorrido de *X*, y los valores del eje vertical u ordenadas, a las probabilidades asociadas a ellos.

Actividad resuelta

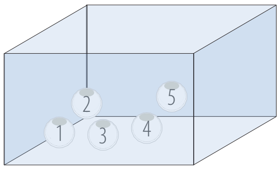
1. El gráfico representa la función de probabilidad de la variable aleatoria X: número de clientes que devuelven las compras realizadas en una tienda en un día cualquiera.



En el gráfico se puede observar que es más probable que sólo un cliente devuelva un artículo a que lo hagan 2 o hasta 10 clientes.

Actividades propuestas

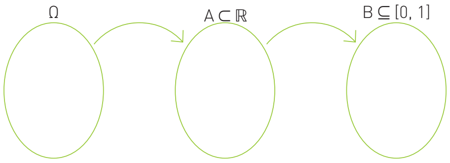
2. Analiza la siguiente situación y realiza las actividades que se indican:



a) Una caja contiene 5 bolitas numeradas del 1 al 5. Se extrae una bolita de la caja y se define la variable aleatoria discreta X: número marcado en la bolita.

b) Escribe el dominio Ω y recorrido A de la variable aleatoria **X**.Determina la función de probabilidad **f**, asociada a la variable aleatoria **X**, y representa sus valores en una tabla.

c) Completa el siguiente diagrama sagital, que representa la relación entre la variable aleatoria **X** y su función de probabilidad asociada **f**:



3. Resuelve el siguiente problema. La siguiente tabla representa los valores de la función de probabilidad asociada a una variable aleatoria *X*. ¿Cuál es el valor de a?

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = x_i)$	a	2a	3a	4a	5a	6a	7a	8a

Función de distribución

Indagamos

En un terrario se tienen tres huevos de tortuga y se espera que nazcan en los próximos días. Se sabe además que la probabilidad de que una tortuga sea macho (m) es la misma de que sea hembra (h), entonces, ¿cuál es la probabilidad de que a lo más dos tortugas sean machos?

Se puede responder la pregunta anterior mediante la función de probabilidad. Para ello se define la variable aleatoria X: número de machos. De esta manera se tiene la función de probabilidad $f: A \to [0, 1]$, tal que:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}125 & \text{si } x = 0 \\ 0{,}375 & \text{si } x = 1 \\ 0{,}375 & \text{si } x = 2 \\ 0{,}125 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Luego, la probabilidad de que a lo más dos tortugas sean macho es igual a la suma de la probabilidad de que ninguna, una o dos tortugas sean macho, es decir, $P(X \leqslant 2)$.

$$P(X \leqslant 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}125 + 0{,}375 + 0{,}375 = 0{,}875$$

Por lo tanto, la probabilidad de que a lo más dos tortugas sean macho es 0,875.

Respecto a una variable aleatoria discreta X, se puede definir una función de distribución F, que representa la acumulación de las probabilidades relacionadas con la función de probabilidad. Es decir, para la variable aleatoria X con dominio Ω y recorrido $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, se tiene:

$$F: A \subseteq \mathbb{R} \to [0, 1]$$

$$x_i \to F(x_i) = P(X \leqslant x_i)$$

Ejemplo 1

Ejemplo: En el caso anterior se tiene:

- $F(0) = P(X \leqslant 0) = P(X = 0) = 0{,}125$
- $F(1) = P(X \leqslant 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}5$
- $F(2) = P(X \leqslant 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}875$
- $F(3) = P(X \leqslant 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$

Luego, la función de distribución F asociada a la variable aleatoria X se define como:

$F: A \subseteq \mathbb{R} \to [0, 1]$, tal que:

$$x \to F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0{,}125 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0{,}5 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0{,}875 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Sea X una variable aleatoria con dominio Ω y recorrido $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. La función de probabilidad f y la de distribución F asociadas se pueden relacionar de la siguiente manera: $F(x_i) = P(X \leqslant x_i) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots + f(x_i)$

Además, se cumple que:

- $f(x_1) = F(x_1)$ $\qquad f(x_i) = F(X = x_i) - F(X = x_{i-1})$

Ten en cuenta

1. Se tiene que: $\Omega = \{mmm, mmh, mhm, hmm, hhm, hmh, mhh, hhh\}$
2. Se tiene que $A = \{0, 1, 2, 3\}$
3. Luego:

$$P(X = 0) = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

$$P(X = 1) = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

$$P(X = 2) = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

$$P(X = 3) = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

(1) Se determina el espacio muestral del experimento.

(2) Se determina el recorrido de la variable aleatoria.

(3) Se calcula la probabilidad de cada caso.

Sabías que...

Algunas propiedades de la función de distribución:

- $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$.
- $F(a) \leqslant F(b)$ si $a \leqslant b$; con $a, b \in Rec(X)$.

Sabías que...

La distribución de probabilidad uniforme es un ejemplo de una distribución de probabilidad continua.

Una distribución de probabilidad continua es cuando los resultados posibles del experimento son obtenidos de variables aleatorias continuas; es decir, de variables cuantitativas que pueden tomar cualquier valor, y que resultan principalmente del proceso de medición.

Ejemplos de variables aleatorias continuas son: la estatura de un grupo de personas, el tiempo dedicado a estudiar, la temperatura de una ciudad.

Gráfico de una función de distribución

El **gráfico de la función de distribución *F*** asociada a una variable aleatoria discreta ***X***, corresponde a un gráfico escalonado, en el cual los valores del recorrido de la variable aleatoria se encuentran en el eje de las abscisas y las probabilidades acumuladas respectivas se encuentran en el eje de las ordenadas.

Actividad resuelta

Se ilustrará el gráfico de una función de distribución mediante el siguiente ejemplo: en el lanzamiento de tres monedas, la función de distribución de la variable aleatoria discreta X: número de caras, está dada por:

a) Se tiene que: Ω = {CCC, CCS, CSC, SCC, SSC, SCS, CSS, SSS}

b) Se tiene que *Rec*(X) = {0, 1, 2, 3}

c) Luego,

$$P(X \leqslant 0) = \frac{1}{8} = 0{,}125 \qquad P(X \leqslant 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = 0{,}5$$

$$P(X \leqslant 2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = 0{,}875 \qquad P(X = 3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8}$$

a) Se determina el espacio muestral del experimento.

b) Se determina el recorrido de la variable aleatoria.

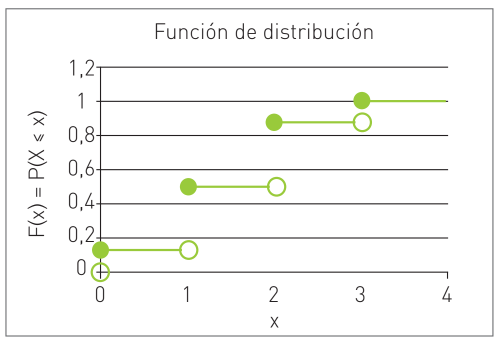
c) Se calcula la probabilidad acumulada de cada caso.

Función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0{,}125 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0{,}5 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0{,}875 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \longleftrightarrow$$

Función de distribución	
x	F(x) = P(X ≤ x)
0	0,125
1	0,5
2	0,875
3	1

Luego, el gráfico de la función de distribución ***F*** asociada a ***X*** está dado por:



Actividades propuestas

1. Determina la función de distribución de las siguientes variables aleatorias:

a) Se define la variable aleatoria X: número de puntos obtenidos al lanzar un dado de seis caras. Se sabe que el dado está cargado, para que la probabilidad de obtener cualquier número par de puntos sea el doble que la de obtener cualquier número impar de puntos.

Actividades propuestas

b) Se lanzan seis monedas y se define la variable aleatoria X: número de sellos.

c) Obtén la función de distribución asociada a **X** a partir de la siguiente tabla:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,1	0,2	0,03	0,05	0,4	0,22

2. Resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno:

a) Se extraen tres cartas de una baraja inglesa (52 cartas). ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos de esas cartas sean de trébol?

b) Un estudio realizado en un hospital reveló que la probabilidad de que no se atienda a una determinada cantidad de pacientes está dada por la función $f : A \rightarrow [0, 1]$, donde $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, tal que:

$f(x) = P(X = x) = \dfrac{21 - 2x}{100}$, donde **x** representa la cantidad de pacientes.

En un día cualquiera, ¿es más probable que no se atienda de una a cuatro personas o de seis a nueve personas?

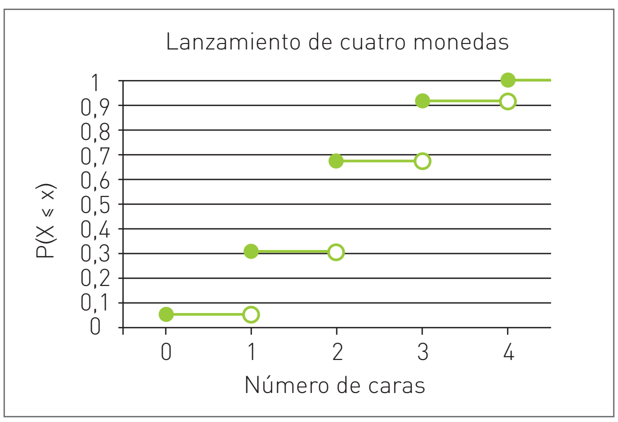
3. Representa gráficamente la función de distribución asociada a las siguientes variables aleatorias, correspondientes al lanzamiento de dos dados de seis caras:

a) X: suma de los puntos obtenidos en sus caras superiores.

b) Y: producto de los puntos obtenidos en sus caras superiores.

4. Compara los gráficos realizados en la actividad anterior y obtén una conclusión.

5. Analiza el siguiente gráfico de la función de distribución de la variable aleatoria X: número de caras obtenido y responde:



a) ¿Cuál es aproximadamente la probabilidad de obtener 2 o menos caras en el lanzamiento de 4 monedas?

b) ¿Cuál es la probabilidad aproximada de obtener como máximo 3 caras en el lanzamiento de 4 monedas?

c) Aproximadamente, ¿cuál es la probabilidad de obtener al menos un sello?

3 Valor esperado de una variable discreta

Obtener la esperanza o valor esperado de una variable aleatoria discreta.

Indagamos

Se considera una tómbola con tres bolitas, dos de color verde (V, v) y una de color rojo (R). ¿Cuántas bolitas de color verde se espera obtener si se extraen dos bolitas de manera aleatoria y sin reposición?

Se tiene que el espacio muestral del experimento aleatorio descrito es:

$$\Omega = \{Vv, VR, vV, vR, RV, Rv\}$$

a) Se tiene que Rec(X) = {1, 2}.

b) Luego:

$x = 1 \rightarrow f(1) = \frac{4}{6} = 0,\overline{6}$ $\qquad$ $x = 2 \rightarrow f(2) = \frac{2}{6} = 0,\overline{3}$

(1) Se determina el recorrido de la variable aleatoria X.

(2) Se calcula la probabilidad de cada valor.

La función de probabilidad **f** asociada a la variable aleatoria X: número de bolitas verdes está definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0,\overline{6} & \text{si } x = 1 \\ 0,\overline{3} & \text{si } x = 2 \end{cases} \longleftrightarrow$$

x_i	$f(X = x_i)$
1	$0,\overline{6}$
2	$0,\overline{3}$

Se observa en el espacio muestral que al menos una bolita de las dos extraídas es de color verde. Esto se relaciona con el siguiente cálculo:

$$0,\overline{6} \cdot 1 + 0,\overline{3} \cdot 2 = 1,\overline{3}$$

Observa que el valor obtenido es aproximado a 1 y no pertenece al recorrido de la variable aleatoria X.

El valor esperado E (o esperanza) de una variable aleatoria discreta X con recorrido $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ y función de probabilidad $f: A \rightarrow [0, 1]$ es la suma de los productos entre cada elemento del recorrido de la variable aleatoria X y su probabilidad respectiva, es decir:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) \cdot x_i \right)$$

Ten en cuenta

En general, el valor esperado o esperanza de una variable aleatoria no pertenece al recorrido de la variable aleatoria X, por lo cual, para interpretar su significado, debe ser aproximado.

Sabías que...

El concepto de **valor esperado** o **esperanza** fue acuñado por primera vez por el matemático, físico y astrónomo holandés Christiaan Huygens, en 1657, en un texto (El valor de todas las posibilidades en los juegos de azar) que trataba asuntos referentes al razonamiento que se encuentra detrás de los juegos de azar, y que intentaba responder a la pregunta ¿conviene jugar o no un juego?

Actividad resuelta

Sea la variable aleatoria X: número de vehículos que llegan a un estacionamiento en una hora, y la función de probabilidad asociada a X es $f: Rec(X) \rightarrow [0, 1]$, tal que:

x_i	5	10	15	20
$P(X = x_i)$	0,12	0,38	0,3	0,2

Luego,

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4}\left(f(x_i) \cdot x_i\right) = f(5) \cdot 5 + f(10) \cdot 10 + f(15) \cdot 15 + f(20) \cdot 20$$

$$= 0{,}12 \cdot 5 + 0{,}38 \cdot 10 + 0{,}3 \cdot 15 + 0{,}2 \cdot 20$$

$$= 12{,}9$$

Es decir, se espera que al estacionamiento lleguen aproximadamente 13 vehículos en una hora.

Actividades propuestas

1. Analiza la siguiente situación y realiza las actividades.

Una tómbola contiene cuatro bolitas numeradas con los valores 2, 3, 4 y 5. Se extraen dos bolitas al azar y se define la variable aleatoria X: suma de los números de las bolitas.

a) Escribe los elementos del dominio (Ω) y del recorrido (A) de la variable aleatoria X.

b) Determina la función de probabilidad de la variable aleatoria X.

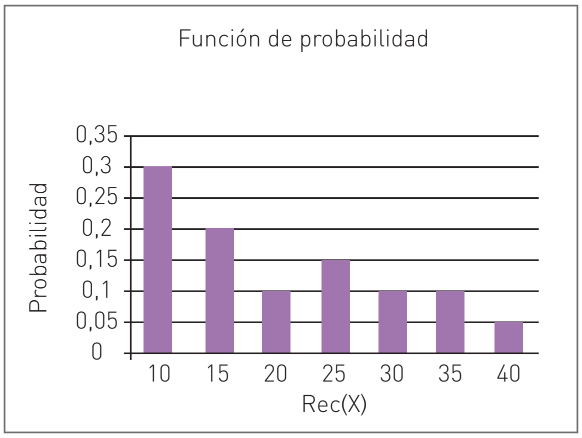
c) ¿Cuál es la suma esperada que se obtiene al extraer dos bolitas de la tómbola?

2. Resuelve los siguientes problemas:

a) Un juego de azar tiene una probabilidad de 0,2 de perder 500 puntos; 0,5 de perder 1 000 puntos; 0,2 de ganar 500 puntos, y 0,1 de ganar 1 000 puntos. ¿Es justo este juego?

b) En el siguiente gráfico se representa la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria X: número de personas que asisten a ver una película diariamente. Si la ganancia diaria (G), en pesos, por la cantidad de personas que asisten al cine está dada por la expresión

$G(x) = 1\,200x - 1\,000$, ¿cuánto se espera ganar diariamente?



Ten en cuenta

Se considera que un juego es justo si $E(X) = 0$.

Varianza y desviación típica o estándar de una variable aleatoria discreta

Obtener la varianza y la desviación típica o estándar de una varialbe aleatoria discreta.

En el ejemplo sobre la cantidad de vehículos que llega a un estacionamiento en una hora se obtuvo que esta es $E(X) = 12{,}9 \approx 13$, pero ¿cuál es la variabilidad de ese valor esperado? Para responder la pregunta anterior se utiliza el concepto de varianza y desviación estándar.

Ten en cuenta

La desviación estándar representa la variabilidad de los datos con respecto a la media aritmética.

La varianza de una variable aleatoria discreta X con recorrido $A = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ y función de probabilidad $f: A \rightarrow [0, 1]$, se denota por V(X) y se calcula mediante la siguiente expresión:

$V(X) = E((X - E(X))^2)$

Donde $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) \cdot x_i^2 \right)$.

La desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza, es decir, $\sqrt{V(X)}$.

Ejemplo 1

En el ejemplo de los vehículos, se tiene:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) \cdot x_i^2 \right) = f(5) \cdot 5^2 + f(10) \cdot 10^2 + f(15) \cdot 15^2 + f(20) \cdot 20^2$$
$$= 0{,}12 \cdot 5^2 + 0{,}38 \cdot 10^2 + 0{,}3 \cdot 15^2 + 0{,}2 \cdot 20^2$$
$$= 188{,}5$$

Luego, $V(X) = 188{,}5 - 12{,}9^2 = 22{,}09$ y $\sqrt{V(X)} = \sqrt{22{,}09} = 4{,}7$.

Actividad resuelta

1. La probabilidad de que un grupo de estudiantes tenga errores ortográficos en un examen se representa en la siguiente tabla, donde **X** corresponde a la variable aleatoria discreta "número de estudiantes con errores ortográficos":

x_i	5	10	15	20	25
$P(X = x_i)$	0,05	0,10	0,20	0,25	0,40

Para determinar cuántos errores ortográficos se espera que tenga, calculamos la esperaza de la variable aleatoria X.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{5} (f(x_i).x_i) = f(5).5 + f(10) \cdot 10 + f(15) \cdot 15 + f(20) \cdot 20 + f(2) \cdot 25$$

$$E(X) = 0{,}05 \cdot 5 + 0{,}10 \cdot 10 + 0{,}2 \cdot 15 + 0{,}25 \cdot 20 + 0{,}40 \cdot 25$$

$$E(X) = 0{,}25 + 1 + 3 + 5 + 10$$

$$E(X) = 19{,}25$$

Se espera que tenga aproximadamente 19 errores.

Para calcular la desviación estándar de la variable aleatoria ***X***, procedemos asi:

$V(X) = E((X - E(X))^2$

Donde:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{5}(f(x_i) \cdot x_i^2)$$

$$E(X^2) = f(5) \cdot 5^2 + f(10) \cdot 10^2 + f(15) \cdot 15^2 + f(20) \cdot 20^2 + f(25) \cdot 25^2$$

$$E(X^2) = 0{,}05 \cdot 5^2 + 0{,}10 \cdot 10^2 + 0{,}20 \cdot 15^2 + 0{,}25 \cdot 20^2 + 0{,}40 \cdot 25^2$$

$$E(X^2) = 1{,}25 + 10 + 45 + 100 + 250$$

$E(X^2) = 406{,}25$ $\qquad V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$V(X) = 406{,}25 - (19{,}25)^2$ $\qquad V(X) = 35{,}687\ 5$

La desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza $\sqrt{V(X)}$. $\quad \sqrt{V(X)} = \sqrt{35{,}6875} = 5{,}97$

Actividades propuestas

1. Resuelve los siguientes problemas:

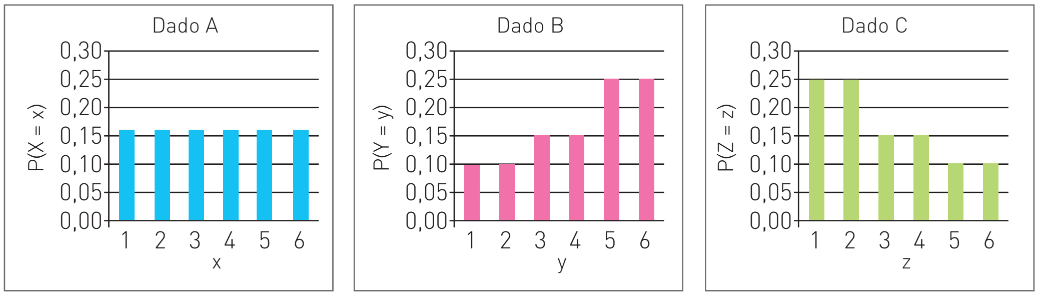
a) Se lanzan dos dados de seis caras y se anota el producto de los números de puntos obtenidos en sus caras superiores. ¿Cuál es la varianza y desviación estándar de la variable aleatoria X: producto de los números de puntos obtenidos?

b) Un atleta en sus entrenamientos realizó las siguientes marcas al correr los 100 metros planos: el 30 % de las ocasiones marcó 11,5 segundos, el 10 % marcó 11,3 segundos, el 12 % marcó 11,6 segundos y el resto consiguió un tiempo de 12 segundos. ¿Cuál es el tiempo en segundos que se espera realice el día de la competencia? ¿Cuál es la varianza del tiempo realizado en sus entrenamientos?

c) Un juego consiste en extraer una bolita desde una tómbola que contiene tres bolitas azules, cuatro verdes, dos rojas y cinco amarillas. Si se extrae una bolita azul se pierden 1 000 puntos; si se extrae una bolita verde se pierden 5 000 puntos, si se extrae una bolita roja se ganan 1 000 puntos y si se extrae una bolita amarilla se ganan 2 000 puntos. ¿Cuál es la varianza de la variable aleatoria X: premio obtenido?

2. Analiza la siguiente información y resuelve los problemas junto con un compañero o una compañera:

En los siguientes gráficos se representa la función de probabilidad asociada a las variables aleatorias **X**, **Y** y **Z**, que se definen como el "número de puntos obtenido al lanzar un dado **A**, **B** y **C**, respectivamente". Ordena de mayor a menor las variables según su valor esperado.



Para el dado **A**, el valor esperado corresponde a E(X) ≈ 3,5; ya que la probabilidad de obtener cualquier número es la misma. Para el dado **B** se observa que la mayor probabilidad se encuentra entre cinco y seis, por lo cual se puede deducir que E(Y) > 3,5. En cambio, en el dado **C** se observa que la mayor probabilidad de ocurrencia se encuentra entre uno y dos, por lo cual se puede deducir que E(Z) < 3,5.

Por lo tanto, E(Y) > E(X) > E(Z).

a) Calculen y comparen la varianza de las variables aleatorias **X**, **Y** y **Z** de la información anterior y escriban alguna conclusión respecto de sus gráficos.

5 Distribución binomial

Obtener la distribución de un experimento sujeto a una ley de distribución binomial.

Indagamos

Binomial se refiere a dos posibilidades, éxito o fracaso, cara o sello, ¿que otro ejemplo puedes plantear?

Existen diversos modelos matemáticos que se utilizan en probabilidades, entre ellos está el modelo binomial. Para entender este modelo matemático se estudiarán previamente algunos conceptos, pero antes analiza la siguiente situación y determina si responde al concepto de binomial declarado en la cápsula de ayuda, al costado de la página:

En una caja hay 20 focos, tres de las cuales están defectuosas; por lo tanto, si se extrae un foco de la urna, se tienen solamente dos posibilidades, extraer un foco en buen estado o un foco defectuoso.

Se llama experimento de Bernoulli al experimento aleatorio que tiene resultados dicotómicos, es decir, posee solamente dos posibilidades de ocurrencia, generalmente, éxito o fracaso.

Se llamará éxito a la ocurrencia de un suceso A, y fracaso cuando no ocurra el suceso A.

Ejemplos

a) Al sacar una bolita desde una urna con tres bolitas rojas y cuatro bolitas amarillas y observar si la bolita es de color rojo:

- Se tienen solamente dos resultados posibles, que la bolita sea de color roja o amarilla; por lo tanto, es un experimento de Bernoulli.
- El éxito del experimento corresponde al evento A: extraer una bolita de color rojo.

b) Identifica cuál de los siguientes experimentos es de Bernoulli. De serlo, escribe el suceso correspondiente al éxito del experimento.

- Lanzar un dado de seis caras y observar el número que se obtiene.

  No es un experimento de Bernoulli
- Lanzar dos dados de seis caras y observar si la suma de los puntos es un número primo.

  Es un experimento de Bernoulli. El suceso del experimento corresponde a que la suma sea número primo o número compuesto.
- Lanzar dos monedas y observar si cae cara o sello.

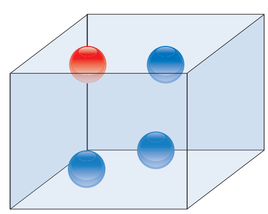
  Es un experimento de Bernoulli. El suceso del experimento corresponde a que caiga cara o sello

Sabías que...

En nuestra vida cotidiana debemos enfrentarnos a experimentos aleatorios donde la probabilidad es sí o no, éxito o fracaso. Bajo nuestro buen criterio se debe juzgar las condiciones y tomar decisiones acertadas.

Ejemplo

c) Se tiene la urna de la Figura 3 con bolitas del mismo tamaño y textura. Si se extrae una bolita en tres ocasiones, con reposición, ¿cuál es la función de probabilidad de la variable aleatoria X: número de bolitas rojas extraídas?



Se consideran los sucesos:

- R: extraer una bolita de color rojo
- A: extraer una bolita de color azul

Como X: número de bolitas rojas extraídas, se tiene que Rec(X) = {0, 1, 2, 3}, entonces:

$$P(X=0)=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\binom{3}{0}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$P(X=1)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=3\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2=\binom{3}{1}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$P(X=2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4}=\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4}$$

$$P(X=3)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\binom{3}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3$$

Luego, la función de probabilidad es f: Rec(X) ⟶ [0, 1], donde $f(x)=\binom{3}{x}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{3-x}$.

Si un experimento sigue una distribución binomial, es posible calcular la probabilidad de que la variable aleatoria X asociada a dicho experimento adquiera uno de sus valores aplicando lo siguiente:

$$P(X=x)=\binom{n}{x}\cdot p^x\cdot(1-p)^{n-x}$$

Donde n es el número de ensayos, ***x*** es el valor de la variable aleatoria asociada al experimento, ***p*** es la probabilidad de éxito y **1 – *p*** es la probabilidad de fracaso.

Actividad resuelta

1. Se extrae una bolita en tres ocasiones, con reposición, desde la urna de la figura. ¿Cuál es la probabilidad de que en dos ocasiones se obtenga una bolita de color rojo?

El experimento sigue una distribución binomial. Luego:

a) Se define la variable aleatoria X: número de bolitas rojas.

b) Se efectúa el experimento de Bernoulli (extraer una bolita de la urna) tres veces, es decir, n = 3.

- La probabilidad de éxito (extraer una bolita de color rojo) es $p=\frac{2}{7}$; por lo tanto, la probabilidad de fracaso es $1-p=\frac{5}{7}$. Así, la función de probabilidad está dada por:

$$P(X=x)=\binom{3}{x}\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^x\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{3-x}.$$

Por lo tanto, si se quiere calcular la probabilidad de que en tres extracciones se obtengan dos bolitas rojas, es decir, P(X = 2), se tiene que:

$$P(X=2)=\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{3-2}=3\cdot\frac{4}{49}\cdot\frac{5}{7}\approx 0{,}17$$

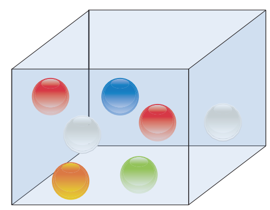
Ten en cuenta

Recuerda que:

$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1$, con $n\in\mathbb{N}$. Además:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)}$$

Con $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ y $n\geq k$.



Ten en cuenta

Para el cálculo de probabilidades se debe tomar en cuenta los siguientes **axiomas**:

1. La probabilidad de que ocurra un evento *A*, se encuentra entre 0 y 1

   $0\leq p(A)\leq 1$

2. La probabilidad de que ocurra el Ω es 1

   $p(\Omega)=1$

3. Si *A* y *B* son eventos mutuamente excluyentes, entonces

   $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$

4. Si se tiene *n* eventos mutuamente excluyentes, $A_1, A_2, A_3, \ldots$ entonces

   $p(A\cup A_1\cup A_2, \ldots\cup A_n)=$
   $p(A_1)+p(A_2)+\ldots+p(A_n)$

5. Si el $\varnothing$ es un evento nulo, entonces la probabilidad de que ocurra es 0.

Actividades propuestas

2. Resuelve los siguientes problemas:

a) Dado el experimento aleatorio "lanzar 20 veces una moneda" que sigue una distribución binomial:

- ¿Cuál es la función de probabilidad para la variable aleatoria X: número de caras?
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener cinco caras?
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos sellos?

b) Un estudiante rinde un examen de selección múltiple que consta de 35 preguntas y en cada una de ellas se debe elegir entre cinco alternativas:

- Si el estudiante responde las preguntas al azar, ¿cuál es la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria X: cantidad de preguntas correctas?
- Si la nota mínima de aprobación 4,0 se obtiene respondiendo correctamente 21 preguntas, ¿cuál es la probabilidad de que el estudiante apruebe el examen si contesta la prueba completa al azar?

c) Dos jugadores, A y B, disputan una serie de 5 juegos. Si la probabilidad de que el jugador A gane un juego cualquiera es 0,6 y no pueden empatar:

- Calcula la probabilidad de que el jugador A gane la serie.
- Calcula la probabilidad de que el jugador B gane al menos 3 juegos.

3. Calcula la probabilidad pedida en cada una de las siguientes situaciones según la función de probabilidad de una distribución binomial:

a) El 75% de los automóviles que recorren una carretera se dirige hacia la costa.

- ¿Cuál es la probabilidad que de cinco automóviles escogidos al azar, cuatro se dirijan a la costa?
- ¿Cuál es la probabilidad de que de 10 automóviles escogidos al azar, más de nueve se dirijan a la costa?
- ¿Cuál es la probabilidad de que de 10 automóviles escogidos al azar, ninguno se dirija a la costa?

b) La probabilidad de que un estudiante apruebe un examen contestándolo al azar es de 14%.

- Si 35 estudiantes contestan el examen al azar, ¿cuál es la probabilidad de que menos de 5 de estos estudiantes aprueben el examen?

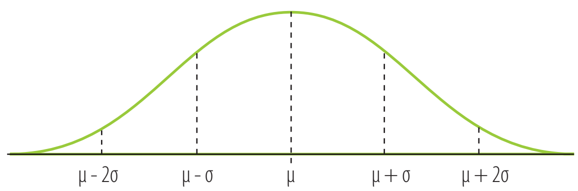
4. Analiza las siguientes situaciones y responde:

a) Una prueba de Matemática consta de 75 preguntas de selección múltiple, cada una con cinco alternativas. Si un estudiante contesta toda la prueba al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya contestado correctamente 20 preguntas?

b) Si 50 estudiantes rinden la prueba de Matemática descrita en **a)**, contestándola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que 10 de esos estudiantes contesten correctamente 20 preguntas?

Una **distribución normal** de media μ y desviación típica σ se designa por N(μ, σ).

Su gráfica es una campana de Gauss:



El área de la región determinada por la función y el eje de abscisas es igual a la unidad.

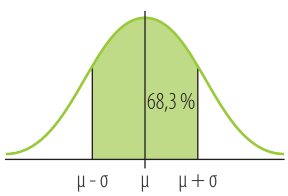
Al ser simétrica respecto al eje *x*, que pasa por *x* = μ, deja un área igual a 0,5 a la izquierda y otra a 0,5 a la derecha.

La probabilidad equivale al área encerrada bajo la curva.

La distribución de probabilidades en que los datos de una variable aleatoria continua se concentran alrededor de la media (μ) con cierta desviación estándar (σ) es conocida como distribución **normal** o **gaussiana**.

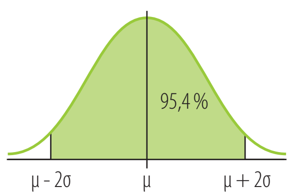
La representación gráfica de esta distribución es denominada **campana de Gauss**.

Observa algunos ejemplos de la campana de Gauss:



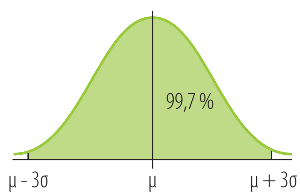
Aproximadamente, el 68,3 % de la distribución se encuentra en el intervalo:

]μ − σ, μ + σ[



Aproximadamente, el 95,4 % de la distribución se encuentra en el intervalo:

]μ − 2σ, μ + 2σ[



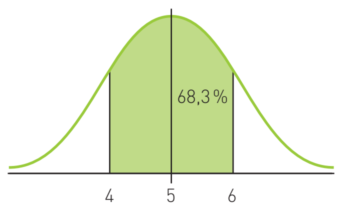
Aproximadamente, el 99,7 % de la distribución se encuentra en el intervalo:

]μ − 3σ, μ + 3σ[

Ejemplo 1

Cierto tipo de consola de videojuegos dura en promedio 5 años, con una desviación estándar de 1 año. Si la duración de estas consolas sigue una distribución normal, ¿cuál es el porcentaje de las consolas que duran menos de 4 años? ¿Y qué porcentaje dura más de 6 años?

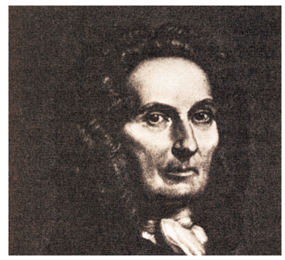
Observa la representación en la campana de Gauss.



Aproximadamente, el 68,3 % de la distribución de consolas tiene una duración entre 4 y 6 años. La duración aproximada del 15,85 % de las consolas es de menos de cuatro años; mientras que el 15,85 % restante dura más de 6 años.

Sabías que...

Abraham De Moivre (1667-1754)



Matemático de origen francés exiliado en Londres, donde publicó en 1733 una obra en la que aparece por primera vez la curva de distribución de los errores, que con el tiempo conocemos como "distribución normal de Gauss".

Distribución normal estándar

Para calcular probabilidades de variables aleatorias continuas que se distribuyen de forma normal N(μ, σ), es posible transformarlas a una cuya media sea 0 y su desviación estándar sea 1, para luego utilizar una tabla de valores asociada a dicha distribución.

Cualquier variable aleatoria continua X que se distribuya N(μ, σ) es posible transformarla a una variable Z de distribución N(0, 1) mediante la siguiente relación:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

A esta distribución se le denomina **estándar** o **tipificada**, y el cambio de variable se le conoce como **estandarización** o **tipificación** y permite calcular probabilidades utilizando una tabla de valores.

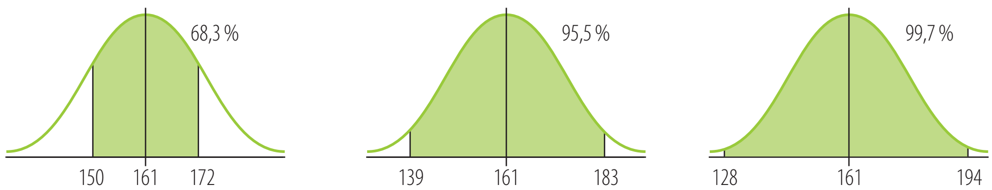
Ten en cuenta

Entre las filas de la tabla dada en la página 212 debes buscar el valor de Z, considerando la parte entera y el dígito de las décimas; por ejemplo, en el caso de Z < 0,64, el valor que debes buscar en las filas es 0,6; mientras que entre las columnas, debes buscar 0,04, ya que 0,6 + 0,04 = 0,64.

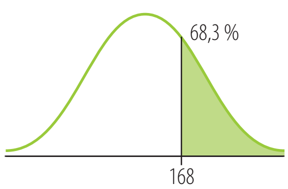
Ejemplo 2

a) La estatura en centímetros de un grupo de 200 personas se distribuye N(161, 11). ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger una persona del grupo su estatura sea mayor que 168 cm? ¿Aproximadamente cuántas personas del grupo son de estatura mayor que 168 cm?

Sea X la estatura de una persona. Luego, la probabilidad de que sea mayor que 168 cm es posible representarla por P(X > 168). Además, como X se distribuye N(161, 11), se tiene:



Y como se pide P(X > 168), se debe calcular la siguiente área sombreada:



Al tipificar se obtiene $Z = \frac{168 - 161}{11} = \frac{7}{11} \approx 0,64$.

Luego, se tiene P(Z > 0,64) = 1 – P(Z < 0,64) = 1 – 0,7389 = 0,2611. Observa:

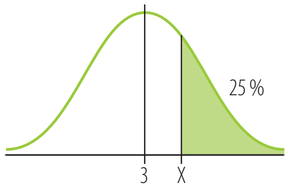
z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389

Por lo tanto, la probabilidad de que al escoger una persona del grupo su estatura sea mayor que 168 cm es cerca del 26 %, que corresponde a 52 personas aproximadamente.

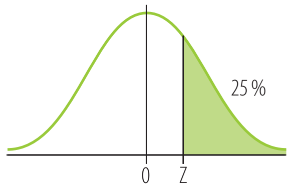
Actividad resuelta

1. Si el tiempo en horas que un estudiante de 4º medio dedica diariamente a estudiar Matemática sigue una distribución N(3, 2) y el 25 % de estos alumnos estudia más de **x** horas diarias, ¿cuál es el valor de **x**?

Sea X el tiempo en horas que un estudiante de 4º medio dedica diariamente a estudiar Matemática. Como sigue una distribución N(3, 2) y el 25 % de estos alumnos estudia más de **x** horas diarias, se tiene lo siguiente:



Estandarizando



Donde $P(Z > z) = 0{,}25$; lo cual es equivalente a $0{,}25 = 1 - P(Z < z)$; de donde se obtiene que $P(Z < z) = 0{,}75$. Así, utilizando la tabla de tipificación de la página 223, se tiene que $z \approx 0{,}675$. Observa:

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517

Una vez encontrado el valor de **z**, se debe buscar el valor de **x**, ya que es la interrogante del problema. Entonces, se tiene que:

$$0{,}675 = \frac{x - 3}{2} \Rightarrow 1{,}35 = x - 3 \Rightarrow x = 4{,}35$$

Finalmente, se tiene que el 25 % de los estudiantes de 4º medio dedica más de 4,35 horas diarias para estudiar Matemática.

Ten en cuenta

No olvides que puedes utilizar lo siguiente:

$P(Z > z) = 1 - P(Z < z)$

Ten en cuenta

Recuerda tipificar para calcular probabilidades y apoyarte en la tabla de tipificación de la página 208.

No olvides que en algunos problemas, luego de encontrar el valor de z debes reemplazarlo en la fórmula de tipificación para encontrar el valor de x.

Ten en cuenta

La tabla de tipificación muestra la probabilidad de $Z < z$ para valores positivos de z. Si z es negativo, puedes realizar lo siguiente:

$P(Z < -0{,}5) = P(Z > 0{,}5)$

$= 1 - P(Z < 0{,}5)$

$P(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a)$

Actividades propuestas

2. Resuelve el siguiente problema. Los puntajes obtenidos por estudiantes en una prueba siguen una distribución normal con media de 650 puntos y una desviación estándar de 50 puntos. Para aprobar es necesario obtener 600 puntos. ¿Qué porcentaje de los estudiantes reprobó?

3. Calcula la probabilidad en cada caso, dada una distribución N(0, 1).

a) $P(Z < 1{,}2)$ **b)** $P(Z < 0{,}75)$ **c)** $P(Z > 2{,}41)$ **d)** $P(Z > 0{,}8)$

e) $P(0{,}4 < Z < 1{,}5)$ **f)** $P(Z < -0{,}63)$ **g)** $P(Z > -1{,}84)$ **h)** $P(-0{,}05 < Z < 0{,}05)$

4. Calcula el valor de z en cada caso.

a. $P(Z < z) = 0{,}8159$ **b)** $P(Z > z) = 0{,}0314$ **c)** $P(Z > z) = 0{,}3372$ **d)** $P(Z < z) = 0{,}3156$

6. Resuelve el problema.

La masa en gramos de cierto modelo de teléfono celular sigue una distribución N(112, 20).

¿Cuál es la probabilidad de que la masa de uno de estos teléfonos sea mayor que 114 g?

7 Probabilidad binomial y normal

Obtener la distribución de un experimento sujeto a una distribución binomial.

Si un experimento de Bernoulli puede ser realizado las veces que se quiera, el resultado de cada ensayo es independiente de los otros y la probabilidad de obtener éxito en cualquier ensayo es siempre la misma, se dirá que dicho experimento sigue una **distribución binomial**. Por ejemplo, el experimento mencionado (extraer una bolita de una urna que contiene tres bolitas azules y dos rojas) seguirá una **distribución binomial** si es que la extracción es con reposición, ya que de ser sin reposición, no sería posible realizarlo las veces que se quiera, el resultado de cada ensayo dependería de la extracción anterior y, la probabilidad de éxito no sería la misma en cada ensayo.

Indagamos

Si un experimento aleatorio tiene resultados dicotómicos, es decir, solo dos posibilidades de ocurrencia (éxito y fracaso) es denominado **experimento de Bernoulli.** Por ejemplo, extraer una bolita de una urna que contiene tres bolitas azules y dos rojas tiene solo dos posibilidades, o se extrae una bolita roja o una azul.

Si un experimento sigue una distribución binomial, es posible obtener la **probabilidad** de que la variable aleatoria asociada (Y) adquiera un determinado valor (y) con la fórmula:

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} \cdot p^{y} \cdot (1 - p)^{n-y}$$

Donde $\boldsymbol{n}$ es el número de ensayos, $\boldsymbol{p}$ es la probabilidad de éxito y $\mathbf{1 - \boldsymbol{p}}$ es la probabilidad de fracaso.

Ejemplo 1

Por ejemplo, en el caso de la urna con tres bolitas azules y dos rojas, se extrae una bolita con reposición. Si se realiza el experimento 3 veces, ¿cuál es la probabilidad de extraer exactamente 2 veces una bolita azul?

Se define la variable Y: número de bolitas azules extraídas.

Si y = 2 (obtener dos bolitas azules), $p = \frac{3}{5} = 0{,}6$ (probabilidad de obtener una bolita azul al realizar una vez el experimento) y n = 3 (número de extracciones), entonces:

$$P(Y = 2) = \binom{3}{2} \cdot 0{,}6^{2} \cdot (1 - 0{,}6)^{3-2} = 0{,}432$$

Por lo tanto, la probabilidad de obtener dos bolitas azules y una roja, al extraer tres veces una bolita de la urna, es 0,432. Sin embargo, cuando el número de ensayos es grande, el cálculo de la combinatoria, sin calculadora, se puede hacer un poco difícil. Para estos casos, es posible aproximar la probabilidad binomial por una probabilidad normal.

Ten en cuenta

$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, con $n \in \mathbb{N}$.

Además:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

Con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $n \geq k$.

Antes de aproximar una distribución binomial a una normal verifica que se cumplen las siguientes condiciones:

- $np \geq 5$
- $n(1 - p) \geq 5$

Sea Y una variable aleatoria asociada a un experimento aleatorio, que sigue una distribución binomial $\boldsymbol{B(n, p)}$, donde $\boldsymbol{n}$ es el número de ensayos y $\boldsymbol{p}$ es la probabilidad de éxito, entonces, esta distribución binomial se puede aproximar a una normal de la forma $\boldsymbol{N}(np, \sqrt{npq})$, donde $\boldsymbol{q} = \mathbf{1} - \boldsymbol{p}$. Lo anterior se simboliza:

$$B(n, p) \sim N(np, \sqrt{npq})$$

Para calcular probabilidades, es necesario aplicar un ajuste, denominado corrección de Yates. Así:

- $P(Y = y) = P(y - 0{,}5 < x < y + 0{,}5)$
- $P(Y \leq y) = P(x < y + 0{,}5)$
- $P(Y < y) = P(x < y - 0{,}5)$
- $P(Y \geq y) = P(x > y - 0{,}5)$
- $P(Y > y) = P(x > y + 0{,}5)$

Actividad resuelta

1. El 4% de los clavos de 2 pulgadas producidos por una empresa sale defectuoso. Si se produce un lote de 1 200 clavos:

¿cuál es la probabilidad de que menos de 60 clavos de 2 pulgadas sean defectuosos?

Sean Y: número de clavos defectuosos producidos y p: probabilidad de que el clavo sea defectuoso. Luego, Y se distribuye B(1 200; 0,04), ya que n = 1 200 y p = 0,04, y se quiere calcular $P(Y < 60)$.

Como np = 48 y n(1 – p) = 1.152, ambos mayores que 5, es posible aproximar de buena manera la probabilidad binomial de Y pedida por una probabilidad normal de media np y desviación estándar $\sqrt{np(1-p)}$. Es decir:

$$N\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right) = N\left(1\,200 \cdot 0{,}04;\ \sqrt{1\,200 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96}\right)$$
$$= N(48;\ 6{,}79)$$

Aplicando el ajuste de Yates respectivo se tiene:

$$P(Y < 60) = P(X < 60 - 0{,}5) = P(X < 59{,}5)$$

Luego, estandarizando:

$$P\left(\frac{x-48}{6{,}79} < \frac{59{,}5-48}{6{,}79}\right) = P(Z < 1{,}69)$$

Utilizando la tabla de tipificación de la página 208, se obtiene $P(Z < 1{,}69) = 0{,}9545$, que corresponde a la probabilidad aproximada de que en un lote de 1 200 clavos, menos de 60 sean defectuosos.

De los 1 200 clavos producidos, ¿cuál es la probabilidad de obtener 25 o más y 55 o menos clavos defectuosos?

Considerando nuevamente que Y se distribuye B(1 200; 0,04), se quiere calcular el valor de $P(25 \leqslant Y \leqslant 55)$, que es igual a calcular $P(Y \leqslant 55) - P(Y < 25)$.

Considerando que $np \geqslant 5$ y $n(1-p) \geqslant 5$, y que X se distribuye N(48; 6,79), es posible ajustar con la corrección de Yates, obteniendo:

$$P(Y \leqslant 55) - P(Y < 25) = P(X < 55{,}5) - P(X < 24{,}5)$$

Estandarizando, se tiene:

$$P\left(\frac{X-48}{6{,}79} < \frac{55{,}5-48}{6{,}79}\right) - P\left(\frac{X-48}{6{,}79} < \frac{24{,}5-48}{6{,}79}\right) = P(Z < 1{,}1) - P(Z < -3{,}46)$$

Luego, utilizando la tabla de tipificación de la página 208, se obtiene $P(Z < 1{,}1) = 0{,}8643$ y que:

$$P(Z < -3{,}46) = 1 - P(Z < 3{,}46) \qquad = 1 - 0{,}9997 \qquad = 0{,}0003$$

Por lo que al restar ambos valores se tiene que 0,864 corresponde a la probabilidad aproximada de que en un lote de 1 200 clavos, se produzcan entre 25 y 55 clavos defectuosos, incluyendo dichos valores.

Actividades propuestas

2. Calcula las probabilidades de las siguientes distribuciones binomiales mediante la aproximación normal correspondiente.

   a) Si $X \sim B(100; 0{,}2)$, calcula $P(Y < 56)$, $P(33 < Y < 87)$ y $P(Y = 13)$.

   b) Si $X \sim B(1.000; 0{,}05)$, calcula $P(40 < Y)$, $P(Y \leq 48)$ y $P(Y = 54)$.

   c) Si $X \sim B(50; 0{,}9)$, calcula $P(33 \leq Y)$, $P(Y < 45)$ y $P(Y = 40)$.

   d) Si $X \sim B(120; 0{,}3)$, calcula $P(Y > 40)$, $P(Y \leq 35)$ y $P(Y = 41)$.

3. Resuelve el problema propuesto.

   Se estima que el 10% de la población mundial es zurda. Si en una empresa trabajan 800 trabajadores, ¿cuál es la probabilidad de que haya más de 70 zurdos?

8 Correlación y regresión lineal

Obtener la recta de regresióon mediante el método de ajuste de una curva.

Correlación

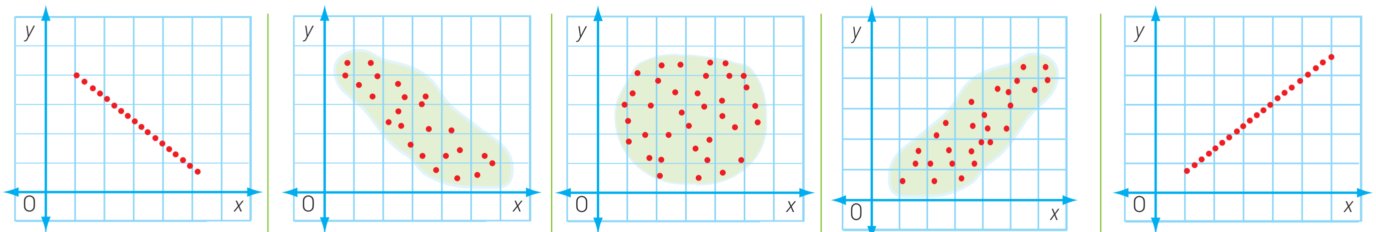
La correlación trata de establecer la relación o dependencia que existe entre las dos variables que intervienen en una relación bidimensional; es decir, determinar si los cambios en una variable influyen en los cambios de la otra. En caso de que suceda diremos que las variables están correlacionadas entre ellas.

Diagramas de dispersión y coeficiente de correlación lineal

Conviene cuantificar de forma más precisa la idea de correlación mediante un parámetro. Este parámetro se denomina coeficiente de correlación lineal.

> El coeficiente de correlación lineal es el cociente entre al covarianza y el producto de las desviaciones típicas de ambas variables $r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$.
>
> El coeficiente de correlación lineal es un número real comprendido entre -1 y 1.
>
> $-1 \leq r \leq 1$.

Observa la relación que existe entre el diagrama de dispersión y el coeficiente de correlación lineal mediante los siguientes casos.



$r = -1$

Correlación negativa y perfecta. Los puntos están alineados.

Dependencia funcional.

$-1 < r < 0$

Correlación negativa, más fuerte cuanto más se aproxima r a -1, y más débil cuanto más se aproxima a 0. Dependencia aleatoria.

$r \simeq 0$

Variables sin correlación.

No existe dependencia entre las variables.

Independencia aleatoria.

$0 < r < 1$

Correlación positiva, más fuerte cuanto más se aproxima r a 1, y más débil cuanto más se aproxima a 0. Dependencia aleatoria.

$r = 1$

Correlación positiva y perfecta. Los puntos de la nube están alineados.

Dependencia funcional.

Ten en cuenta

Dos variables son estadísticamente independientes cuando el comportamiento de una de ellas co se ve afectado por los valores que toma la otra.

Si dos variables son independientes están incorrelacionadas aunque el resultado recíproco no es necesariamente cierto.

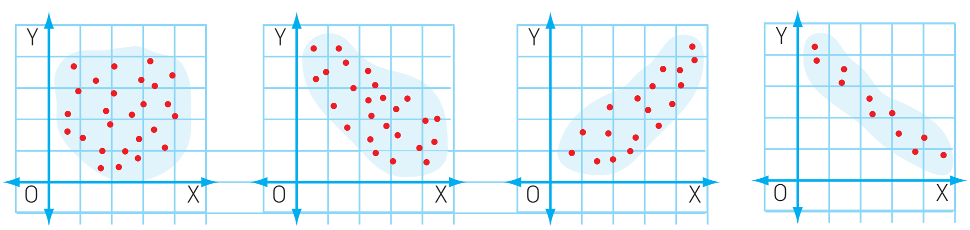
Si $r = 0$, las variables están incorrelacionadas.

Ejemplo

Asocia a cada diagrama de dispersión el coeficiente de correlación correspondiente:

- 0,99; 0,8; -0,6, y 0,1.

a) **b)** **c)** **d)**



a) Las variables son prácticamente independientes ⇒ r = 0,1.

b) Las variables tienen correlación negativa débil ⇒ r = -0,6.

c) Las variables tienen correlación positiva media ⇒ r = 0,8.

d) Las variables tienen correlación negativa fuerte ⇒ r = -0,99.

Recta de regresión

Una vez comprobada la existencia de una fuerte correlación entre las variables X e Y que componen una variable bidimensional, es interesante encontrar la recta que mejor se ajuste a la nube de puntos.

La recta de regresión de ***y*** sobre ***x*** pasa por el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ llamado centro de gravedad y viene dada por la siguiente expresión.

$$y - \bar{y} = m(x - \bar{x}), \text{ donde } m = \frac{s_{XY}}{s_X^2}$$

Actividad resuelta

La siguiente tabla muestra la estatura de Juan entre los 3 años y los 5 años.

Edad (meses)	36	48	51	54	57	60
Estatura (cm)	86	90	91	93	94	95

Halla la recta que mejor se ajuste a la nube. ¿Cuánto medirá cuando tenga 70 meses?

Sabiendo que $r = 0{,}99$, tiene sentido calcular la recta que mejor se ajuste a los valores de la variable y así poder hacer predicciones.

Se calculan los distintos parámetros, obteniendo:

$\bar{x} = \frac{306}{6} = 51$ meses $\qquad \bar{y} = \frac{549}{6} = 91{,}5$ cm

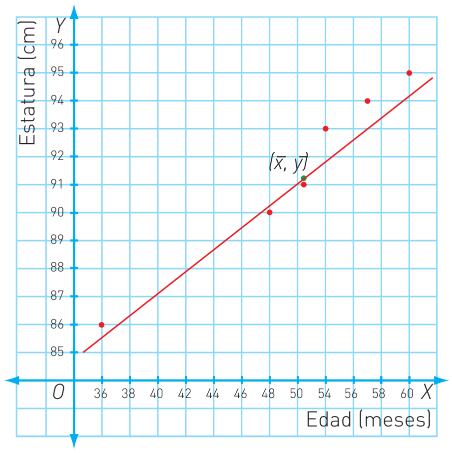
$s_X^2 = \frac{15\,966}{6} - 51^2 = 60 \qquad s_{XY} = \frac{28\,137}{6} - 51 \cdot 91{,}5 = 23$

La pendiente de la recta de regresión es $m = \frac{s_{XY}}{s_X^2} = \frac{23}{60} = 0{,}38$.

El centro de masas de la nube es $(\bar{x}, \bar{y}) = (51; 91{,}5)$.

Se sustituye en la ecuación de la recta de regresión y se obtiene:

$y - 91{,}5 = 0{,}38(x - 51) \Rightarrow y = 0{,}38x + 72{,}12$



Sustituyendo en esta ecuación los valores de x, se pueden obtener, con cierta aproximación, los valores esperados para la variable y, que se llaman **estimaciones** o **predicciones**.

Si $x = 70$ meses, Juan medirá $y = 0{,}38 \cdot 70 + 72{,}12 = 98{,}72$ cm.

La fiabilidad de estas estimaciones será mayor cuanto más próximo esté el coeficiente de correlación a 1 ó -1, y cuando el valor no esté alejado de los valores de *X*.

Actividades propuestas

1. Dada la siguiente variable bidimensional, calcula el coeficiente de correlación.

X	3	5	6	7	8	9	10
Y	2	4	10	5	2	6	4

2. Calcula el coeficiente de correlación e interprétalo.

X	6	8	11	14	15	18	20
Y	3	4	2	5	6	7	8

Aplicamos

Función de probabilidad

Resolución de problemas

Modelización

- **1.** Una caja contiene dos tarjetas numeradas con el 1 y el 2. ¿Cuál es el recorrido A de la variable aleatoria X: suma de los valores obtenidos en dos extracciones, con reposición?

Razonamiento

- **2.** En la siguiente tabla se muestra la función de probabilidad f: A → [0, 1], donde A = {0, 2, 3, 4, 5}. ¿Qué valor tiene a + b?

x_i	0	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,2	0,4	0,1	a	b

Comunicación

- **3.** ¿Cuál de las siguientes alternativas es falsa respecto a la variable aleatoria X: número de caras obtenidas al lanzar tres monedas?

  a) La probabilidad de obtener tres sellos es igual a P(X = 0).

  b) P(X = 1) = P(X = 2)

  c) P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1

  d) P(X = 0) = P(X = 3)

  e) 1 – P(X = 0) = P(X = 3)

Modelización

- **4.** Al lanzar dos veces una moneda trucada, la probabilidad de obtener sello es el doble de la de obtener cara. Si se define la variable aleatoria X: número de caras, ¿cuál es la función de probabilidad asociada? Considera f(x) = 0 para cualquier valor de x distinto a 0, 1 o 2.

Resolución de problemas

Razonamiento

- **5.** ¿Cuál es la función de distribución para X: número de caras obtenidas al lanzar tres monedas?

Calcula

- **6.** Sea una función de probabilidad f: A → [0, 1], donde $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{100}$ y A = {4, 5, 6, 7, 8}. ¿Cuál es el valor de F(7)?

Razonamiento

- **7.** ¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera respecto a una función de distribución F asociada a una variable aleatoria X?

  i $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$

  ii $F(a) \leqslant F(b)$, si $a \leqslant b$, con a, b ∈ Rec(X)

  iii Si Rec(X) = {0, 1, 2}, entonces F(0) + F(1) + F(2) = 1.

  a) Sólo I **b)** Sólo II

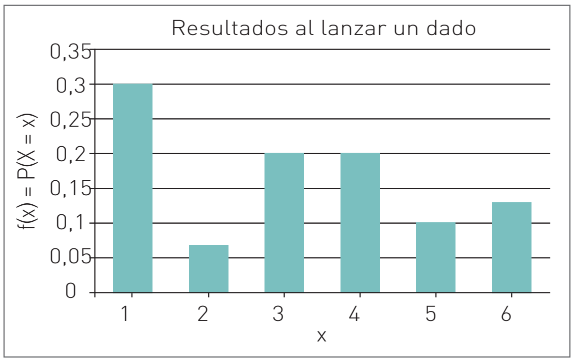
  c) Sólo III **d)** Sólo I y II

  e) Sólo II y III

Gráfico de una función de probabilidad

Modelización

El siguiente gráfico representa la función de probabilidad asociada a la variable aleatoria X: número de puntos obtenido al lanzar un dado de seis caras:



Interpreta

- **8.** ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número de puntos mayor o igual que 5?

Calcula

- **9.** Calcula $P(X \geqslant 4)$.

Gráfico de una función de probabilidad

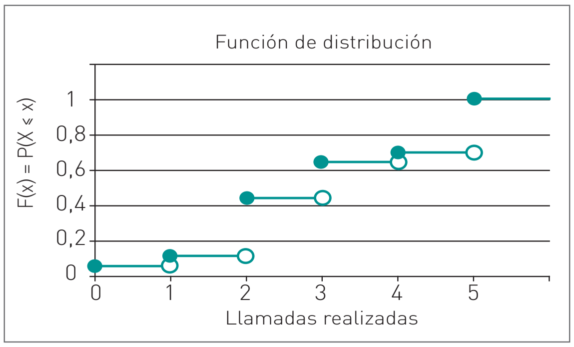
Resuelve problemas

- **10.** Un dado tiene tres caras con el número uno, dos con el número nueve y uno con el número diez. Determina la función de distribución y su gráfico para la variable aleatoria X: número obtenido al lanzar el dado.

Razonamiento

- **11.** Una urna contiene 10 fichas numeradas del 1 al 5, con dos fichas de cada valor. Construye el gráfico de la función de distribución para la variable aleatoria X: suma de los números de las fichas si se extraen 2 fichas al mismo tiempo.

12. El siguiente gráfico representa a la función de distribución asociada a la variable aleatoria X: número de llamadas realizadas en media hora:



a) ¿Cuál es el valor aproximado de $P(X = 4)$?

b) ¿Cuál es el valor aproximado de $P(X = 6)$?

c) ¿Cuál es el valor aproximado de $P(2 \leq X \leq 5)$?

d) ¿Cuál es la función de probabilidad f asociada a la variable aleatoria X?

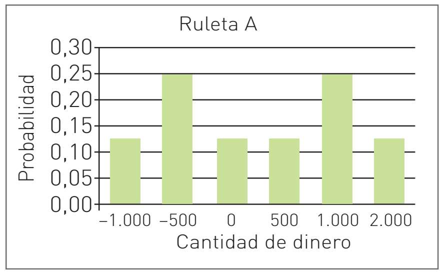
e) Representa gráficamente la función de probabilidad *f* asociada a *X*.

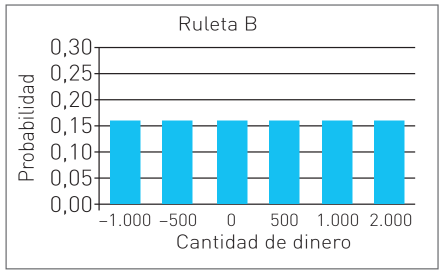
Varianza y desviación típica o estándar de variables aleatorias discretas

Resolución de problemas

INTERPRETA LOS GRÁFICOS

13. Analiza los gráficos y determina qué distribución es más homogénea. Para ello, compara sus desviaciones estándar.





Comunicación de ideas

COMUNICA

14. Evalúa la veracidad de las siguientes afirmaciones considerando los gráficos de la actividad anterior. Para ello, escribe V o F según corresponda. Justifica las falsas.

a) Los gráficos representan la misma situación pero con distintos grupos de encuestados.

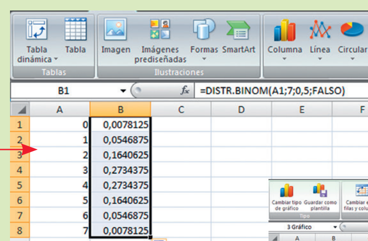
b) Es posible determinar la cantidad de integrantes de cada grupo.

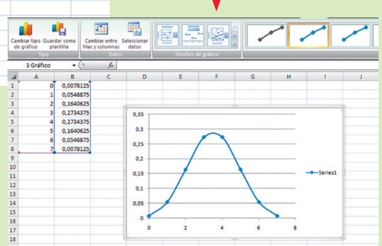
c) Para calcular la media aritmética de las distribuciones basta con aplicar la fórmula $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6}(x_i \cdot f_i)$.

MATEMATICS

Gráfico de una distribución normal. Consideremos el experimento aleatorio "registrar el número de caras al lanzar siete monedas".

1. En la columna A escribe el número de caras posibles de obtener; mientras que en la B, la probabilidad de obtener cada una de estas cantidades. Para esto, digita la función de la imagen, presiona Enter y copia la fórmula.
2. Para graficar las probabilidades, selecciona las celdas de ambas columnas, busca en la pestaña "Insertar" el tipo de gráfico de la imagen y selecciona el que se destaca.
3. El gráfico obtenido es una curva representativa de una distribución normal; esto ocurre porque al lanzar una moneda, es posible obtener solo dos resultados, cara o sello, y cada uno de ellos tiene la misma probabilidad de ocurrir. Si esa probabilidad fuese distinta, la curva no sería simétrica.





Resolvemos problemas

Etapas en la solución de problemas

1 **Comprender el enunciado del problema.**

En todo problema se debe evaluar, analizar e interpretar el enunciado, para emitir juicios de acuerdo con un criterio conocido o válido.

2 **Proponer un plan.**

Analizar el objeto o situación que se va a evaluar. Definir el o los criterios de evaluación.

Para resolver un problema debes:
Comprender el enunciado
Proponer un plan.
Ejecutar un plan.
Revisar la solución.

3 **Ejecutar el plan.**

Mantener un plan de trabajo y ejecutarlo garantiza la eficiencia en el trabajo, tanto matemático como personal.

4 **Revisar la solución.**

Luego de encontrar las soluciones al problema se debe verificar que sean las correctas.

1 **Actividad resuelta**

Problema

Si el 7% de los celulares de cierta marca tiene algún defecto y se empaqueta en cajas de 80 unidades para distribuirlos, ¿cuál es la probabilidad de que en una caja haya más de 10 celulares defectuosos?

Comprender el enunciado del problema.

- ¿Qué se quiere dar a conocer una vez resuelto el problema?
  La probabilidad de encontrar más de 10 celulares defectuosos en una caja.
- ¿Qué información entrega el enunciado del problema?
  Que el 7% de los celulares tiene algún defecto y que se empaquetan en cajas de 80 unidades.

Proponer un plan.

- **Analiza** el objeto o situación que evaluarás y define cómo realizarás esta evaluación.
  La situación a considerar es obtener celulares defectuosos o no y se trata de un experimento dicotómico. Luego, la variable aleatoria sigue una distribución binomial B(80; 0,07) que se puede aproximar a una distribución normal.

Ejecutar el plan.

- **Verifica** si la proposición es válida o no.
  La variable se distribuye de forma binomial B(80; 0,07), siendo $np = 5{,}6 > 5$ y $n(1 - p) = 74{,}4 > 5$. Luego, se puede aproximar a una distribución normal N(5,6; 2,28).
- **Explicita** los argumentos sobre el valor atribuido a la solución de la situación.
  Considerando la información del enunciado se quiere calcular $P(Y > 10)$. Luego,

$$
\begin{aligned}
P(Y > 10) &= P(X > 10{,}5) \\
&= \left(\frac{x - 5{,}6}{2{,}28} > \frac{10 - 5{,}6}{2{,}28}\right) = P(Z > 2{,}15) = 1 - P(Z < 2{,}15) \\
&= 1 - 0{,}9842 = 0{,}0158
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la probabilidad de que en una caja haya más de 10 celulares defectuosos es 0,0158.

Revisa la solución.

Puedes calcular $1 - (P(Y \leq 10)) = 1 - (P(Y = 0) + P(Y = 1) + \ldots + P(Y = 10))$.

2 Ejercicio resuelto

Problema

Un examen consta de 10 preguntas a las cuales hay que contestar SI o NO. Suponiendo que a las personas que se les aplica no saben contestar a ninguna de las preguntas y, en consecuencia, contestan al azar, hallar:

a) Probabilidad de obtener cinco aciertos.

b) Probabilidad de obtener algún acierto.

Resolución

Es una distribución binomial, la persona puede acertar o fallar la pregunta.

Suceso A (éxito) = acertar la pregunta , $P(A) = 0{,}5$

Suceso AN= no acertar la pregunta, $P(AN) = 0{,}5$

Distribución binomial de parámetros $n = 10$, $p = 0{,}5$; $B(10;\ 0{,}5)$

a) Probabilidad de obtener cinco aciertos

Obtener exactamente cinco aciertos, $y = 5$, aplicamos la fórmula:

$$P(Y = y) = \binom{n}{y} p^{y} \cdot q^{n-y}$$

$$y = 5; n = 10; p = 0{,}5, q = 0{,}5$$

$$P(Y = 5) = \binom{10}{5}(0{,}5)^{5} \cdot (0{,}5)^{10-5} \qquad P(Y = 5) = 252 \cdot (0{,}5)^{5} \cdot (0{,}5)^{5} = 0{,}2461$$

b) Probabilidad de obtener algún acierto.

$$P(x \geq 1) = P(x = 1) + P(x = 2) + P(x = 3) + P(x = 4) + P(x = 5) + P(x = 6) + P(x = 7) + P(x = 8) + P(x = 9) + P(x = 10)$$

De esta forma resulta muy largo, para evitar esta situación buscamos el complemento.

$$P(x \geq 1) = 1 - P(x = 0)$$

Calculamos la probabilidad de no obtener ningún acierto $P(X = 0)$

$$P(x = 0) = \binom{10}{0} \cdot (0{,}5)^{0} \cdot (0{,}5)^{10} = 0{,}0010$$

$$P(x \geq 1) = 1 - P(x = 0) \qquad P(x \geq 1) = 1 - 0{,}0010 = 0{,}999$$

Aplica la estrategia

1. Resuelve el siguiente problema. Para ello, guíate por los pasos estudiados anteriormente.

En un colegio se estima que 1 de cada 8 estudiantes prefiere matemática sobre otras asignaturas. Si se elige a 60 estudiantes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que en ese grupo haya más de 10 que prefieran matemática?

2. Resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas.

a) La duración media de cierto producto es 8 años y su desviación estándar es 0,5 años. Sabiendo que su vida útil se distribuye normal, ¿cuál es la probabilidad de que al adquirir uno de estos productos dure más de 9 años?

b) Cierto tipo de ventilador tiene una duración de 4 años con una desviación estándar de 0,5 años. Si la duración de los ventiladores sigue una distribución normal:

- ¿Qué porcentaje de ventiladores se espera que duren entre 2 y 5 años?
- Si un ventilador lleva funcionando 4 años, ¿cuál es la probabilidad de que dure menos de 5 años?

Ponemos a prueba destrezas

LA PROBABILIDAD

«Pienso, luego existo». Mediante esta máxima Descartes concluyó que el ser humano podía desconfiar de la veracidad de todas las cosas existentes en la realidad circundante que llegaban hasta su mente a través de los cinco sentidos, pero de lo único que no se podía dudar era de que en últimas el ser humano era un «ser pensante» que vivía elaborando siempre conclusiones sobre la realidad circundante.

1. Se realizó un estudio sobre el efecto del calor en un aparato electrónico. De una muestra escogida aleatoriamente, se analizó el tiempo que transcurre hasta que el aparato deja de funcionar. Luego, para una muestra de 30 aparatos, se obtuvo que el tiempo promedio en que dejaron de funcionar fue 1,15 horas. Si X es el tiempo promedio en que el aparato deja de funcionar y se distribuye de forma normal con una desviación estándar de 0,5 horas, construye un intervalo de confianza del 95 % para estimar la media poblacional de X.

2. Gracias a los controles de tránsito de cierta ciudad, se ha estimado que el 35 % de los conductores controlados excede el límite de velocidad permitido. Si en un mes se controlan un total de 650 personas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 230 haya cometido esta infracción?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que 250 personas hayan excedido el límite de velocidad?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más 245 personas haya cometido esta infracción?

3. Para cada una de las siguientes distribuciones binomiales, indica si se pueden o no aproximar a una normal. En caso negativo, explica por qué, y en caso afirmativo, determina a qué distribución normal se aproxima, calculando su media y desviación estándar.

a) B(10; 0,1) **b)** B(40; 0,8)

c) B(32; 0,4) **d)** B(48; 0,9)

4. Una máquina tiene una probabilidad igual a 0,01 de fabricar un artículo defectuoso. Si la máquina produce 35 000 artículos:

a) ¿cuál es la probabilidad de que haya menos de 330 artículos defectuosos?

b) ¿cuál es la probabilidad de que haya más de 500 artículos defectuosos?

c) ¿cuál es la probabilidad de que haya entre 300 y 400 artículos defectuosos?

5. La probabilidad de que un estudiante de ingeniería obtenga su título es de 0,3. Si un año entran 500 estudiantes a dicha carrera, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 160 de ellos se titulen?

6. Si un tirador al blanco acierta el 70 % de sus tiros, calcula la probabilidad de que en 20 tiros acierte a lo más 15 veces.

a) Mediante la distribución binomial.

b) Mediante la aproximación a la normal.

c) Compara ambos resultados.

7. En una ciudad se calculó que la probabilidad de nacer mujer es de 0,53. Si en un mes cualquiera ha habido 200 nacimientos:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de niñas sea mayor que 95?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el número de niñas esté entre 110 y 125?

8. En una ciudad se detectó una epidemia de gripe. Si se sabe que el 35 % de la población de la ciudad está enferma:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en una sala de cine con 200 personas, al menos 65 de ellos estén contagiados con el virus?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sala con 150 estudiantes haya exactamente 48 contagiados?

Matemáticas en contexto

Historia de la probabilidad

Según el historiador griego Herodoto, en el antiguo Egipto (3000 a. C.) ya se registraban datos relativos a la población y riqueza para construir las pirámides. En China, Grecia, Roma, así como en los territorios actuales de Francia e Inglaterra, también se registraron datos estadísticos para distintos fines.

Por otra parte, desde el siglo XIII se han estudiado los juegos de azar, principalmente con dados y cartas; un ejemplo lo encontramos en el poema "De Vetula", de Richard de Fournival (1200–1250), en el que afirma que si se lanzan tres dados hay 216 combinaciones posibles. Otros matemáticos realizaron diversos aportes al estudio del cálculo de probabilidades relacionado con este tipo de juegos.

En 1662, el inglés John Graunt (1620–1674) realizó un estudio sobre distintos temas relacionados con la demografía en Londres. Entre ellos se encontraban: la relación entre la cantidad de hombres y mujeres, la edad promedio de vida, y estableció algunas causas de fallecimiento. De hecho, Graunt elaboró la primera tabla de mortalidad y se cuenta que hizo predicciones sobre la cantidad de personas que morirían a causa de ciertas enfermedades. En conclusión, se podría decir que el trabajo realizado por Graunt se enmarca en la Estadística y en la Probabilidad.

- ¿Qué relación existe entre el tercer párrafo y los dos anteriores?
- ¿Por qué se puede decir que el trabajo realizado por John Graunt se enmarca en la Estadística y en la Probabilidad?

1. La siguiente tabla representa la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta Z:

z_i	1	2	3
$f(z_i)$	0,2	0,5	0,3

¿Cuál es el valor de la varianza de Z?

a) 2,1 **b)** 0,49 **c)** 2,8 **d)** 4,9 **e)** 1

2. Si la varianza V(X) de una variable aleatoria discreta X es 16, entonces la desviación estándar de X es:

a) 4 **b)** 16 **c)** 256 **d)** 8 **e)** 2

3. Un experimento de Bernoulli se caracteriza por:

i. tener sólo dos posibles resultados.
ii. las probabilidades de obtener los distintos resultados son iguales.
iii. sus eventos son independientes.

a) 4 **b)** 16 **c)** 256 **d)** 8 **e)** 2

4. ¿Cuál de los siguientes experimentos se distribuye binomialmente al repetirlo varias veces?

a) Medir el tiempo de espera en la fila de un banco.
b) Pronosticar cómo estará el tiempo mañana.
c) Extraer una bolita sin reposición de una urna de 2 bolitas azules y 3 rojas.
d) Acertar el resultado de un partido de fútbol.

5. En un partido de tenis entre los jugadores A y B, la probabilidad de que gane el jugador A es de 0,8. Se disputarán en total 4 partidos. ¿Cuál es la probabilidad de que B gane 3 de ellos?

a) 0,1024 **b)** 0,0064 **c)** 0,4096 **d)** 0,0256 **e)** 0,008

Razonamiento lógico

Predicción del clima

En cierto lugar se sabe que si hoy hace sol, la probabilidad de que mañana también lo haga es 4/5. Pero si hoy está nublado, la probabilidad de que mañana lo siga estando es 2/3.

Susana quiere saber qué ropa debe llevar el domingo y piensa así: Si hoy es viernes y hace sol, ¿cuál es la probabilidad de que el domingo también haga sol?

Autoevaluación			
Descripción	Valoración		
	Siempre	A veces	Nunca
Identifica si un experimento es binomial. (3 - 4)			
Conoce la ley de probabilidad, las fórmulas de la media, la varianza y la desviación estándar de una distribución binomial. (1 - 2)			
Conoce la ley de probabilidad, las fórmulas de la media, la varianza y la desviación estándar de una distribución normal. (1 - 2 - 3)			
Utiliza tablas o TIC para calcular los valores de la distribución normal. (4)			

Tabla de tipificación para distribuciones normales (P(Z < z))										
Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,