Recomendaciones para el docente sobre "Funciones cuadráticas II"

Notas para el Docente

Este capítulo completa el estudio de las funciones cuadráticas, mediante la exploración de su comportamiento geométrico y numérico a través de los conceptos de *variación*, *simetría* y *paridad*. Estos contenidos se presentan por medio de dos modelos. El primero consiste en una búsqueda de patrones utilizando segundas diferencias; el segundo es un modelo de la cinemática clásica.

Para "Investigación: Zonas y calles"

Esta actividad le dará al estudiante la oportunidad de encontrar un patrón numérico. La actividad está diseñada para introducir la nociones de *primeras* y *segundas diferencias*. Aunque estas no han sido definidas formalmente, dada una sucesión de números, las primeras diferencias se calculan restando dos términos consecutivos de la sucesión; y las segundas diferencias, restando dos términos consecutivos de las primeras diferencias.

Para construir una tabla de primeras diferencias y segundas diferencias de una función, se elabora una tabla de valores para la función de manera que las diferencias en x sean constantes. Por ejemplo: si

$$x = -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4 \quad \text{o} \quad x = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4;$$

se calculan los valores de la función en estos puntos; es decir, se calculan los valores de $f(x)$ para estos x. Las *primeras diferencias* se obtienen restando dos valores consecutivos de la tabla; por ejemplo: $f(4) - f(3)$. Para una función lineal, las primeras diferencias son constantes; por ejemplo:

$$f(4) - f(3) = f(3) - f(2) = f(2) - f(1).$$

A partir de las primeras diferencias, construimos las segundas diferencias mediante la resta de dos primeras diferencias consecutivas; por ejemplo:

$$(f(4) - f(3)) - (f(3) - f(2)).$$

Una vez que se tabulan los valores de la función, el cálculo de las primeras y segundas diferencias es rápido y sencillo.

Sugerencias metodológicas

- Dedique 30 minutos a esta actividad.
- Pida a uno de sus estudiantes que lea la parte inicial del problema.
- Discuta en la clase los significados de urbanizar un terreno, el trazado de calles, el costo de abrir y pavimentar una calle.
- Plantee preguntas que lleven a resaltar las nociones sugeridas.
- Divida la clase en grupos de dos o tres estudiantes. Guíelos estudiantes con la representación del problema, como se plantea en la actividad.
- Asegúrese de que los estudiantes en cada paso dibujen las rectas de manera que obtengan el mayor número de zonas.
- Una vez que la actividad haya sido completada, pida que los diferentes grupos presenten sus resultados.

Para "Variación de una función cuadrática"

En el capítulo de funciones lineales, los estudiantes desarrollaron la noción de *variación relativa* de una función lineal mediante la pendiente de la recta y la gráfica de la función lineal. En este capítulo exploran la *variación* a través de las primeras y segundas diferencias de la función. En el caso de las funciones cuadráticas, las primeras diferencias no son constantes, pero sí las segundas diferencias (además, son diferentes de cero). Esta propiedad es una característica de las funciones de cuadráticas (no lineales).

Sugerencias metodológicas

- Dedique 15 minutos a una presentación en la pizarra, utilizando uno de los ejemplos del texto —o su propio ejemplo— para explicar de manera detallada la construcción de una tabla de primeras y segundas diferencias.
- Realice un ejemplo con una función lineal.
- Realice un ejemplo con una función cuadrática no lineal.
- Haga notar las similitudes de las tablas en los ejemplos anteriores.
- Resuma la clase enfatizando que las primeras diferencias de una función lineal son constantes, no lo son para la cuadrática, pero sí las segundas diferencias.
- Despliegue esta información de manera permanente en el aula.

Para "Monotonía de una función cuadrática"

En este tema, la monotonía se analiza encontrando el vértice de la función.

Sugerencias metodológicas

- Comience por recordar a sus estudiantes cómo determinar el vértice de una parábola. Si la información está ya desplegada en el aula de manera permanente, llame la atención de sus estudiantes hacia ella.
- Utilice 15 minutos para exponer dos ejemplos, ambos de una función cuadrática $x \longmapsto ax^2 + bx + c$; en el primero, con $a > 0$; en el otro, con $a < 0$.
- Describa con frases completas en la pizarra el comportamiento de monotonía en cada intervalo determinado por el vértice.
- Pida a sus estudiantes que realicen ejercicios de modo que deban completar el cuadrado y encontrar el vértice, o encontrar el vértice empleando la fórmula.
- Asegúrese de que los estudiantes escriban a través de frases completas la descripción de la monotonía de la función.

Para “Simetría y paridad”

En esta sección la noción de *simetría* se construye intuitivamente observando la propiedad respectiva en varias figuras geométricas. La definición de función *par* e *impar* está relacionada con la simetría respecto al eje vertical y al origen, respectivamente.

Sugerencias metodológicas

- Dedique 30 minutos para esta actividad.
- Permita que sus estudiantes exploren qué simetrías poseen los objetos que están a su alrededor.
- Utilice los gráficos de esta sección para llevar desde la noción general de simetría hacia la simetría con respecto a un eje y el origen.
- Muestre a sus estudiantes varias gráficas de funciones y pida que determinen si son o no son simétricas respecto al origen o respecto a algún eje.
- Enseñe a sus estudiantes varias gráficas de parábolas y pida que encuentren el eje de simetría observando las gráficas.
- Defina la *paridad* de una función de dos maneras: algebraica y geométricamente.
- Demuestre que la función lineal $x \longmapsto 5x$ es impar. Demuestre que la función $x \longmapsto 3x^2$ es par.
- Demuestre que la función valor absoluto es par. Asegúrese de que sus estudiantes comprendan la operación “valor absoluto”; realice preguntas sencillas con ejemplos numéricos tendientes a que ellos concluyan que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Para “Modelos cuadráticos”

Uno de los objetivos instituidos en el documento de “Actualización Curricular para el Fortalecimiento de la Educación Básica y del Bachillerato” establece la necesidad de que la Matemática sea estudiada en consonancia con otras áreas del currículo. Esta sección presenta al estudiante la oportunidad de comprender el uso de funciones lineales y cuadráticas en la cinemática. Aquí se explora el uso de una función cuadrática para describir el movimiento de caída libre y su relación con la aceleración gravitacional.

Sugerencias metodológicas

- Dedique 40 minutos a esta actividad.
- Pida a uno de sus estudiantes que lea la introducción a la actividad.
- Promueva en sus estudiantes a comentar episodios de la experiencia cotidiana de ellos con respecto a la “caída libre”.
- Divida la clase en grupos de tres o cuatro estudiantes y pida que, en cada grupo, se deje caer un objeto y se trate de medir el tiempo de llegada al suelo, con el fin de concluir que es muy rápido y difícil de calcular con precisión.
- Pida que siga la actividad de la clase donde se propone ya una tabla de datos de un objeto en caída libre.
- Solicite a algunos de los grupos que pongan sus respuestas de las primeras y segundas diferencias en la pizarra.
- Subraye el hecho de que las segundas diferencias son constantes y aproximadamente igual a la aceleración gravitacional.
- Para terminar la actividad, realice el ejemplo de esta sección con un movimiento primero en caída libre y luego con velocidad constante; esto lo conducirá a la necesidad de utilizar funciones definidas por partes.

Para “Funciones definidas por partes”

Esta sección utiliza los contenidos presentados hasta ahora en los tres primeros capítulos, extendiendo la noción de función a una regla que puede estar dada por varias expresiones algebraicas. El proceso de evaluación y graficación tiene de por medio la comprensión del uso de cada fórmula algebraica en un dominio restringido.

Sugerencias metodológicas

- Dedique una hora de clase a este tema.
- Si aplica, comience por recordar el ejemplo de movimiento en caída libre y velocidad constante de la sección anterior.
- Presente situaciones donde una función definida por partes esté subyacente; por ejemplo: el costo de la carrera de un taxi se calcula de manera diferente si el taxi está detenido o está en movimiento; el costo de celular se calcula según la hora de la llamada, etcétera.
- Pida a sus estudiantes más ejemplos como los anteriores.

- Presente el ejemplo de la función $x \longmapsto |x|$.
- Grafique en la pizarra los ejemplos del libro, estos están construidos paso a paso.
- Solicite a sus estudiantes que una vez construida la gráfica, utilicen todos los conceptos aprendidos hasta el momento para describir a la función: monotonía, variación, puntos extremos, paridad, simetría, etcétera.
- Asegúrese de que los estudiantes evalúen la función y reconozcan la aplicación de la regla dada en diferentes dominios.
- Recalque el hecho de que hay solo una posible imagen para cada valor de entrada de la función.

Para “Ejercicios del capítulo”

- Antes de asignar un ejercicio para el deber, tenga presente los prerrequisitos cognitivos del mismo; asegúrese de que sus estudiantes estén preparados con los conocimientos requeridos para resolver el ejercicio. Recuerde que los ejercicios no necesariamente están ordenados según el orden de presentación del capítulo.
- En la sección “Modelos cuadráticos”, los ejercicios “modelo cuadrático de ingresos” y “modelo cuadrático de cosecha” deben ser realizados en el aula; es recomendable que solo el último ítem sea asignado como deber.

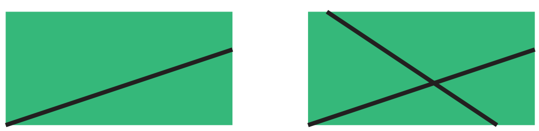
Capítulo 4

Funciones cuadráticas II

Investigación: Zonas y calles

En tu barrio hay un terreno baldío grande en el que se construirá un parque con varias zonas, de tamaño y forma diversos. Imagina que eres parte de la comisión encargada del diseño de las calles de acceso a las distintas zonas. Como es de esperar, se tiene que invertir la menor cantidad de dinero en abrir calles de acceso a las distintas zonas. La tarea de la comisión consiste en encontrar el número de calles que se requerirán para crear 30 zonas. Recuerda que se necesita la menor cantidad de calles.

Para resolver este problema, el o la docente de Matemática te ayuda a plantear el problema dibujando los siguientes dos diagramas; completa la información para el segundo:



Número de calles	Número de zonas
1	2
2	?

1. Completa los siguientes gráficos y la información sobre cada uno. Recuerda que quieres trazar la calle de manera que obtengas la mayor cantidad de zonas.

Número de calles	Número de zonas
3	?
4	?
5	?

2. Ahora, organiza la información en la siguiente tabla:

x: número de calles	y: número de zonas
1	2
2	4
3	
4	
5	

3. Reflexiona: la tabla que construiste, ¿corresponde a una función lineal f, definida por $f(x)=ax+b$? Para determinarlo, calcula la razón entre las diferencias de $f(x)$ y las diferencias de x.

x	y	Diferencia en x	Diferencia en y	$a = \dfrac{\text{diferencia en } y}{\text{diferencia en } x}$
1	2			
2	4	1	2	2
3	7	1	3	3
4				
5				

Una vez que se haya completado la tabla, podremos ver que f no es una función lineal. Escribe una frase completa para indicar la razón por la cual esta tabla no puede corresponder a una función lineal.

4. Con conocimientos que aprenderás en el siguiente capítulo, se puede obtener una función cuadrática f que describe la relación entre x y y. Nombra con f esta función, y se define por:
$$y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1.$$
Evalúa $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ y $f(5)$ para comprobar que la tabla que obtuviste en el numeral anterior es la representación de la función f.

5. Calcula $f(6)$, $f(7)$ y $f(8)$.

6. ¿Cuántas calles se necesitan para tener 30 zonas?

Variación de una función cuadrática

En la investigación observaste que la variación o tasa relativa de cambio de la función f *no es constante*. Para las funciones cuadráticas, la tasa de cambio no es constante. En el siguiente ejemplo vamos a observar un patrón interesante de las tasas relativas.

Ejemplo 1

Determina las primeras diferencias y segundas diferencias de la función f, definida por $f(x)=x^2$, en los puntos $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$ y $x=5$.

Solución. Construimos una tabla de valores para f; como se puede ver, la diferencia en x es constante e igual a 1.

x	$f(x)$	Diferencia en x	Primeras diferencias en $f(x)$	Segundas diferencias
1	1			
2	4	1	3	
3	9	1	5	2
4	16	1	7	2
5	25	1	9	2

Vemos que las segundas diferencias son constantes.

Ejemplo 2

Encuentra las segundas diferencias de la función f, definida por $f(x) = -x^2 + 3x + 4$, en los puntos $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$. Comprueba que las segundas diferencias son constantes.

Solución. Construimos la tabla de valores de las primeras y segundas diferencias:

x	$f(x)$	Diferencia en x	Primeras diferencias en $f(x)$	Segundas diferencias
0	4			
1	6	1	2	
2	6	1	0	−2
3	4	1	−2	−2
4	0	1	−4	−2
5	−6	1	−6	−2

Las segundas diferencias de la función f son constantes e iguales a -2.

- Las **segundas diferencias** de una función **cuadrática** son **constantes**.
- Las **primeras diferencias** de una función **lineal** son constantes.

Ejemplo 3

Considera la función f, definida por $f(x) = 3x^2 - x - 6$. Encuentra el valor constante de las segundas diferencias.

Solución. Miremos la tabla:

x	$f(x)$	Diferencia en x	Primeras diferencias en $f(x)$	Segundas diferencias
0	−6			
1	−4	1	2	
2	4	1	8	6
3	18	1	14	6
4	38	1	20	6
5	64	1	26	6

Como podemos verlo, el valor de las segundas diferencias es constante e igual a 6.

Ejemplo 4

Para dos funciones f y g se presentan dos tablas a continuación. Decide cuál de las dos funciones no es lineal:

x	$f(x)$
−1	1
0	3
1	5
2	7

x	$g(x)$
0	−1
1	0
2	3
3	8

Solución. Encontremos las primeras (PD) y las segundas diferencias (SD) de cada una de las funciones:

x	$f(x)$	PD	SD
−1	1		
0	3	2	0
1	5	2	0
2	7	2	0

x	$g(x)$	PD	SD
−1	−1		
0	0	1	
1	3	3	2
2	8	5	2

Vemos que las primeras diferencias de la función g no son constantes; por lo tanto, g no es lineal. Como las segundas diferencias de esta función sí son constantes, se trata de una función cuadrática.

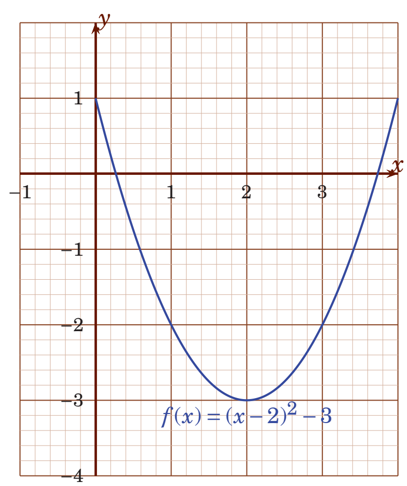
¡A practicar!

Encuentra las segundas diferencias de cada una de estas funciones:

1. $x \longmapsto x^2 - 3x + 5$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.
2. $x \longmapsto 2x^2 - 3x - 5$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.
3. $x \longmapsto 3x^2 + 3x + 5$, $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$.
4. $x \longmapsto -x^2 + 3x + 5$, $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Monotonía de una función cuadrática

Observa la siguiente gráfica:



1. ¿Cuál es el vértice de la parábola?
2. ¿Cuál es el valor mínimo de f?
3. Si comienzas a recorrer la parábola desde el punto de coordenadas $(0, 1)$ hasta el vértice, vemos que x aumenta. ¿Qué sucede con $f(x)$? ¿Aumenta o disminuye?
4. Si comienzas a recorrer la parábola desde el vértice de manera que el valor de x aumenta, ¿qué sucede con $f(x)$? ¿Aumenta o disminuye?

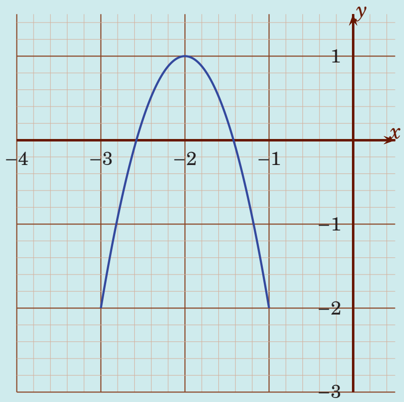
El vértice de esta parábola está localizado en el punto de coordenadas $(2, -3)$. Si recorres la parábola desde cualquier punto a la izquierda del vértice hacia el vértice, los valores de x aumentan, pero los valores de $f(x)$ disminuyen. En cambio, si el recorrido se realiza desde cualquier punto a la izquierda del vértice hacia la derecha, vemos que $f(x)$ aumenta. Entonces, podemos afirmar que:

- La función $x \longmapsto (x-2)^2 - 3$ es *decreciente* en el intervalo $(-\infty, 2)$.
- La función $x \longmapsto (x-2)^2 - 3$ es *creciente* en el intervalo $(2, \infty)$.

Ejemplo 5

Grafica la función f, definida por $f(x) = -3(x+2)^2 + 1$, y determina los intervalos donde la función es creciente y decreciente.

Solución. La gráfica de la función f es:



El vértice de la parábola correspondiente está localizado en el punto de coordenadas $(-2, 1)$. Entonces:

- La función f es creciente en el intervalo $(-\infty, -2)$, y
- la función f es decreciente en el intervalo $(-2, \infty)$.

En general, podemos concluir lo siguiente para la función cuadrática f, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$:

1. Si $a > 0$:
   - la función f es decreciente en el intervalo $(-\infty, -b/2a)$; y
   - es creciente en el intervalo $(-b/2a, \infty)$.
2. Si $a < 0$:
   - la función $f(x)$ es creciente en el intervalo $(-\infty, -b/2a)$; y
   - es decreciente en el intervalo $(-b/2a, \infty)$.

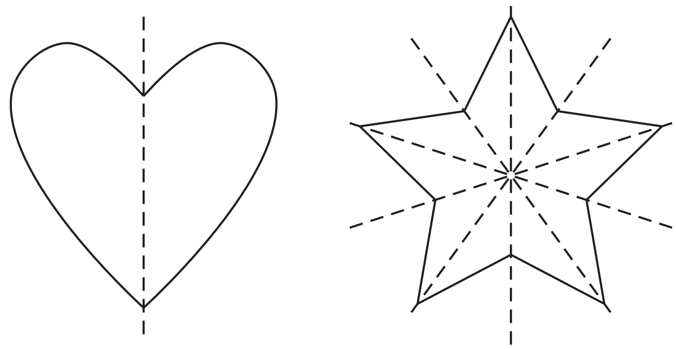
¡A practicar!

Para cada caso, sin construir la gráfica de la función f, obtén los intervalos donde es creciente y donde es decreciente.

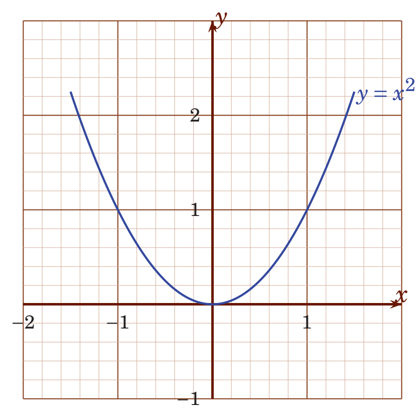
1. $f(x) = x^2 + 1$.
2. $f(x) = x^2 - 2$.
3. $f(x) = (x-1)^2$.
4. $f(x) = (x-1)^2 + 3$.
5. $f(x) = (x-1)^2 - 2$.
6. $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$.
7. $f(x) = x^2 - 6x + 8$.
8. $f(x) = -3x^2 - 6x + 5$.

Simetría respecto al eje vertical

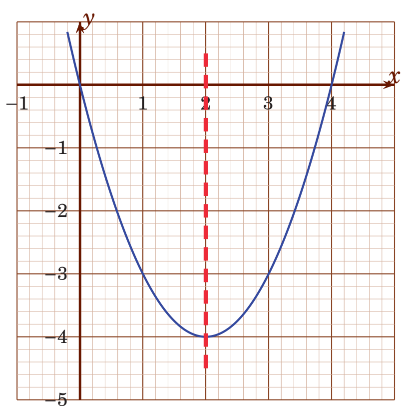
Si ves a tú alrededor, encontrarás varios ejemplos de objetos que muestran algún tipo de simetría. Por ejemplo: una mesa rectangular, el corazón. Observa las siguientes figuras, todas son simétricas respecto a una o más rectas.

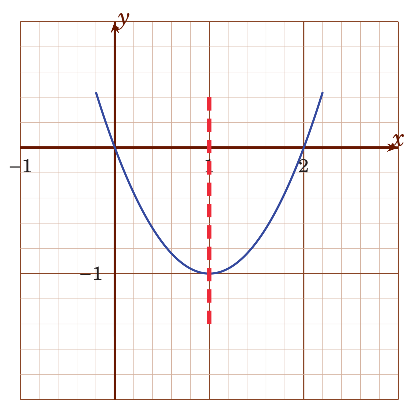


Una de las propiedades geométricas que caracterizan a la función f, definida por $f(x) = x^2$, es que su gráfica es simétrica respecto a la recta $x = 0$, es decir, al eje vertical. Esta recta se denomina *eje de simetría* de la gráfica.



Por otro lado, toda parábola tiene un eje de simetría. Por ejemplo: observa las siguientes parábolas y sus respectivos ejes de simetría. ¿Por cuál punto de la parábola pasa siempre el eje de simetría de una parábola?





En general, el eje de simetría de una parábola es la recta vertical que pasa por su vértice. Si la ecuación de la parábola es

$$y = ax^2 + bx + c,$$

con $a \neq 0$, la ecuación del eje de simetría de la parábola es

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Ejemplo 6

Encuentra el eje de simetría de la gráfica de la función f, definida por $f(x) = 3(x-4)^2 - 5$.

Solución. La gráfica, que es una parábola, es simétrica respecto a la recta vertical que pasa por el vértice de la parábola. Este está localizado en el punto de coordenadas $(4,-5)$; por lo tanto, la ecuación del eje de simetría es $x = 4$.

Ejemplo 7

Halla el eje de simetría de la parábola cuya ecuación es $y = 2x^2 - 10x + 23$.

Solución. La parábola es simétrica respecto a la recta vertical que pasa por el vértice. En este caso, $a = 2$ y $b = -10$; por lo tanto, la ecuación del eje de simetría es

$$x = -\frac{-10}{2(2)} = \frac{5}{2}.$$

Paridad

Vimos que la parábola con ecuación $y = x^2$ es simétrica respecto al eje vertical. Si miras nuevamente su gráfica, verás, además, que si el punto de coordenadas (x, y) está en la parábola, entonces también lo está el de coordenadas $(-x, y)$. Por ejemplo: si el punto de coordenadas $(2,4)$ está en la parábola, entonces también lo está el de coordenadas $(-2,4)$.

De lo dicho, sabemos que si f es la función correspondiente a esta parábola, entonces

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad f(-x) = x^2;$$

es decir, la función cuadrática f es par.

En general, una función es par cuando su gráfica es simétrica con respecto al eje vertical.

Ejemplo 8

Determina cuál de las funciones siguientes es par:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 - 3 \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 + 10x \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \end{aligned}.$$

Solución. La función f tiene como eje de simetría la recta cuya ecuación es $x = 0$; de allí se sigue que esta función tiene una gráfica simétrica respecto al eje vertical; por lo tanto, f es una función par.

La función g tiene como eje de simetría la recta de ecuación $x = -5$. Por lo tanto, concluimos que esta función no es par.

Finalmente, la gráfica de la función h es una recta, que no es simétrica respecto al eje vertical; por tanto, la función h no es par.

Ejemplo 9

Demuestra que la función f, definida por $f(x) = |x|$, es una función par.

Solución. Puesto que

$$|-x| = |x|,$$

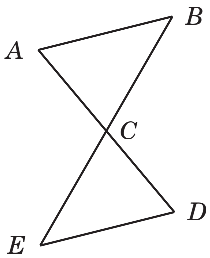
podemos afirmar que para cualquier valor de x, se verifica la igualdad siguiente:

$$f(-x) = f(x).$$

En otras palabras, f es una función par.

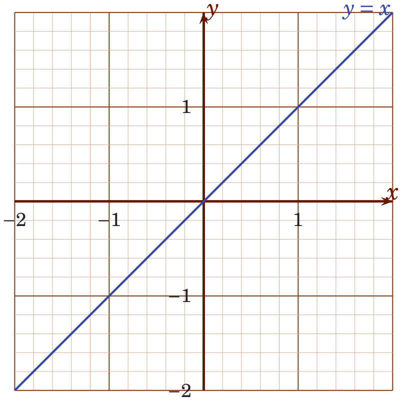
Simetría respecto al origen

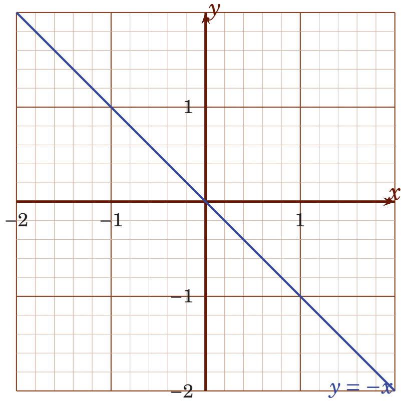
Observa las siguientes figuras, estas son simétricas respecto a un punto.



Imparidad

Una propiedad geométrica de la función lineal de la forma $x \longmapsto ax$ es que su gráfica es simétrica respecto a un punto. Observa las gráficas de dos funciones de este tipo. ¿Respecto a qué punto la gráfica es simétrica?





Mira atentamente las gráficas. Podrás comprobar que si el punto de coordenadas (x, y) está en la gráfica, también lo está el de coordenadas $(-x, -y)$. Por ejemplo: para la función $x \longmapsto x$, los puntos $(1,1)$ y $(-1,-1)$ están en su gráfica. Para la función $x \longmapsto -x$, los puntos $(-1,1)$ y $(1,-1)$ están en su gráfica.

De manera general, lo anterior quiere decir que

$$f(-x) = -f(x),$$

por ello, la función f es impar.

Del mismo modo, la gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen.

Ejemplo 10

Demuestra que toda función lineal f, definida por $f(x) = ax$, es impar.

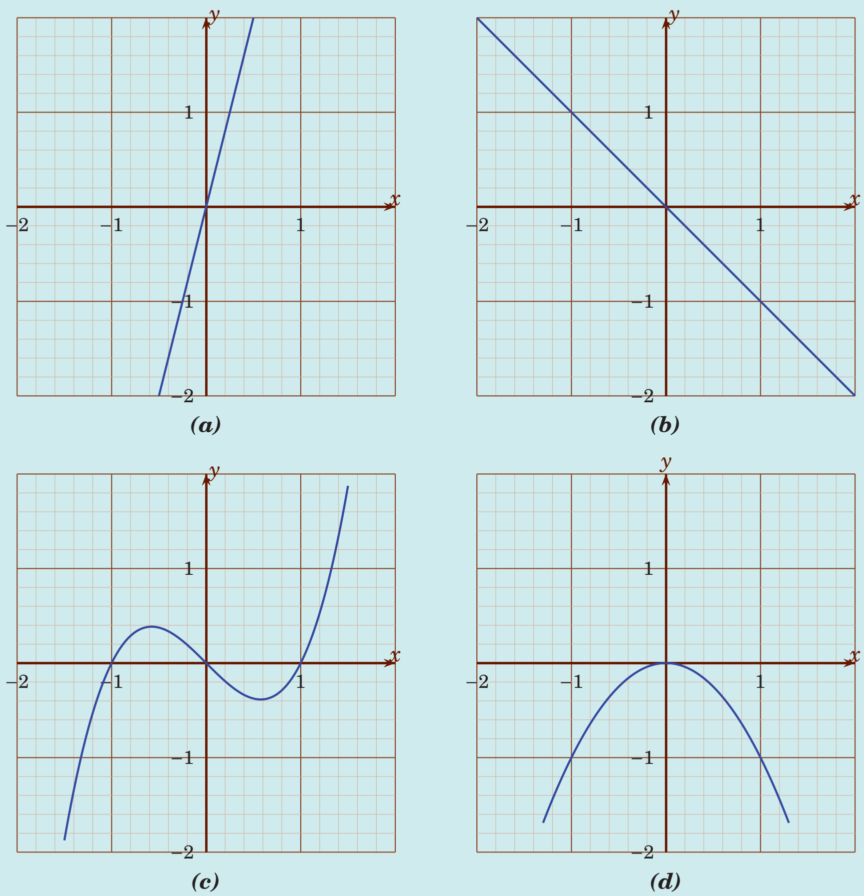
Solución. Puesto que

$$f(-x) = a(-x) = -ax = -f(x),$$

podemos concluir que f es impar.

Ejemplo 11

Determina cuál de las siguientes funciones, cuyos gráficos están dados a continuación, son funciones pares y cuáles son impares.



Solución. Las funciones en los ítems (a) y (b) son funciones lineales f, de la forma $f(x) = ax$, pues sus gráficas son rectas que cortan en 0 en el eje vertical. Por lo tanto, los gráficos son simétricos respecto del origen y las funciones son impares.

La función en el ítem (d) tiene como gráfica una parábola simétrica respecto al eje vertical; por lo tanto, la función correspondiente es par.

Finalmente, la función en el ítem (c) tiene una gráfica simétrica respecto al origen; por tanto, es impar.

¡A practicar!

Averigua cuáles de las funciones dadas son pares y cuáles son impares; además, determina cuáles son simétricas respecto al eje vertical y cuáles respecto al origen. Para aquellas que no son ni pares ni impares, establece si la gráfica tiene algún eje de simetría.

1. $f(x) = x^2 + 2$.
2. $f(x) = -4x$.
3. $f(x) = -x^2 + 2$.
4. $f(x) = 6x$.
5. $f(x) = 7x + 1$.
6. $f(x) = 4(x-3)^2$.
7. $f(x) = -5(x-3)^2 + 2$.
8. $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

Modelos cuadráticos

- La **velocidad** de un objeto es el **cambio relativo de la posición** del objeto con respecto del tiempo.
- La **aceleración** de un objeto es el **cambio relativo de la velocidad** con respecto al tiempo.

Piensa en el siguiente experimento. Si dejas caer desde la azotea de una casa dos bolas, una hecha de masa de pan y la otra de cemento, ¿cuál crees que llegará primero al suelo?

El italiano Galileo fue uno de los primeros científicos que, desafiando el saber convencional de su época, concluyó que dos cuerpos en caída libre tienen la misma velocidad. Galileo y sus contemporáneos fueron los primeros científicos que estudiaron fenómenos físicos utilizando herramientas matemáticas. Galileo descubrió que la velocidad de un cuerpo en caída libre es una función lineal del tiempo y que su aceleración (la rapidez con que cambia la velocidad) es constante.

En la Luna, donde no hay atmósfera, en 1971 un astronauta realizó un experimento para comprobar este hecho: dejó caer de la misma altura una pluma y un martillo. ¡Ambos llegaron en el mismo tiempo al suelo lunar! John Cavendish y John Michell diseñaron un experimento con el que se puede medir esta constante, llamada la *constante gravitacional* de la Tierra. Cada planeta tiene su propia constante gravitacional; la de la Tierra es $9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$; la de la Luna, $1{,}62\,\mathrm{m/s^2}$ y la de Marte es $3{,}72\,\mathrm{m/s^2}$. La aceleración es la rapidez con que cambia la velocidad. Cualquier objeto en caída libre en la Tierra tiene una aceleración de $9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$.

Actividad para la clase: caída libre

Uno de los deportes de alto riesgo, que es popular hoy en día en nuestro país, es el de caída con cuerda (del inglés: *bungee jumping*).

Para garantizar que el salto sea seguro, se requiere medir con precisión la altura y el tiempo de llegada a una distancia varios metros del suelo. Un grupo de fanáticos de

este deporte quiere determinar cuánto tiempo se demora un objeto en recorrer 60 metros en caída libre. Esta es la pregunta que intentaremos responder en esta actividad.

La caída libre de objetos es tan rápida que es difícil tomar datos con precisión. Posiblemente, en el laboratorio de Física de tu colegio o universidad cercana posiblemente tenga instalaciones que permitan realizar esta toma de datos. El siguiente cuadro corresponde a los datos de un experimento hipotético de caída libre: se deja caer un objeto en reposo (sin velocidad inicial) y se mide la distancia d, medida en metros, que recorre el objeto t segundos después del punto de partida.

Tiempo (s)	Distancia (m)
0	0
1	4,9
2	19,6
3	44,2
4	78,4
5	122,5

1. Considera la distancia recorrida como una función del tiempo. Completa la tabla de las primeras diferencias y segundas diferencias de esta función.

Tiempo (s)	Distancia (m)	Primeras diferencias (m)	Segundas diferencias (m)
0	0		
1	4,9	4,9	
2	19,6	14,7	9,8
3	44,2		
4	78,4		
5	122,5		

2. Como puedes observar, las segundas diferencias son aproximadamente igual a la constante gravitacional de la Tierra. Por lo que has aprendido en este capítulo, sabes que si las segundas diferencias de una función son constantes, entonces la función es cuadrática. Por lo tanto, si nombras con la letra d la función distancia, esta función es cuadrática respecto del tiempo. En otras palabras, d está definida por:

$$d(t) = at^2 + bt + c.$$

Utilizando los datos de la tabla, encuentra el valor de a, b y c. Por ejemplo:

$$d(0) = a(0)^2 + b(0) + c = c.$$

Y como $d(0) = 0$, puedes concluir que $c = 0$.

Obtén dos ecuaciones más empleando el hecho de que $d(1) = 4{,}9$ y $d(2) = 19{,}6$. De esta manera podrás obtener los valores de a y b.

3. Usa la función d para determinar cuántos metros recorre un cuerpo en caída libre durante 6 segundos.

4. ¿Cuántos segundos se debe esperar para que el objeto recorra 60 metros?

5. En un experimento del laboratorio de Física de tu colegio, un grupo de tus compañeros obtuvieron los resultados consignados en las dos primeras columnas de la tabla. Calcula las primeras y segundas diferencias. ¿Crees que todos los datos han sido tomados adecuadamente?

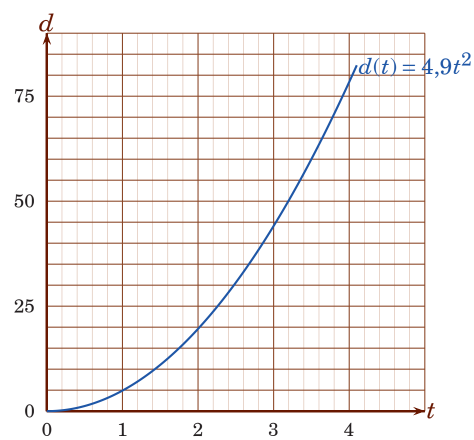
Tiempo	Distancia	Primeras diferencias	Segundas diferencias
0	0		
0.2	0.2		
0.4	0.78		
0.6	1.4		
0.8	3.13		
1	4.8		

En resumen, has encontrado que la función d, la distancia que recorre un objeto en caída libre en la Tierra (medida en metros) t segundos después de empezar a caer, está dada por

$$d(t) = 4{,}9t^2.$$

En general, si g es la aceleración de la gravedad de la Tierra, entonces la función de caída libre es:

$$d(t) = \frac{g}{2}t^2.$$



Ejemplo 12

Un objeto cae desde una altura de 100 m *en caída libre. Determina el momento en que el objeto llega al suelo.*

Solución. Nombra con la letra T el tiempo que tarda en caer los 100 metros. Entonces

$$d(T) = 100.$$

Por otro lado, sabemos que

$$d(T) = 4{,}9T^2.$$

Entonces, para encontrar T, debemos resolver la ecuación cuadrática:

$$4{,}9T^2 = 100.$$

En este caso, es fácil despejar T, pues:

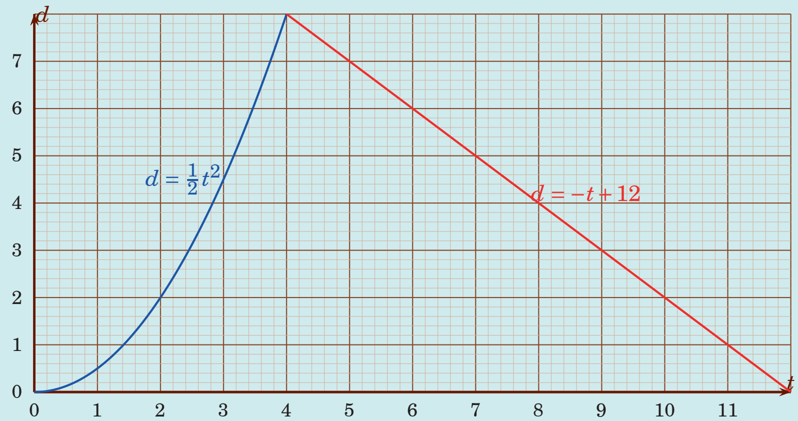
$$T^2 = \frac{100}{4{,}9} = 20{,}4.$$

De allí que $T = \sqrt{20{,}4} = 4{,}51$ o $T = -4{,}51$. Puesto que estamos buscando el tiempo, podemos desechar la segunda solución, ya que es un número negativo.

En conclusión, para recorrer 100 metros en caída libre, se requieren 20,4 segundos.

Ejemplo 13

La gráfica siguiente es la de una función de d que mide la distancia (en metros) que un objeto se desplaza en línea recta t segundos después de iniciado su movimiento. Describe en palabras el movimiento del objeto.



Solución. Primero, vamos a describir el movimiento del objeto cuando t está entre 0 y 4 segundos. En este caso:

1. Vemos una función cuadrática, de forma similar a la que describe un objeto en caída libre.
2. Si calculamos las segundas diferencias de la función d, definida por

$$d(t) = \frac{1}{2}t^2,$$

obtenemos:

Tiempo	Distancia	Primeras diferencias	Segundas diferencias
0	0		
1	1/2	1/2	
2	2	3/2	1
3	9/2	5/2	1
4	8	7/2	1

Podemos interpretar que el objeto se desplaza con aceleración constante igual a $1\ \text{m/s}^2$.

3. La velocidad aumentó desde $\frac{1}{2}$ m/s hasta $\frac{7}{2}$ m/s.
4. Puesto que la velocidad es positiva, la función de distancia es creciente y el objeto se aleja del punto de origen.
5. En $t = 4$ segundos, el objeto se encuentra a 8 metros de su posición inicial.

Ahora describamos el movimiento cuando t está entre 4 y 12 segundos:

1. La función que describe la posición del objeto está dada por $d(t) = -t + 12$. Si calcula-

mos sus primeras y segundas diferencias, obtenemos:

Tiempo (s)	Distancia (m)	Primeras diferencias (m)	Segundas diferencias (m)
4	8		
5	7	−1	
6	6	−1	0
7	5	−1	0
8	4	−1	0

A partir $t = 4$ segundos, la aceleración del objeto es $0\,\text{m/s}^2$ y su velocidad $-1\,\text{m/s}^2$.

2. Puesto que la velocidad es negativa, la distancia es decreciente; es decir, el objeto se acerca al origen. Llega al punto de partida en $t = 12\,\text{s}$.

En el ejemplo que acabamos de estudiar, vemos que la posición está descrita por dos expresiones algebraicas distintas, según el período de tiempo. Esta función es un ejemplo de una *función definida por partes*.

Funciones definidas por partes

Ejemplo 14

Grafica la función f, definida por $f(x) = |x| + 1$. A partir de la gráfica:

1. *Encuentra los intervalos dónde decrece y dónde crece.*
2. *Determina si la función es par o impar, y si tiene alguna simetría.*

Solución. Para realizar la gráfica de la función f, debemos considerar dos casos para los valores de x: cuando son positivos y cuando son negativos.

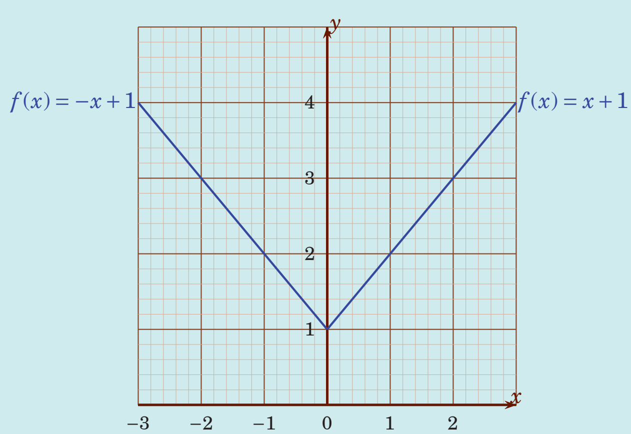
(a) Si x es positivo ($x \geq 0$), entonces $|x| = x$.

(b) Si x es negativo ($x \geq 0$), entonces $|x| = -x$.

Por lo tanto:

$$f(x) = |x| + 1 = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \geq 0, \\ -x + 1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Vemos que las dos expresiones algebraicas que definen f se representan gráficamente mediante rectas. Cada una debe ser dibujada en su dominio. Así, dibujamos la recta de ecuación $y = x + 1$ únicamente para $x \geq 0$; y la recta de ecuación $y = -x + 1$ solo para $x < 0$.



1. En la gráfica observamos que f es creciente cuando $x > 0$; es decir, cuando $x \in (0, +\infty)$,

y que f es decreciente cuando $x < 0$; es decir, cuando $x \in (-\infty, 0)$.

2. Observamos también que la gráfica de f es simétrica respecto al eje vertical, por lo que la función es par. A esta conclusión también podemos llegar verificando que $f(-x) = f(x)$ para todo x.

   En efecto:
$$f(-x) = |-x| + 1 = |x| + 1 = f(x).$$

Ejemplo 15

Gráfica la función f, definida por $f(x) = |x-1|$. Observa la gráfica.

1. *Encuentra los intervalos dónde f decrece y crece.*
2. *Determina si la función es par o impar, y si tiene alguna simetría.*

Solución. Para realizar la gráfica de f, analizamos dos casos para los valores de $|x|$, ya que sabemos que $|x-1| = x-1$ si $x-1 \geq 0$ y $|x-1| = -(x-1)$ si $x-1 < 0$. Y como

$$x-1 \geq 0 \quad \text{es lo mismo que} \quad x \geq 1$$

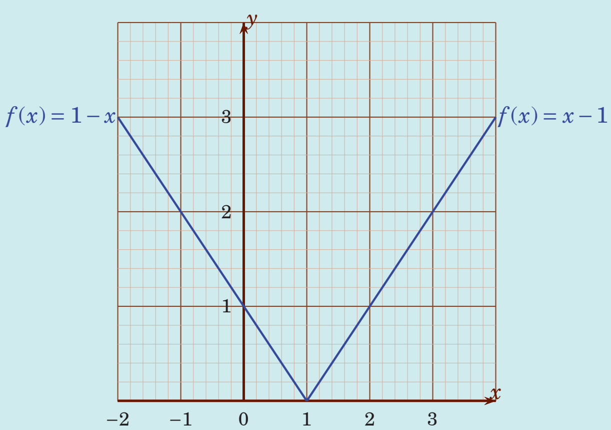
y

$$x-1 < 0 \quad \text{es lo mismo que} \quad x < 1,$$

tenemos que

$$f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq 1, \\ -x+1 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

Vemos que las dos expresiones algebraicas que definen f representan rectas. Dibujamos la recta de ecuación $y = x-1$ únicamente para $x \geq 1$ y la recta de ecuación $y = -x+1$ para $x < 1$.



1. En la gráfica observamos que f es creciente cuando $x > 1$ y que es decreciente cuando $x < 1$.
2. Vemos también que la gráfica no es simétrica respecto al eje y, y tampoco es simétrica respecto al origen. Por tanto, la función f no es par ni impar.

Ejemplo 16

Grafica la función f, definida por:

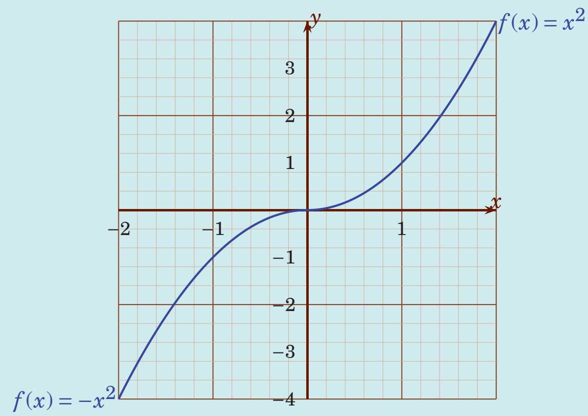
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \geq 0, \\ -x^2 & si\ x < 0. \end{cases}$$

Observa la gráfica.

1. *Encuentra los intervalos dónde decrece y crece la función f.*
2. *Determina si la función es par o impar, y si tiene alguna simetría.*

Solución.

1. Vemos que las dos expresiones algebraicas que definen f son ecuaciones de parábolas. La de ecuación $y = x^2$ deberá dibujarse únicamente para $x \geq 0$; la de ecuación $y = -x^2$ para $x < 0$.



   En la gráfica observamos que f es siempre creciente.

2. También observamos que la gráfica es simétrica respecto al origen. Por lo tanto, la función f es impar. Podemos comprobar esto verificando que

$$f(-x) = -f(x)$$

   para todo x.

   En efecto, si $x < 0$, entonces $-x > 0$; luego:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2;$$

   pero

$$f(x) = -x^2,$$

   de donde

$$x^2 = -f(x).$$

   Por lo tanto:

$$f(-x) = -f(x).$$

   Ahora, si $x \geq 0$, entonces $-x \leq 0$; luego:

$$f(-x) = -(-x)^2 = -x^2 = -f(x).$$

¡A practicar!

Grafica las funciones dadas. Describe las propiedades geométricas de la gráfica: crecimiento o decrecimiento y simetría.

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \geq 0 \\ x+1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 1 \\ -x^2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} -3x & \text{si } x \geq 2 \\ x-8 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

Ejercicios

Conceptos

1. Las primeras diferencias de una función son iguales a una constante diferente de cero y sus segundas diferencias son iguales a cero. ¿Es la función lineal o cuadrática?

2. Escribe un ejemplo de una función cuyas primeras diferencias sean iguales a una constante diferente de cero y sus segundas diferencias no sean cero.

3. Escribe un ejemplo de una función cuyas primeras diferencias sean iguales a una constante diferente de cero y sus segundas diferencias sean cero.

4. Escribe un ejemplo de una función cuyas primeras diferencias sean iguales a 3 y sus segundas diferencias sean cero.

5. Escribe un ejemplo de una función cuyas primeras diferencias sean iguales a -1 y sus segundas diferencias sean cero.

6. Una función par tiene una gráfica simétrica respecto a ____________.

7. Una función impar tiene una gráfica simétrica respecto a ____________.

8. Una parábola tiene un eje de simetría que pasa por ____________.

9. Grafica una función par.

10. Grafica una función impar.

11. Una de las dos siguientes funciones no está bien definida. Decide cuál de ellas es y escribe la justificación correspondiente.

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \geq 0, \\ -x+3 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0, \\ 4 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

12. Grafica una función que describa el siguiente movimiento: un objeto se deja caer en caída libre, luego de 3 segundos llega al piso y se detiene.

13. Grafica una función que describa el siguiente movimiento: un objeto se deja caer en caída libre, luego de 5 segundos cae en un medio que detiene su aceleración, y su velocidad se vuelve constante e igual a 3 m/s.

Procedimientos

1. Calcula las primeras y segundas diferencias de las funciones dadas. Describe con una frase completa qué propiedad cumplen las segundas diferencias en cada caso.

   (a) $f(x) = -2x + x^2$.

   (b) $f(x) = 3 + 5x^2$.

   (c) $g(z) = -1 + z + 3z^2$.

   (d) $h(t) = 1 - 2t + 3t^2$.

   (e) $m(s) = s - 7s^2$.

   (f) $r(t) = 3t - 2t^2$.

   (g) $s(x) = 0{,}1x^2 - 0{,}2x + 1$.

2. Dada la función f, definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } x \geq -1, \\ -2x + 3 & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

   Calcula $f(-2)$, $\left(-\frac{3}{2}\right)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(0)$, $f(1)$.

3. Dada la función g, definida por

$$g(t) = \begin{cases} t^2 - 3 & \text{si } t \geq -1, \\ 2t + 2 & \text{si } t < -1. \end{cases}$$

   Calcula $g(-2)$, $g\left(-\frac{3}{2}\right)$, $g(-1)$, $g\left(\frac{1}{2}\right)$, $g(0)$, $g(1)$.

4. Dada la función h, definida por $h(x) = |-5x + 4|$. Calcula $h(-5)$, $h(5)$, $h\left(-\frac{3}{2}\right)$, $h\left(\frac{3}{2}\right)$, $h\left(-\frac{1}{2}\right)$, $h\left(\frac{1}{2}\right)$, $h(-2)$, $h(2)$.

5. Para cada caso, la función f está definida por las expresiones algebraicas dadas. Determina el eje de simetría de la función, si la función es par, impar o ninguna. Completa el cuadrado cuando sea necesario.

   (a) $-(x-2)^2 - 5$.

   (b) $2(x-1)^2 - 9$.

   (c) $\frac{1}{2}(x+5)^2 - \frac{4}{3}$.

   (d) $-2(x - 2/3)^2 + \frac{1}{2}$.

   (e) $x^2 + 2x + 1$.

   (f) $x^2 - 4x + 4$.

   (g) $x^2 - 7x + 3$.

   (h) $3x^2 - 2x + 1$.

6. Grafica de manera aproximada las siguientes funciones:

   (a) $x \longmapsto \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } x \geq -1, \\ -2x + 3 & \text{si } x < -1. \end{cases}$

   (b) $x \longmapsto \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \geq 0, \\ 2x + 1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

(c) $x \longmapsto \begin{cases} -x^2+1 & \text{si } x \geq 0, \\ x^2-1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

(d) $x \longmapsto \begin{cases} -x^2+1 & \text{si } x \geq -2, \\ x^2-1 & \text{si } x < -2. \end{cases}$

(e) $x \longmapsto |x|-3$.

(f) $x \longmapsto 2|x|-3$.

(g) $x \longmapsto -|x|+3$.

(h) $x \longmapsto |-2x+1|$.

(i) $x \longmapsto |2x-5|$.

(j) $x \longmapsto |2x-5|-4$.

(k) $x \longmapsto |3x+2|$.

(l) $x \longmapsto |3x+2|-1$.

7. Para cada una de las funciones del ejercicio anterior, determina los intervalos donde la función crece o decrece, y si tiene un eje de simetría o es simétrica respecto al origen.

8. Para cada una de las funciones dadas en el ejercicio 6, calcula sus ceros.

Pensamiento crítico

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones con dos métodos distintos: uno algebraico y otro gráfico.

1. $x^2 = |x|$.

2. $-x^2 = |x|+1$.

3. $|x| = -|x|+1$.

4. $-|x| = |x|-3$.

5. La función f, definida por $f(x) = |x|+c$, tiene dos ceros. Encuentra los posibles valores de c.

6. La función g, definida por $g(x) = |x|+c$, no tiene ceros. Halla los posibles valores de c.

7. La función h, definida por $h(x) = |3x-c|$, es tal que $h(0) = 4$. Determina los posibles valores de c.

8. La función f, definida por $f(x) = |-x+c|$, hace corresponder el 6 al 0. Calcula los posible valores de c.

9. La función g, definida por $g(x) = x^2 - ax$, es par; determina el valor de a.

10. La función h, definida por $h(x) = ax+b$, es impar; encuentra el valor de b.

Modelos

1. Halla una función cuadrática f de manera que $f(0)=1,\ f(1)=3,\ f(2)=-3$.

2. Encuentra una función cuadrática g de manera que $g(0)=-1,\ g(1)=3,\ g(2)=6$.

3. Un objeto se dejó caer en caída libre por el lapso de 1,5 segundos; ¿qué distancia recorrió?

4. Un objeto se dejó caer en caída libre por el lapso de 3,5 segundos; ¿qué distancia recorrió?

5. Un objeto se dejó caer a la superficie de la Luna por el lapso de 1,5 segundos; ¿qué distancia recorrió?

6. Un objeto se dejó caer a la superficie de Marte por el lapso de 1,5 segundos; ¿qué distancia recorrió?

7. **Modelo cuadrático de ingresos**. En Economía, con frecuencia se utilizan modelos cuadráticos para representar cantidades económicas; con ello se puede predecir el comportamiento futuro de sectores de la economía. En este problema aprenderás a modelar una función cuadrática de ingresos.

   El *ingreso* en economía se entiende como la cantidad total de dinero que se obtiene al vender un número de unidades de un artículo. El vendedor quiere maximizar su ingreso.

- **Construcción del modelo**

  (a) La fábrica Metalmec de sillas de oficina vende 100 unidades de un tipo a 25 dólares cada unidad, ¿cuál es el ingreso total por la venta de las sillas?

  (b) La fábrica vende 100 unidades en p dólares cada unidad. Expresa la función de ingreso $I(p)$ en términos del precio por unidad.

  (c) Evalúa $I(p)$ en $p=25$. Tu respuesta debe coincidir con la que encontraste en el literal (a).

  (d) Una ley económica indica que *a mayor precio, menor demanda*. Ofrece ejemplos que conozcas donde se pueda comprobar esta ley.

  (e) Puesto que la demanda depende del precio, el número de sillas que puede vender la fábrica es una función del precio. Razona: ¿la función de la demanda es una función creciente o decreciente?

  (f) El modelo más sencillo de demanda es una función lineal. Para el caso de nuestra fábrica, se sabe que el número de sillas que se vende está dado por la función de demanda lineal D, definida por:

  $$D(p)=300-p.$$

  ¿Cuál es el dominio de la función D? Recuerda que no tiene sentido en este caso que se vendan -10 sillas.

  (g) Ahora escribe la función de ingreso $I(p)$ como una función cuadrática, sabiendo que el ingreso es igual al precio por la demanda. Utiliza la función de demanda dada en el ítem anterior.

- **Análisis del modelo**

  (h) Grafica la función de ingreso cuadrática.

(i) Encuentra dónde la función de ingreso adquiere su punto extremo; ¿es este punto un máximo o un mínimo?

(j) Determina dónde la función de ingreso es creciente y dónde es decreciente.

(k) Encuentra los ceros de la función cuadrática.

- **Interpretación del modelo**

(l) Ahora interpreta lo que obtuviste en el análisis del modelo. Responde en frases completas las siguientes preguntas:

i. ¿Cuál debe ser el precio por silla para que la fábrica obtenga un ingreso máximo?

ii. ¿Cuál es el precio por silla para el cual la fábrica no tiene ingreso?

iii. ¿Para qué rango de precios, si el precio aumenta el ingreso aumenta?

iv. ¿Para qué rango de precios, si el precio aumenta el ingreso disminuye?

- **Extensión del modelo**

(m) Un almacén de computadoras portátiles vende 20 unidades al mes, a un precio de 350 dólares por cada unidad. Si por cada 10 dólares que se aumenta al precio unitario, se vende una computadora menos, ¿a qué precio deberían venderse las computadoras para obtener el ingreso máximo? Observa que puedes obtener la función de demanda $D(p) = ap + b$, puesto que conoces la razón de cambio de la función y uno de sus valores.

8. **Modelo de optimización de una siembra**. En la industria agropecuaria se deben investigar maneras de optimizar las cosechas. Por ejemplo: si se plantan demasiados árboles en un terreno, estos no tendrán los suficientes nutrientes ni luz solar para crecer con todo su potencial. El siguiente problema es un modelo de una situación hipotética sencilla.

- **Construcción del modelo**

(a) La cooperativa agrícola *La Abundancia* utiliza una parcela de terreno para plantar árboles de naranjas. Si cada árbol produce al año un promedio de 50 naranjas y hay 100 árboles, ¿cuántas naranjas se cosechan?

(b) La cooperativa siembra s número de árboles. Expresa la función cosecha C en términos del número s de árboles en el terreno.

(c) Evalúa $C(s)$ en $s = 50$. Tu respuesta debe coincidir con lo que encontraste en la primera pregunta.

(d) La cantidad de naranjas que produce cada árbol depende de los nutrientes que pueda obtener; si hay demasiados árboles, se producirán menos naranjas. Describe otros ejemplos a través de los cuales se pueda observar este hecho.

(e) Puesto que la producción depende del número de árboles, el número de naranjas que se cosecha es una función del número de árboles. Razona: ¿es la función de cosecha una creciente o decreciente?

(f) Un modelo sencillo de la cantidad de naranjas que produce cada árbol está dada por la función N, definida por $N(s) = 80 - 2s$. ¿Cuál es el dominio de la función de demanda? Recuerda que no tiene sentido en este caso que se coseche un número de naranjas negativo.

(g) Ahora escribe la función de C como una función cuadrática, sabiendo que la cosecha es igual al número de árboles por el número de naranjas por árbol. Utiliza la función N dada en el ítem anterior.

- **Análisis del modelo**

  (h) Grafica la función cuadrática C.

  (i) Encuentra dónde la función C adquiere su punto extremo; ¿es este punto máximo o mínimo?

  (j) Analiza dónde la función de la cosecha es creciente y dónde es decreciente.

  (k) Encuentra los ceros de la función C.

- **Interpretación del modelo**. Ahora interpreta lo que obtuviste en el análisis del modelo. Responde con frases completas las siguientes preguntas:

  (l) ¿Cuál debe ser el número de árboles que se tienen sembrar para que la cooperativa obtenga la mejor cosecha?

  (m) ¿Hay algún número de árboles para los cuáles no hay cosecha alguna?

  (n) ¿Para qué rango del número de árboles, si se aumenta un árbol la cosecha aumenta?

  (o) ¿Para qué rango del número de árboles, si se aumenta un árbol la cosecha disminuye?

- **Extensión del modelo**

  (p) Un agricultor, al experimentar con una cosecha, observa que en una parcela, que tiene 150 plantas de tomate de árbol, cada árbol da 60 tomates. En otra parcela de mismo tamaño, con 120 plantas, cada una produce 65 tomates. ¿Cuántas plantas debe tener la parcela para obtener la cosecha de mayor número de tomates posible?

Uso de tecnología

Si tienes una calculadora gráfica, una computadora con una aplicación que te permita graficar o acceso a una aplicación en Internet, realiza los siguientes ejercicios.

1. Obtén la gráfica de dos funciones de manera que puedas resolver la ecuación: $|0{,}8x-0{,}3| = |-0{,}1x+0{,}2|+2{,}5$.

2. Realiza la gráfica de dos funciones de modo que puedas mostrar que para todo x, $|x|^2 = |x^2|$.

3. El punto mínimo de la función f, definida por $f(x) = |x|$, se encuentra el punto $(0,0)$. Grafica cada una de las funciones y describe en términos de traslaciones horizontales y verticales cuál es la relación de la función f con la función g dada; ¿dónde se encuentra el mínimo de la función g?

   (a) $g(x) = |x-4|$.

   (b) $f(x) = |x+3|$.

   (c) $f(x) = |x|+5$.

   (d) $f(x) = |x|-7$.

   (e) $f(x) = |x-3|+6$.