Recomendaciones para el docente sobre “Programación Lineal”

Este capítulo presenta la matemática básica que permite resolver problemas de programación lineal en dos variables. Se estudia la herramienta algebraica necesaria para enfrentar este tipo de problemas: la representación del conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales.

En el capítulo también se expone una extensión hacia el análisis y representación en el plano del conjunto solución de desigualdades lineales en dos variables con valor absoluto, y desigualdades que involucran una expresión cuadrática en una variable.

Para “Introducción: Planificación del turismo”

Sugerencias Metodológicas

- Dedique 10 minutos a esta actividad.
- Pida a uno de sus estudiantes que lea la Introducción del capítulo.
- Discuta en la clase lo que significa *planificar* y por qué es necesario cuidar los recursos.
- ¿Qué tipo de actividades requieren mucha planificación? Recurra a ejemplos de la vida cotidiana de sus estudiantes (un paseo largo, ir al supermercado a hacer muchas compras, preparar una receta, organizar un campeonato de fútbol).
- Plantee preguntas a toda la clase conducentes a resaltar las nociones de *optimizar* (*maximizar* y *minimizar*). Es natural que ellos presenten ejemplos de ahorro de dinero y de tiempo.

Para “Preparación y Repaso”

Asegúrese que los estudiantes estén preparados con las herramientas cognitivas básicas para asimilar nuevos conocimientos. La programación lineal es una técnica con múltiples pasos y cada uno requiere de conocimientos anteriores:

- Trazado de rectas e identificación de cortes en la recta con los ejes.
- Determinación de la intersección de dos rectas.
- Evaluación y verificación de desigualdades.

Los dos primeros prerequisitos han sido estudiados en este mismo año; sin embargo, el tercero no. Por lo tanto, es necesario que verifique que sus estudiantes lean y comprendan el significado de los símbolos $<$, $>$, $\leq$, $\geq$.

Sugerencias Metodológicas

- Dedique 20 minutos a esta actividad.
- Permita que sus estudiantes trabajen en parejas.
- Presente las soluciones a los problemas que toda la clase encontró difíciles.

Para "Investigación: tutores para dos escuelas"

Esta actividad ha sido diseñada para explorar los conceptos involucrados en la Programación Lineal:

- La función objetivo (función que va a ser *maximizada* o *minimizada*); y
- las restricciones del problema.

Inicialmente, los estudiantes encuentran difícil representar un problema mediante expresiones algebraicas. Por ello, esta actividad explora en forma numérica lo que más adelante lo hará en forma abstracta. La investigación no necesariamente tendrá como resultado encontrar el punto óptimo.

Sugerencias Metodológicas

- Dedique 30 minutos a esta actividad.
- Pida a uno de sus estudiantes que lea la parte inicial del problema.
- Agrupe a sus estudiantes (dos o tres por grupo). Guíelos para que comprendan e identifiquen las cantidades involucradas en este problema:
    1. costo de transporte por tutor;
    2. costo de almuerzo por tutor; y
    3. costos totales.
- Conduzca a los estudiantes a que sinteticen los datos relevantes y los escriban en forma clara y organizada. Por ejemplo:

  costo de almuerzo por tutor: 1 dólar.

- Guíe a los estudiantes a que identifiquen la función a optimizar:

  el número de estudiantes tutoreados

  (que es distinto que al número de tutores).

  No es necesario que encuentren fórmulas algebraicas, sino que experimenten numérica y verbalmente.

- El objetivo de la investigación no es encontrar la solución óptima, sino permitir que los estudiantes experimenten con valores numéricos en los costos involucrados en el transporte y en la comida. Por ello no es importante que en la tabla aparezca la solución óptima.

- Hacia el final de la actividad, y si el tiempo lo permite, trabaje sobre las tres últimas preguntas: estas intentan conducir a sus estudiantes a escribir mediante expresiones algebraicas *el costo total de transporte*, *el costo total de alimentación*, *el número total de tutoreados*.

Para “Programación Lineal y Sistemas de desigualdades lineales”

En esta sección se presenta primero la solución del problema de tutores planteado en la sección anterior. Esto debe servir de motivación para que se discuta la necesidad de representar, en el plano, el conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales. La sección, además, presenta el algoritmo (gráfico) para resolver un problema de programación lineal.

Sugerencias Metodológicas

- Dedique (al menos) tres clases a la presentación de este tema. Planifique la primera de manera que logre exponer la solución completa del problema de tutores para dos escuelas. Deje constancia de la solución del problema en el pizarrón o en una cartelera.
- Comience la segunda clase recordando a sus estudiantes los pasos que condujeron a la solución del problema y a la motivación, para aprender a representar soluciones de desigualdades en el plano.
- Presente uno o dos ejemplos sencillos (no más de 10 minutos) con una desigualdad, uno de ellos con la igualdad y el otro con una desigualdad estricta.
- Plantee un ejercicio sencillo con una desigualdad para que sus estudiantes lo resuelvan individualmente.
- Trabaje un problema de la forma $x \geq$ constante; este tipo de desigualdades suele presentar el “conflicto cognitivo” de no tener la segunda variable.
- Ofrezca un ejemplo sencillo con dos desigualdades.
- Plantee un ejercicio sencillo con dos desigualdades para que sus estudiantes lo resuelvan individualmente.
- Asigne los problemas relevantes correspondientes a la representación del conjunto solución que se encuentran al final del capítulo, en la parte de procedimientos.
- Comience la tercera clase resolviendo un problema de programación lineal. Presente la solución con detalle y lentamente, siguiendo los pasos planteados en el algoritmo. Despliegue el algoritmo en la pizarra o póngalo de manera permanente en una cartelera.
- Plantee un problema a sus estudiantes y monitoree el que sigan los pasos indicados en el algoritmo.
- Planifique el número de horas necesarias para que sus estudiantes alcancen un nivel de eficiencia en la resolución de este tipo de problemas.

Para "Modelos de Programación Lineal"

La actividad plantea un problema sencillo que incentiva a los estudiantes a observar que algunas situaciones de la vida cotidiana pueden resolverse matemáticamente. La actividad para la clase está diseñada de manera que los estudiantes reconozcan los distintos pasos que se requieren al modelar una situación. Los pasos del 1 al 4 los conducen paulatinamente a expresar en lenguaje algebraico el problema que ha sido enunciado mediante el español.

Sugerencias Metodológicas

- Dedique media hora de clase a esta actividad.
- Permita que los estudiantes se tomen el tiempo necesario en los pasos del 1 al 4.
- Deje que los estudiantes que han comprendido cómo escribir las expresiones algebraicas expliquen a sus compañeros cómo lo hicieron utilizando sus propias palabras.
- Asegúrese que los estudiantes identifiquen claramente la función a optimizar y las restricciones.
- Una vez planteado el problema de Programación Lineal, puesto que el énfasis en esta parte es la modelización, si desea, presente la solución (realizada con anticipación por usted); si dispone de tecnología, puede mostrar a sus estudiantes cómo utilizarla para encontrar el punto óptimo.
- Interprete los resultados encontrados. Note que al final de la actividad se presenta la solución, con una interpretación que no es del todo adecuada (pues se quiere vender helados de ambos tipos; no todos los asistentes podrían querer helados de crema o tienen el dinero para comprarlo).
- Pida a sus estudiantes que escriban con frases completas el significado de la solución (qué significa el punto óptimo y el valor de la función).

Para "Desigualdades con valor absoluto y expresiones cuadráticas"

El énfasis de esta sección es el concepto de conjunto solución de una desigualdad y su representación en el plano. Sus estudiantes tendrán la oportunidad de utilizar lo que aprendieron en el capítulo 1 sobre gráficas de función con valor absoluto, y en los capítulos 3 y 4 sobre las gráficas de las funciones cuadráticas.

Sugerencias Metodológicas

- Dedique media hora de una clase para presentar un ejemplo de desigualdad con valor absoluto y un ejemplo de desigualdad con una expresión cuadrática.
- Si dispone de tecnología, puede presentar más ejemplos en los que las gráficas de las curvas se realicen rápidamente, de manera que usted pueda concentrar sus explicaciones en el reconocimiento del conjunto solución.

Para “Ejercicios del capítulo”

- Antes de asignar un ejercicio para el deber, tenga presente el requerimiento cognitivo del mismo; asegúrese de que sus estudiantes estén preparados con los conocimientos que el ejercicio solicite. Recuerde que los ejercicios no están ordenados necesariamente según el orden de presentación del capítulo.
- En la sección pensamiento crítico, se exploran casos interesantes en los que el conjunto solución de un sistema es vacío; asegúrese de enviar estos ejercicios de tarea y cuando los estudiantes los entreguen, discútalos con la clase.

Capítulo 5

Programación Lineal

Introducción: planificación de turismo

Mira a tu alrededor: las casas, las calles, tu ropa, tu comida. Todo ha sido elaborado a partir de varias materias primas. En la naturaleza las plantas requieren nutrientes para crecer, los animales necesitan follaje y espacio natural para sobrevivir. Los recursos con los que contamos son siempre limitados, por ello es importante utilizarlos de manera que no los desperdiciemos.

En la *Misión* del Ministerio de Turismo se lee que este ministerio, "como ente rector, lidera la actividad turística en el Ecuador; desarrolla sostenible, consciente y competitivamente el sector, ejerciendo sus roles de regulación, planificación, gestión, promoción, difusión y control".

Para visitar *El Parque Nacional Galápagos*, cada visitante debe pagar para entrar en él. Desde el punto de vista del ingreso de dinero, el Ministerio de Turismo tiene como objetivo maximizar el número de visitantes, pero siempre tomando en cuenta que debe protegerse el medioambiente para que no se destruya. Si tú estuvieras a cargo de la planificación del número de turistas que pueden ingresar a Galápagos cada año, ¿qué recursos son los que debes cuidar y mantener?

En este capítulo aprenderás la matemática que permite analizar un problema tan complejo como el planteado arriba. Aquí verás problemas sencillos de optimización y el uso eficiente de los recursos.

Preparación y repaso

1. Decide si el valor dado de x satisface la desigualdad correspondiente.

   (a) $x = 4,\ 2x - 3 > 0$.

   (b) $x = 1,\ 3x + 8 < 2$.

   (c) $x = 0,\ 4x + 3 > 2$.

   (d) $x = -4,\ 4x + 16 > 0$.

2. Grafica cada una de las rectas cuyas ecuaciones están dadas. Para ello, encuentra los cortes de las rectas correspondientes con los ejes horizontal y vertical.

   (a) $x + 5y = 25$.

   (b) $2x + 3y = 6$.

   (c) $x = 0$.

(d) $y = 2$.

(e) $3x + 4y = 12$.

(f) $5x - 2y = 10$.

3. Escribe cada uno de los siguientes enunciados mediante una expresión algebraica. Antes precisa el significado de las variables utilizadas.

   (a) La cantidad total de huevos necesaria para hacer n palanquetas. La receta indica que se requieren tres huevos para elaborar una palanqueta.

   (b) La cantidad total de harina necesaria para hacer x palanquetas. En la receta se piden dos tasas de harina para cada palanqueta.

   (c) La cantidad de tiempo que toma realizar x deberes. Cada tarea requiere de media hora para su culminación.

   (d) La cantidad de fertilizante necesario para una huerta de x metros cuadrados. Un saco de 2 libras de fertilizante alcanza para 200 metros cuadrados.

   (e) El costo de prover a y estudiantes de un almuerzo a cada uno, cuyo costo es 3 dólares.

   (f) El costo de transportar a x estudiantes en bus del transporte público. El pasaje cuesta 30 centavos.

4. Para cada caso, encuentra la intersección de las rectas cuyas ecuaciones están dadas a continuación.

   (a) $x + y = 12$ y $x - y = 0$.

   (b) $2x + y = 3$ y $3x + y = 4$.

   (c) $5x - y = 9$ y $x + y = 3$.

   (d) $3x - 2y = 1$ y $5x + 4y = 3$.

Investigación: tutores para dos escuelas

Tu curso tiene la reputación de ser muy bueno en matemáticas, por lo que ha sido elegido para participar en una iniciativa entre tu Colegio y dos escuelas. Tu clase estará encargada de ayudar a los jóvenes de séptimo de básica de dos escuelas “El Sol” y “Unión Nacional”. El objetivo es mejorar la preparación matemática de la mayor cantidad de estudiantes. Hay que tomar en cuenta los costos involucrados en esta iniciativa. Los estudiantes (los futuros tutores) de tu clase tendrán un día de trabajo en la escuela que se les asigne. Debido a la diferencia de preparación entre los estudiantes de las dos escuelas, cada tutor puede ayudar a dos estudiantes de la escuela “El Sol”, y a un solo estudiante de la escuela “Unión Nacional”.

Tu colegio ha asignado un presupuesto para esta acción: el costo del transporte no puede exceder de 30 dólares y el de los refrigerios de 15 dólares. Debido a esto es posible que no todos los 35 alumnos de tu clase puedan participar en la iniciativa.

Por otro lado, el transporte a la escuela “El Sol”, que es la más lejana, cuesta 4 dólares por tutor, mientras que el transporte a “Unión Nacional” cuesta 1 dólar por tutor. Cada refrigerio cuesta 1 dólar por tutor.

Todos en tu curso quieren participar, pero los recursos son limitados, porque se debe decidir cuántos tutores irán a la escuela “El Sol” y cuántos a la escuela “Unión Nacional”, tomando en cuenta que se quiere ayudar al mayor número de estudiantes de las escuelas.

1. Discute con un grupo de compañeros sobre este problema: ¿Qué recursos son limitados?

2. Determina si 12 tutores para la escuela "El Sol" y 15 tutores para "Unión Nacional" sería una posible solución para el problema. Si no es así, explica por qué.

3. ¿4 tutores para "El Sol" y 9 tutores para "Unión Nacional" sería una posible solución para el problema?

4. ¿5 tutores para "El Sol" y 3 tutores para "Unión Nacional" sería una posible solución para el problema?

5. Una manera inicial de analizar el problema es experimentar con varias posibles combinaciones. Llena la siguiente tabla.

Número tutores "El Sol"	Número tutores "Unión Nacional"	Costo transporte	Costo refrigerio	Total tutores
5			15	
6	8			22
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				

6. Observa qué sucede con las cantidades en cada columna y encuentra la mejor combinación que cumpla con las restricciones del presupuesto y del mayor número de tutoreados.

7. Si x representa el número de tutores para "El Sol" y y para "Unión Nacional", escribe una expresión algebraica que represente:

   (a) el costo total de transporte;

   (b) el costo total de almuerzos; y

   (c) el número total de estudiantes a los cuales se les brinda ayuda.

Programación Lineal

Los ejemplos de la introducción y de la investigación son problemas que se pueden resolver con una técnica llamada *Programación Lineal*.

Veamos cómo podemos resolver el problema de los tutores utilizando Programación Lineal. Para ello es muy importante primero entender las condiciones de la situación planteada; de manera que es recomendable que leas nuevamente el problema antes de proseguir.

Lo primero que vas a realizar es expresar algebraicamente las cantidades que están involucradas en el problema. Para ello, utiliza x para representar el número de tutores para la escuela "El Sol" y y para el número de tutores para la escuela "Unión Nacional".

Como cada tutor puede ayudar a dos estudiantes de la escuela “El Sol”, $2x$ estudiantes de esta escuela recibirán ayuda. En cambio, como cada tutor ayuda a un solo estudiante de “Unión Nacional”, y estudiantes de esta escuela se contarán entre los beneficiados. Por lo tanto:

El número total de estudiantes tutoreados será $2x + y$.

Como se pagan 4 dólares de transporte por tutor que vaya a “El Sol”, el total de transporte a esta escuela se representa $4x$. En cambio, el total de transporte a la “Unión Nacional” es y. La suma de estos dos totales no puede sobrepasar 30 dólares. Esta restricción se expresa de la manera siguiente:

$$4x + y \leq 30.$$

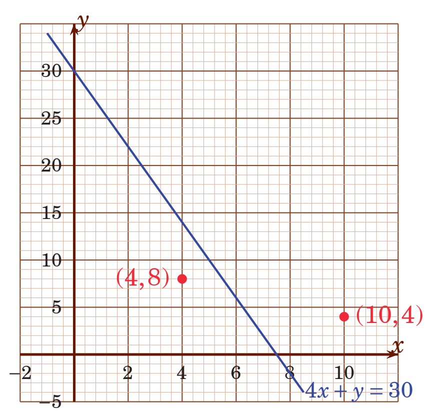
Un análisis similar sobre los costos por refrigerios nos da la información sobre el presupuesto mediante las siguientes desigualdades:

- Para transporte: $4x + y \leq 30$.
- Para refrigerios: $x + y \leq 15$.

Finalmente, ya podemos expresar de manera simbólica el problema completo:

$$\begin{aligned}&\text{Maximizar: } 2x + y\\ &\text{Sujeto a:}\\ &\begin{cases} 4x + y \leq 30\\ x + y \leq 15\\ x \geq 0\\ y \geq 0\end{cases}\end{aligned}$$

Vamos a realizar la gráfica de todos los puntos que cumplen con la primera desigualdad. Para ello, primero graficaremos la recta $4x + y = 30$:



Observa que el punto de coordenadas $(4,8)$ cumple con la desigualdad, pues

$$4(4) + 8 = 24 \leq 30.$$

En cambio, el punto de coordenadas $(10,4)$ no cumple con la desigualdad, ya que

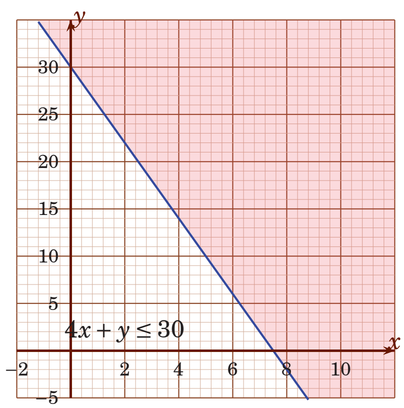
$$4(10) + 4 = 44 \not\leq 30.$$

Por otro lado, observa que la recta separa el plano en dos regiones:

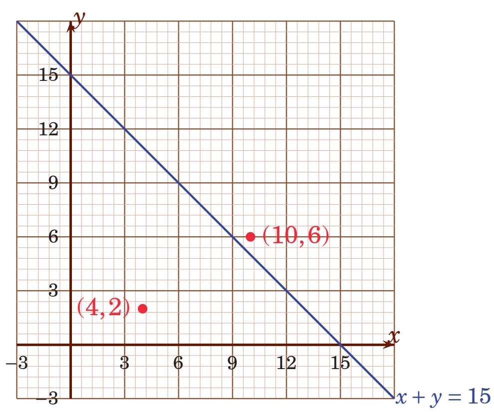
1. La región “sobre” la recta, constituida por todos los puntos cuyas coordenadas (x, y) tales que $4x + y \leq 30$.
2. La región “bajo” la recta, constituida por todos los puntos cuyas coordenadas (x, y) son tales que $4x + y \leq 30$.

Verifica que la aseveración anterior es correcta: escoge un punto “sobre” la recta y reemplaza los valores correspondientes de x y y en la desigualdad y observa si ésta se cumple o no. Procede de manera similar con un punto “bajo” la recta.

Ahora vamos a “quitar” la sección de todas las parejas que no cumplen con la desigualdad deseada:



Hagamos lo mismo para la segunda desigualdad, $x + y \leq 15$. Para ello, dibujemos la recta de ecuación $x + y = 15$:



Observa que el punto de coordenadas $(4, 2)$ sí cumple con la desigualdad, ya que

$$4 + 2 = 6 \leq 15.$$

En cambio, el punto de coordenadas $(10, 6)$ no cumple con la desigualdad, pues

$$10 + 6 = 16 \not\leq 15.$$

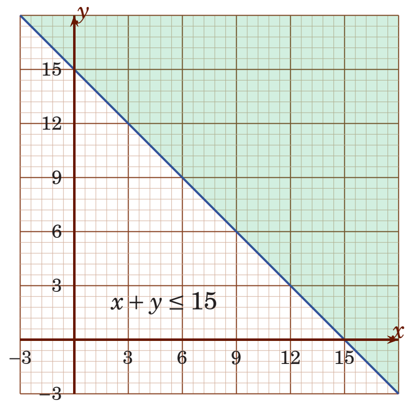
Aquí también podemos observar que la recta separa el plano en dos regiones:

1. La región “sobre” la recta, constituida por todos los puntos de coordenadas (x, y) tales que $x + y \leq 15$.

2. La región "bajo" la recta, constituida por todos los puntos de coordenadas (x, y) tales que $x + y \leq 15$.

Verifica que la aseveración anterior es correcta: escoge un punto "sobre"' la recta y reemplaza sus coordenadas en la desigualdad y observa si ésta se cumple o no. Haz lo mismo con un punto "bajo" la recta.

Ahora vamos a "quitar" la sección constituida por todos los puntos que no cumplen con la desigualdad:

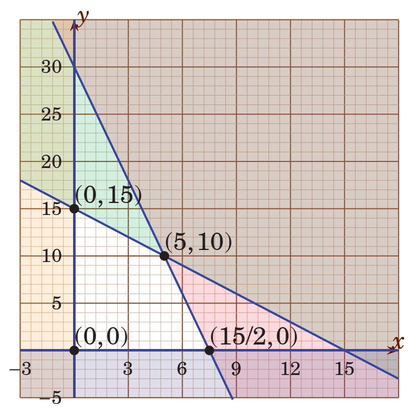


La región del plano que cumple con las desigualdades

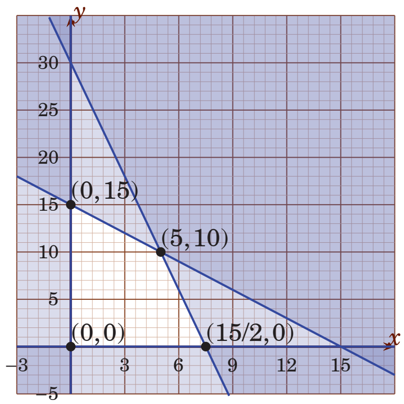
$$x \geq 0 \quad \text{y} \quad y \geq 0$$

corresponde al primer cuadrante del plano.

Ahora vamos a combinar las regiones del plano obtenidas:



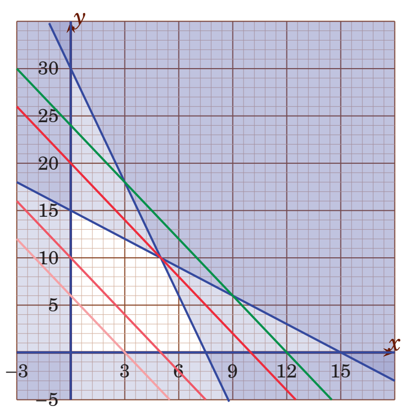
La intersección de estas regiones corresponde al conjunto de todos los puntos de coordenadas (x, y) que cumplen con todas las desigualdades. Esta región se llama *región factible*. Mírala de un solo color:



Ahora observemos que el número de tutores es $x + y$; esta cantidad puede variar desde 0 hasta 35. Así, el número de tutorados puede ser:

$$2x + y = 0, \quad 2x + y = 1, \quad 2x + y = 2, \quad \ldots$$

Grafiquemos algunas de estas ecuaciones:



Es claro que solo podemos tomar en cuenta los puntos que se encuentran en la región factible. De todos estos, el que da el mayor valor de $2x+y$ es el punto de coordenadas $(5,10)$. Esto ocurre en uno de los vértices de la región factible.

¡Hemos resuelto el problema! Cinco (5) estudiantes deben ir a la escuela “El Sol” y diez (10), a la escuela “Unión Nacional”. ¡Y se tienen 20 tutorados!

Desigualdades lineales y sistemas de desigualdades

En este capítulo hemos utilizado una herramienta algebraica muy importante. Hemos considerado desigualdades y sistemas de desigualdades con dos variables y su solución.

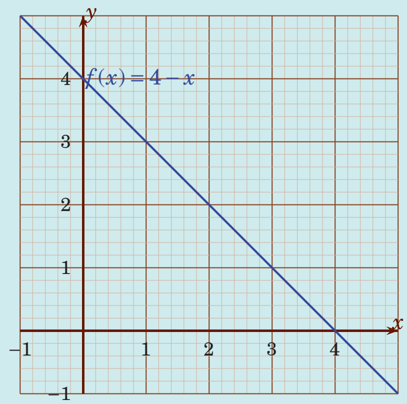
El conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales en dos variables son todos los pares ordenados (x, y) que satisfacen todas las desigualdades del sistema simultáneamente.

Ejemplo 1

Representa el conjunto solución de la desigualdad en el plano y el conjunto solución sombreando la región en el plano de los puntos que no satisfacen la inecuación.

$$x + y \leq 4$$

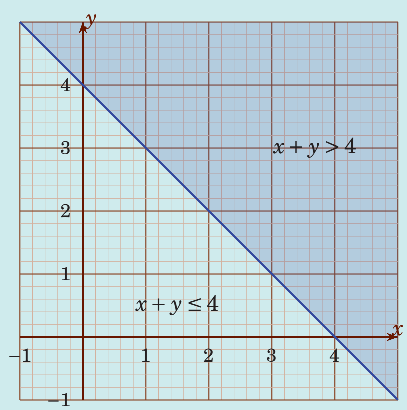
Solución. Primero graficamos la igualdad $x + y = 4$:



La recta separa el plano en dos regiones. Tomamos el punto de coordenadas $(1, 1)$, que pertenece a la región "bajo" la recta, y verifiquemos que sí cumple la desigualdad:

$$1 + 1 = 2 \leq 4.$$

Por ello, todos los puntos en la región del plano que está "bajo" la recta cumplen con la desigualdad. Los puntos sobre la recta también cumplen con la desigualdad, puesto que son los que cumplen la igualdad: $x + y = 4$. Quitemos aquella parte del plano cuyos puntos no cumplen con la desigualdad (la recta está incluida en el conjunto solución):

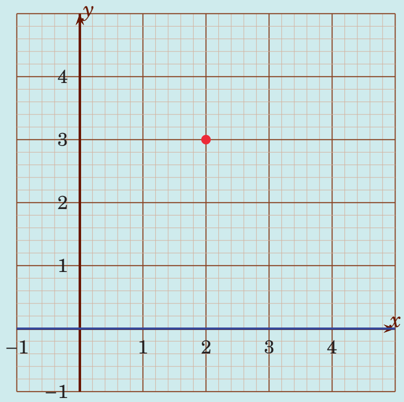


Ejemplo 2

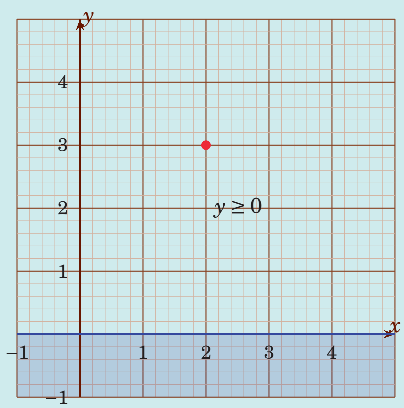
Representa el conjunto solución de la desigualdad en el plano y el conjunto solución sombreando la región en el plano de los puntos que no satisfacen la inecuación.

$$\begin{cases} x + y \leq 4, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

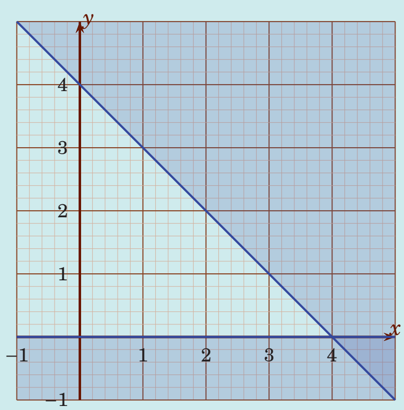
Solución. En el problema anterior, hemos representado el conjunto solución de la primera desigualdad. Ahora representamos el conjunto solución de la segunda desigualdad:



El punto $(2,3)$ es un punto en la región "sobre" la recta. Este punto satisface la desigualdad, pues $3 \geq 0$. La región por encima de la recta es la solución a la desigualdad. La recta está también en esta región.



Ahora vamos a representar la intersección de los dos conjuntos solución:



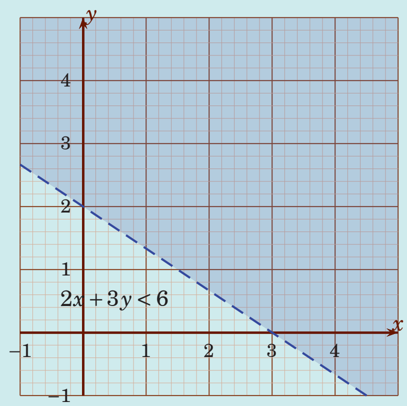
La región no sombreada corresponde al conjunto solución del sistema de desigualdades. Las rectas sí están incluidas en el conjunto solución.

Ejemplo 3

Representa el conjunto solución de la desigualdad en el plano y el conjunto solución sombreando la región en el plano de los puntos que no satisfacen la desigualdad.

$$2x + 3y < 6$$

Solución. Primero graficamos la recta; para ello, es útil encontrar los cortes con los ejes. En este caso, esos puntos son $(3,0)$, $(0,2)$.



Ahora probamos un punto "sobre" la recta; por ejemplo, el de coordenadas $(1,2)$:

$$2(1) + 3(2) \not< 6.$$

Por ello, los puntos que están "bajo" la recta pertenecen al conjunto solución. Además, los puntos que están sobre la recta cumplen con la igualdad $2x+3y = 6$, pero no con la desigualdad $2x + 3y < 6$; por lo tanto, la recta no pertenece al conjunto solución.

Definición Región Factible

La *región factible* de un problema de programación lineal con dos variables es el conjunto de puntos de coordenadas (x, y) que cumplen con todas las restricciones del problema. Es decir, es el conjunto solución del sistema de desigualdades a las cuales está sujeto el problema de Programación Lineal.

La región factible es siempre un polígono y la función a optimizar obtiene su punto óptimo en uno de los vértices de la región factible.

Algoritmo para resolver un problema de programación lineal

Paso 1: plantear el problema identificando la función a optimizar y las restricciones.

Paso 2: graficar en el plano la región factible.

Paso 3: identificar los vértices de la región factible.

Paso 4: evaluar la función en cada vértice.

Paso 5: la solución del problema es el vértice donde la función toma el valor mayor, en el caso de que se trate de maximizar la función, o donde la función toma el valor menor, en el caso de que se busque minimizar la función.

Ejemplo 4

Resuelve el siguiente problema de Programación Lineal:

$$\textit{Maximizar: } 3x+4y$$
$$\textit{Sujeto a:}$$
$$\begin{cases} 2x+y \le 20 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Solución.

Paso 1: Para plantear el problema de Programación Lineal, debemos identificar la función a optimizar y las restricciones.

En este caso, la función a optimizar es $(x,y) \longmapsto 3x+4y$. Hay tres restricciones en el problema:

$$\begin{cases} 2x+y \le 20, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Estas tres desigualdades determinan la región factible.

Paso 2: Graficamos la región factible en el plano. Para ello, en primer lugar dibujamos el conjunto solución de la desigualdad $2x+y \le 20$. Para lo cual, dibujamos la recta de ecuación $2x+y=20$. Recuerda que saber los cortes de la recta con los ejes es importante, pues estos son los posibles vértices de la región factible.

El corte con el eje vertical se obtiene a partir de la ecuación de la recta al reemplazar x por 0:

$$y = 20.$$

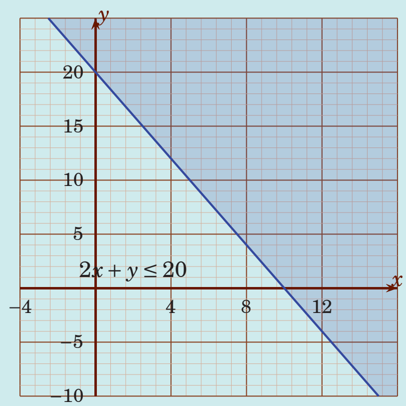
Por lo tanto, el punto de coordenadas $(0,20)$ es el corte de la recta con el eje vertical.

Ahora para determinar el corte con el eje horizontal, reemplazamos en la ecuación de la recta y por 0, de aquí que $2x=20$, es decir, $x=10$. Entonces, el punto de coordenadas $(10,0)$ es el corte con el eje horizontal.

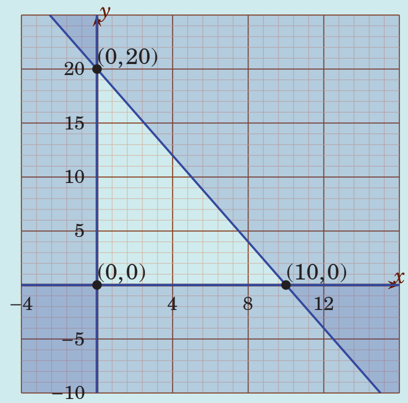
Como sabemos, la recta separa el plano en dos regiones. Para decidir qué región corresponde al conjunto de parejas que satisfice la desigualdad $2x+y \le 20$, tomamos, por ejemplo, el punto de coordenadas $(2,4)$ y vemos que

$$2(2)+4 = 8 < 20,$$

por lo que este punto y todos de la región bajo la recta satisfacen la desigualdad $2x+y \le 20$.



Si ahora consideramos, además, las otras dos desigualdades, $x \geq 0$ y $y \geq 0$, la región factible es:



Paso 3: Identifiquemos los vértices de la región factible. Como vemos en la gráfica y por lo determinado en el paso 2, los vértices son los puntos de coordenadas $(0,0)$, $(10,0)$ y $(0,20)$.

Paso 4: Evaluamos la función a optimizar en cada vértice, y lo consignamos en la tabla siguiente:

x	y	$3x+4y$
0	0	0
10	0	30
0	20	80

Paso 5: La solución del problema se obtiene en el vértice donde el valor de la función es el más grande; en este caso, el punto de coordenadas $(0,20)$ es el punto buscado, y el valor mayor de la función $(x,y) \longmapsto 2x+4y$ es 80.

Ejemplo 5

Resuelve el siguiente problema:

Maximizar: $x+2y$

Sujeto a:

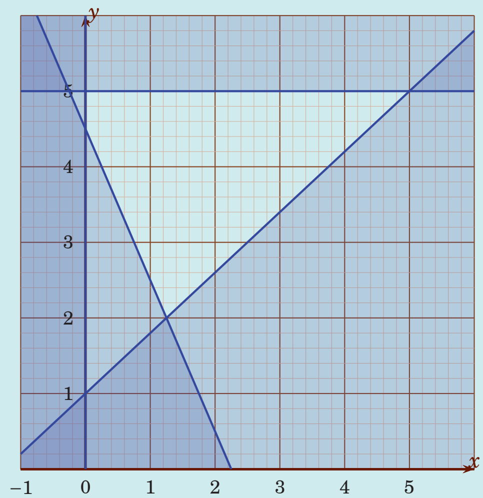
$$\left\{\begin{aligned} 4x+2y &\geq 9, \\ 5y-4x &\geq 5. \\ y &\leq 5. \end{aligned}\right.$$

Solución.

Paso 1: Debemos encontrar el valor máximo de la función $(x,y) \longmapsto x+2y$, en la región factible resultante de las restricciones

$$\left\{\begin{aligned} 4x+2y &\geq 9, \\ 5y-4x &\geq 5, \\ y &\leq 5. \end{aligned}\right.$$

Paso 2: Graficamos la región factible:



Paso 3: Para determinar los vértices de la región factible, debemos encontrar los puntos de intersección de las rectas.

(a) Las coordenadas del punto de intersección de las rectas de ecuaciones

$$x+2y=9 \quad \text{y} \quad 5y-4x=5$$

son $\left(\frac{5}{4},2\right)$.

(b) Las coordenadas del punto de intersección de las rectas de ecuaciones

$$5y-4x=5 \quad \text{y} \quad y=5$$

son $(5,5)$.

(c) Las coordenadas del punto de intersección de las rectas de ecuaciones

$$4x+2y=9 \quad \text{y} \quad x=0$$

son $\left(0,\frac{9}{2}\right)$.

(d) Las coordenadas del punto de intersección de las rectas de ecuaciones

$$y=5 \quad \text{y} \quad x=0$$

son $(0,5)$.

Nota que no todas las intersecciones entre las rectas son de nuestro interés; solo aquellas que son los vértices de la región factible.

Paso 4: Evaluamos la función en cada uno de los vértices:

x	y	$x+2y$
5/4	2	21/4
5	5	15
0	9/2	9
0	5	10

Paso 5: La solución del problema se alcanza en el vértice en el cual el valor de la función es el más grande; en este caso, el punto de coordenadas $(5,5)$. Por lo tanto, para $x=5$ y $y=5$, el valor máximo de la función $(x,y)\longmapsto x+2y$ es 15.

Ejemplo 6

Resuelve el siguiente problema:

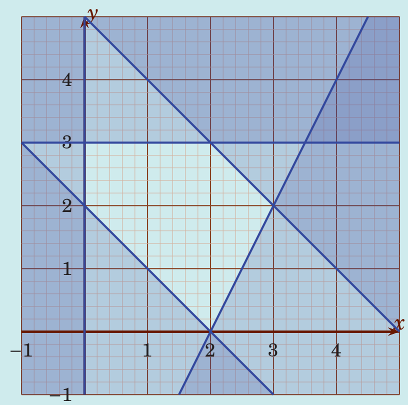
$$\text{Minimizar: } 3x - y$$
$$\text{Sujeto a:}$$
$$\begin{cases} 2x - y \leq 4, \\ x + y \leq 5, \\ y \leq 3, \\ x + y \geq 2, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Solución.

Paso 1: Debemos encontrar el valor mínimo de la función $(x, y) \longmapsto 3x - y$, en la región factible resultante de las restricciones

$$\begin{cases} 2x - y \leq 4, \\ x + y \leq 5, \\ y \leq 3, \\ x + y \geq 2. \end{cases}$$

Paso 2: Graficamos la región factible:



Paso 3: Para determinar los vértices de la región factible, encontramos los puntos de intersección de las rectas.

(a) La intersección entre las rectas de ecuaciones $x + y = 5$ y $y = 3$ es el punto de coordenadas $(2, 3)$.

(b) La intersección entre las rectas de ecuaciones $x + y = 5$ y $2x - y = 4$ es el punto de coordenadas $(3, 2)$.

(c) La intersección entre las rectas de ecuaciones $x + y = 2$ y $y = 0$ es el punto de coordenadas $(2, 0)$.

(d) La intersección entre las rectas de ecuaciones $x + y = 2$ y $x = 0$ es el punto de coordenadas $(0, 2)$.

(e) La intersección entre las rectas de ecuaciones $y = 3$ y $x = 0$ es el punto de coordenadas $(0, 3)$.

Paso 4: Evaluamos la función en cada vértice:

x	y	3x - y
2	3	3
3	2	7
2	0	6
0	2	-2
0	3	-3

Paso 5: La solución del problema se alcanza en el vértice donde el valor de la función es el más pequeño; en este caso, el punto de coordenadas $(0,3)$ es el buscado y el valor mínimo de la función $(x,y) \longmapsto 3x - y$ es -3.

¡A practicar!

Es tu turno:

1. Resuelve el problema

$$\text{Maximizar: } 3x + y$$
$$\text{Sujeto a:}$$
$$\begin{cases} 2x + y \geq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

2. Resuelve el problema

$$\text{Minimizar: } 3x + y$$
$$\text{Sujeto a:}$$
$$\begin{cases} 3x + y \geq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

3. Resuelve el problema

$$\text{Maximizar: } x - 3y$$
$$\text{Sujeto a:}$$
$$\begin{cases} x \leq 6 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

4. Resuelve el problema

$$\text{Minimizar: } x - 3y$$
$$\text{Sujeto a:}$$
$$\begin{cases} x \leq 6 \\ y \geq 1. \end{cases}$$

Modelos con Programación Lineal

En la introducción de este capítulo, leíste sobre un problema de turismo que puede ser analizado utilizando Programación Lineal. Los administradores, ingenieros y planificadores, entre otros, se enfrentan todos los días con problemas complicados acerca del manejo eficientemente de los recursos. Estos problemas deben ser resueltos con computadoras potentes, pues involucran muchas variables. Aquí veremos unos pocos ejemplos sencillos que te darán una primera visión sobre este tipo de problemas y como resolverlos.

Actividad para la clase

Tu curso está recogiendo fondos para el paseo de fin de año escolar. Para ello, se instalará un coche de venta de helados de coco durante el partido por la final del campeonato intercolegial de fútbol. Se venderán dos tipos de helados: el "Cocorico" y el "Cococrema".

La receta para el "Cocorico" indica que son necesarias 4 tasas de leche y 2 de crema para elaborar dos litros de este helado. En cambio, para la elaboración del "Cococrema" se requieren 3 tasas de leche y 3 de crema, también para dos litros de helado. El precio del "Cocorico" es 1 dólar y el del "Cococrema", 3 dólares por cono de cada helado. Además, cada litro de cualquiera de los dos helados rinde ocho conos.

Para elaborar los helados, se consiguieron 15 litros de leche y 10 de crema. Si cada litro contiene 4 tasas, ¿cuántos litros de helado de cada tipo se deberán hacer para obtener la mayor ganancia?

1. Con tu grupo de compañeros, discute qué recursos son limitados en este problema. ¿Es este un problema de Programación Lineal?

2. Asigna las variables x y y para indicar el número de litros de leche y de crema, respectivamente, que se requieren para elaborar cada uno de los dos tipos de helado. Completa:

   - x: número litros de "Cocorico".
   - y:

3. Escribe las desigualdades para cada recurso. Completa:

   - Recurso Leche: $4x + 3y \leq 60$.
   - Recurso Crema:

4. Escribe la función a maximizar en términos de las variables x y y:

5. Resuelve el problema de Programación Lineal siguiendo los 5 pasos descritos en este capítulo.

6. Escribe una frase que sintetice lo que encontraste con tu grupo y explica cuántos litros se deben elaborar de cada helado.

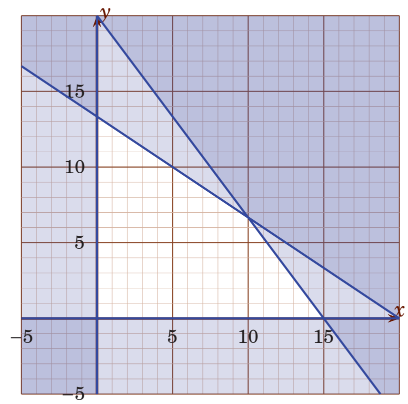
7. Uno de los grupos que resolvió esto en otra clase ofreció esta solución:

   El problema de Programación Lineal es:

   - x: número de litros de "Cocorico".
   - y: número de litros de "Cococrema".
   - El problema es:

$$\text{Maximizar: } 8x + 12y$$
$$\text{Sujeto a:}$$
$$\begin{cases} 4x + 3y \leq 60, \\ 2x + 3y \leq 40, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

   La gráfica de la región factible es:



Los vértices de la región factible son los puntos de coordenadas: $(0,0)$, $(0,40/3)$, $(10,20/3)$ y $(15,0)$. Ahora evaluemos la función en estos puntos:

x	y	$8x+12y$
0	0	0
0	40/3	160
10	20/3	160
15	0	120

El punto de coordenadas $\left(0,\frac{40}{3}\right)$ y el punto de coordenadas $\left(10,\frac{20}{3}\right)$ son los dos vértices donde la función de ingreso es máxima.

Conclusión: Da lo mismo elaborar 13 litros y un tercio de helado "Cococrema", o elaborar 10 litros de helado "Cocorico" y 6 y dos tercios de "Cococrema". En ambos casos, el ingreso será el mismo.

Revisa todo lo expuesto por este grupo y explica si su conclusión es correcta. Ofrece razones por la cuales la segunda solución se puede considerar más adecuada que la primera, en la situación presentada en el problema.

Desigualdades cuadráticas y con valor absoluto

Ejemplo 7

Encuentra el conjunto solución de la desigualdad $|x+y|<1$. *Sombrea la región del plano que no corresponda al conjunto solución:*

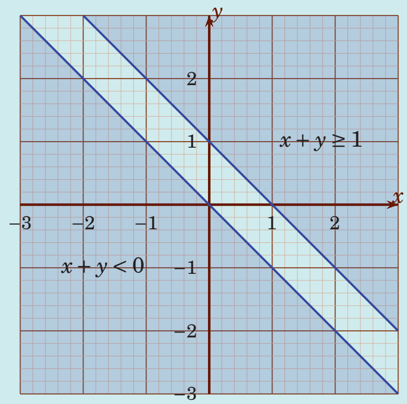
Solución. Recordemos que

$$|a|=\begin{cases} a & \text{si } a\geq 0,\\ -a & \text{si } a<0.\end{cases}$$

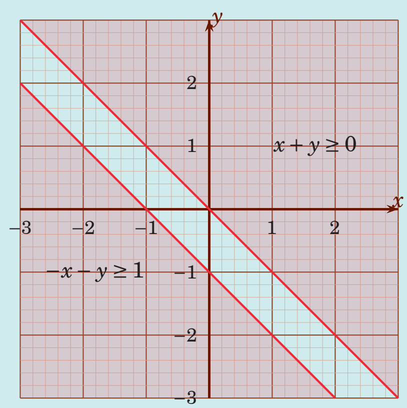
Entonces, la desigualdad $|x+y|<1$, implica dos pares de desigualdades:

1. $x+y\geq 0$ y $x+y<1$, y,
2. $x+y<0$ y $-(x+y)<1$ (esta última se puede escribir como $-x-y<1$).

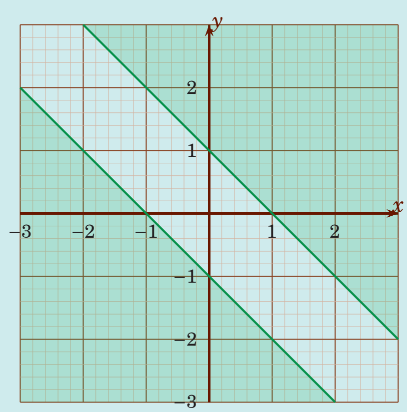
Ahora, grafiquemos el conjunto solución del primer par de desigualdades:



Grafiquemos el conjunto solución del segundo par de desigualdades:



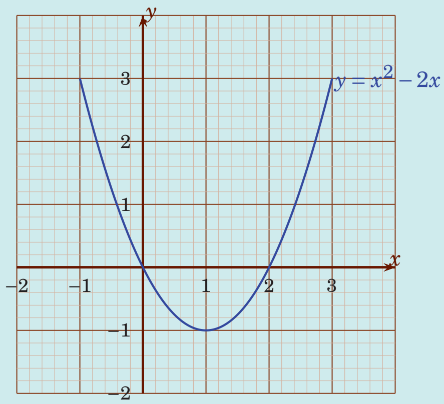
Realizamos la gráfica de la unión de las dos regiones anteriores:



Ejemplo 8

Realiza la gráfica del conjunto solución de la desigualdad $y > x^2 - 2x$.

Solución. En primer lugar, realizamos la gráfica de la parábola de ecuación $y = x^2 - 2x$:

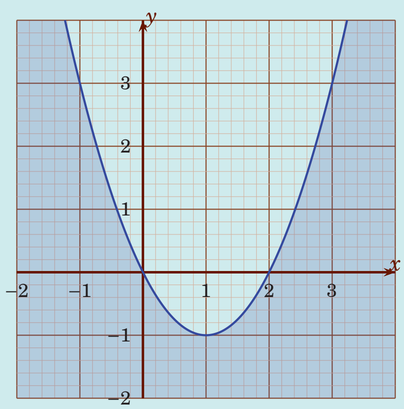


Esta curva separa al plano en dos regiones. Una de ellas corresponde al conjunto de todos los puntos de coordenadas (x, y) que satisfacen la desigualdad $y > x^2 - 2x$. Para determinar qué puntos del plano están en esta región, tomamos un punto en la parábola "sobre" la parábola y verificamos si cumple o no la desigualdad.

Por ejemplo: el punto de coordenadas $(-2, 2)$:

$$2 \not> 8 = 4 + 4 = (-2)^2 - 2(-2)$$

es falsa; entonces el punto $(-2, 2)$ no pertenece al conjunto solución. Quitamos la región donde está este punto. Queda:



Ejercicios

Conceptos

1. Para cada uno de los siguientes ítems, determina si la pareja de coordenadas corresponde a un punto perteneciente al conjunto solución de la desigualdad

$$x + 3y < 4.$$

(a) $(2,3)$.

(b) $(0,1)$.

(c) $(-2,5)$.

(d) $(-2,-3)$.

2. Determina si cada una de las proposiciones siguientes es verdaderas. Justifica tu respuesta.

   (a) El punto de coordenadas $(-1,3)$ pertenece al conjunto solución de la desigualdad $3x + y > 0$.

   (b) El punto de coordenadas $(-1,3)$ pertenece al conjunto solución de la desigualdad $x + 3y \geq 0$.

   (c) El punto de coordenadas $(-1,3)$ pertenece al conjunto solución de la desigualdad $3x + y < 0$.

   (d) El punto de coordenadas $(-1,3)$ pertenece al conjunto solución de la desigualdad $3x + y \leq 0$.

3. Establece el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones. Justifica tu respuesta.

   (a) El punto de coordenadas $(2,-4)$ pertenece al conjunto solución de la desigualdad $2x + y > 0$.

   (b) El punto de coordenadas $(2,-4)$ pertenece al conjunto solución de la desigualdad $2 + 3y \geq 0$.

   (c) El punto de coordenadas $(2,-4)$ pertenece al conjunto solución de la desigualdad $2x + y < 0$.

   (d) El punto de coordenadas $(2,-4)$ pertenece al conjunto solución de la desigualdad $2x + 3y \leq 0$.

4. Escribe una desigualdad de manera que el punto de coordenadas $(5,1)$ pertenezca a su conjunto solución.

5. Escribe una desigualdad de manera que el punto de coordenadas $(-5,3)$ pertenezca a su conjunto solución.

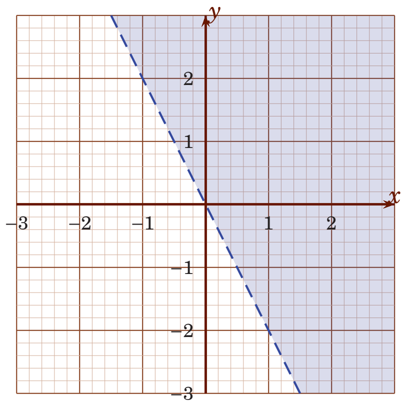
6. La región no sombreada representa el conjunto solución de una de las desigualdades dadas, indica de cuál se trata.

   (a) $2x + y < 0$.

   (b) $2x + y \geq 0$.

   (c) $2x + y \leq 0$.

   (d) $2x + y > 0$.



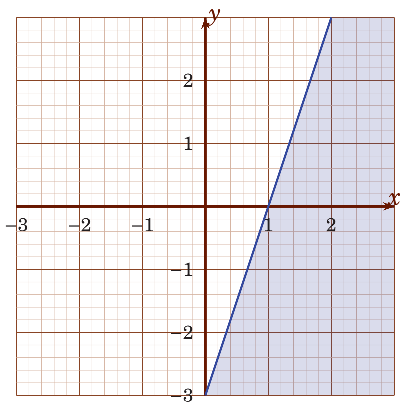
7. La región no sombreada representa el conjunto solución de una de las desigualdades dadas, indica de cuál se trata.

   (a) $3x - y < 3$.

   (b) $3x - y > 3$.

   (c) $3x - y \leq 3$.

   (d) $3x - y \geq 3$.



Procedimientos

1. Representa, en el plano, el conjunto solución de cada una de la desigualdad o del sistema de desigualdades dadas:

   (a) $2x + 3y > 12$.

   (b) $-x + y > 5$.

   (c) $6x + 4y \geq 24$.

   (d) $x > 0,\ x < 3$.

   (e) $x > 4,\ y < 2$.

   (f) $x < 1,\ x \geq -1,\ y < 4,\ y \geq 2$.

   (g) $x < 3,\ x \geq 2,\ y < 5,\ y \geq 1$.

   (h) $x > 4,\ y < 2,\ x + y < 2$.

(i) $2x + 6y > 24, \; x - y < 3.$

2. Resuelve el problema:

Maximizar: $3x + 4y$.
Sujeto a:
$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 5, \\ x + y \leq 1, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

3. Resuelve el problema:

Minimizar: $3x + 4y$.
Sujeto a:
$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 5, \\ x + y \leq 1, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

4. Resuelve el problema:

Minimizar: $3x + 2y$.
Sujeto a:
$$\begin{cases} x \geq 2, \\ x + y \geq 5, \\ x - y \leq 3, \\ x \leq 5, \\ y \leq 6. \end{cases}$$

5. Resuelve el problema:

Maximizar: $8x + 4y$.
Sujeto a:
$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 2x + 2{,}5y \geq 10, \\ 3{,}5x + y \leq 7, \\ x \leq y, \\ y \leq 8. \end{cases}$$

6. Representa, en el plano, el conjunto solución de cada una de las desigualdades dadas:

(a) $|x - y| < 4.$

(b) $|x - y| > 2.$

(c) $|x + 2y| > 4.$

(d) $|4x - y| \leq 2.$

(e) $y \leq x^2 - 3x.$

(f) $y > x^2 - 3x.$

(g) $y \geq -x^2 + 3x.$

Pensamiento crítico

1. Mediante una frase complete explica por qué el conjunto solución del siguiente sistema de desigualdades es vacío: $x + y > 0, \; x + y < 0.$

2. Con una frase completa, indica por qué el conjunto solución del siguiente sistema de desigualdades es vacío: $x > 0,\ \ x < -2$.

3. Mediante una frase completa, razona por qué el conjunto solución del siguiente sistema de desigualdades es todo el primer cuadrante del plano: $x \geq 0,\ \ y \geq 0,$ $x \geq -1$.

4. Con una frase completa, explica por qué el conjunto solución del siguiente sistema de desigualdades es todo el segundo cuadrante del plano: $x \leq 0,\ \ y \geq 0,\ \ x < 1$.

5. ¿Por qué el conjunto solución de $|x - y| < 0$ es vacío?

6. ¿Por qué el conjunto solución de $|-y + 2x| < 0$ es vacío?

Modelos

1. En una mecánica se requieren inspeccionar tanto carros y camiones antes de repararlos. La inspección de un carro tarda 20 minutos, la de un camión, 30 minutos. El tiempo de atención entre todos los mecánicos es de 2 000 minutos. La mecánica cobra 50 dólares por inspeccionar un carro y 80 un camión. Si, además, se deben inspeccionar al menos 25 carros y 20 camiones, ¿cuántos camiones y carros deberán inspeccionarse para obtener la mayor ganancia?

2. Una panadería produce dos tipos de panes integrales: el pan "Sabroso", y el pan "Nutritivo de Dulce". Para la fabricación del pan "Sabroso", se requieren 1 libra de azúcar y 4 libras de harina integral (más otros ingredientes como harina blanca por cada horneada de pan). En cambio, para el pan "Nutritivo de Dulce", se necesitan 2 libras de azúcar y 4 libras de harina integral (por cada horneada). Se tienen 4 libras de azúcar y 12 libras de harina integral. Una horneada de pan "Sabroso" da una ganancia de 100 dólares y una horneada de pan "Nutritivo de Dulce", una ganancia de 90 dólares. ¿Cuántas horneadas de cada pan se deben hacer para obtener la mayor ganancia?

3. Haz una historia de manera que corresponda al siguiente problema de Programación Lineal:

$$\text{Maximizar: } 3x + 2y.$$
$$\text{Sujeto a:}$$
$$\begin{cases} 3z + 2y \leq 30, \\ x \geq 2, \\ y \geq 3. \end{cases}$$

4. Realiza una historia de manera que corresponda al siguiente problema de Programación Lineal:

$$\text{Minimizar: } x + 5y.$$
$$\text{Sujeto a:}$$
$$\begin{cases} x + 5y \leq 40, \\ x \geq 5, \\ y \geq 2. \end{cases}$$