MATEMÁTICA 10

De acuerdo al nuevo currículo de la Educación General Básica

TEXTO PARA
ESTUDIANTES

PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA
Rafael Correa Delgado

MINISTRO DE EDUCACIÓN
Augusto Espinosa Andrade

VICEMINISTRO DE EDUCACIÓN
Freddy Peñafiel Larrea

VICEMINISTRO DE GESTIÓN EDUCATIVA
Jaime Roca Gutiérrez

SUBSECRETARIA DE FUNDAMENTOS EDUCATIVOS
Paulina Dueñas Montero

DIRECTORA NACIONAL DE CURRÍCULO (E)
Isabel Ramos Castañeda

GRUPO EDEBÉ
Proyecto: Matemáticas 1,2,3 y 4
Educación Secundaria Obligatoria

DIRECCIÓN GENERAL
Antonio Garrido González

DIRECCIÓN EDITORIAL
José Luis Gómez Cutillas

DIRECCIÓN DE EDICIÓN
DE EDUCACIÓN SECUNDARIA
José Francisco Vílchez Román

DIRECCIÓN PEDAGÓGICA
Santiago Centelles Cervera

DIRECCIÓN DE PRODUCCIÓN
Juan López Navarro

EQUIPO DE EDICIÓN GRUPO EDEBÉ
© Grupo edebé, 2008
Paseo San Juan Bosco, 62
08017 Barcelona
www.edebe.com
En alianza con
EDITORIAL DON BOSCO
OBRAS SALESIANAS DE COMUNICACIÓN

GERENTE GENERAL
Marcelo Mejía Morales

DIRECCIÓN EDITORIAL
María Alexandra Prócel Alarcón

ADAPTACIÓN Y EDICIÓN DE CONTENIDOS
Equipo Editorial Don Bosco
Humberto Buitrón A.

CREACIÓN DE CONTENIDOS NUEVOS
Marcia Peña Andrade
Saúl Serrano Aguirre
Lorena Valladares Perugachi

REVISIÓN DE ESTILO
Hernán Hermosa Mantilla
Isabel Luna Riofrío
Pablo Larreátegui Plaza

COORDINACIÓN GRÁFICA
Y REDIAGRAMACIÓN EDITORIAL
Pamela Cueva Villavicencio

DIAGRAMACIÓN DE PÁGINAS NUEVAS
Susana Zurita Becerra
Franklin Ramírez Torres
Patricio Llivicura Piedra
Freddy López Canelos
Erika Delgado Chávez
Sofía Vergara Anda

ILUSTRACIÓN DE PORTADA
Eduardo Delgado Padilla
Darwin Parra Ojeda

MINISTERIO DE EDUCACIÓN DEL ECUADOR
Primera edición, febrero 2011
Séptima reimpresión febrero 2014
Quito – Ecuador
Impreso por: EL TELÉGRAFO

IMPORTANTE

El uso de un lenguaje que no discrimine ni reproduzca esquemas discriminatorios entre hombres y mujeres es una de las preocupaciones de nuestra Organización. Sin embargo, no hay acuerdo entre los lingüistas acerca de la manera de hacerlo en español.
En tal sentido y para evitar la sobre carga gráfica que supondría utilizar en español o/a; los/las y otras formas sensibles al género con el fin de marcar la presencia de ambos sexos, hemos optado por usar la forma masculina en su tradicional acepción genérica, en el entendido que es de utilidad para hacer referencia tanto hombres y mujeres sin evitar la potencial ambigüedad que se derivaría de la opción de usar cualesquiera de las formas de modo genérico.

Tomado de UNESCO, Situación educativa de América Latina y El Caribe: Garantizando la educación de calidad para todos. UNESCO. Santiago de Chile, agosto 2008.

Vamos a compartir el conocimiento, los colores, las palabras.

El Ecuador ha sido, según el poeta Jorge Enrique Adoum, "un país irreal limitado por sí mismo, partido por una línea imaginaria", y es tarea de todos convertirlo en un país real que no tenga límites.

Con este horizonte, el Ministerio de Educación realizó la Actualización y Fortalecimiento del Currículo de la Educación General Básica que busca que las generaciones venideras aprendan de mejor manera a relacionarse con los demás seres humanos y con su entorno y, sobre todo, a soñar con la patria que vive dentro de nuestros sueños y de nuestros corazones.

Los jóvenes de octavo a décimo años van a recibir un libro de texto que les permitirá desarrollar sus habilidades.

Estos libros tienen un acompañante para los docentes. Es una guía didáctica que presenta alternativas y herramientas didácticas que enriquecen el proceso de enseñanza-aprendizaje.

El Ecuador debe convertirse en un país que mire de pie hacia el futuro y eso solo será posible si la educación nos permite ser mejores ciudadanos. Es una inmensa tarea en la que todos debemos estar comprometidos, para que el "Buen Vivir" sea una práctica cotidiana.

Ministerio de Educación

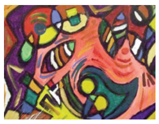
2014

Conoce **tu libro**

Los contenidos que vas a aprender se organizan en seis módulos que están trabajados de manera integrada a partir de los siguientes bloques:

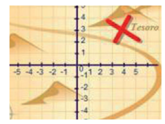
Numérico

Geométrico



Medida

Relaciones y funciones



Estadística y probabilidad

Estructura de los módulos

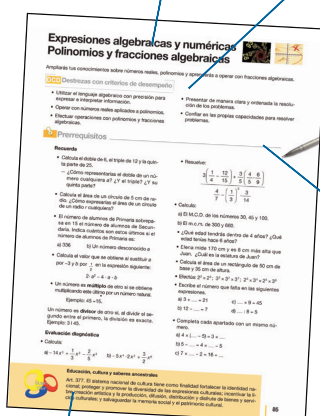
Páginas iniciales

Buen Vivir

Eje transversal valorativo que acompaña a los contenidos y permite una formación integral.

Una imagen y una **actividad inicial** nos muestran la presencia de las matemáticas en nuestro entorno y la relación entre los bloques matemáticos.

Conocimientos que se trabajarán dentro del módulo.



Destrezas con criterios de desempeño

Se muestra un listado de las destrezas con criterios de desempeño que se desarrollarán en el módulo.

Prerrequisitos

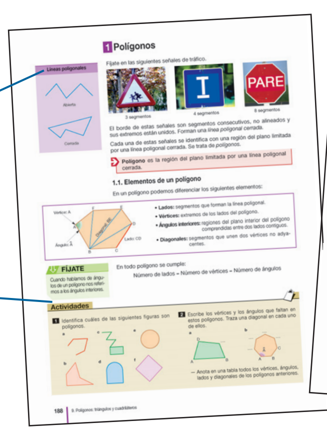
Definiciones, ejemplos y actividades para recordar los conocimientos previos necesarios para el aprendizaje.

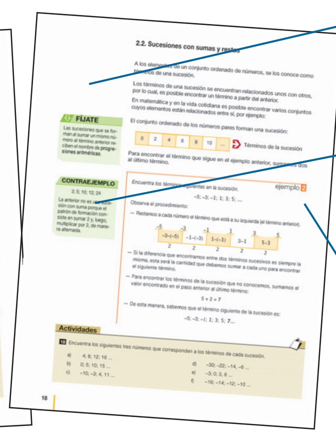
Buen Vivir

Enunciación del artículo de la Constitución de la República del Ecuador, relacionado con el proyecto del Buen Vivir.

Desarrollo

Los conocimientos se organizan en apartados y subapartados.





Actividades

Al finalizar el desarrollo de un conocimiento, se proponen ejercicios a pie de página para afianzarlo.

En los márgenes se incluyen explicaciones complementarias.

Contraejemplo

Ejemplos que no cumplen con los conocimientos estudiados.

Ejemplos

En muchos casos, el desarrollo de los conocimientos finaliza con uno o varios ejemplos para facilitar el aprendizaje.

Algunas actividades llevan un icono cuyo significado es el siguiente:

Macrodestrezas matemáticas

- Comprensión de conceptos y conocimiento de procesos
- Aplicación en la práctica
- Refuerzo de macrodestrezas

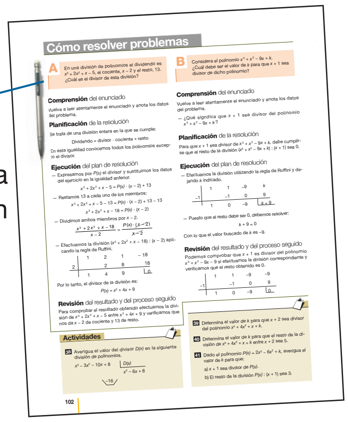
Herramientas y ejes transversales

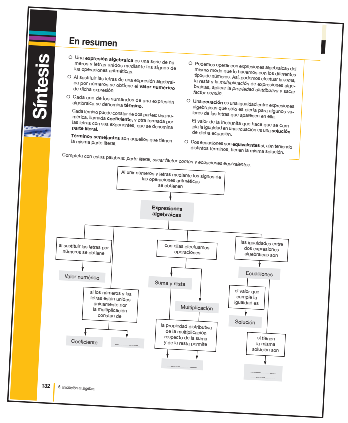
- Cálculo mental
- Uso de la calculadora
- Uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación
- Trabajo en grupo
- Buen Vivir

Páginas finales

Cómo resolver problemas

En cada módulo se trabaja una estrategia de resolución de problemas distinta.



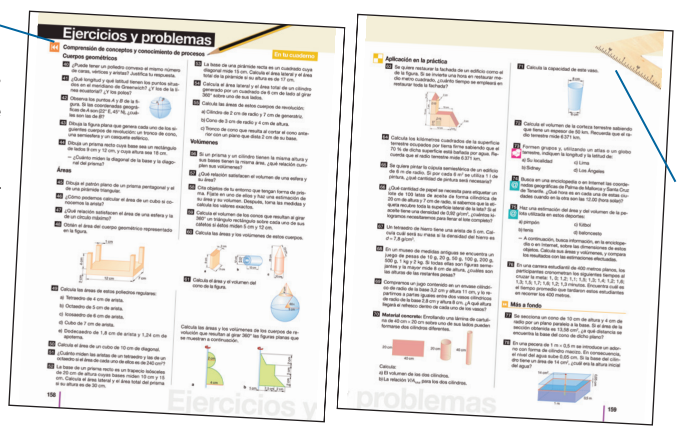


En resumen

Síntesis de las ideas clave del módulo y esquema que muestra la relación de los conocimientos en los bloques matemáticos.

Ejercicios y problemas

Cuestiones, ejercicios y problemas para consolidar la comprensión de conceptos, conocimiento de procesos y aplicación en la práctica de lo que has aprendido.



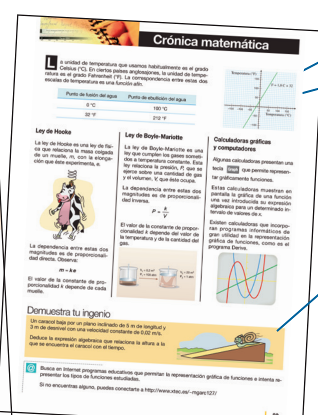
En la sección ***Más a fondo*** proponemos actividades de mayor dificultad para profundizar las macrodestrezas.

Autoevaluación y coevaluación

Permite comprobar los conocimientos, a través de actividades con indicadores esenciales de evaluación.

Buen Vivir

Profundización de los ejes transversales para una formación integral.



Crónica matemática

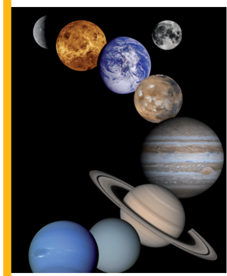
Con noticias, curiosidades... del tema trabajado.

Demuestra tu ingenio

Resolución de problemas a través de diversas estrategias creativas.

Índice

Módulo 4: Ángulos notables. Razones trigonométricas



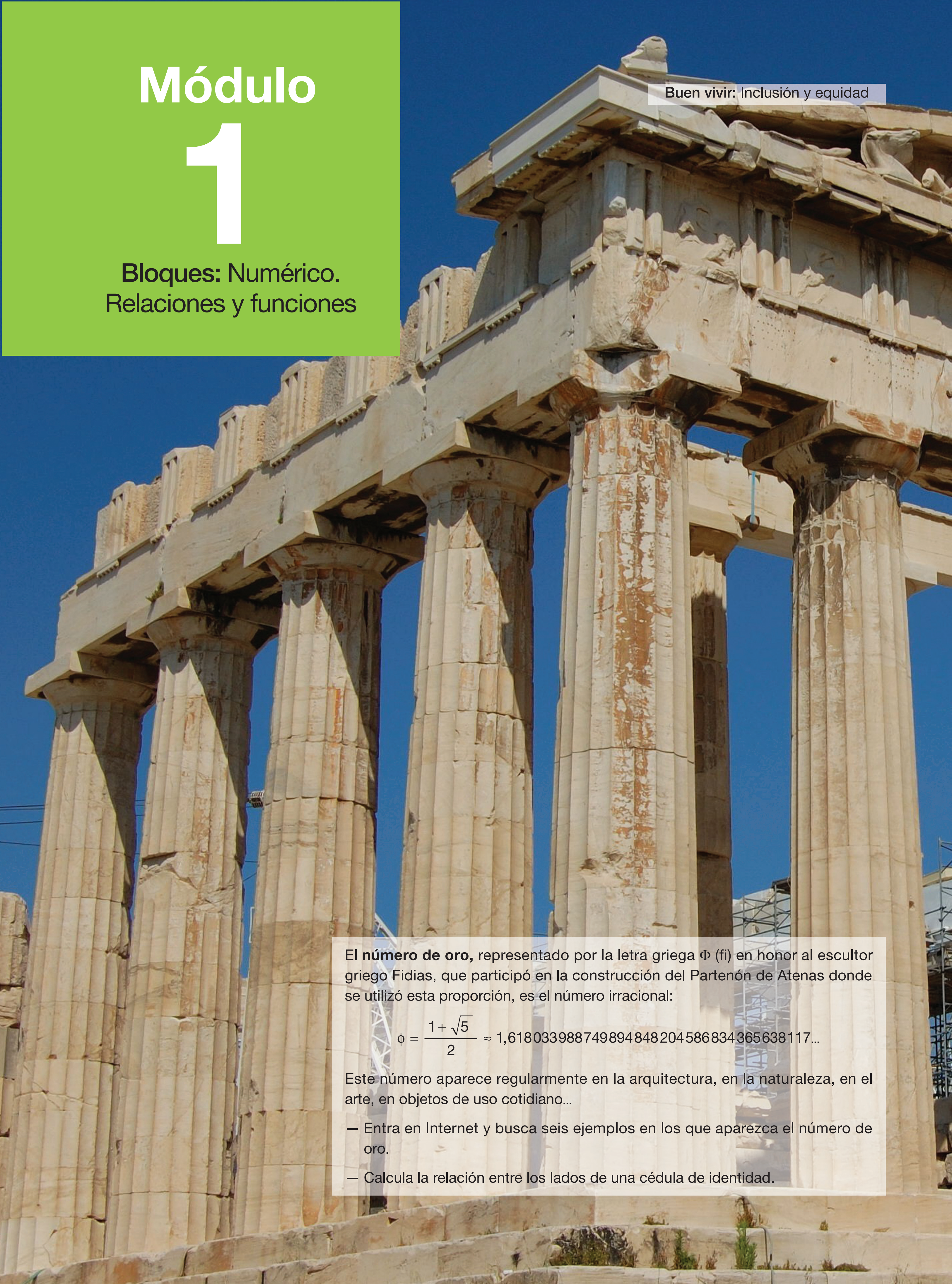
Módulo 5: Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos. Media aritmética

Módulo 6: Probabilidad. Conversiones entre unidades del Sistema Internacional

Módulo 1

Bloques: Numérico.
Relaciones y funciones

Buen vivir: Inclusión y equidad



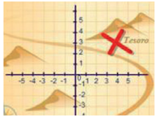
El **número de oro,** representado por la letra griega Φ (fi) en honor al escultor griego Fidias, que participó en la construcción del Partenón de Atenas donde se utilizó esta proporción, es el número irracional:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618\,033\,988\,749\,894\,848\,204\,586\,834\,365\,638\,117\ldots$$

Este número aparece regularmente en la arquitectura, en la naturaleza, en el arte, en objetos de uso cotidiano…

— Entra en Internet y busca seis ejemplos en los que aparezca el número de oro.

— Calcula la relación entre los lados de una cédula de identidad.

Números reales
Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

En este módulo aprenderás a *relacionar* los números racionales y los números irracionales con los reales, a *operar* y aproximar con los números reales y a *determinar* el error cometido. Consolidarás los procedimientos de cálculo con potencias y radicales. También *resolverás* sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

DCD Destrezas con criterios de desempeño

- Resolver operaciones combinadas de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciantión y radicación con números reales .
- Racionalizar expresiones numéricas.
- Evaluar y simplificar potencias de números enteros con exponentes fraccionarios.
- Simplificar expresiones de números reales con exponentes fraccionarios con la aplicación de las reglas de potenciación y radicación.
- Utilizar las estrategias y las herramientas matemáticas adecuadas para resolver problemas mostrando seguridad y confianza en sus capacidades.
- Calcular el error cometido en operaciones con aproximaciones de números reales.
- Representar y resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, con gráficos y algebraicamente.

Prerrequisitos

Recuerda

- Los **números racionales** se forman por fracciones entre enteros, cuya forma es $\frac{a}{b}$, con denominador diferente de cero.
- Los números irracionales tienen una expresión decimal ilimitada y no periódica.
- La unión de los conjuntos de los números racionales y los números irracionales determina el conjunto de los **números reales**, y se denota por ℝ.
- La **potencia** cuya base es un número racional "a" y de exponente un número natural *"n"* es la multiplicación de la base por sí misma tantas veces como indique el exponente. La definición también se aplica a los números reales.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ - veces}}$$

- La **raíz cuadrada** de un número *"b"* positivo o cero es otro número positivo o cero *"a"*, tal que elevado al cuadrado, nos da *"b"*.

$\sqrt{b} = a$ si $a^2 = b$

El símbolo " $\sqrt{}$ " es el radical, *"b"* es el radicando (o cantidad subradical) y *"a"* es la raíz.

- A cada punto de la recta numérica le corresponde un número real y cada número real le corresponde un punto de la recta numérica.
- En el sistema de coordenadas cartesianas, a cada punto del plano le corresponde un par de números (par ordenado), denominados coordenadas, y viceversa.

Evaluación diagnóstica

- Clasifica los siguientes números, en racionales e irracionales.

$$-\sqrt{11};\ \frac{-2}{5};\ \frac{\pi}{3};\ -1,25;$$
$$1-\sqrt{2};\ 6,34;\ -1,202002\ldots$$

- Resuelve:

$$-5+\frac{4}{5}\left[\frac{-1}{4}-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\right]-\frac{5}{3}\left(\frac{7}{\sqrt{8}}\div\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

- Calcula: $2x + 3x - 7x;\ \frac{17b.b^3}{5b}$
- Calcula: $\sqrt{\frac{16}{25}\cdot\frac{49}{81}\cdot\frac{121}{4}}$
- ¿A qué potencia debes elevar 13 para obtener como resultado 169?
- Ubica en la recta numérica los siguientes números: $3;\ -\sqrt{2};\ \frac{-2}{5};\ \sqrt{8}$
- Ubica en el sistema de coordenadas cartesianas e indica en que cuadrante están situados: (–3, 5); (2, –1); (2, 3); (–4, –1); (0, 5); (–3, 0)
- Expresa en lenguaje algebraico: *"El doble de la edad de Juan hace 3 años es la mitad de la edad que tendrá dentro de 6 años"*

Inclusión y equidad

Art. 340. El sistema nacional de inclusión y equidad social es el conjunto articulado y coordinado de sistemas, instituciones y servicios que aseguran el ejercicio, garantía y exigibilidad de los derechos reconocidos en la Constitución y el cumplimiento de los objetivos del régimen de desarrollo.

Constitución de la República del Ecuador, 2008.

MUCHO OJO

- Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son **equivalentes** si se verifica:
  $a \cdot d = b \cdot c$
- Una fracción $\frac{m}{n}$ es **irreducible** si su numerador y su denominador son números primos entre sí; es decir:
  M.C.D. $(m, n) = 1$
- Cada número racional está formado por una fracción y todas sus equivalentes.
- Cada una de estas fracciones es un **representante** del número racional.
- La fracción irreducible de denominador positivo es el **representante canónico** de dicho número.

1 De los naturales a los reales

1.1. Los conjuntos ℕ, ℤ y ℚ

Como ya has estudiado, los números naturales surgen de la necesidad de contar u ordenar. Así, por ejemplo, los números 0, 1, 2, 3… son números naturales. El conjunto de todos los números naturales se simboliza mediante la letra ℕ.

Existen muchas situaciones de la vida cotidiana que no pueden expresarse mediante números naturales como, por ejemplo, la temperatura ambiente, –2 °C, 0 °C, +25 °C… Por ello, surge la necesidad de ampliar el conjunto de los números naturales con un nuevo conjunto numérico, el de los números enteros, que representamos con la letra ℤ.

Pero este nuevo conjunto de números no nos sirve para representar situaciones como andar *la mitad de un camino,* que se representa mediante el número $\frac{1}{2}$.

Por eso, se introduce un nuevo conjunto de números, los números racionales, que se representan con la letra ℚ. Además, este conjunto coincide con el conjunto de los números decimales limitados o ilimitados y periódicos. Esto es así porque:

- Todo número racional puede expresarse como un número decimal limitado o un número decimal ilimitado y periódico.
- Y al revés, todo número decimal limitado y decimal ilimitado y periódico tiene una fracción generatriz asociada.

Fíjate en estos ejemplos:

<table>
<tr><th colspan="3">Expresión decimal de un número racional $\frac{a}{b}$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">El resto de la división $a \div b$ es 0 después de extraer una o varias cifras decimales: número decimal limitado.
$\begin{array}{r|l} 3 & 4 \\ \hline & 0, \end{array}$
$\begin{array}{l|l} 30 & 4 \\ \hline 20 & 0{,}75 \\ 0 & \end{array}$</td><td colspan="2">El resto de la división $a \div b$ nunca es 0, por muchos decimales que extraigamos: número decimal ilimitado y periódico.
$\begin{array}{l|l} 16 & 11 \\ \hline 50 & 1{,}4545\ldots \\ 60 & \\ 50 & \\ 60 & \\ 5 & \end{array}$ $\begin{array}{l|l} 17 & 6 \\ \hline 50 & 2{,}833\ldots \\ 20 & \\ 20 & \\ 2 & \end{array}$</td></tr>
<tr><td>El período comienza inmediatamente después de la coma: número decimal ilimitado periódico puro.
$1{,}4545\ldots \rightarrow 1{,}\widehat{45}$</td><td>El período no comienza inmediatamente después de la coma: número decimal ilimitado periódico mixto.
$2{,}8333\ldots \rightarrow 2{,}8\widehat{3}$</td></tr>
<tr><th colspan="3">Fracción generatriz de un número decimal</th></tr>
<tr><td>$x = 0{,}75$
$100\,x = 75$
$x = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$</td><td>$x = 1{,}\widehat{45}$
$100\,x = 145{,}45$
$-\;x = 1{,}45$
$99\,x = 144$
$x = \frac{144}{99} = \frac{16}{11}$</td><td>$x = 2{,}8\widehat{3}$
$100\,x = 283{,}33$
$-10\,x = 28{,}33$
$90\,x = 255$
$x = \frac{255}{90} = \frac{17}{6}$</td></tr>
</table>

1.2. Los números irracionales

Hemos visto que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales coincide con el de los números decimales limitados o ilimitados y periódicos.

$$\mathbb{Q} = \{\text{números racionales}\} = \left\{\begin{array}{c}\text{números decimales limitados}\\ \text{o ilimitados y periódicos}\end{array}\right\}$$

Observa ahora el siguiente número decimal:

$$0{,}101\,001\,000\,100\,001\,000\,001\,000\,0001\ldots$$

Como puedes comprobar es un número decimal ilimitado no periódico, por lo tanto, no es un número racional. Hemos obtenido un nuevo tipo de número. Decimos que este número es *irracional.*

Un número es **irracional** si es un número decimal ilimitado no periódico. El conjunto de números irracionales se designa con la letra $\mathbb{Q}'$ o $\mathbb{I}$.

Números irracionales destacados

— Cualquier raíz cuadrada no entera.

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{8} \ldots$$

— El resultado de sumar, restar, multiplicar o dividir un número irracional con números racionales.

$$5 + \sqrt{3} \qquad \frac{6 - \sqrt{2}}{8} \qquad 2\sqrt{2} \qquad \frac{1 - 2\sqrt{2}}{6}$$

— El número $\pi = 3{,}141\,592\,653\ldots$, el cual no pudo demostrarse que era irracional hasta el siglo XVIII.

Actividades

1 En tu cuaderno, relaciona con flechas cada número de la izquierda con el término que le corresponde de la derecha.

$-\frac{1}{2}$	entero
5	racional
-56	irracional
$\sqrt{10}$	natural

2 Expresa cada enunciado con un número.

a) La tercera planta del sótano.

b) He recorrido las tres cuartas partes del camino.

c) El perímetro de una circunferencia cuyo radio mide 3 cm.

3 Indica si los siguientes enunciados son ciertos. En caso de que no lo sean, escribe un ejemplo que lo contradiga.

a) Si restamos dos números naturales, obtenemos un número natural.

b) Si dividimos dos números enteros, obtenemos un número entero.

c) Si restamos dos números racionales, obtenemos un número racional.

d) Si multiplicamos dos números irracionales, obtenemos un número irracional.

e) Los números naturales también son enteros.

f) Los números enteros también son racionales.

g) Los números racionales también son irracionales.

Comprobemos que la raíz cuadrada de 2 es irracional

¿El número $\sqrt{2}$ es irracional?

Comprobemos:

- Supóngase que el número $\sqrt{2}$ no es irracional, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$'.
- Entonces el número $\sqrt{2}$ es racional , $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$
- Por tanto, el número $\sqrt{2}$ es una fracción $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, tomaremos a la fracción irreductible.
- a y b son primos entre sí, m.c.m $\{a,b\} = 1$.
- $(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$; entonces: $2 = \frac{a^2}{b^2}$
- $2b^2 = a^2$; entonces a^2 es par pues $2b^2$ es par.
- Si $\boldsymbol{a^2}$ es par, entonces su raiz $\boldsymbol{a}$ también es par.
- La forma de un número par es: a = $2n$, donde $n \in \mathbb{Z}$.
- Por tanto: $2b^2 = a^2 = (2n)^2 = 4n^2$.
- Concluimos que: $b^2 = 2n^2$; lo cual nos indica que b^2 es par, pues $2n^2$ es par.
- Las conclusiones de que a y b son pares, contradice la toma de la fracción irreductible equivalente a $\sqrt{2}$.
- Una vez comprobado que no existe la fracción, sabemos que el número $\sqrt{2}$ no es racional, debemos concluir que es irracional.

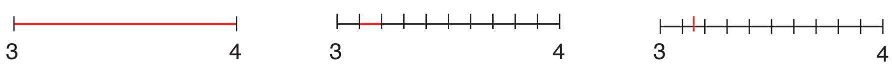
- Las conclusiones de que a y b son pares, contradice la toma de la fracción irreductible equivalente a $\sqrt{2}$.
- Una vez comprobado que no existe la fracción, sabemos que el número $\sqrt{2}$ no es racional, debemos concluir que es irracional.

El método utilizado para demostrar, se conoce como **reducción al absurdo**, éste método inicia al suponer que, lo que se demostrará es falso, la tarea es encontrar una contradicción durante el proceso de la demostración, si descubrimos la contradicción diremos categóricamente que lo que se quiere probar es verdadero.

Los números irracionales se pueden representar gráficamente sobre una recta numérica de forma aproximada y de forma geométrica.

Representación aproximada

Todo número irracional, por ejemplo π=3,1415… , se puede representar gráficamente sobre una recta numérica como se observa a continuación:

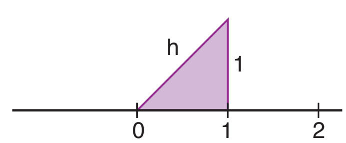


$3 < \pi < 4$ $\quad$ $3{,}1 < \pi < 3{,}2$ $\quad$ $3{,}14 < \pi < 3{,}15$

Representación geométrica

Algunos números irracionales pueden representarse sobre una recta numérica de manera exacta, por ejemplo los números que son raíces cuadradas de los naturales que no son cuadrados perfectos.

Representación de $\sqrt{2}$



— Trazamos una recta y marcamos en ella los puntos 0, 1 y 2. De esta manera tenemos el origen y los dos números enteros entre los que se sitúa $\sqrt{2}$.

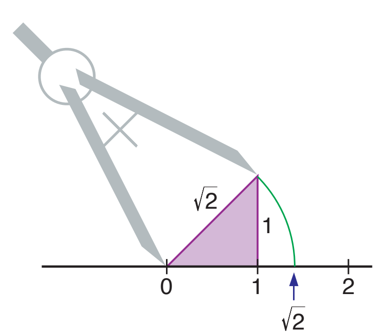
$$1 < 1{,}4... < 2$$

— Levantamos sobre el punto 1 un segmento perpendicular de una unidad de longitud.

— Unimos el extremo superior de este segmento con el origen.

Así formamos un triángulo rectángulo cuyos catetos miden una unidad cada uno y cuya hipotenusa mide:

$$h^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow h = \sqrt{2}$$



— Trasladamos el segmento h sobre la recta con un compás.

Hemos representado exactamente sobre la recta el número $\sqrt{2}$.

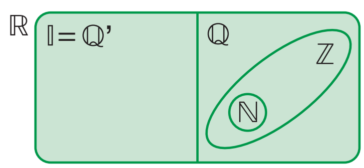
1.3. El conjunto de los números reales

La necesidad de resolver numerosos problemas aritméticos, geométricos y de la vida nos ha llevado a ampliar los conjuntos numéricos.

Hemos avanzado de los números naturales a los enteros por la necesidad de la resta, de los enteros a los racionales por la necesidad de la división, hemos encontrado a los números irracionales, al descubrir que existen decimales ilimitados no periódicos y que algunos de ellos son las raíces no exactas o ciertos números particulares como π.

Diremos en adelante que la unión del conjunto de los números racionales y del conjunto de los números irracionales forma al conjunto de los números reales, y se representa por $\mathbb{R}$.

$$\text{Reales } (\mathbb{R}) \begin{cases} \text{Racionales } (\mathbb{Q}) \begin{cases} \text{Enteros } (\mathbb{Z}) \begin{cases} \text{Naturales } (\mathbb{N}) \\ \text{Enteros negativos} \end{cases} \\ \text{Fraccionarios} \end{cases} \\ \text{Irracionales } (\mathbb{I} = \mathbb{Q}') \end{cases}$$



{números reales}={números racionales} ∪ {números irracionales}

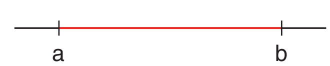
$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

Los conjuntos de los números racionales y de los números irracionales son disjuntos, es decir no existe ningún número que pertenezca a los dos conjuntos, por tanto un número real o es racional o es irracional.

Los números reales establecen una relación biunívoca con la recta numérica, puesto que a cada número real le corresponde un único punto en la recta y a cada punto de la recta le corresponde un único número real, por ello se habla de la **recta real**.

Ordenación de los números reales

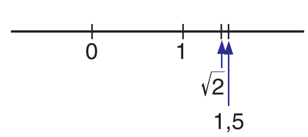
Al conjunto de los números reales se le llama conjunto ordenado, puesto que se puede determinar que entre dos reales diferentes uno es mayor que el otro, al representarse en la recta, es posible ordenar siguiendo el mismo orden que el establecido en el conjunto de los números racionales.



Observa la representación sobre una recta de los números reales $\sqrt{2}$ y 1,5.

Como 1,5 queda situado a la derecha de $\sqrt{2}$, concluimos que:

$$\sqrt{2} < 1{,}5$$



Dados dos números reales *a* y *b*, diremos que ***b* es mayor que *a*** si al efectuar su representación gráfica sobre la recta real, *b* queda situado a la derecha de *a*.

CONTRAEJEMPLO

La raíz cuadrada de –1 no es un número real.

$\sqrt{-1} = i$; i pertenece a los números complejos $\mathbb{C}$ que estudiarás en cursos superiores.

1.4. Intervalos en los números reales

El orden en los números reales nos permite hablar del conjunto de números reales comprendidos entre dos números reales determinados.

Tomemos dos números reales, tales que el primero sea menor que el segundo, $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$, existe una infinidad de números reales en este intervalo, "x" tales que $a < x < b$, esos números forman subconjuntos de los reales llamados **intervalos.**

Según si se incluyen o no los extremos "a" y "b", los intervalos se llaman: cerrado, abierto o semiabiertos.

El intervalo cerrado incluye a los extremos y a los reales entre los extremos, su notación por comprensión es: $[a, b]=\{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$.

El intervalo abierto incluye a los reales entre los extremos pero no a ellos: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$.

El intervalo semiabierto incluye a un extremo y a los reales entre los extremos:

Semiabierto por la derecha: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$.

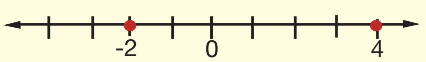
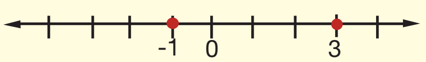
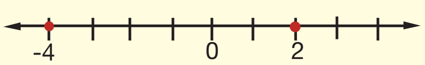
Semiabierto por la izquierda: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}$.

Intervalo cerrado	Intervalo abierto	Intervalo semiabierto	
			
[*a*, *b*] Conjunto de números reales comprendidos entre *a* y *b*, incluidos los extremos.	(*a*, *b*) Conjunto de números reales comprendidos entre *a* y *b*, sin incluir los extremos.	[*a*, *b*) Conjunto de números reales comprendidos entre *a* y *b*, incluido sólo el extremo *a*.	(*a*, *b*] Conjunto de números reales comprendidos entre *a* y *b*, incluido sólo el extremo *b*.

Observa que si el extremo está incluido en el intervalo, lo representamos mediante un pequeño círculo (●); si no está incluido, lo representamos mediante una pequeña circunferencia (○).

Actividades

4 Completa la tabla en tu cuaderno.

Representación	Intervalo
	[−2, 4]
	
	
	(4, 6)
	[-1, 2]

5 ¿Qué diferencia hay entre un intervalo cerrado y uno abierto?

6 Escribe un intervalo abierto cuyo punto central sea −3 y cuyos extremos se hallen a una distancia de dos unidades de dicho punto.

7 Representa los siguientes intervalos: [1, 2], (−1, 0), [2, 3) y (−2, 3]. Determínalos por comprensión.

8 Representa los intervalos [−1, 3) y (2, 6). Colorea el trozo de recta común a ambos intervalos.

— ¿Qué intervalo representa el trozo de recta coloreado?

9 Representa estos intervalos. Determínalos por comprensión.

a) (4, 5) c) [−2, −6] e) (−4, −1)

b) [2, 3] d) (−2, 0] f) (0, 2]

2 Las aproximaciones en los números reales

2.1. Aproximación decimal de un número real

La expresión decimal de un número irracional, obtenido por cálculo o por medida, es siempre una **aproximación,** puesto que no podemos trabajar con un número infinito de decimales.

En la práctica, operamos con aproximaciones decimales de los números reales; es decir, con valores próximos al valor exacto que sean manejables.

Las aproximaciones menores que el valor exacto reciben el nombre de aproximaciones **por defecto** y las aproximaciones mayores se denominan aproximaciones **por exceso.**

FÍJATE

Aproximaciones

$\pi = 3{,}141\,592\,654\ldots$

por defecto	por exceso
3	4
3,1	3,2
3,14	3,15
3,141	3,142
3,1415	3,1416
3,141 59	3,141 60
3,141 592	3,141 593
⋮	⋮

Órdenes de aproximación

Dado un número real cualquiera, existen diferentes aproximaciones que nos permiten expresarlo. Según el grado de precisión requerido, tomaremos una u otra.

Observa estos dos números reales aproximados: 2,7 y 2,70.

Cuando se trabaja con números aproximados, 2,7 se distingue de 2,70, pues no sabemos cuál es la cifra de las centésimas del primero, mientras que en el segundo se tienen 0 centésimas.

Decimos que 2,7 tiene dos cifras significativas, mientras que 2,70 tiene tres.

2,7 — dos cifras significativas

2,70 — tres cifras significativas

Para distinguir los 0 que son significativos de los que no lo son, estos últimos suelen indicarse como potencias de 10.

Así:

$$20\,500 = 2{,}05 \cdot 10^4$$

nos indica que el número tiene tres cifras significativas (2, 0 y 5).

Observa el orden de la última cifra significativa en las siguientes aproximaciones.

Aproximación	Número de cifras significativas	Orden de la última cifra significativa
0,023	dos	milésima
$240 \cdot 10^2$	tres	centena
11,30	cuatro	centésima

El orden de la última cifra significativa de un número aproximado se dice que es su **orden de aproximación.**

Redondeo y truncamiento

Veamos ahora dos formas de tomar aproximaciones de números reales. Fíjate en los siguientes ejemplos de aproximaciones. Hemos señalado, en cada caso, la que está más próxima al valor real.

4,762 38 → 4,762 / 4,763

12,346 57 → 12,34 / 12,35

Al tomar 4,762 en vez de 4,762 38, hemos redondeado 4,762 38 hasta las milésimas. Al tomar 12,35 en vez de 12,346 57; hemos redondeado 12,346 57 hasta las centésimas.

Para **redondear** un número hasta un cierto orden de aproximación observamos la primera cifra que debe suprimirse:

- Si es inferior a 5, las cifras anteriores se dejan igual.
- Si es mayor o igual que 5, se aumenta en una unidad la cifra anterior a la primera que debe suprimirse.

Otras veces, para aproximar un número real suprimimos las cifras decimales a partir del orden de aproximación dado. En tal caso, diremos que hemos efectuado una aproximación por **truncamiento.**

FÍJATE

La aproximación de un número real por redondeo puede ser por defecto o por exceso, mientras que la aproximación por truncamiento siempre es por defecto.

Número	Orden de aproximación	Aproximación por truncamiento	Aproximación por redondeo
3,758	centésimas	3,75	3,76
8,545	décimas	8,5	8,5

2.2. Error

Cuando utilizamos aproximaciones de números reales en vez de su valor exacto, cometemos un **error.**

Observa la diferencia entre el valor exacto y el aproximado en las aproximaciones siguientes y el valor absoluto de esta diferencia.

FÍJATE

El **valor absoluto** de un número real es el número que resulta de prescindir de su signo.

$$|-3{,}14| = 3{,}14$$

$$|\pi| = \pi$$

Valor exacto	Valor aproximado	Valor exacto – Valor aproximado	Valor absoluto
16,539 789	16,539	0,000 789	0,000 789
0,006 543	0,0066	−0,000 057	0,000 057
7,054 36	7,06	−0,005 64	0,005 64

Se denomina **error absoluto** de una aproximación al valor absoluto de la diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado.

$$\text{Error absoluto} = |\text{Valor exacto} - \text{Valor aproximado}|$$

Imagina la siguiente situación:

Pesamos dos objetos *A* y *B* en una balanza y obtenemos las siguientes medidas: la masa del objeto *A* es de 50 g y de 2,5 kg del objeto *B* .

Después de efectuar la pesada, nos damos cuenta de que la balanza no estaba equilibrada, sino que marcaba 10 g sin poner ningún objeto.

El error absoluto cometido en estas medidas ha sido el mismo. Sin embargo, está claro que tiene más importancia añadir 10 g a la masa del objeto *A* que a la del objeto *B.* La masa real de *A* será, pues, 40 g y 2 490 g la de *B*.

Para relacionar el error absoluto con el valor exacto de la medida, calculamos el cociente entre el error absoluto y el valor exacto de la masa de cada uno de los objetos.

Objeto *A*	$\frac{10}{40} = 0{,}25$
Objeto *B*	$\frac{10}{2490} = 0{,}004\ 02$

El cociente entre el error absoluto y el valor exacto se denomina **error relativo.**

$$\text{Error relativo} = \frac{\text{Error absoluto}}{\text{Valor exacto}}$$

El error relativo también puede expresarse en porcentaje.

$$0{,}25 \rightarrow 25\ \%$$

$$0{,}004\,02 \rightarrow 0{,}402\ \%$$

Observa que el error relativo expresa el error cometido por unidad medida.

Cotas de error absoluto

No siempre es posible calcular el error cometido al tomar una aproximación de un número. Por ejemplo, plantéate si puedes calcular el error absoluto cometido al tomar 3,14 como aproximación de π.

Puesto que no conocemos el valor exacto de π, no es posible determinar el error absoluto cometido, aunque sí podemos hallar un valor mayor o igual que este error.

Puesto que $|3{,}1415... - 3{,}14| = 0{,}0015... < 0{,}01$, el error absoluto cometido al tomar 3,14 siempre será menor que una centésima.

Así, diremos que 0,01 es una cota del error absoluto cometido al tomar 3,14 como valor aproximado de π.

Algo parecido ocurre cuando efectuamos una medida.

Si medimos un segmento con una regla graduada hasta los milímetros, ¿crees que esta medida es exacta? ¿Cuál será, como máximo, el error absoluto cometido en la medición?

Puesto que la cantidad más pequeña que puede apreciar esta regla es 1 mm, si realizas la medición con cuidado y precisión, el error máximo cometido será de 1 mm. Para indicar que la medida del segmento está comprendida entre 4,5 cm y 4,7 cm, escribiremos:

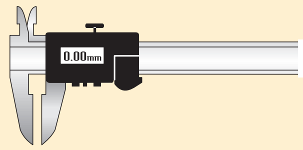
$$(4{,}6 \pm 0{,}1)\ \text{cm}$$

Una **cota de error absoluto** es cualquier número no menor que el error absoluto.

LAS TIC Y LA MATEMÁTICA

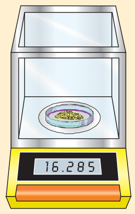
Instrumentos de medida digitales

El **pie de rey** o calibrador se emplea para medir longitudes y diámetros, tanto interiores como exteriores.



El **cronómetro** permite medir tiempos muy pequeños con precisión. Algunos pueden apreciar hasta las centésimas de segundo.

La **balanza de precisión** se utiliza para medir pequeñas masas. Existen algunas capaces de apreciar hasta el cienmiligramo.



Actividades

10 Da una aproximación por defecto de $\sqrt{17}$ con cinco cifras decimales.

11 Escribe un intervalo abierto que contenga a π. ¿Qué tipo de aproximación a π son los extremos de intervalo?

— Redondea π hasta las diezmilésimas.

— Trunca π con cuatro cifras decimales.

12 Redondea hasta las centésimas los siguientes números decimales: 2,3476; 0,005; 3,899; 15,762.

13 Aproxima hasta las milésimas, por redondeo y por truncamiento, los siguientes números decimales: 6,345; 12,3987; 3,0056; 0,0001.

— Compara en cada caso los resultados obtenidos por cada uno de los métodos.

14 Si 2,567 es una aproximación por defecto del número 2,567929, calcula los errores absoluto y relativo cometidos al utilizar esta aproximación. Expresa el error relativo en porcentaje.

15 Cita diferentes instrumentos de medida que se usen en tu casa e indica situaciones en las que no es conveniente su utilización.

16 Si $\pi = 3{,}141592...$ y tomamos como aproximación 3,1415, ¿cuál es una cota del error absoluto cometido?

17 Al pesar un objeto en una balanza obtenemos 4,6 kg. Si esta aproximación tiene una cota de error absoluto de 40 g, ¿entre qué valores estará comprendida la masa exacta del objeto?

3 Operaciones con irracionales

En caso de que los números reales sean racionales, ya sabes efectuar operaciones con ellos. Veamos ahora cómo operar con números reales cuando al menos uno de ellos es irracional.

Vamos a calcular $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Dado que $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ son números irracionales tienen infinitas cifras decimales y es imposible manejarlas a todas, por tanto, es necesario tomar aproximaciones de estos números, con lo cual las operaciones con números irracionales se reducen a operaciones con números racionales. El resultado será también una aproximación del número irracional que es su suma. Para indicar el resultado que es una aproximación es preferible utilizar el símbolo "≈".

En el caso de la suma y de la resta, debe aproximarse a la misma cifra decimal, para el ejemplo pediremos el resultado aproximado a milésimos, entonces:

$$\sqrt{2} = 1{,}414\ 213\ \ldots \approx 1{,}4142 \text{ y } \sqrt{3} = 1{,}732\ 050\ \ldots \approx 1{,}7321$$
$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 1{,}414\ 2 + 1{,}732\ 1 = 3{,}146\ 3$$
$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 3{,}146$$

FÍJATE

El número 13,42 tiene 4 cifras significativas, mientras que el 0,013 tiene solamente 2.

Observa que las aproximaciones tomadas para los sumandos se han realizado a diezmilésimas (una aproximación más que el pedido para el resultado). Esto se lo ha hecho para que el error cometido no afecte a la aproximación pedida.

No debemos olvidar que un **número irracional no es igual a su aproximación** y, por lo tanto, cada vez que utilizamos una aproximación cometemos un error.

Así pues, todas las aproximaciones y el trabajo con ellas debe efectuarse con mucho cuidado.

Si se usa una calculadora, se recomienda usar todas las cifras que provee la máquina y aproximar el resultado al final.

En el caso de la multiplicación, y de la división, a más de la aproximación hay que observar el número de cifras significativas que tiene la aproximación del número, pues el resultado no puede tener más cifras significativas que el menor número de cifras significativas de cada uno de sus factores.

Multipliquemos $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$, utilicemos la aproximación a centésimas en el primer número y a milésimas del segundo número, entonces:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \approx 1{,}41 \cdot 1{,}732 = 2{,}442\ 12$$

Pero el resultado debe tener tres cifras significativas, puesto que el primer número $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ tuvo tres cifras significativas, entonces el resultado válido es:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \approx 2{,}44$$

En el caso de la división: $\sqrt{2} \div \sqrt{3} \approx 1{,}41 \div 1{,}732 = 0{,}814\ 087\ \ldots$

El resultado con las tres cifras significativas es: 0,814.

Los ceros anteriores a la primera cifra diferente de cero no se consideran cifras significativas.

Actividades

18 Calcula $\sqrt{2} + \sqrt{13}$.

19 Redondea $\sqrt{15}$ y $\sqrt{27}$ hasta las diezmilésimas. Calcula su suma, su resta, su producto y su cociente.

20 Si tomamos $\pi \approx 3{,}14$ y $\sqrt{8} \approx 2{,}83$, calcula $\pi + \sqrt{8}$ y $\pi \cdot \sqrt{8}$.

3.1. Propagación del error

Al tomar una aproximación de un número real estamos cometiendo un error. Veamos qué sucede con el error al operar con estas aproximaciones.

La operación que vamos a efectuar es $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Redondeamos $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ hasta las diezmilésimas y calculamos su suma:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,5\ldots \simeq 1{,}414\,2 \\ \sqrt{3} = 1{,}732\,050\,8\ldots \simeq 1\,732\,1\end{array}\right\}\quad \sqrt{2}+\sqrt{3} \simeq 3{,}146\,3$$

Veamos si todas las cifras de este resultado son correctas. Para ello, observa estas desigualdades:

$$\boxed{\begin{array}{c}1{,}414\,2 \le \sqrt{2} \le 1{,}414\,3 \qquad\qquad 1{,}732\,0 \le \sqrt{3} \le 1{,}732\,1 \\ 1{,}414\,2 + 1{,}732\,0 \le \sqrt{2}+\sqrt{3} \le 1{,}414\,3 + 1{,}732\,1 \\ 3{,}146\,2 \le \sqrt{2}+\sqrt{3} \le 3{,}146\,4\end{array}}$$

El resultado de sumar $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ será un número comprendido entre 3,1462 y 3,1464. Por tanto, sólo podemos aceptar tres de las cuatro cifras decimales obtenidas inicialmente para $\sqrt{2}+\sqrt{3}$:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} \simeq 3{,}146$$

Si queremos obtener una mayor aproximación del resultado, deberemos tomar más cifras decimales en los sumandos iniciales.

Veamos ahora qué sucede con la multiplicación. La operación que vamos a efectuar es $\sqrt{5}\cdot\pi$.

Redondeamos $\sqrt{5}$ y π hasta las milésimas, y efectuamos la multiplicación:

$$\sqrt{5}\cdot\pi \simeq 2{,}236\cdot 3{,}142 = 7{,}025\,512$$

$$\boxed{\begin{array}{c}2{,}236 \le \sqrt{5} \le 2{,}237 \qquad\qquad 3{,}141 \le \pi \le 3{,}142 \\ 2{,}236\cdot 3{,}141 \le \sqrt{5}\cdot\pi \le 2{,}237\cdot 3{,}142 \\ 7{,}023\,276 \le \sqrt{5}\cdot\pi \le 7{,}028\,654\end{array}}$$

Sólo podemos asegurar las dos primeras cifras decimales. Al igual que en la suma, si queremos obtener una mayor aproximación del resultado, deberemos tomar más cifras decimales en los factores iniciales.

FÍJATE

Observa la operación siguiente y cómo podemos resolverla de 3 maneras diferentes.

$$\frac{435\cdot 2\,400}{32}$$

a) $435\cdot 2\,400 = 1\,044\,000$

$1\,044\,000 \div 32 = 32\,625$

b) $2\,400 \div 32 = 75$

$75\cdot 435 = 32\,625$

c) $435 \div 32 = 13{,}593\,75 \simeq 13{,}6$

$13{,}6\cdot 2\,400 = 32\,640$

Fíjate en que en el tercer caso el error absoluto cometido es 15.

Esto es debido a que al multiplicar el resultado aproximado de la división por 2 400 hemos hecho el error 2 400 veces mayor.

Actividades

21 ¿Cuántas cifras decimales deberías tomar en las actividades 24 y 25 para que al multiplicar aseguraras cuatro cifras decimales?

— Efectúa la operación correspondiente.

4 Potencias de base real y exponente entero

La potencia cuya base es un número real y su exponente es un número natural, abrevia al producto de esa base por sí misma tantas veces como indica el exponente, así por ejemplo:

$$\pi \cdot \pi \cdot \pi \cdot \pi = \pi^4$$

La **potencia** de **base** un número **real *a*** y **exponente** un número **natural *n*** es el producto del número ***a*** por sí mismo, ***n*** veces.

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ veces}}$$

Para el caso en que se señale la primera potencia de un número real, se toma como valor a la propia base, así, por ejemplo: $\pi^1 = \pi$

La **potencia** de **base** un número **real *a*** y **exponente 1** es igual a ***a***.

$$a^1 = a$$

Para el caso en que se señale la potencia de exponente cero de un número real diferente de cero, su resultado es la unidad, así, por ejemplo: $\pi^0 = 1$.

La **potencia** de **base** un número **real *a* diferente** de **0** y **exponente 0** es igual a **1.**

$$a^0 = 1;\ a \neq 0$$

FÍJATE

La potencia 0^0 no está definida.

Las potencias antes descritas se refieren a potencias de base un número real y de exponente un número natural, que son justamente las potencias de base un número real y de exponente un número entero positivo o cero. Pero, ¿qué ocurre si el exponente es un entero negativo?

Consideremos seguidamente el caso en que el **exponente** sea un **número entero negativo.**

En caso de que la potencia de base un número real de exponente un número entero negativo, la potencia es el inverso multiplicativo de otra potencia de igual base pero con exponente opuesto al original, veamos:

$$\pi^{-5} = \frac{1}{\pi^5} = \frac{1}{\pi \cdot \pi \cdot \pi \cdot \pi \cdot \pi}$$

La **potencia** de base un número real *a, a* ≠ 0, y **exponente** un número entero **negativo –*n*** es igual al inverso de la potencia de base el mismo número real y exponente positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Las operaciones con potencias de base real y exponente entero tienen las mismas propiedades que las de base racional y exponente natural. Obsérvalas

Multiplicación de potencias de la misma base	División de potencias de la misma base

Multiplicación de potencias de la misma base

$$a^5 \cdot a^2 = \begin{cases} (a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a)\cdot(a\cdot a) = \overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}^{7\text{ veces}} = a^7 \\ a^{5+2} = a^7 \end{cases}$$

Para **multiplicar potencias** de la misma base real y exponentes números naturales, se deja la **misma base** y se **suman los exponentes.**

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

División de potencias de la misma base

$$a^7 \div a^3 = \begin{cases} \dfrac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a\cdot a} = \overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a}^{4\text{ veces}} = a^4 \\ a^{7-3} = a^4 \end{cases}$$

Para **dividir dos potencias** de la misma base real $\boldsymbol{a^m}$ y $\boldsymbol{a^n}$ siendo $a \neq 0$, m y n números naturales y $m > n$, se deja la **misma base** y se **restan los exponentes.**

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \text{ con } a \neq 0 \text{ y } m > n$$

Potencia de un producto

$$(a \cdot b)^3 = (a \cdot b)\cdot(a \cdot b)\cdot(a \cdot b) =$$
$$= a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a^3 \cdot b^3$$

Para elevar un **producto** de números reales $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ a una **potencia** de exponente natural $\boldsymbol{n}$ se eleva **cada uno** de los **factores** a dicha potencia.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

La **potencia** de base un número real a, $a \neq 0$, y **exponente** 0 es igual a **1.**

$$a^0 = 1, \text{ con } a \neq 0$$

Potencia de una potencia

$$(a^2)^3 = \begin{cases} a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^6 \\ a^{2\cdot 3} = a^6 \end{cases}$$

Para **elevar** una **potencia** a otra **potencia** se deja la **misma base** y se **multiplican** los **exponentes.**

$$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$$

ejemplo 1

Expresa:

a) $\pi^{-4} \cdot \pi^6$ *en forma de una sola potencia de base* π.

b) $a^7 \div a^{-4}$ *en forma de una sola potencia de base el número real* a.

c) $(a^3 \cdot \pi^2)^{-2}$ *como producto de potencias.*

d) $(a^6)^{-3}$ *en forma de potencia de base el número real* a.

Aplicamos las propiedades de las operaciones con potencias.

a) $\pi^{-4} \cdot \pi^6 = \dfrac{1}{\pi^4} \cdot \pi^6 = \dfrac{\pi^6}{\pi^4} = \pi^{6-4} = \pi^2$

b) $a^7 \div a^{-4} = a^7 \div \dfrac{1}{a^4} = a^7 \cdot a^4 = a^{7+4} = a^{11}$

c) $(a^3 \cdot \pi^2)^{-2} = \dfrac{1}{(a^3 \cdot \pi^2)^2} = \dfrac{1}{a^6 \cdot \pi^4} = \dfrac{1}{a^6} \cdot \dfrac{1}{\pi^4} = a^{-6} \cdot \pi^{-4}$

d) $(a^6)^{-3} = a^{6(-3)} = a^{-18}$

Actividades

22 Transforma las siguientes potencias para que tengan exponente positivo.

a) $\left(\dfrac{9}{4x}\right)^{-2}$

b) $\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^{-3}$

c) $1+\pi$

d) $\left(\dfrac{x-3}{4}\right)^{-2}$

23 Expresa en forma de una sola potencia:

a) $\left(\dfrac{-3}{4}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{-3}{4}\right)^{-4} \cdot \left(\dfrac{-3}{4}\right)^3$

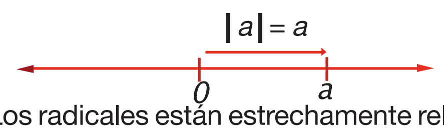
b) $(3^{-5} \cdot 3^{-2})^{-6} \div [(5-2)^2]^{-7}$

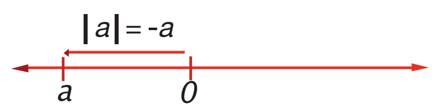
c) $[(3+\pi)^6 \div (3+\pi)^{-2}]^5$

5 Radicales

Recuerda que el valor absoluto de un número real “*a*”, se denota por $|a|$, es el mismo número “*a*” cuando es positivo o cero, y es el opuesto de “a”, si es negativo. Geométricamente representa la distancia entre el número real y el cero “*0*”.

Si *a* ‡ *o* | Si $a < o$





Los radicales están estrechamente relacionados con las potencias. En este apartado veremos cómo se relacionan y aprenderemos a trabajar con expresiones en las que aparecen radicales o potencias de exponente racional.

5.1. Raíz enésima de un número real

Para iniciar el estudio de cualquier raíz de un número real, recordemos las características de la raíz cuadrada.

Sabemos que 5 elevado al cuadrado es *25,* $5^2 = 25$, entonces la raíz cuadrada de 25 es igual a 5, $\sqrt{25} = 5$.

Para ratificar el tratamiento de la raíz cuadrada diremos:

La **raíz cuadrada** de un número real positivo ***b*** o ***0*** es el número real positivo ***a*** si y solo si: $a^2 = b$. Se expresa:

$$\sqrt{b} = a$$

FÍJATE

$$\sqrt[n]{b} = a \text{ ; donde } \begin{cases} n \text{ es el índice del radical.} \\ b \text{ es el radicando} \\ a \text{ es la raíz; si } n \text{ es} \\ \text{par entonces } b \geq 0. \end{cases}$$

Sea el número real *a* tal que $a^2 = b$ entonces:

$$\sqrt{b} = \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a;\ si\ a \geq 0 \\ -a;\ si\ a < 0 \end{cases}$$

Por tanto debemos concluir que:

$$\sqrt{25} = 5$$
$$-\sqrt{25} = -5$$

Si el radicando es negativo, no existe raíz cuadrada real, puesto que ningún número real elevado a la segunda potencia puede ser un número real negativo. Por ejemplo: $\sqrt{-25} \notin \mathbb{R}$

Las raíces de índice par se definen de forma parecida a las raíces cuadradas. Se concluye que no existe raíz real de índice par si el radicando es negativo.

Por ejemplo, el número 81 es el resultado de elevar a la cuarta potencia el número 3. Así el número 3 es la raíz cuarta de 81, $\sqrt[4]{81} = 3$.

Las raíces de índice impar se definen de forma parecida a las raíces de índice par, con la consideración de que el radicando sí puede ser negativo, en ese caso la raíz también es negativa.

Por ejemplo, el número 125 es el resultado de elevar al cubo el número 5. Así el número 5 es la raíz cúbica de 125, $\sqrt[3]{125} = 5$. Y el número -125 es el resultado de elevar al cubo el número -5. Así el número -5 es la raíz cúbica de -125, $\sqrt[3]{-125} = -5$.

Signo de la raíz

Para averiguar cuál es el signo de la raíz, observaremos el signo del radicando y la paridad del índice. Fíjate en la siguiente tabla.

Raíz	$\sqrt[3]{343} = 7$	$\sqrt[3]{-343} = -7$	$\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{2}{3}$	$\sqrt[4]{\dfrac{-16}{81}} = ?$
Paridad del índice	Impar	Impar	Par	Par
Signo del radicando	+	–	+	–
Número de raíces	Una (positiva)	Una (negativa)	Dos (positiva y negativa)	No existe en $\mathbb{R}$.

Podemos concluir:

- Si el índice es impar, la raíz tiene el mismo signo que el radicando.
- Si el índice es par y el radicando es positivo, existen dos raíces que son dos números reales opuestos.
- Si el índice es par y el radicando es negativo, no existe ninguna raíz real.

Expresiones radicales semejantes

Observa el resultado de la siguiente suma:

$$\sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

El número 3 es el *coeficiente.* En general, en una expresión de la forma $a \cdot \sqrt[n]{b}$ se llama **coeficiente** al número ***a*** que multiplica al radical.

Observa las expresiones siguientes: $3\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$, $12\sqrt{5}$. En todos los casos tenemos un *coeficiente* que multiplica a un mismo radical.

Las expresiones radicales también reciben el nombre de **radicales.**

Dos expresiones radicales de la forma $a\sqrt[n]{b}$ y $c\sqrt[n]{b}$ son **semejantes** si tienen el **mismo índice** y el **mismo radicando**.

Actividades

24 Señala en cuáles de las fracciones siguientes el numerador y el denominador son cuadrados perfectos.

$$\frac{125}{4}, \frac{9}{16}, \frac{99}{35}, \frac{16}{25}, \frac{111}{38}, \frac{169}{81}$$

— Escribe las raíces cuadradas de todas las fracciones.

— Clasifica las raíces obtenidas en números racionales y números irracionales.

25 Indica el signo de las raíces de estos números reales y efectúalas si es posible.

$$\sqrt{\frac{11}{13}}, \sqrt[4]{-\frac{13}{18}}, \sqrt[3]{-\frac{27}{64}}, \sqrt[3]{\frac{3}{24}}, \sqrt[8]{-\frac{108}{172}},$$

$$\sqrt[3]{-\frac{111}{333}}, \sqrt[4]{-\frac{625}{81}}, \sqrt{\frac{1052}{4\,208}}, \sqrt[5]{\frac{1}{2}}$$

26 Agrupa las expresiones radicales semejantes.

$$4\sqrt[3]{2}\,;\ -2\sqrt{5}\,;\ 6\sqrt{5}\,;\ 7\sqrt[4]{3}\,;\ -6\sqrt[3]{2}$$

5.2. Operaciones con radicales

Podemos multiplicar, dividir, elevar a una potencia o extraer la raíz de cualquier radical. Sin embargo, para sumar o restar dos radicales, éstos deben ser semejantes.

Observa en la tabla siguiente cómo efectuar las operaciones.

Suma y resta de radicales

La **suma** o **resta** de radicales semejantes es otro radical semejante a los dados, cuyo coeficiente es igual a la suma o resta de los coeficientes de los radicales sumandos.

$$a\sqrt[n]{b} + c\sqrt[n]{b} = (a + c)\sqrt[n]{b}$$

Por ejemplo:

$$-\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = (-1 + 3 - 4 + 8)\cdot\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$7\sqrt{5} - 6\sqrt{3} + 8\sqrt{5} - 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = (7 + 8)\cdot\sqrt{5} + (-6 - 3 - 4)\cdot\sqrt{3} = 15\sqrt{5} - 13\sqrt{3}$$

Multiplicación de radicales

El **producto** de radicales del mismo índice es igual a otro radical con igual índice cuyos coeficiente y radicando son iguales, respectivamente, a los productos de los coeficientes y los radicandos de los factores.

$$a\sqrt[n]{b}\cdot c\sqrt[n]{d} = a\cdot c\sqrt[n]{b\cdot d}$$

Por ejemplo:

$$2\sqrt{\frac{1}{4}}\cdot 7\sqrt{3} = 2\cdot 7\cdot\sqrt{\frac{1}{4}\cdot 3} = 14\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}$$

División de radicales

El **cociente** de dos radicales del mismo índice es igual a otro radical con igual índice cuyos coeficiente y radicando son iguales, respectivamente, al cociente de los coeficientes y los radicandos de los radicales dividendo y divisor.

$$\frac{a\sqrt[n]{b}}{c\sqrt[n]{d}} = \frac{a}{c}\sqrt[n]{\frac{b}{d}}$$

Por ejemplo:

$$\frac{5\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{5}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Potencia de un radical

La **potencia** de un radical es igual a otro radical cuyos coeficiente y radicando están elevados a dicha potencia.

$$\left(a\sqrt[n]{b}\right)^m = a^m\sqrt[n]{b^m}$$

Por ejemplo:

$$\left(2\sqrt{7}\right)^5 = 2^5\cdot\left(\sqrt{7}\right)^5 = 2^5\sqrt{7^5}$$

Raíz de un radical

La **raíz** de un radical es otro radical cuyo radicando es el mismo y cuyo índice es el producto de los índices de las raíces.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$$

Por ejemplo:

$$\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[2\cdot 2]{3} = \sqrt[4]{3}$$

ejemplo 2

Calcula:

a) $12\sqrt{7} - 8\sqrt{7} + 9\sqrt{7}$

b) $\dfrac{6\sqrt{5}\cdot 6\sqrt{5}}{8\sqrt{5}}$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{48}}$

a) $12\sqrt{7} - 8\sqrt{7} + 9\sqrt{7} =$

$= (12 - 8 + 9)\sqrt{7} = 13\sqrt{7}$

b) $\dfrac{6\sqrt{5}\cdot 6\sqrt{5}}{8\sqrt{5}} = \dfrac{6\cdot 6}{8}\sqrt{5} = \dfrac{9}{2}\sqrt{5}$

c) $\sqrt{\sqrt[3]{48}} = \sqrt[2\cdot 3]{48} = \sqrt[6]{48}$

Operaciones combinadas

También podemos encontrar series de operaciones combinadas en las que aparezcan radicales. Para resolverlas tendremos en cuenta el orden de prioridad de las operaciones que ya conoces.

ejemplo 3

Calcula:

a) $\sqrt{2}\,(3-4\sqrt{5})$ *b)* $(2+3\sqrt{2})\cdot(5-\sqrt{2})$ *c)* $(2+\sqrt{3})^2$ *d)* $(6+\sqrt{2})\cdot(6-\sqrt{2})$

a) $\sqrt{2}\,(3-4\sqrt{5}) = 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{5} = 3\sqrt{2} - 4\sqrt{10}$

Aplicamos la propiedad distributiva.

b) $(2+3\sqrt{2})\cdot(5-\sqrt{2}) = 2(5-\sqrt{2}) + 3\sqrt{2}\,(5-\sqrt{2}) = 2\cdot 5 - 2\sqrt{2} + 3\cdot 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\,\sqrt{2} =$

$= 10 - 2\sqrt{2} + 15\sqrt{2} - 6 = 4 + 13\sqrt{2}$

Agrupamos términos semejantes.

c) $(2+\sqrt{3})^2 = (2+\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3}) = 2(2+\sqrt{3}) + \sqrt{3}\,(2+\sqrt{3}) = 4 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + \sqrt{3}\,\sqrt{3} =$

$= 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3}$

d) $(6+\sqrt{2})\cdot(6-\sqrt{2}) = 6(6-\sqrt{2}) + \sqrt{2}\,(6-\sqrt{2}) = 36 - 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - \sqrt{2}\,\sqrt{2} = 36 - 2 = 34$

Observa que el último resultado no tiene radicales. Esto se debe a que es el producto de la suma de dos números por su diferencia, que da como resultado la diferencia de los cuadrados: $(a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2$. Y esto, en el caso de una raíz cuadrada, conlleva la eliminación de la raíz. También se podía haber resuelto de esta manera:

$(6+\sqrt{2})\cdot(6-\sqrt{2}) = 6^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = 36 - 2 = 34$

Decimos que una suma de radicales y su diferencia son *expresiones conjugadas*.

Así, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ es la **expresión conjugada** de $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ y, recíprocamente, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ es la expresión conjugada de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Al multiplicar dos expresiones conjugadas desaparecen las raíces cuadradas que pudieran existir.

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a - b$$

FÍJATE

La expresión conjugada de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ es $\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

Actividades

27 Efectúa:

a) $-2\sqrt{7} + 5\sqrt{7} - 8\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 5\sqrt{7} + 7\sqrt{7}$

b) $\dfrac{1}{3\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - \dfrac{1}{6\sqrt{2}}$

c) $5\sqrt{11} - 3\sqrt{17} - 4\sqrt{11} - 9\sqrt{11} + 8\sqrt{17}$

28 Expresa como la raíz de un cociente:

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}};\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2b}};\ \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{16c}};\ \frac{\sqrt{12a}}{\sqrt{3a}}$$

29 Di si son ciertas o falsas las siguientes igualdades.

a) $\sqrt{8\cdot a} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{a}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

c) $\sqrt{81} = \sqrt{3}\,\sqrt{27} = 3\cdot\sqrt{27}$

d) $\sqrt{93^3} = \sqrt[3]{93}$

e) $\sqrt{\sqrt{81}} = 3$

f) $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

30 Calcula:

$$\sqrt{\sqrt{625}};\ \left(\sqrt{5}\right)^2;\ \left(\sqrt{\frac{12}{7}}\right)^4;\ \sqrt{\sqrt{16}}$$

31 Efectúa:

a) $\left(2+\sqrt{7}\right)\cdot\sqrt{3}$

b) $\sqrt{11}\cdot\left(\sqrt{11}+\sqrt{3}\right)$

c) $\sqrt{7}\cdot\left(9+\sqrt{2}\right)$

d) $\sqrt{5}\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)$

32 Calcula:

a) $\left(11+\sqrt{2}\right)^2$

b) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)^2$

c) $\left(\sqrt{10}-\sqrt{17}\right)\cdot\left(\sqrt{10}+\sqrt{17}\right)$

d) $\left(7-\sqrt{21}\right)\cdot\left(7+\sqrt{21}\right)$

33 Escribe la expresión conjugada de cada una de estas expresiones.

$2+\sqrt{3};\ \sqrt{3}-5\sqrt{2};\ 1-\sqrt{2};\ \sqrt{3}-5$

— Multiplica cada expresión por su conjugada.

5.3. Extracción e introducción de factores de un radical

En determinados cálculos, es conveniente extraer factores de un radical. Para ello, es necesario que el exponente del factor sea mayor o igual que el índice del radical. Veamos en los siguientes ejemplos cómo se procede.

$$\sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{5} = 5 \cdot \sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt{5^7} = \sqrt{5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{5} = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sqrt{5} = 5^3 \cdot \sqrt{5}$$

$$\sqrt[3]{7^6 \cdot 5^5} = \sqrt[3]{7^6} \cdot \sqrt[3]{5^5} = \sqrt[3]{7^3 \cdot 7^3} \cdot \sqrt[3]{5^3 \cdot 5^2} = \sqrt[3]{7^3} \cdot \sqrt[3]{7^3} \cdot \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{5^2} =$$
$$= 7 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \sqrt[3]{5^2} = 7^2 \cdot 5 \cdot \sqrt[3]{5^2}$$

FÍJATE

Para **extraer factores** de un radical:

— Descomponemos en factores el radicando.

— Si hay un factor cuyo exponente es mayor o igual que el índice de la raíz, dividimos dicho exponente entre el índice de la raíz.

— El cociente de esta división será el exponente del factor fuera del radical.

— El resto de la división será el exponente del factor dentro del radical.

Podemos **extraer un factor** de un radical si su exponente es igual al índice de la raíz y lo escribimos como factor del radical elevado a la unidad.

$$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$$

Siempre que sea posible extraeremos los factores de un radical para simplificar el radicando. Observa este ejemplo.

ejemplo 4

Extrae todos los factores posibles de los radicales.

a) $\sqrt{500}$ *b)* $\sqrt{\dfrac{512}{45}}$

a) Puesto que $500 = 2^2 \cdot 5^3$, se tiene que:

$$\sqrt{500} = \sqrt{2^2 \cdot 5^3} = 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{5} = 10 \cdot \sqrt{5}$$

b) Del mismo modo podemos calcular $\sqrt{\dfrac{512}{45}}$.

$$\sqrt{\frac{512}{45}} = \sqrt{\frac{2^9}{3^2 \cdot 5}} = \frac{\sqrt{2^9}}{\sqrt{3^2 \cdot 5}} = \frac{2^4 \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{5}} = \frac{2^4}{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}$$

De la misma manera que hemos extraído factores de un radical, también podemos introducir factores en él. Observa el procedimiento:

$$3^2 \cdot 5^3 \cdot a^4 \cdot \sqrt{b} = \sqrt{3^{2 \cdot 2} \cdot 5^{3 \cdot 2} \cdot a^{4 \cdot 2} \cdot b} = \sqrt{3^4 \cdot 5^6 \cdot a^8 \cdot b}$$

$$3^2 \cdot 5^3 \cdot a^4 \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{3^{2 \cdot 3} \cdot 5^{3 \cdot 3} \cdot a^{4 \cdot 3} \cdot b} = \sqrt[3]{3^6 \cdot 5^9 \cdot a^{12} \cdot b}$$

Para **introducir un factor** en un radical se eleva dicho factor al índice del radical.

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

Actividades

34 Extrae todos los factores que puedas de los siguientes radicales.

a) $3^2 \cdot \sqrt{5^3\, a^2\, b^4}$

b) $\sqrt[3]{7\, a^{10}\, b^9}$

c) $-12\sqrt{2^7\, a^7}$

d) $\dfrac{16}{5} \cdot \sqrt{\dfrac{25}{2}}$

35 Introduce en los radicales los factores que están fuera de ellos.

a) $\dfrac{16}{3} \cdot \sqrt{a}$

b) $-7 \cdot 11^3 \cdot \sqrt{2a}$

c) $\dfrac{1}{4} \cdot b \cdot \sqrt{3^3\, b^3}$

d) $a^2 \cdot b \cdot \sqrt[3]{3b}$

5.4. Potencias de base real y exponente racional

Hasta ahora hemos considerado únicamente potencias de exponente natural o entero. Veremos ahora que el exponente de una potencia también puede ser un número racional.

Las potencias de exponente racional se definen mediante radicales del modo siguiente.

La **potencia** de **base** un número **real** $\boldsymbol{a}$ y de **exponente** un número **racional** $\boldsymbol{\frac{m}{n}}$ se define como la raíz de índice $\boldsymbol{n}$ y radicando $\boldsymbol{a^m}$.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Así, observamos que los radicales pueden expresarse como potencias de exponente racional y viceversa. En los siguientes ejemplos aprenderemos cómo se transforman mutuamente unos en otros.

ejemplo 5

Expresa como potencias de exponente racional.

a) $\sqrt[3]{-12}$ *b)* $\sqrt[5]{\left(\frac{3}{5}\right)^4}$

Aplicamos la definición.

a) $\sqrt[3]{-12} = (-12)^{\frac{1}{3}}$

b) $\sqrt[5]{\left(\frac{3}{5}\right)^4} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{4}{5}}$

ejemplo 6

Expresa en forma de radical.

a) $124^{\frac{1}{4}}$ *b)* $\left(-\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$

Aplicamos la definición.

a) $124^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{124}$

b) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{25}}$

Las potencias de exponente racional se definen de manera que las **propiedades de las potencias** de exponente entero **continúen siendo válidas.** Así, para operar con potencias de exponente racional, aplicaremos las propiedades que se recogen al margen. Fíjate en el ejemplo siguiente.

ejemplo 7

Calcula:

a) $(2+a)^3 \cdot (2+a)^{\frac{1}{4}} \cdot (2+a)^{\frac{3}{2}}$

b) $\left(4+2\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{2}} \div \left(4+2\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

c) $(-9 \cdot a \cdot b^2)^{\frac{3}{11}}$

d) $\left[\left(\frac{\pi}{7}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{5}{4}}$

Aplicamos las propiedades de las operaciones con potencias.

a) $(2+a)^3 \cdot (2+a)^{\frac{1}{4}} \cdot (2+a)^{\frac{3}{2}} = (2+a)^{3+\frac{1}{4}+\frac{3}{2}} = (2+a)^{\frac{19}{4}}$

b) $\left(4+2\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{2}} \div \left(4+2\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(4+2\sqrt{3}\right)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}} = \left(4+2\sqrt{3}\right)^{\frac{7}{6}}$

c) $(-9 \cdot a \cdot b^2)^{\frac{3}{11}} = (-9)^{\frac{3}{11}} \cdot a^{\frac{3}{11}} \cdot b^{2 \cdot \frac{3}{11}} = (-9)^{\frac{3}{11}} \cdot a^{\frac{3}{11}} \cdot b^{\frac{6}{11}}$

d) $\left[\left(\frac{\pi}{7}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{5}{4}} = \left(\frac{\pi}{7}\right)^{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4}} = \left(\frac{\pi}{7}\right)^{\frac{15}{8}}$

MUCHO OJO

Propiedades de las operaciones con potencias de exponente entero

- Multiplicación de potencias de la misma base

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

- División de potencias de la misma base

$a^m \div a^n = a^{m-n}$ $(a > 0)$

- Potencia de un producto

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

- Potencia de una potencia

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

MUCHO OJO

Una potencia de base real y exponente entero negativo es igual al inverso de la potencia de la misma base con exponente positivo.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Las potencias de **exponente racional y negativo** pueden transformarse en potencias de exponente positivo, como en el caso de potencias de exponente entero. Para ello, tendremos en cuenta que una potencia de exponente negativo es igual al inverso de la potencia de la misma base con exponente positivo.

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

Fíjate en cómo expresamos con exponente positivo estas potencias:

$$5^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{3}}} \qquad \left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{5}{6}}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{5}{6}}$$

FÍJATE

La potenciación y la radicación son operaciones inversas.

$$\sqrt{a^2} = a$$

Lo cual puede demostrarse aplicando las propiedades de las operaciones con potencias de exponente racional.

$$\sqrt{a^2} = (a^2)^{\frac{1}{2}} = a^{2 \cdot \frac{1}{2}} = a^1 = a$$

El siguiente cuadro recoge las propiedades de las operaciones con potencias de base real y exponente racional, a las cuales se añade esta última, relativa a las potencias de exponente negativo.

Potencias de base real y exponente racional

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$$

$$a^{\frac{m}{n}} \div a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}} \quad (\text{con } a \neq 0)$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}}$$

$$(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

LAS TIC Y LA MATEMÁTICA

Las teclas para el cálculo de raíces suelen ser:

- [$\sqrt{\ }$] Para el cálculo de la raíz cuadrada.
- [$\sqrt[3]{\ }$] Para el cálculo de la raíz cúbica.
- [$\sqrt[x]{\ }$] Para el cálculo de cualquier raíz de índice *x*.

Así, para calcular $\sqrt{144}$ efectuamos: [$\sqrt{\ }$] [1] [4] [4] [=] → 12

Para calcular $\sqrt[3]{125}$: [$\sqrt[3]{\ }$] [1] [2] [5] [=] → 5

Y, para calcular $\sqrt[7]{245}$: [7] [$\sqrt[x]{\ }$] [2] [4] [5] [=] → 2.1943679

C1. Halla con tu calculadora: $\sqrt[5]{346}$; $\sqrt[3]{64}$; $\sqrt{1250}$; $\sqrt[6]{654}$

C2. Utiliza la calculadora para hallar:

$$\sqrt{576}\ ;\ \sqrt[5]{75}\ ;\ \sqrt[7]{124}\ ;\ \sqrt[3]{1250}\ ;\ \sqrt[3]{\frac{1}{81}}\ ;\ \sqrt{\frac{32}{75}}\ ;\ \sqrt[3]{\frac{12}{56}}$$

La **transformación de raíces en potencias** puede ser muy útil a la hora de efectuar operaciones con radicales. Éstas pueden resolverse por los procedimientos ya vistos al estudiar las operaciones con radicales o bien, transformando los radicales en potencias de exponente racional y aplicando las propiedades de éstas.

Comprobemos estas dos formas de proceder en el siguiente ejemplo.

ejemplo 8

Resuelve:

$$\frac{\sqrt{3^3}\cdot\sqrt[4]{5^5}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{2^3}\cdot\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt[4]{5}}$$

Primera resolución

Aplicamos las propiedades de las operaciones con radicales.

$$\frac{\sqrt{3^3}\cdot\sqrt[4]{5^5}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{2^3}\cdot\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt[4]{5}} = \frac{\sqrt{3^3}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt[4]{5^5}}{\sqrt[4]{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{2^3}\cdot\sqrt[5]{2^2}} =$$

Agrupamos radicales semejantes.

$$= \sqrt{\frac{3^3}{3}}\cdot\sqrt[4]{\frac{5^5}{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{2^3\cdot 2^2}} =$$

$$= \sqrt{3^2}\cdot\sqrt[4]{5^4}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{2^5}} =$$

$$= 3^1\cdot 5^1\cdot\frac{1}{2} = \frac{15}{2}$$

Segunda resolución

Aplicamos las propiedades de las operaciones con potencias.

$$\frac{\sqrt{3^3}\cdot\sqrt[4]{5^5}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{2^3}\cdot\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt[4]{5}} = 3^{\frac{3}{2}}\cdot 5^{\frac{5}{4}}\cdot 3^{\frac{-1}{2}}\cdot 2^{\frac{-3}{5}}\cdot 2^{\frac{-2}{5}}\cdot 5^{\frac{-1}{4}} =$$

$$= 3^{\frac{3}{2}}\cdot 3^{\frac{-1}{2}}\cdot 5^{\frac{5}{4}}\cdot 5^{\frac{-1}{4}}\cdot 2^{\frac{-3}{5}}\cdot 2^{\frac{-2}{5}} =$$

Agrupamos potencias de la misma base.

$$= 3^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{5}{4}-\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{-3}{5}-\frac{2}{5}} =$$

$$= 3^1\cdot 5^1\cdot 2^{-1} = \frac{15}{2}$$

Actividades

36 Expresa como potencias de exponente racional:

$\sqrt{99}$; $\sqrt{365}$; $\sqrt{44}$; $\sqrt{75}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{18}$; $\sqrt{243}$

37 Expresa en forma de raíz. A continuación, di cuáles son semejantes.

$3^{\frac{1}{2}}$; $12^{\frac{1}{2}}$; $175^{\frac{1}{2}}$; $27^{\frac{1}{2}}$; $25^{\frac{1}{2}}$

38 Expresa como potencias de exponente racional:

$\sqrt[3]{-18}$; $\sqrt[5]{5}$; $\sqrt[3]{-4}$; $\sqrt[4]{5}$; $\sqrt[6]{3}$; $\sqrt[4]{18}$; $\sqrt[6]{4}$; $\sqrt[5]{-16}$

39 Expresa en forma de radical. A continuación, di cuáles son semejantes.

$(-3)^{\frac{1}{3}}$; $4^{\frac{1}{5}}$; $(-7)^{\frac{1}{3}}$; $9^{\frac{1}{6}}$; $25^{\frac{1}{4}}$; $4\cdot 9^{\frac{1}{6}}$; $2\cdot(-3)^{\frac{1}{3}}$

40 El número $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ puede expresarse en forma de potencia de exponente negativo como $2^{-\frac{1}{3}}$.

Expresa de la misma forma:

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$; $\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}$; $\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}}$; $\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}}$; $\dfrac{-2}{\sqrt[6]{3}}$

41 Di cuáles de las siguientes igualdades son ciertas y cuáles no.

a) $\left(-3+2\sqrt{7}\right)^{-\frac{5}{3}} = \dfrac{1}{\left(-3+2\sqrt{7}\right)^{3}}$

b) $(25\cdot a\cdot b^3)^{\frac{5}{4}} = \dfrac{1}{(25\cdot a\cdot b^3)^{-\frac{5}{4}}}$

c) $(-6-a)^{-\frac{2}{3}} = \left[(-6-a)^{\frac{2}{3}}\right]^{-1}$

d) $a^{\frac{-1}{4}}\cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{-1}{4}\cdot\frac{1}{3}}$

42 Expresa en forma de una sola potencia:

a) $\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{3}{5}}$

b) $\left(\dfrac{-3}{4}\right)^{4}\cdot\left(\dfrac{-3}{4}\right)^{\frac{-2}{5}}\cdot\left(\dfrac{-3}{4}\right)$

c) $\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^{3}\right]^{\frac{3}{5}}\div\left(1+\sqrt{2}\right)^{\frac{-1}{2}}$

d) $\left(\dfrac{-1}{5}\right)^{-7}\div\left(\dfrac{-1}{5}\right)^{-7}$

FÍJATE

¿Por qué se racionaliza el denominador de una fracción y no el numerador?

Para entenderlo recuerda que el denominador representa el número de partes en que se divide una cantidad (el numerador). Esta interpretación sólo tiene sentido si el denominador es racional.

Así, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ es la mitad de $\sqrt{2}$, pero ¿qué parte de la unidad representa $\frac{1}{\sqrt{2}}$?

5.5. Racionalización

Al dividir un número real entre otro número real pueden aparecer expresiones en cuyo denominador haya algún radical:

$$\frac{2}{\sqrt{7}} \qquad \frac{5}{\sqrt[3]{5}} \qquad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

Cuando nos encontramos con una expresión de este tipo, se acostumbra a buscar otra equivalente en cuyo denominador no aparezcan radicales; es decir, se *racionaliza* el denominador.

Racionalizar el denominador de una expresión consiste en hallar otra expresión equivalente sin radicales en el denominador.

Para racionalizar multiplicamos el numerador y el denominador por una misma expresión de forma que desaparezca el radical del denominador.

Aprendamos con un ejemplo cómo hacerlo.

MUCHO OJO

Para **racionalizar** el denominador de una expresión:

- Si es de la forma $a\sqrt{b}$ multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{b}$.
- Si es de la forma $a\sqrt[n]{b^m}$ con $n > m$, multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt[n]{b^{n-m}}$.
- Si es de la forma $a \pm \sqrt{b}$ o $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, multiplicamos el numerador y el denominador por la expresión conjugada correspondiente.

ejemplo 9

Racionaliza:

a) $\frac{2}{\sqrt{7}}$ *b)* $\frac{5}{\sqrt[3]{5}}$ *c)* $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

a) Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{7}$.

$$\frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}} = \frac{2\cdot\sqrt{7}}{7}$$

b) Eliminaremos la raíz del denominador multiplicando por un radical del mismo índice, de modo que se obtenga una potencia de exponente igual a este índice.

$$\frac{5}{\sqrt[3]{5}} = \frac{5\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}} = \frac{5\cdot\sqrt[3]{5^2}}{5} = \sqrt[3]{5^2}$$

c) Multiplicamos por la expresión conjugada del denominador.

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{5-2} = \frac{\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{3}$$

Actividades

43 Racionaliza estas expresiones.

a) $\frac{1}{\sqrt{8}}$ c) $\frac{1}{5+\sqrt{2}}$ e) $\frac{9}{\sqrt{14}+\sqrt{10}}$

b) $\frac{-17}{2\sqrt[3]{17}}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{15}}$ f) $\frac{-2\sqrt{5}}{-2+\sqrt{6}}$

44 Efectúa las siguientes sumas de expresiones fraccionarias. Previamente debes racionalizar cada uno de los sumandos.

a) $\frac{1}{1-\sqrt{2}} + \frac{3}{1+\sqrt{2}}$ b) $\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

6 Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Ahora, ampliaremos el estudio de las ecuaciones: trataremos las de primer grado con dos incógnitas.

Observa cómo procedemos para traducir la siguiente frase al lenguaje algebraico:

El triple de un número más otro número es igual a 5.

Escogemos las letras con las que representaremos las incógnitas.	x para el primer número y para el segundo número
Traducimos al lenguaje algebraico la primera parte del enunciado.	El triple del primer número: $3x$
Traducimos al lenguaje algebraico la segunda parte del enunciado.	El segundo número: y
Escribimos la ecuación correspondiente al enunciado completo.	$3x + y = 5$

En la ecuación obtenida, $3x + y = 5$, aparecen dos incógnitas (x e y) con exponente 1. Es una *ecuación de primer grado con dos incógnitas.*

Una ecuación es de **primer grado con dos incógnitas** si, una vez efectuadas las operaciones y reducidos sus términos semejantes, aparecen dos incógnitas cuyo máximo exponente es 1.

Veamos si la ecuación anterior, $3x + y = 5$, se cumple al dar diferentes valores a x e y.

x	y	Primer miembro ($3x$)	Segundo miembro (y)	¿Se cumple la igualdad?
–1	8	–3	8	Sí
2	4	6	4	No

Observamos que la igualdad sólo se verifica para algunos pares de valores de x e y.

Una **solución** de la ecuación es cada par de valores numéricos de las incógnitas que hacen cierta la igualdad.

Así, el par de valores $x = -1$, $y = 8$ es una solución de la ecuación anterior.

MUCHO OJO

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

Según los valores de las incógnitas, la igualdad puede cumplirse o puede no cumplirse.

Actividades

45 Redacta un enunciado que pueda expresarse algebraicamente mediante una ecuación de primer grado con dos incógnitas.

— Escribe la ecuación que corresponde al enunciado.

Resolución

Para hallar soluciones de una ecuación de primer grado con dos incógnitas procederemos del siguiente modo:

<table>
<tr><th>Procedimiento</th><th>Ejemplo</th></tr>
<tr><td>Despejamos una de las incógnitas, por ejemplo la y.</td><td>Para ello, transponemos el primer término.
$y = 5 - 3x$</td></tr>
<tr><td>Asignamos valores cualesquiera a la otra incógnita, x, para calcular, a continuación, los correspondientes a la y.
De este modo, podemos construir una tabla de soluciones.</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>$y = 5 - 3x$</th></tr>
<tr><td>-2</td><td>$5 - 3\cdot(-2) = 11$</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>$5 - 3\cdot(-1) = 8$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$5 - 3\cdot 0 = 5$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$5 - 3\cdot 1 = 2$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$5 - 3\cdot 2 = -1$</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

FÍJATE

Para cada valor arbitrario de *x* podemos obtener un valor de *y*.

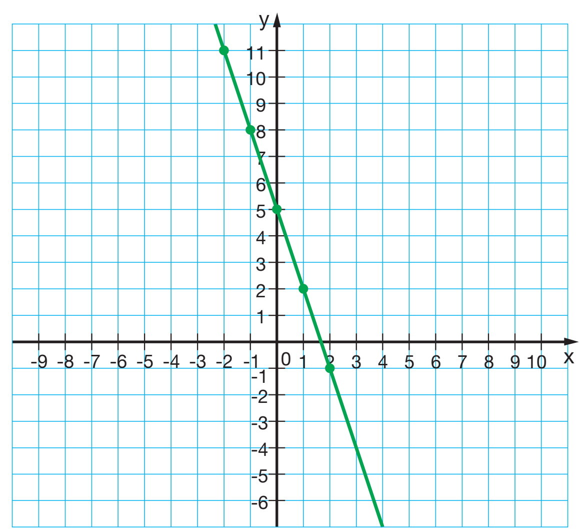
Como *x* puede tomar cualquier valor, una ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene **infinitas soluciones.**

Observamos que los pares de valores $x = -2$, $y = 11$; $x = -1$, $y = 8$; $x = 0$, $y = 5$; $x = 1$, $y = 2$; $x = 2$, $y = -1$ son soluciones de la ecuación.

Representación gráfica de las soluciones

Las soluciones de una ecuación de primer grado con dos incógnitas pueden representarse gráficamente en un sistema de coordenadas cartesianas. Para ello, asignamos a cada par de valores *x* e *y* que sean solución de la ecuación el punto del plano que tiene estos valores por coordenadas: *(x, y)*.

Si pudiéramos obtener todas las soluciones de la ecuación $3x + y = 5$ y las representáramos gráficamente, obtendríamos la recta de la figura de la derecha.



Fíjate en que la representación gráfica de las soluciones de una ecuación de primer grado con dos incógnitas es una recta.

Actividades

46 Traduce al lenguaje algebraico el siguiente enunciado.

«La suma del doble de un número más otro número es igual a 4.»

— Haz una tabla con cinco soluciones de la ecuación obtenida. A continuación, represéntalas.

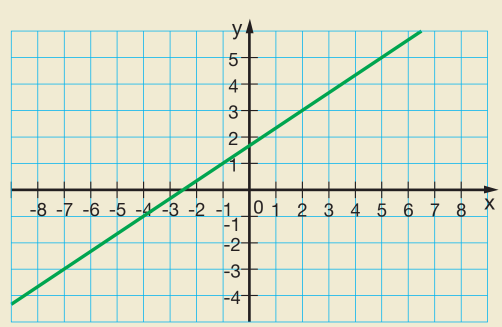
47 Representa gráficamente las soluciones de estas ecuaciones.

a) $2y = 3x + 4$ b) $2(x + 1) = y + 3$

48 Encuentra las soluciones de la siguiente ecuación $3x - 2(y - 3) = 5$ para estos valores.

$$y = -1\ ;\ y = \frac{1}{2}\ ;\ y = 2$$

En la gráfica siguiente hemos representado las soluciones de la ecuación $3y = 2x + 5$.



Copia el plano, señala tres puntos de la recta y comprueba que sus coordenadas correspondan a soluciones de la ecuación.

7 Sistemas de ecuaciones

Puede darse el caso de que dos ecuaciones deban cumplirse al mismo tiempo. Lee el siguiente enunciado:

La suma de dos números es igual a 5. Además, al restar 4 al doble del primer número, obtenemos el segundo.

Nos hacen falta dos ecuaciones para traducirlo al lenguaje algebraico.

La suma de dos números es igual a 5. → $x + y = 5$

$2x - 4 = y$ ← El doble del primero menos 4 es igual al segundo.

Estas dos ecuaciones que deben cumplirse a la vez constituyen un *sistema de ecuaciones.*

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones que deben verificarse simultáneamente.

Un sistema de ecuaciones se escribe agrupando las ecuaciones que lo forman con una llave.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2x - 4 &= y \end{aligned}\right\}$$

Acabamos de ver que una ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene infinitas soluciones, pero debemos determinar cuántos valores de las incógnitas verifican simultáneamente las dos ecuaciones.

Cada par de valores x e y que verifica simultáneamente todas las ecuaciones de un sistema es una **solución** del sistema.

Del mismo modo que dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones, dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si tienen las **mismas soluciones.**

Así, los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x - y &= 6 \\ 3x + 3y &= 18 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 5x + 2y &= 24 \\ 11x + 5y &= 54 \end{aligned}$$

son equivalentes puesto que tienen las mismas soluciones.

Actividades

49 Expresa, en tu cuaderno, el siguiente enunciado mediante un sistema de ecuaciones: «La edad de un hijo es cuatro veces menor que la de su padre y hace seis años era siete veces menor».

50 Comprueba si el par de valores (–7, –5) es una solución del siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 7 \\ 7x + 8y &= -105 \end{aligned}$$

7.1. Resolución gráfica

Resolver un sistema de ecuaciones consiste en encontrar los valores de las incógnitas que verifiquen a la vez todas las ecuaciones.

La resolución gráfica de un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas consiste en representar las rectas correspondientes a las soluciones de cada una de las ecuaciones del sistema. Los **puntos comunes** a ambas rectas nos proporcionarán las **soluciones** del sistema.

Sepamos ahora cómo resolver gráficamente el sistema planteado en la página anterior.

ejemplo **10**

Halla gráficamente la solución del siguiente sistema.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2x - 4 &= y \end{aligned}\right\}$$

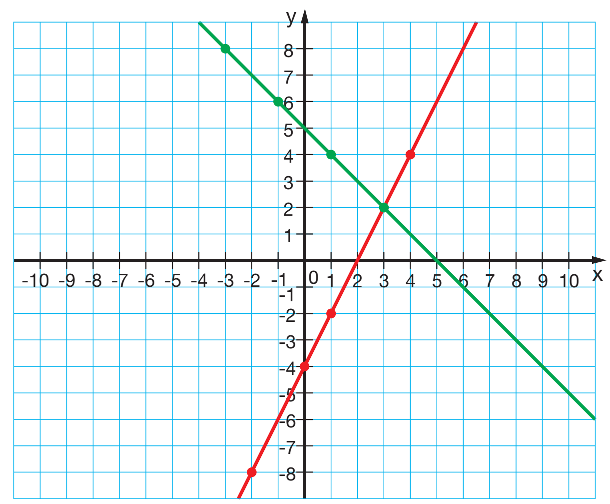
— En primer lugar, despejamos ***y*** en la primera ecuación. En la segunda ecuación no es necesario hacerlo.

$$\left.\begin{aligned} y &= 5 - x \\ y &= 2x - 4 \end{aligned}\right\}$$

— Construimos una tabla de soluciones de cada ecuación asignando valores arbitrarios a ***x*** y calculando los correspondientes a la ***y***.

x	Primera ecuación $y = 5 - x$	x	Segunda ecuación $y = 2x - 4$
-3	$5 - (-3) = 8$	-2	$2 \cdot (-2) - 4 = -8$
-1	$5 - (-1) = 6$	0	$2 \cdot 0 - 4 = -4$
1	$5 - 1 = 4$	1	$2 \cdot 1 - 4 = -2$
3	$5 - 3 = 2$	4	$2 \cdot 4 - 4 = 4$

— Representamos gráficamente las soluciones de cada una de las ecuaciones en un sistema de coordenadas cartesianas.



— Las dos rectas se cortan en el punto (3, 2), por lo que $x = 3$, $y = 2$ es la solución del sistema.

— Comprobamos el resultado obtenido. Para ello, sustituimos los valores encontrados en las dos ecuaciones y verificamos que se cumplen.

Primera ecuación	Segunda ecuación
$x + y = 5$	$2x - 4 = y$
$3 + 2 = 5$	$2 \cdot 3 - 4 = 2$
$5 = 5$	$2 = 2$

Actividades

51 Representa gráficamente las soluciones de las ecuaciones de los siguientes sistemas.

a) $\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 1 \\ x + 2y &= 11 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y &= 11 \\ x - 2y &= 2 \end{aligned}\right\}$

— Escribe la solución de cada sistema y compruébalas.

52 Resuelve gráficamente estos sistemas.

a) $\left.\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ x + 3y &= 7 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 3x + 2y &= 18 \\ -2x - 6y &= -12 \end{aligned}\right\}$

— Comprueba las soluciones.

— ¿Se trata de dos sistemas equivalentes?

7.2. Métodos algebraicos

La resolución gráfica de sistemas puede ser imprecisa en caso de que las soluciones no sean números enteros.

Así, para resolver sistemas, se utilizan habitualmente los denominados métodos algebraicos: *método de sustitución, método de igualación* y *método de reducción.*

Método de sustitución

Para resolver un sistema de ecuaciones por el método de sustitución, en primer lugar despejamos una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituimos la expresión obtenida en la otra ecuación.

Veamos el proceso de resolución de un sistema por este método.

Procedimiento	Ejemplo : $\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= -11 \\ 2x - 5y &= -11 \end{aligned}\right\}$
Despejamos ***x*** en la primera ecuación.	$x = \dfrac{-11 + 2y}{3}$
Sustituimos la ***x*** de la segunda ecuación por la expresión obtenida.	$2\left(\dfrac{-11 + 2y}{3}\right) - 5y = -11$
Resolvemos la ecuación resultante, que es una ecuación de primer grado con una incógnita.	$\dfrac{-22 + 4y}{3} - 5y = -11$ $3\left(\dfrac{-22 + 4y}{3} - 5y\right) = 3(-11)$ $-22 + 4y - 15y = -33$ $4y - 15y = -33 + 22$ $-11y = -11$ $y = 1$
Sustituimos el valor de ***y*** hallado en la expresión donde aparece despejada ***x***.	$x = \dfrac{-11 + 2y}{3} = \dfrac{-11 + 2 \cdot 1}{3} =$ $= \dfrac{-11 + 2}{3} = \dfrac{-9}{3} = -3$
Escribimos la solución del sistema.	$x = -3,\ y = 1$

Actividades

53 Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución.

a) $\left.\begin{aligned} 5x - 8y &= -13 \\ 2x - 3y &= -4 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 5x - y &= -3 \\ -2x + y &= 0 \end{aligned}\right\}$

54 Resuelve este sistema por el método de sustitución y por el método gráfico. Comprueba que obtienes la misma solución.

$$\left.\begin{aligned} 2y - 3x &= 7 \\ y - 2x &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Método de igualación

Este método consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar las expresiones obtenidas.

Observa el procedimiento que seguimos para resolver un sistema por el método de igualación.

Procedimiento	Ejemplo : $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = -11 \\ 2x - 5y = -11 \end{array}\right\}$
Despejamos x en las dos ecuaciones.	$3x - 2y = -11 \Rightarrow x = \dfrac{-11 + 2y}{3}$ $2x - 5y = -11 \Rightarrow x = \dfrac{-11 + 5y}{2}$
Igualamos las expresiones obtenidas.	$\dfrac{-11 + 2y}{3} = \dfrac{-11 + 5y}{2}$
Resolvemos la ecuación resultante, que es una ecuación de primer grado con una incógnita.	$6\left(\dfrac{-11 + 2y}{3}\right) = 6\left(\dfrac{-11 + 5y}{2}\right)$ $2(-11 + 2y) = 3(-11 + 5y)$ $-22 + 4y = -33 + 15y$ $4y - 15y = -33 + 22$ $-11y = -11$ $y = 1$
Sustituimos el valor de y hallado en cualquiera de las dos expresiones en que aparece despejada x.	$x = \dfrac{-11 + 2y}{3} = \dfrac{-11 + 2 \cdot 1}{3} =$ $= \dfrac{-11 + 2}{3} = \dfrac{-9}{3} = -3$
Escribimos la solución del sistema.	$x = -3,\ y = 1$

Actividades

55 Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación.

a) $\left.\begin{array}{r} y - x = 3 \\ 2y + 3x = 16 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 2y - 3x = 6 \\ y + x = 8 \end{array}\right\}$

56 Soluciona este sistema gráficamente y por el método de igualación. Comprueba que obtienes el mismo resultado.

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 11 \end{array}\right\}$$

57 Resuelve el siguiente sistema por el método de igualación y por el método de sustitución.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 2y = 8 \\ 3x + 2y = 11 \end{array}\right\}$$

Método de reducción

Para resolver un sistema de ecuaciones por el método de reducción, multiplicaremos cada ecuación por el número adecuado y así, al sumar las dos ecuaciones resultantes, obtendremos una ecuación con una sola incógnita.

Fíjate en el proceso de resolución de un sistema por el método de reducción.

Procedimiento	Ejemplo : $\left.\begin{matrix} 3x - 2y = -11 \\ 2x - 5y = -11 \end{matrix}\right\}$
Multiplicamos la primera ecuación por 2 y la segunda ecuación por −3. De este modo, los coeficientes de la *x* en las dos ecuaciones serán números opuestos.	$3x - 2y = -11 \xrightarrow{\cdot 2} 6x - 4y = -22$ $2x - 5y = -11 \xrightarrow{\cdot(-3)} -6x + 15y = 33$
Sumamos miembro a miembro las dos ecuaciones y despejamos la *y*.	$\begin{array}{r} 6x - 4y = -22 \\ -6x + 15y = 33 \\ \hline 11y = 11 \Rightarrow y = 1 \end{array}$
Para hallar el valor de *x* podemos sustituir en cualquiera de las ecuaciones iniciales el valor de *y* hallado y, a continuación, despejar *x*. También podemos hallar el valor de *x* utilizando de nuevo el mismo método para eliminar las *y*. Para ello, multiplicamos la primera ecuación por 5 y la segunda por −2.	$3x - 2y = -11 \xrightarrow{\cdot 5} 15x - 10y = -55$ $2x - 5y = -11 \xrightarrow{\cdot(-2)} -4x + 10y = 22$
Sumamos miembro a miembro las dos ecuaciones y despejamos la *x*.	$\begin{array}{l} 15x - 10y = -55 \\ -4x + 10y = 22 \\ \hline 11x \qquad = -33 \Rightarrow x = -3 \end{array}$
Escribimos la solución del sistema.	$x = -3,\ y = 1$

Actividades

58 Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción.

a) $\left.\begin{matrix} x + y = 4 \\ 2x + 4y = 10 \end{matrix}\right\}$ b) $\left.\begin{matrix} x - 4y = 2 \\ 2x - 5y = 7 \end{matrix}\right\}$

59 Soluciona el siguiente sistema gráficamente a través del método de reducción. Comprueba que obtienes el mismo resultado.

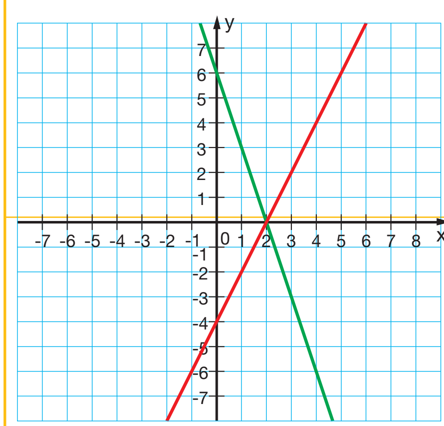
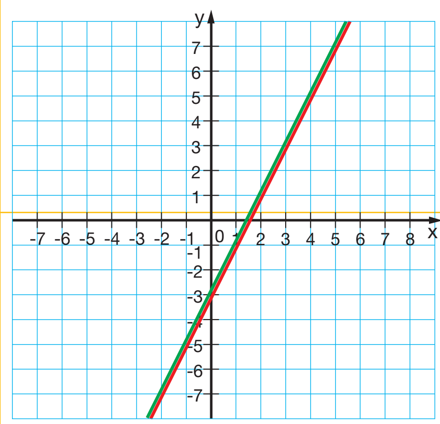
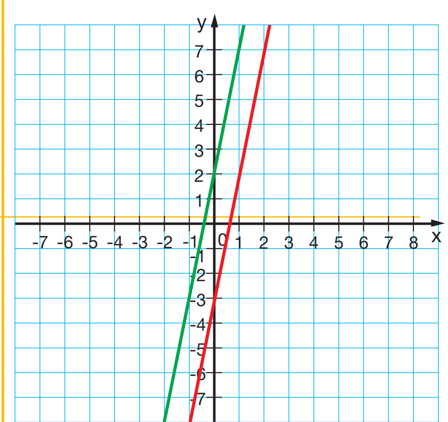
$$\left.\begin{matrix} 2x + 2y = 6 \\ 3x + 4y = 12 \end{matrix}\right\}$$

7.3. Tipos de sistemas

Ya hemos visto que las soluciones de un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas están determinadas por los puntos que tengan en común las rectas obtenidas al representar gráficamente las soluciones de cada ecuación.

Según las soluciones, los sistemas se clasifican en: *compatibles determinados, compatibles indeterminados* e *incompatibles.*

Veamos, a continuación, un ejemplo de cada uno de estos casos.

Sistema compatible determinado	**Sistema compatible indeterminado**	**Sistema incompatible**
$\left.\begin{aligned} 3x + y &= 6 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}\right\}$	$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ -2x + y &= -3 \end{aligned}\right\}$	$\left.\begin{aligned} y - 5x &= 2 \\ 2y - 10x &= -6 \end{aligned}\right\}$
		
Las dos rectas son **secantes:** tienen un **único** punto en común. Las dos rectas se cortan en el punto (2, 0): el sistema tiene **una única solución,** el par de valores formado por $x = 2$ e $y = 0$.	Las dos rectas son **coincidentes:** tienen **todos** los puntos comunes. Todas las soluciones de una ecuación lo son también de la otra. Todos los pares ordenados que satisfacen la ecuación son soluciones. El sistema tiene **infinitas soluciones.**	Las dos rectas son **no intersecables:** no tienen **ningún** punto en común. El sistema **no tiene solución.**

Actividades

60 Resuelve, por el método que prefieras, los sistemas de ecuaciones del cuadro anterior. Comprueba que la solución algebraica coincide con la solución gráfica.

61 Soluciona algebraicamente estos sistemas y clasifícalos en compatibles determinados, compatibles indeterminados o incompatibles.

a) $\left.\begin{aligned} 2x - y &= 2 \\ 3x + y &= 8 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 2x + y &= -3 \\ x - y &= -3 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 3x + 3y &= -6 \end{aligned}\right\}$

d) $\left.\begin{aligned} 2x + y &= 6 \\ 2x + y &= -2 \end{aligned}\right\}$

FÍJATE

Si al resolver un sistema obtenemos:

- $0x = 0$ o bien $0y = 0$, significa que cualquier valor de x o de y cumple la expresión y el sistema es **compatible indeterminado.**
- $0x = a$ o bien $0y = a$, siendo $a \neq 0$, significa que la expresión nunca se cumple y el sistema es **incompatible.**

8 Aplicación a la resolución de problemas

Ya conocemos el procedimiento a seguir para resolver problemas mediante una ecuación de primer grado con una incógnita.

El procedimiento para resolver problemas mediante un sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas es muy parecido. Fíjate en el siguiente ejemplo.

ejemplo **11**

Un número consta de dos cifras que suman 9. Dicho número supera en 9 unidades al que resulta de invertir el orden de sus cifras. ¿De qué número se trata?

- **Lectura atenta del enunciado.** Lee de nuevo el problema y expresa el enunciado con tus palabras.
- **Elección de las incógnitas.** Representamos por x la primera cifra y por y la segunda.
- **Planteamiento del sistema.** Traducimos al lenguaje algebraico cada una de las condiciones.
  - Las dos cifras suman 9.

    $$x + y = 9$$

  - El número es igual al que resulta de invertir el orden de sus cifras más 9.

    Como x es la cifra de las decenas e y la de las unidades, el número será $10x + y$.

    Y el que resulta de invertir el orden de sus cifras será $10y + x$. Por lo tanto, la segunda condición se traduce en:

    $$10x + y = 10y + x + 9$$
    $$9x - 9y = 9$$
    $$x - y = 1$$

  - El enunciado del problema se traduce en el sistema:

    $$\left.\begin{aligned} x + y &= 9 \\ x - y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

- **Resolución del sistema.** Resolvemos el sistema por el método de reducción.

$$\begin{aligned} x + y &= 9 \\ x - y &= 1 \\ \hline 2x \quad &= 10 \Rightarrow x = 5 \end{aligned}$$

$$x + y = 9 \Rightarrow y = 9 - x = 9 - 5 = 4$$

- **Respuesta.** El número que nos piden es el 54.
- **Comprobación.** La suma de las dos cifras es 9 y se cumple $54 = 45 + 9$.

Actividades

62 Tres libros y dos marcadores cuestan $ 25. Dos rotuladores y un libro cuestan $ 9. Calcula el precio de un libro y el de un rotulador.

63 Determina las medidas de los lados de un triángulo isósceles de 50 cm de perímetro sabiendo que el lado desigual mide 5 cm más que cada uno de los lados iguales.

8.1. Pasos para resolver problemas

MUCHO OJO

Los pasos generales del método de resolución de problemas son:

- Comprensión del enunciado
- Planificación de la resolución
- Ejecución del plan de resolución
- Revisión del resultado y del proceso seguido

Algunas veces, la resolución de un problema por métodos aritméticos puede resultar difícil. En estos casos, suelen utilizarse letras para designar los datos desconocidos y traducir el enunciado al lenguaje algebraico, con lo que resolver el problema se reduce a encontrar la solución de una o dos ecuaciones.

En este tema trataremos problemas que pueden resolverse mediante una ecuación de primer grado con una o dos incógnitas o con un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

La resolución de estos problemas requiere seguir una serie de pasos. Obsérvalos en el siguiente ejemplo y fíjate en su relación con el método general de resolución de problemas que recordamos en el cuadro del margen.

Lectura atenta del enunciado. Es fundamental que leas el problema tantas veces como sea necesario para comprender perfectamente el enunciado.

→ *Halla dos números tales que el doble del primero más el segundo sea igual a 25 y al dividir el primero entre el segundo se obtengan 1 de cociente y 2 de resto.*

Elección de las incógnitas. Representamos por x o por otras letras los números que queremos determinar.

→ Representamos por x el primero de los números y por y el segundo.

Planteamiento de la ecuación o del sistema. Traducimos al lenguaje algebraico cada una de las partes del enunciado, de modo que obtengamos una ecuación o un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Resulta de utilidad, sobre todo en problemas geométricos, utilizar figuras o esquemas gráficos en los que aparezcan los datos y las incógnitas.

→

- El doble del primer número más el segundo es igual a 25.

$$2x + y = 25$$

- Al dividir el primero entre el segundo, se obtienen 1 de cociente y 2 de resto.

$$\begin{array}{r|l} x & y \\ \cline{2-2} 2 & 1 \end{array} \quad \rightarrow \quad y \cdot 1 + 2 = x$$

- El sistema obtenido es:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 25 \\ y + 2 = x \end{array}\right\}$$

Resolución de la ecuación o del sistema. Determinamos los valores numéricos de las incógnitas que son solución de la ecuación o del sistema.

→

$$\begin{aligned} 2(y + 2) + y &= 25 \\ 2y + 4 + y &= 25 \\ 3y &= 21 \\ y &= 7 \\ x = 7 + 2 &= 9 \end{aligned}$$

Respuesta. Damos respuesta a la pregunta o preguntas del problema.

→ El primer número es el 9 y el segundo, el 7.

Comprobación. Comprobamos que la solución hallada cumple todas las condiciones del enunciado.

→ Se cumple $2 \cdot 9 + 7 = 25$, y al dividir 9 entre 7 obtenemos 1 de cociente y 2 de resto.

Veamos otros ejemplos en los que aplicamos los pasos que acabamos de describir.

ejemplo 12

Una madre tiene 64 años y su hija, 32. ¿Cuántos años han transcurrido desde que la edad de la madre era el triple de la de su hija?

Lectura atenta del enunciado. Lee de nuevo el problema y expresa el enunciado con tus palabras.

Elección de la incógnita. Representamos por x el número de años que han pasado desde que la edad de la madre era el triple de la de su hija.

Planteamiento de la ecuación. Traducimos al lenguaje algebraico las condiciones del enunciado.

— Edad de la madre hace x años:

$$64 - x$$

— Edad de la hija hace x años:

$$32 - x$$

— El triple de la edad de la hija hace x años:

$$3\,(32 - x)$$

— Hace x años, la edad de la madre era el triple de la de su hija:

$$64 - x = 3\,(32 - x)$$

Resolución de la ecuación

$$64 - x = 3\,(32 - x)$$

$$64 - x = 96 - 3x$$

$$2x = 32$$

$$x = \frac{32}{2} \Leftrightarrow x = 16$$

Respuesta. Han transcurrido 16 años.

Comprobación. Hace 16 años, la edad de la madre era 48 años y la de su hija, 16. Efectivamente, la primera es el triple de la segunda.

$$48 = 3 \cdot 16$$

ejemplo 13

Un concesionario compra un auto y una moto por \$ 12 500 y los vende por \$ 14 350.

¿Cuál fue el precio de compra de cada vehículo si en la venta del auto ganó el 15 % y en la de la moto, el 10 %?

Lectura atenta del enunciado. Vuelve a leer el problema e interpreta el enunciado.

Elección de las incógnitas. Representamos por x el precio de compra del auto y por y el de compra de la moto.

Planteamiento del sistema. Traducimos al lenguaje algebraico las condiciones del enunciado.

— El precio de compra de los dos vehículos es de \$ 12 500.

$$x + y = 12\,500$$

— El precio de venta de los vehículos es de \$ 14 350.

- Precio de venta del auto:

$$x + \frac{15}{100}x = \frac{115}{100}x = 1{,}15\,x$$

- Precio de venta de la moto:

$$y + \frac{10}{100}y = \frac{110}{100}y = 1{,}10\,y$$

- Precio de venta de ambos vehículos:

$$1{,}15\,x + 1{,}10\,y = 14\,350$$

— El enunciado del problema se traduce en el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 12\,500 \\ 1{,}15\,x + 1{,}10\,y &= 14\,350 \end{aligned}\right\}$$

Resolución del sistema. Resolvemos el sistema por cualquiera de los métodos algebraicos y obtenemos:

$$x = 12\,000;\; y = 500$$

Respuesta. El auto costó \$ 12 000 y la moto, \$ 500.

Comprobación. Efectivamente, la suma de 12 000 y 500 es 12 500. Además, se cumple:

$$1{,}15 \cdot 12\,000 + 1{,}10 \cdot 500 = 14\,350$$

Actividades

64 Un padre tiene 35 años y su hijo, 5. ¿Al cabo de cuántos años la edad del padre será el cuádruple de la de su hijo?

65 Un comerciante compra dos productos por \$ 350 y los vende por \$ 325. ¿Cuánto costó cada producto si en la venta de uno pierde el 10 % y en la del otro, el 5 %?

Cómo resolver problemas

Resuelve el siguiente sistema.

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-3}{4}+\frac{y-2}{5} &= 2(x-2)-y \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2} &= x-y+1 \end{aligned}\right\}$$

Comprensión del enunciado

Al leer el enunciado, advertimos que se trata de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.

Planificación de la resolución

Para resolver el sistema:

— Primero, aplicaremos las propiedades de las ecuaciones para transformar el sistema dado en otro equivalente que tenga la forma:

$$\left.\begin{aligned} ax+by &= c \\ a'x+b'y &= c' \end{aligned}\right\}$$

Siendo *a, b, c, a′ , b′* y *c′* números reales.

— A continuación, utilizaremos uno de los métodos algebraicos que hemos estudiado.

Ejecución del plan de resolución

— Transformamos la primera ecuación. Empezamos por eliminar los paréntesis y los denominadores.

$$\frac{x-3}{4}+\frac{y-2}{5} = 2x-4-y$$

$$20\left(\frac{x-3}{4}+\frac{y-2}{5}\right) = 20(2x-4-y)$$

$$5(x-3)+4(y-2) = 40x-80-20y$$

$$5x-15+4y-8 = 40x-80-20y$$

Transponemos términos.

$$5x-40x+4y+20y = -80+15+8$$

Reducimos términos semejantes.

$$-35x+24y = -57$$

— Transformamos la segunda ecuación. En primer lugar, eliminamos los denominadores.

$$6\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{2}\right) = 6(x-y+1)$$

$$2x+3y = 6x-6y+6$$

Transponemos términos.

$$2x-6x+3y+6y = 6$$

Reducimos términos semejantes.

$$-4x+9y = 6$$

— Escribimos el sistema obtenido que es equivalente al del enunciado.

$$\left.\begin{aligned} -35x+24y &= -57 \\ -4x+9y &= 6 \end{aligned}\right\}$$

— Resolvemos el sistema aplicando el método de igualación.

Despejamos *y* en cada una de las ecuaciones.

$$-35x+24y=-57 \;\rightarrow\; y=\frac{-57+35x}{24}$$

$$-4x+9y=6 \;\rightarrow\; y=\frac{6+4x}{9}$$

Igualamos las expresiones obtenidas y resolvemos la ecuación de primer grado resultante.

$$\frac{-57+35x}{24}=\frac{6+4x}{9}$$

$$72\left(\frac{-57+35x}{24}\right)=72\left(\frac{6+4x}{9}\right)$$

$$-171+105x = 48+32x$$

$$105x-32x = 48+171$$

$$73x = 219$$

$$x=\frac{219}{73} \qquad x=3$$

Sustituimos el valor de *x* en la primera expresión en la que aparece despejada *y:*

$$y=\frac{-57+35\cdot 3}{24}=\frac{-57+105}{24}=\frac{48}{24}=2$$

— La solución del sistema es $x = 3$ e $y = 2$.

Revisión del resultado y del proceso seguido

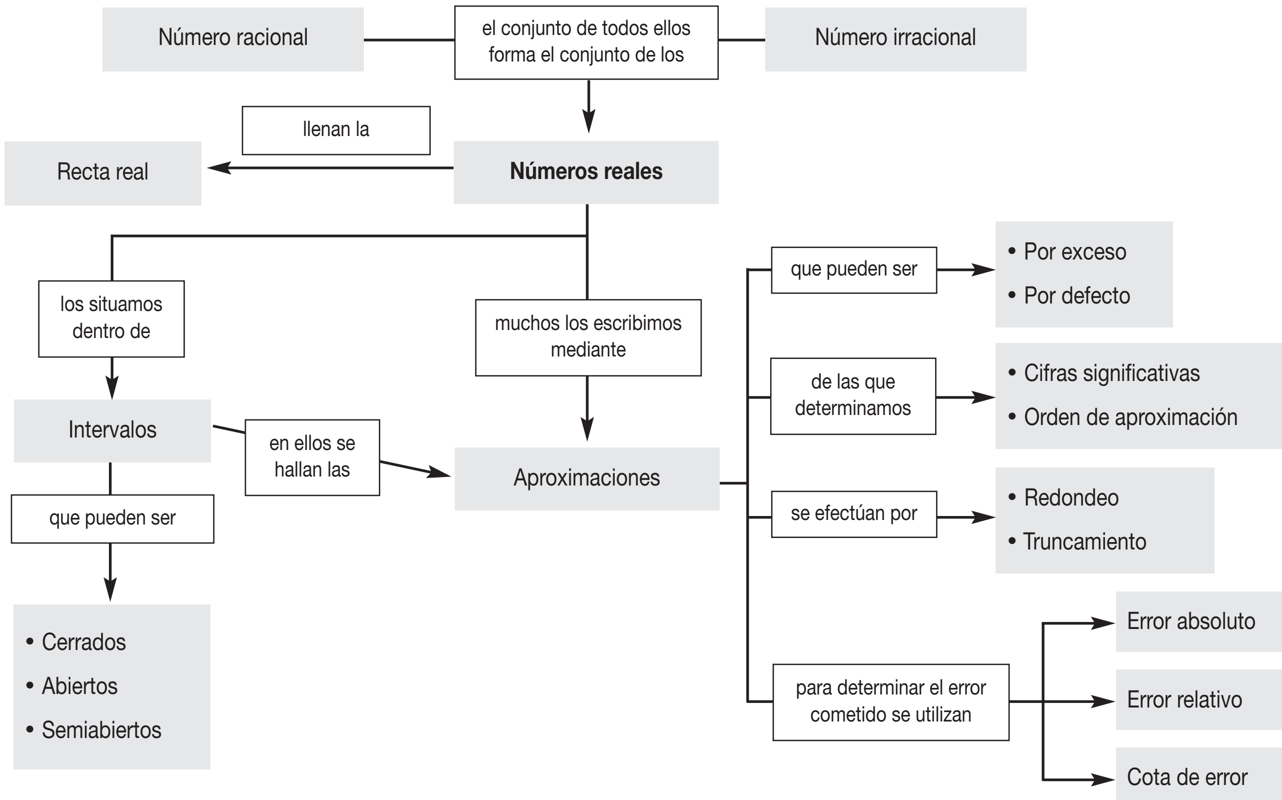
Para comprobar que la solución obtenida es correcta, debemos sustituir los valores hallados de las incógnitas en cada una de las ecuaciones del sistema inicial y verificar que se cumplen.

Actividades

66 Resuelve el siguiente sistema.

$$\left.\begin{aligned} \frac{4x-2}{2}-\frac{5(2y-3x)}{8} &= y \\ \frac{6x+y}{3}-\frac{3x-4(2-y)}{5} &= x+y-2 \end{aligned}\right\}$$

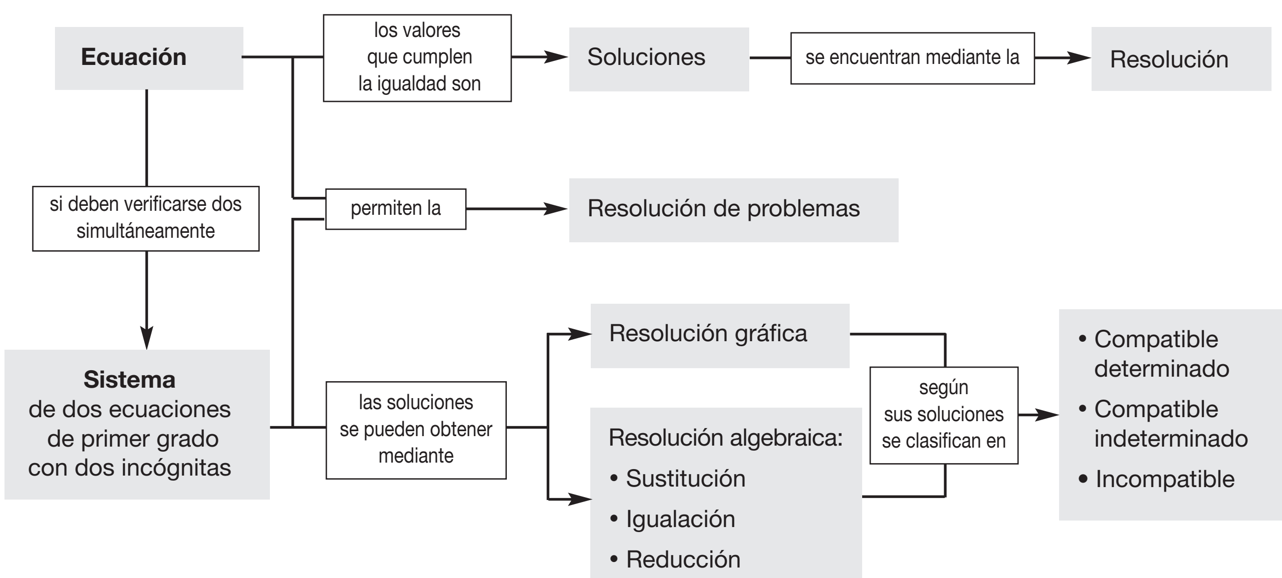
En resumen



- Una **identidad** es una igualdad que se verifica para cualquier valor numérico de las letras que en ella aparecen.
- Una **ecuación** es una igualdad que se verifica para algunos valores numéricos de las letras que en ella aparecen.

- **Propiedades** de las ecuaciones:

  1. Si sumamos un mismo número o una misma expresión algebraica a los dos miembros de una ecuación, obtenemos otra ecuación equivalente a la primera.
  2. Si multiplicamos por un mismo número distinto de 0 los dos miembros de una ecuación, obtenemos otra ecuación equivalente a la primera.



Ejercicios y problemas integradores

- Considerando los tiempos obtenidos por sus rivales, un ciclista debe recorrer la prueba contra reloj de la vuelta a la República en un máximo de 1 hora y 45 minutos para conseguir la camiseta amarilla del puntero. Cuando está corriendo la etapa, el director de su equipo le comunica que le faltan 20 km para llegar a la meta y que el tiempo realizado hasta ese momento es de 1 hora y 15 minutos.

¿Qué velocidad media debe desarrollar durante el resto de la etapa para conseguir la camiseta amarilla?

FÍJATE

Cada año en el país se lleva a cabo la vuelta ciclística a la República, en la que participan equipos nacionales e internacionales.

Solución

Para determinar la velocidad media, que relaciona la distancia con el tiempo, conocemos que le falta recorrer 20 km para la llegada a la meta y el tiempo que le queda para cubrir esa distancia es la diferencia entre el máximo de 1 hora y 45 minutos con lo ya transcurrido de 1 hora y 15 minutos, realicemos las operaciones.

$$Tiempo = t = (1h45\ min) - (1h15\ min) = 30\ min$$

El tiempo de 30 *min* equivale a media hora 0,5 *h*. Ahora determinemos la velocidad.

$$Velocidad = \frac{distancia}{tiempo} = \frac{20\ km}{0{,}5\ h} = 40\ km/h$$

R: La velocidad que debe desarrollar durante el resto de la etapa para conseguir la camiseta amarilla es 40 *km/h*

- Una persona tiene un sueldo mensual de $ 934,39 totales.

a) Calcula el sueldo neto que le han pagado si le descuentan la décima parte del sueldo por impuesto a la renta y un 9,35 % de afiliación al Seguro Social.

b) Calcula su sueldo anual total y neto sabiendo que cobra dos sueldos extras de $ 745,97 (uno en junio y otro en diciembre), los cuales no experimentan descuentos de ningún tipo.

Solución

a) Organicemos la información, el sueldo mensual total es de $ 934,39. Para calcular el sueldo mensual neto hay que restar la décima parte del impuesto como el 9,35 % del Seguro Social.

$$Impuesto = sueldo \div 10 = 934{,}39 \div 10 = 93{,}439 \approx 93{,}44$$

$$Seguro\ Social = sueldo \times 9{,}35\ \% = 934{,}39 \times \frac{9{,}35}{100} = 87{,}365\ 465 \approx 87{,}37$$

$$Sueldo\ mensual\ neto = 934{,}39 - 93{,}44 - 87{,}37 = 753{,}58$$

b) El sueldo anual total es doce veces el sueldo mensual más los dos sueldos extras.

$$Sueldo\ total\ anual = 12 \times 934{,}39 + 2 \times 745{,}97 = 12\ 704{,}62$$

El sueldo anual neto es doce veces el sueldo neto mensual más los dos sueldos extras.

$$Sueldo\ neto\ anual = 12 \times 753{,}58 + 2 \times 745{,}97 = 10\ 534{,}90$$

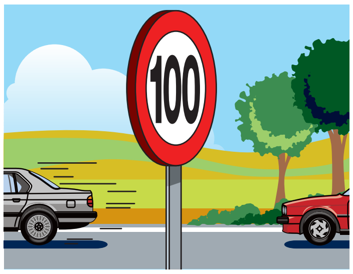
R: a) El sueldo mensual neto es de $ 753,58.

b) El sueldo total anual es de $ 12 704,62 y el sueldo neto anual es de $ 10 534,90.

- Dos automóviles salen simultáneamente de dos ciudades, distantes 680 *km*, y circulan el uno hacia el otro. El primero se desplaza a 80 *km/h* y el segundo a 90 *km/h*. Calcula el tiempo que tardarán en encontrarse.

Solución

Entre los dos vehículos deben recorrer los 680 *km* por lo que la suma de las dos distancias es ese valor. El primer vehículo recorre 80 *km/h*, en el tiempo *t* hasta el encuentro recorre 80 *t*, el segundo vehículo recorre 90 *km/h*, en el tiempo *t* hasta el encuentro recorre 90 *t*; ahora sumemos las distancias.



$$distancia = 680 = 80t + 90t = 170t$$

En la ecuación 680 = 170 *t* hallaremos el tiempo $t = \frac{680}{170} = 4h$

R: El tiempo que tardarán en encontrarse es 4 horas.

- Un agricultor quiere cercar una parcela rectangular para proteger el cultivo. Uno de los lados mayores del rectángulo debe cerrarse con un cercado que cuesta $ 500 por hectómetro *(hm)*. En los otros tres lados puede utilizarse una valla cuyo precio es de $ 300 por hectómetro. Sabiendo que el perímetro de la parcela es de 30 *(hm)* y que el lado largo del rectángulo mide 2 *(hm)* más que el lado corto, ¿cuántos metros de cercado utilizará? ¿Cuánto tendrá que pagar?

Solución

Entendamos la información, el terreno es rectangular, en uno de los lados (lado mayor) debe colocarse un cercado, mientras que en los otros tres lados (un lado mayor y los dos menores) debe colocarse una valla. El perímetro (de los cuatro lados) es de 30 *hm* y la diferencia de los lados es de 2 *hm*, en primer lugar determinemos la medida de los lados.

$$Perímetro = 2\ lados\ grandes + 2\ lados\ pequeños = 30\ hm$$

De ellos diremos que 1 *lado grande* + 1 *lado pequeño* =15 *hm* y el lado grande es 2 *hm* mayor que el pequeño *lado grande* = *lado pequeño* + 2, entonces reemplazando se tiene que *lado pequeño* + 2 + *lado pequeño* =15 *hm* de lo cual *2 lados pequeños* = 13 *hm*, lo que nos da que el *lado pequeño* = 6,5 *hm* y concluimos que *lado grande* = 8,5 *hm*.

Con ello diremos que debe colocarse cercado en 8,5 *hm*.

En el resto del perímetro 30 – 8,5 = 21,5 *hm* debe colocarse la valla.

En cuanto al costo, debe aplicarse los valores para el cercado y para la valla para sumarlos y obtener el costo total.

$$Costo = costo\ de\ cercado + costo\ de\ valla$$
$$Costo = \$\ 500 \times 8,5 + \$\ 300 \times 21,5$$
$$Costo = \$\ 10\ 700$$

R: El costo para colocar el cercado y la valla es $ 10 700.

Ejercicios y problemas

Comprensión de conceptos y conocimiento de procesos

En tu cuaderno

De los naturales a los reales

67 Indica si son ciertas o falsas estas afirmaciones.

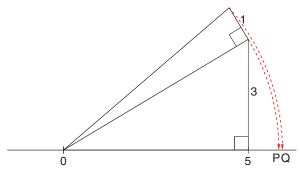
a) Entre $\sqrt{5}$ y $\sqrt{17}$ hay un único número entero.

b) Con los números reales podemos representar todos los puntos de la recta.

c) Todos los números decimales son racionales.

d) Los números irracionales son números reales.

68 ¿Qué números irracionales están representados gráficamente sobre la recta real por las letras *P* y *Q* de la siguiente figura?



69 ¿Cuál es el intervalo común a los intervalos $\left(-3, \sqrt{5}\,\right]$ y $\left[-\sqrt{2}, 7\right)$? Represéntalo gráficamente.

70 Contesta estas preguntas sabiendo que *a* es un número del intervalo [–2, 6) y *b* es un número del intervalo [4, 8].

a) ¿El número *a* es del intervalo [–2, 8]? ¿El número *b* es del intervalo [–2, 4]?

b) ¿A qué intervalo pertenece *a* + *b*?

Las aproximaciones en los números reales

71 Da un valor redondeado de:

a) $\sqrt{3}$ hasta las milésimas.

b) $\dfrac{1}{5}$ hasta las décimas.

c) 4,2176... hasta las centésimas.

Potencias de base real y exponente entero

72 Expresa las siguientes operaciones en forma de una sola potencia de base positiva.

a) $(+2)^3 \cdot (+2)^{-4} \cdot (-2)^4$

b) $(+7)^{-2} \cdot (7^3)^3 \cdot (-7)^4$

73 Expresa el resultado de cada una de estas operaciones en forma de una sola potencia.

a) $\dfrac{(-5)^2 \cdot (+5)^5}{5^2}$ b) $\dfrac{(-9)^5 \div (-9)^{-4}}{(-9)^{-3} \cdot (-9)^2}$

74 Transforma las siguientes potencias para que tengan exponente positivo.

a) 12^{-5} b) $(a-1)^{-3}$ c) $\left(\dfrac{8x}{3}\right)^{-2}$

Radicales

75 Extrae todos los factores que puedas de los radicales siguientes y di cuáles son semejantes a $\sqrt{2}$.

a) $\sqrt{27}$ b) $\sqrt{1\,458}$ c) $\sqrt{450}$ d) $\sqrt{8}$

76 Calcula:

a) $3\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$

b) $-3\sqrt{2} - 4 \cdot 3\sqrt{3} - 7\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$

c) $\dfrac{3}{2}\sqrt{15} + \dfrac{2}{3}\sqrt{15} - \dfrac{1}{6}\sqrt{15}$

d) $\dfrac{7}{2}\sqrt{11} - \dfrac{4}{3}\sqrt{7} - \dfrac{5}{6}\sqrt{11} + \dfrac{-9}{4}\sqrt{7} + \sqrt{7}$

77 Calcula las siguientes potencias y extrae todos los factores que puedas del radical.

a) $\left(\sqrt{3a^2b}\right)^3$ b) $75\left(\sqrt{27a^2b^3}\right)^5$

78 Extrae los factores que puedas de los radicales y calcula los resultados de las siguientes operaciones.

a) $3\sqrt{2} - 5\sqrt{8} + 7\sqrt{50} - 4\sqrt{18}$

b) $-3\sqrt{27} - 2\sqrt{125} + 8\sqrt{75} - 10\sqrt{20}$

c) $7\sqrt{625} - \dfrac{2}{5}\sqrt{5} + \dfrac{3}{7} + 6\sqrt{125}$

79 Introduce en los radicales los factores que están fuera de ellos.

a) $7a^2\sqrt{b}$ c) $18a\sqrt{6b}$

b) $11^3a^2b\sqrt{11a^2b}$ d) $\dfrac{20a^3b^5}{7c^3} \cdot \sqrt{9c}$

80 Simplifica al máximo las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{25 \cdot \sqrt{2 \cdot 81}}{\sqrt{2^6 \cdot 3^3}}$ c) $\dfrac{\sqrt{18a^3b^2}}{\sqrt{27a^2b}}$

b) $\dfrac{\sqrt{7\,776}}{\left(\sqrt{729}\right)^3}$ d) $\dfrac{\sqrt{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^7}}{1500 \cdot \sqrt{15}}$

81 Calcula:

a) $\sqrt{\sqrt{625}}$ b) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{64}$ c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{729}}}$

82 Escribe el conjugado de estas expresiones.

a) $1 + \sqrt{2}$ b) $5 - \sqrt{17}$ c) $\sqrt{3} + \sqrt{8}$

83 Racionaliza las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$ e) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}$ d) $\dfrac{-1+\sqrt{7}}{-1+\sqrt{6}}$ f) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{11}}{\sqrt{10}-\sqrt{6}}$

84 Al calcular $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ se obtiene un número entero. Halla dicho número.

85 ¿Los segmentos de longitudes $3-\sqrt{2}$ cm y $2+\sqrt{8}$ cm son proporcionales a los segmentos de longitudes $4+\sqrt{2}$ cm y $8+6\sqrt{2}$ cm?

86 Completa con tres términos más cada una de las siguientes series en las que cada término se obtiene multiplicando el anterior por una misma expresión.

a) $3,\ 3\sqrt{5},\ 15\ldots$

b) $\sqrt{2},\ 2,\ 2\sqrt{2}\ldots$

c) $1+\sqrt{2},\ \sqrt{2}+2,\ 2+2\sqrt{2}\ldots$

d) $5,\ 5-\sqrt{5},\ 10-6\sqrt{5}\ldots$

Potencias de base real y exponente racional

87 Enuncia las propiedades de las potencias de base un número real y exponente un número racional.

— Explica la relación que existe entre una potencia de exponente racional y una raíz enésima.

88 Expresa como potencias de exponente racional:

$$\sqrt{99}\ ;\ \sqrt{365}\ ;\ \sqrt[3]{44}\ ;\ \sqrt[5]{75}\ ;\ \sqrt[7]{3}\ ;\ \sqrt[3]{18}\ ;\ \sqrt{243}$$

89 Expresa en forma de raíz:

$$3^{\frac{1}{2}}\ ;\ 4^{\frac{1}{3}}\ ;\ 7^{\frac{1}{7}}\ ;\ 9^{\frac{2}{3}}\ ;\ 25^{\frac{3}{4}}$$

90 El número $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ puede expresarse en forma de potencia de exponente negativo como $3^{-\frac{1}{2}}$. Expresa de la misma forma:

$$\frac{1}{\sqrt{5}};\ \frac{1}{\sqrt{7}};\ \frac{1}{\sqrt{6}};\ \frac{3}{\sqrt{19}};\ \frac{-2}{\sqrt{13}}$$

Concepto de ecuación

91 Determina cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas y transforma las falsas en verdaderas.

a) Todas las ecuaciones son expresiones algebraicas.

b) Todas las ecuaciones tienen dos términos.

c) En todas las ecuaciones aparecen dos miembros relacionados mediante el signo =.

Ecuaciones de primer grado

92 Indica cuál de los valores propuestos para la incógnita es solución de cada una de las ecuaciones siguientes.

a) $\dfrac{x}{5}+2x=16-x$

$x=-2;\ x=5;\ x=\dfrac{-1}{2}$

b) $3x+5=2-4(1-2x)$

$x=\dfrac{7}{5};\ x=5;\ x=\dfrac{-1}{5}$

93 Resuelve estas ecuaciones.

a) $1-\dfrac{2x-5}{40}=x-\dfrac{4x-7}{10}+\dfrac{2}{3}x$

b) $\dfrac{3}{4}(2x-1)-\dfrac{4}{5}(x-3)=\dfrac{1}{2}x-2$

c) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{x}{4}=1-\dfrac{x-2}{5}$

d) $\dfrac{5+2x}{3+4x}=\dfrac{1}{2}$

e) $3x-\left[\dfrac{1}{2}-\left[x-\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{x-2}{2}\right)\right]-\dfrac{x-1}{3}\right]=1-\dfrac{x}{4}$

94 La solución de la ecuación $\dfrac{a}{5}+\dfrac{1-6x}{7}=1$ es: $x=\dfrac{1}{6}$. Determina el valor de *a*.

95 Resuelve la siguiente ecuación y compruébala. A continuación, justifica si la ecuación puede tener más soluciones, diferentes de la hallada.

$$\frac{4x+3}{5}-\left(x-\frac{2x-2}{6}\right)=4$$

96 Expresa este enunciado mediante una ecuación: «La suma de las edades de María y Juan es 27 años».

— Representa en un sistema de coordenadas las soluciones de la ecuación que has obtenido.

97 ¿Cuántas soluciones tiene una ecuación de primer grado con dos incógnitas?

— ¿Qué tipo de línea se obtiene al representar las soluciones de una ecuación de primer grado con dos incógnitas?

Sistemas de ecuaciones

98 ¿Cuántas soluciones puede tener un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas?

99 La representación gráfica de las soluciones de las ecuaciones de un sistema son dos rectas paralelas. ¿De qué tipo es el sistema? ¿Tiene solución?

100 Expresa el siguiente enunciado mediante un sistema de ecuaciones.

«La suma de dos números es igual a 5. Además, al restar 4 al doble del primer número, obtenemos el segundo.»

— Representa en un sistema de coordenadas las soluciones de las ecuaciones obtenidas.

— ¿Cuál es la solución del sistema?

101 Resuelve gráficamente este sistema.

$$\left.\begin{array}{r} y = x + 5 \\ 2 = y + 2x \end{array}\right\}$$

— ¿De qué tipo de sistema se trata?

102 El siguiente sistema es incompatible.

$$\left.\begin{array}{r} y = 2x - 2 \\ 2y = 4x + 5 \end{array}\right\}$$

Intenta su resolución aplicando cada uno de los tres métodos algebraicos y fíjate en los resultados que obtienes.

103 Este sistema es compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{r} y = 2x - 2 \\ 2y = 4x - 4 \end{array}\right\}$$

Intenta encontrar sus soluciones mediante cada uno de los tres métodos algebraicos y fíjate en los resultados que obtienes.

104 Escribe un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas cuya solución sea $x = 2$ e $y = 4$.

105 Escribe una ecuación de primer grado con dos incógnitas que junto con la ecuación $y = 2 - x$ forme un sistema incompatible.

106 Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución.

a) $\left.\begin{array}{r} 5x - 8y = -13 \\ 2x - 3y = -4 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 5x - y = -3 \\ -2x + y = 0 \end{array}\right\}$

107 Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación.

a) $\left.\begin{array}{r} -7x - 4y = -7 \\ 2x - y = 2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 2y = 7 - x \\ 2y = -6x - 8 \end{array}\right\}$

108 Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción.

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 1 \\ x + y = -2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 4y = 3 + x \\ 10 = 3x + 7y \end{array}\right\}$

109 Resuelve este sistema.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y+4}{2} + 1 = 3x - 3 \\[2ex] 3x - \dfrac{1-3y}{3} = 1 - 2y \end{array}\right\}$$

110 Averigua si estos sistemas son equivalentes.

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 0 \\ x + 3y = 7 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 7 \\ -2x - 6y = -14 \end{array}\right\}$

Aplicación en la práctica

111 El perímetro de un triángulo mide 15 cm. Si un lado es 2 cm más largo que el más pequeño de los tres y 2 cm más corto que el mayor de los tres, ¿cuáles son las longitudes de los tres lados del triángulo?

112 En un corral hay 40 animales entre gallinas y conejos. Si suman un total de 106 patas, ¿cuántos conejos y cuántas gallinas hay?

113 El triple de la edad que yo tenía hace 2 años es el doble de la que tendré dentro de 6. ¿Cuál es mi edad actual?

114 **Material concreto:** Tengo 15 monedas, unas de 5 centavos y otras de 10 centavos de dólar. ¿Cuántas monedas hay de cada clase si en total suman \$1,40? Comprueba tu resultado, utilizando monedas de 5 y 10 centavos.

115 Busca dos números consecutivos tales que, añadiendo al mayor la mitad del menor, el resultado exceda en 13 unidades a la suma de la quinta parte del menor más la onceava parte del mayor.

116 El lado de un cuadrado es 3 m mayor que el doble del lado de otro cuadrado. Si el perímetro del primer cuadrado es 46 m mayor que el del segundo, ¿cuáles son las longitudes de los lados de ambos cuadrados?

117 Un terreno rectangular mide el doble de largo que de ancho. Si su perímetro es de 84 m, ¿qué longitudes tienen sus lados?

118 Halla un número de dos cifras si sabemos que éstas suman 9 y que la cifra de las unidades es el doble de la cifra de las decenas.

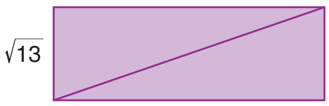
119 Halla dos números si sabemos que su suma es 32 y su cociente, 3.

120 En un laboratorio los productos químicos están colocados en los estantes de un viejo armario, de forma que en cada estante caben 8. Se decide cambiar todos los envases a una nueva vitrina, más grande pero con un estante menos, por lo que deben colocarse 10 productos en cada estante. ¿De cuántos productos químicos dispone el laboratorio?

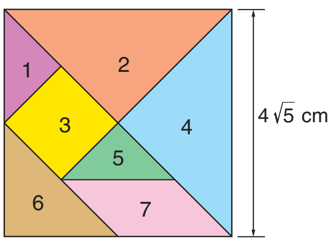
121 La edad de un hijo es cuatro veces menor que la de su padre y hace seis años era siete veces menor. ¿Cuáles son las edades del hijo y del padre?

122 Busca información en Internet sobre el significado y el origen del término *ecuación.*

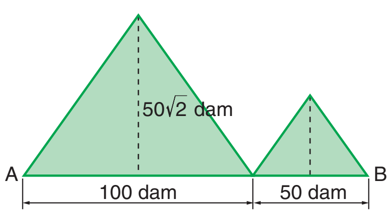
123 La altura del rectángulo es de $\sqrt{13}$ cm y el área, $4\sqrt{91}\,\text{cm}^2$. Halla su base y su diagonal.



124 Observa el *tangram* de la figura y halla el área de cada una de las piezas que lo componen.



125 Para ir de un punto *A* a un punto *B,* un excursionista sube y baja por las laderas de dos montañas que tienen por sección triángulos isósceles. Observa la figura y halla mediante operaciones con radicales la distancia que recorre el excursionista si la altura de la segunda montaña es la mitad de la altura de la primera.



126 La carretera que une tres ciudades *A*, *B* y *C* mide

$$\frac{400\left(\sqrt{128}-\sqrt{50}\right)}{\sqrt{18}}\ \text{km.}$$

Halla las distancias entre dichas ciudades si la distancia entre *A* y *B* es $\frac{3}{5}$ de la distancia entre *B* y *C*.

127 a) Halla el volumen de una esfera de $5^{\frac{2}{3}}$ cm de radio.

b) Halla el radio de una esfera cuyo volumen es 36π cm^3.

128 En la página http://descartes.cnice.mecd.es/materiales_didacticos/Radicales/radicales1.htm encontrarás teoría y ejercicios sobre radicales. Lee atentamente la página y resuelve los ejercicios propuestos.

Más a fondo

129 Determina la solución, o soluciones, de la ecuación $x^2 = 64$.

Para ello, puedes utilizar el método de tanteo o pensar qué número o números multiplicados por sí mismos dan como resultado 64.

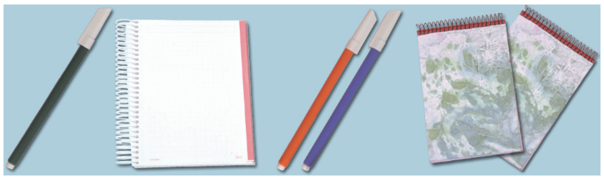
— ¿Qué nombre recibe la operación que has efectuado para hallar la solución?

130 Sabemos que tres rotuladores y cuatro libretas cuestan \$ 6,7 y que un rotulador y dos libretas cuestan \$ 3,1. Determina cuánto valen:

a) Un rotulador.

b) Una libreta.

c) Dos rotuladores y dos libretas.



131 Cristina le preguntó la edad a la hermana de su madre. Ésta le contestó:

«Tengo cinco años menos que tu madre y, dentro de cinco años, yo tendré cinco veces la edad que tú tienes ahora y tu madre tendrá tres veces la edad que tú tendrás entonces».

Determina la edad de Cristina, la de su madre y la de su tía.

132 Escribe un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas que sea incompatible.

133 El dueño de una tienda vende unas golosinas que cuestan \$ 4/kg y otras que cuestan \$ 6/kg. Decide mezclarlas y venderlas a \$ 5,4/kg. Si en total quiere preparar 5 kg, ¿qué cantidad de cada tipo tendrá que mezclar?

Autoevaluación Coevaluación

Si logras resolver el 70 % de estas actividades individuales y grupales, puedes avanzar.

1. La representación gráfica de las soluciones de las ecuaciones:

$$y = x + 4 \qquad -2x = y + 2$$

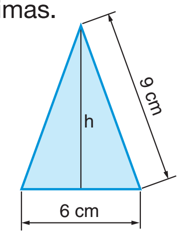
son dos rectas que se cortan en el punto:

a) (3, 4) b) (–2 , 4) c) (–2 , 2)

2. Resuelve el siguiente sistema.

$$\left.\begin{array}{l} 2\,(y + 2) - x = x + 6 \\ 2\,(y + 1) + x = 5 + y \end{array}\right\}$$

3. Calcula la altura h del siguiente triángulo aproximada hasta las centésimas.



4. Expresa $\left(\sqrt{2}\right)^{3} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{-2}$ en forma de una sola potencia de base 2.

5. Calcula:

$$9 \cdot \sqrt{21} - 3 \cdot \left(\sqrt{21} + 8\sqrt{21}\right) - \left(3\sqrt{21} + \sqrt{21}\right)$$

6. Una solución de la ecuación $2\,(y + 2) = x + 4$ es:

a) $x = 3$; $y = 2$ b) $x = 2$; $y = 1$ c) $x = -3$; $y = 2$

7. Elige la ecuación que forma un sistema compatible indeterminado con la ecuación $y = x - 1$.

a) $2y - 4 = 2\,(x - 3)$ c) $y - 3x = 2$

b) $x + y = 4$

8. Un comerciante compra una bicicleta y un balón por \$ 412, y los vende por \$ 448,60. ¿Cuánto le costó cada artículo si en la venta de la bicicleta gana el 9 % y en la del balón, el 5 %?

9. Expresa en forma de una sola potencia de base π:

a) $(\pi^{-5} \cdot \pi^{-3} \cdot \pi^{6})^{2}$

b) $\pi^{5} \cdot \left(\pi^{\frac{1}{2}} \div \pi^{-3}\right)$

10. Extrae todos los factores que puedas de este radical.

$$\sqrt{1000 \cdot a^{5}}$$

Buen Vivir

Inclusión y equidad

A pesar de que el marco constitucional declara en su Art. 11.2 que: “Todas las personas son iguales y gozarán de los mismos derechos, deberes y oportunidades”, y sobre todo que “nadie podrá ser discriminado…”, en la práctica, todavía se observa rezagos de discriminación. La Constitución del 2008 establece en su Art. 47 que “El Estado…procurará la equiparación de oportunidades para las personas con discapacidad y su integración social”, y el Art. 57, numeral 2 “No ser objeto de racismo y de ninguna forma de discriminación fundada en su origen, identidad étnica o cultural”. Es obligación de todos ser incluyentes y equitativos porque es un derecho y obligación que debe ser respetado.

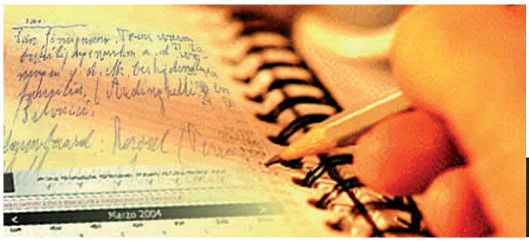
Actividades

1 Comparen las cifras del último censo 2010 con el del año 2000, en cuanto a Población Económicamente Activa (PEA) e indiquen qué porcentaje de inclusión alcanzan las personas con capacidades especiales.

2 Según el censo de 2010, el nivel de alfabetismo en el Ecuador es de 90,56 %. ¿Cuáles son sus comentarios sobre las campañas de alfabetización para adultos?

3 Consulten en Internet qué organizaciones sociales se han creado en el Ecuador, a partir del año 2000, para velar por la inclusión y equidad.

4 ¿Qué podemos hacer para ser incluyentes y equitativos? ¿Puede esto mejorar el país?, ¿por qué?



Crónica matemática

El matemático y filósofo francés René Descartes usó su nombre latinizado: Renatus Cartesius. Hay que considerar que el latín era la lengua erudita de la época y esta costumbre era muy común.

Ésta es la causa de que su sistema filosófico se denomine *cartesiano* y que el sistema de representación de puntos y curvas en un sistema de coordenadas, inventado por él, se llame *cartesiano.*

Descartes, entre otras muchas contribuciones a las matemáticas, fue el responsable de la utilización de las últimas letras del alfabeto para designar las cantidades desconocidas y las primeras letras para las conocidas.

Ecuaciones con computador

Si utilizamos el computador para pasar nuestros apuntes a limpio o para hacer trabajos de matemáticas, nos será muy difícil escribir fórmulas utilizando únicamente un procesador de textos. Para resolver esta dificultad debemos usar un editor de ecuaciones.

Conéctate a una de las siguientes páginas e infórmate sobre el uso de un editor de ecuaciones:

http://www.educa.aragob.es/cprcalat/cursosryc/word2/modulo5/unidad4.htm

http://www.aulafacil.com/Word/Lecc-43.htm

También podemos usar el computador para resolver ecuaciones. Te proponemos aquí que utilices una valiosa herramienta llamada calculadora Wiris.

Con la ayuda de un buscador localiza una página web desde la que puedas usar la calculadora. Infórmate del modo de utilizarla para resolver ecuaciones y sistemas, y halla las soluciones de los siguientes:

$$8x - 4 = \frac{2}{3}(5 - x) + 10$$

$$\left.\begin{aligned} 4x - 3y &= 10 \\ 6x + 5y &= -4 \end{aligned}\right\}$$

El origen etimológico de la palabra *incógnita* nos enseña su significado.

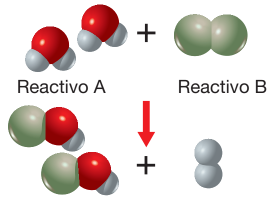
Procede de anteponer la partícula negativa *in* a la palabra *cognitu,* 'lo conocido'; de modo que significa 'lo no conocido, lo *desconocido*'.

Ecuación química

Una ecuación química, al igual que una ecuación matemática, consta de dos miembros, y como en la ecuación matemática, la ecuación química es una igualdad.

Reactivos = Productos

La cantidad y la naturaleza de los átomos de los reactivos deben ser igual a la cantidad y la naturaleza de los átomos de los productos, aunque los reactivos y los productos se hallen formando compuestos con propiedades totalmente diferentes.



Demuestra tu ingenio

Alexandra y Susana son dos amigas que utilizan diferentes compañías de telefonía celular.

Alexandra intenta convencer a su amiga de que su compañía, *Bla-total,* es mejor: le factura \$ 24 por las tres primeras horas del mes y, a partir de ese momento, 8 centavos por minuto.

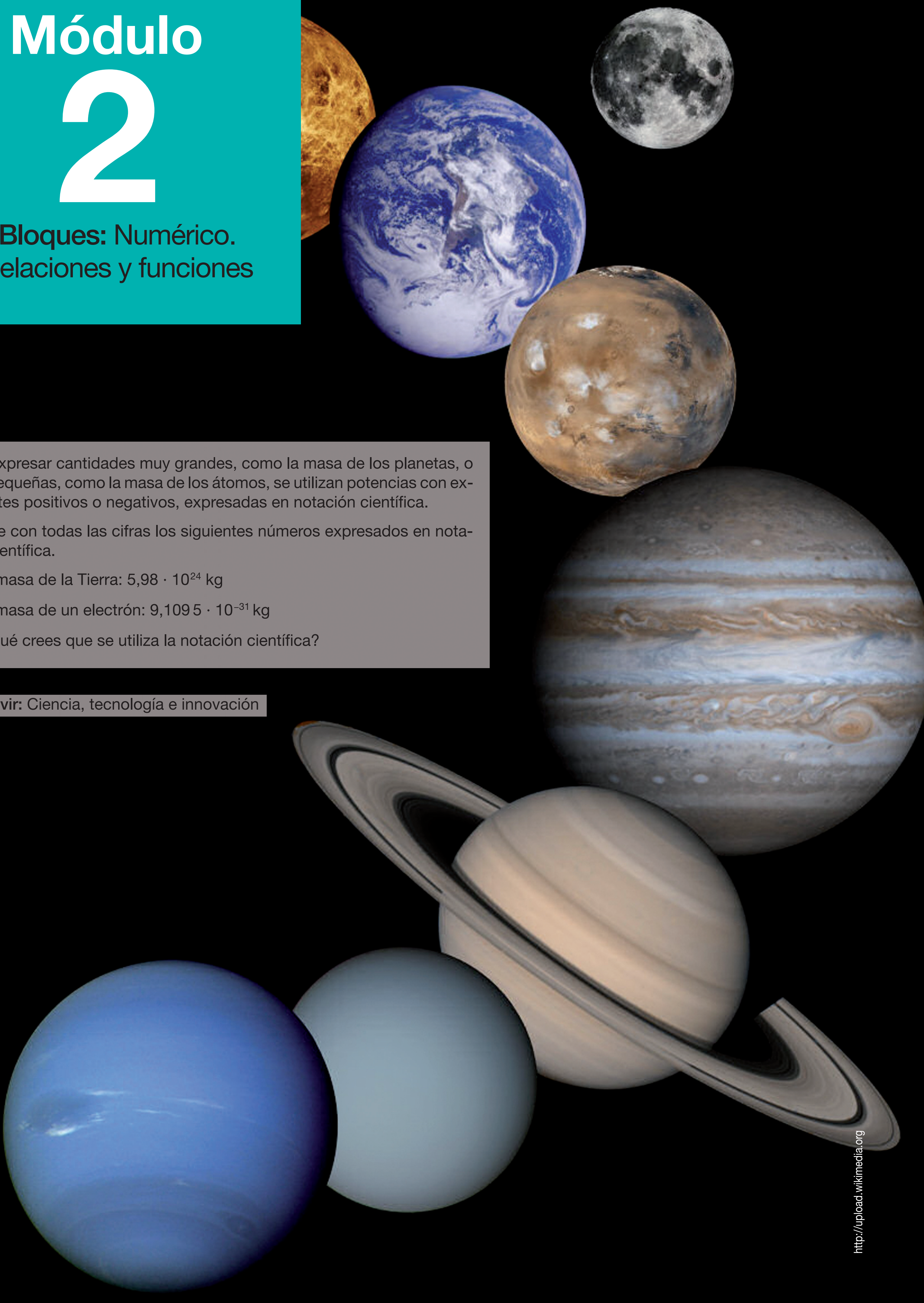
Susana le contesta que la suya, *Ring-SA,* es más barata: aunque le cobra \$ 30 por las dos primeras horas del mes, a partir de entonces sólo le cuesta 5 centavos por minuto.

Como no se ponen de acuerdo, deciden esperar a recibir una factura cada una y compararlas. A principios de mes, cuando llegan las facturas, ¡sorpresa!: habían hablado el mismo tiempo y el costo de las llamadas era el mismo.

¿Cuánto era el costo de cada factura? ¿Cuánto tiempo habló cada una de ellas?

Módulo 2

Bloques: Numérico. Relaciones y funciones



http://upload.wikimedia.org

Para expresar cantidades muy grandes, como la masa de los planetas, o muy pequeñas, como la masa de los átomos, se utilizan potencias con exponentes positivos o negativos, expresadas en notación científica.

Escribe con todas las cifras los siguientes números expresados en notación científica.

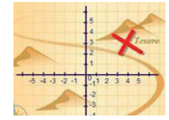
— La masa de la Tierra: $5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg

— La masa de un electrón: $9{,}109\,5 \cdot 10^{-31}$ kg

¿Por qué crees que se utiliza la notación científica?

Buen Vivir: Ciencia, tecnología e innovación

Notación científica
Función lineal
Función exponencial



Serás capaz de *utilizar números enteros para expresar cantidades* en notación científica. *Distinguirás* y *representarás* gráficamente las funciones constantes, las de primer grado y las exponenciales.

DCD Destrezas con criterios de desempeño

- Transformar cantidades expresadas en notación decimal a notación científica con exponentes positivos y negativos.
- Construir patrones de crecimiento lineal en su ecuación generadora.
- Evaluar si una función lineal es creciente o decreciente en la base de su tabla de valores, gráfico o ecuación.
- Determinar la ecuación de una función lineal si su tabla de valores, su gráfico o dos puntos de esta función son conocidos.
- Reconocer si una función exponencial es creciente o decreciente.

Prerrequisitos

Recuerda

- Una **potencia** es un producto de factores iguales.

  $$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$$

  El factor que se repite es la **base** y el número de veces que se repite el factor es el **exponente.**

- Existe una **dependencia** entre dos magnitudes cuando los valores que toma una dependen de los valores que toma la otra. Ejemplo: el costo total y el número de boletos del trolebús que se compran.

  Una dependencia entre magnitudes puede expresarse mediante una expresión verbal, una tabla de valores, una gráfica o una expresión algebraica.

- Una **función *f*** es una relación de dependencia entre dos variables en la que a cada valor de la variable independiente x le corresponde un **único valor** de la variable dependiente y.
- La **expresión algebraica** de una función, ***f(x),*** es la fórmula que nos indica las operaciones que debemos efectuar con cada valor de la variable x para obtener el valor correspondiente de la variable y.
- La **gráfica** de una función f es la representación en un sistema de coordenadas cartesianas de todos los pares de la forma $(x, f(x))$, siendo x un valor de la variable independiente de la función.

Evaluación diagnóstica

- Escribe en forma de potencia:

  a) $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ b) $9 \times 9 \times 9 \times 9$

- Calcula:

  a) $4^3 \times 4^2$ b) $5^7 \div 5^3$ c) $(6^5)^2$

- Indica tres situaciones cotidianas en las que aparezca una dependencia entre magnitudes.
- El área de un círculo, A, se obtiene multiplicando el número π por el radio, r, elevado al cuadrado. Expresa la dependencia entre estas magnitudes mediante una fórmula matemática y completa la tabla de valores.

r (m)	0	5		15	
A (m^2)	0		314,16		1 256,64

- Representa en un sistema de coordenadas cartesianas estos puntos: $A(1, 2)$; $B(7, 6)$; $C(-2, -3)$; $D(-4, 1)$; $E(5, -2)$
- Una piscina de 200 000 litros de capacidad se llena con una manguera que vierte 25 litros por minuto. Escribe la expresión algebraica del volumen de agua que hay en la piscina (l) en función del tiempo (min).

  — Construye una tabla de valores y dibuja la gráfica de la función. ¿De qué tipo de gráfica se trata?

Buen Vivir

Ciencia, tecnología e innovación

Art. 385. El sistema nacional de ciencia, tecnología, innovación y saberes ancestrales, en el marco del respeto al ambiente, la naturaleza, la vida, las culturas y la soberanía, tendrá como finalidad: generar y difundir conocimientos científicos, recuperar los saberes ancestrales, y desarrollar tecnologías que impulsen la producción.

Constitución de la República del Ecuador, 2008.

1 Notación científica

1.1. Revisión de potencias de base entera y exponente natural

En ocasiones, encontramos multiplicaciones cuyos factores se repiten. Estos productos de factores iguales se llaman **potencias.**

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$$

Exponente

a^n

Base

Una **potencia** de base número entero *a* y exponente con un número natural *n* corresponde a la multiplicación de la base *a* por ella misma, tantas veces como lo indique el exponente *n.*

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ veces}}$$

FÍJATE

No es lo mismo escribir $(-3)^2$ que -3^2, ya que:

- $(-3)^2 = -3 \cdot (-3) = 9$
- $-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$

Por lo tanto, debes ir con cuidado a la hora de efectuar las operaciones.

ejemplo 1

Escribe en forma de potencia las siguientes multiplicaciones e indica la base y el exponente.

a) $-3 \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$

$(-3)^4$

base: –3

exponente: 4

b) $-7 \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7) \cdot (-7)$

$(-7)^5$

base: –7

exponente: 5

Una **potencia de exponente 1** es igual a la **base** de esta potencia.

$$a^1 = a$$

Para obtener el signo de una potencia se siguen las reglas siguientes:

- Si el exponente es **par,** la potencia es siempre **positiva.**

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9 \qquad (-3)^2 = -3 \cdot (-3) = 9$$

- Si el exponente es **impar,** la potencia tiene el **mismo signo** que la base.

$$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \qquad (-3)^3 = -3 \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$$

		Exponente	
		Par	Impar
Base	+	+	+
	–	+	–

Actividades

1 Anota, en tu cuaderno, las multiplicaciones en forma de potencias y señala su base y exponente.

a) $-2 \cdot (-2) \cdot (-2)$

b) $-5 \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$

2 Indica el signo de estas potencias.

$(-4)^7$, $(-2)^{12}$, $(6)^5$, $(-7)^{21}$, $(-4)^{32}$

3 Copia la tabla en tu cuaderno y complétala.

Multiplicación	Base	Exponente	Potencia
$6 \cdot 6 \cdot 6$	....	....	....
....	–7	4	....
....	....	....	$(-9)^4$
....	21	....	$(........)^6$

Operaciones con potencias

Para operar con potencias de base entera y exponente natural, procedemos igual que en el caso de potencias de base natural.

Operaciones con potencias
• Multiplicación de potencias de la misma base: $\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$ $(-4)^2 \cdot (-4)^3 = (-4)^{2+3} = (-4)^5$
• División de potencias de la misma base: $\boldsymbol{a^m \div a^n = a^{m-n}}$, $m > n$ $6^5 \div 6^3 = 6^{5-3} = 6^2$
• Potencia de un producto: $\boldsymbol{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$ $(-3 \cdot 5)^4 = (-3)^4 \cdot 5^4$
• Potencia de una potencia: $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$ $[(-7)^3]^2 = (-7)^{3 \cdot 2} = (-7)^6$

Puede suceder que, en una multiplicación o división de potencias, las bases no sean iguales sino opuestas. En estos casos, expresaremos previamente la potencia de base negativa como potencia de base positiva.

ejemplo 2

Expresa en forma de una sola potencia:

a) $(-4)^3 \cdot 4^5$ *b)* $3^6 \div (-3)^2$

— En primer lugar, transformamos la potencia de base negativa en una potencia de base positiva.

$(-4)^3 = -4^3$ $(-3)^2 = 3^2$

— A continuación, efectuamos las operaciones entre las potencias.

$-4^3 \cdot 4^5 = -4^{3+5} = -4^8$ $3^6 \div 3^2 = 3^{6-2} = 3^4$

Actividades

4 Escribe, en tu cuaderno, como potencia de base positiva:

$(-5)^9$, $(-7)^{14}$, $(-15)^7$, $(-9)^{12}$, $(-3)^{21}$

5 Expresa las operaciones, en tu cuaderno, con una sola potencia:

a) $2^3 \cdot 2^4$

b) $(-2)^3 \cdot (-2)^5$

c) $[(-4)^5]^4$

d) $(-3)^8 \div (-3)^5$

e) $(-7)^4 \div (-7)^2$

f) $[(-3)^2]^5$

6 Anota en forma de una sola potencia las siguientes operaciones. Transforma previamente, si es preciso, las potencias de base negativa a potencias de base positiva.

a) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

b) $7^2 \cdot (-7)^4 \cdot (-7)^2$

c) $(-4)^5 \cdot 4^3 \cdot 4^1 \cdot (-4)^3$

d) $(-6)^{12} \div (-6)^8$

e) $7^{21} \div (-7)^4$

f) $(-4)^{15} \div 4^9$

1.2. Potencias de base entera y exponente entero

Como los números enteros positivos se identifican con los números naturales, sólo es preciso considerar los casos en los que el exponente sea 0 o negativo.

Ya hemos visto en la página anterior que si m y n son números naturales y $m > n$, podemos aplicar la regla de la división de potencias:

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

A continuación, sabremos que esta regla continúa siendo válida también para $m = n$ y $m < n$.

Potencias de exponente 0

Cualquier **potencia de exponente 0** es igual a **1.**

$$\boldsymbol{a^0 = 1}$$

Consideramos la división $4^3 \div 4^3$.

$$4^3 \div 4^3 = \frac{\cancel{4}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{4}}{\cancel{4}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{4}} = 1$$

Si aplicamos la regla para dividir potencias

$$4^{3-3} = 4^0$$

$$4^0 = 1$$

Potencias de exponente negativo

La **potencia** de **base** el **número entero** $\boldsymbol{a}$ ($a \neq 0$) y de **exponente** el **número entero negativo** $\boldsymbol{-n}$ es igual al **inverso** de la potencia de base el mismo número entero $\boldsymbol{a}$ y de exponente positivo $\boldsymbol{n}$ **.**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Consideramos la división $4^3 \div 4^6$.

$$4^3 \div 4^6 = \frac{\cancel{4}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{4}}{\cancel{4}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{4}\cdot 4\cdot 4\cdot 4} = \frac{1}{4^3}$$

Si aplicamos la regla para dividir potencias

$$4^{3-6} = 4^{-3}$$

$$4^{-3} = \frac{1}{4^3}$$

Para operar con potencias de exponente negativo podemos utilizar dos métodos diferentes. Veamos, pues, dos formas distintas de resolver la siguiente expresión: $(-4)^{-3} \cdot (-4)^5$

Primer procedimiento

- Transformamos las potencias a exponente positivo.

$$(-4)^{-3}\cdot(-4)^5 = \frac{1}{(-4)^3}\cdot(-4)^5$$

- Aplicamos las mismas reglas que sirven para efectuar operaciones con potencias de exponente natural.

$$\frac{(-4)^5}{(-4)^3} = (-4)^{5-3} = (-4)^2$$

Segundo procedimiento

- Aplicamos las reglas para resolver multiplicaciones o divisiones con potencias.

$$(-4)^{-3}\cdot(-4)^5 =$$

$$= (-4)^{-3+5} = (-4)^2$$

Potencias de 10

Las potencias de 10 son útiles porque simplifican la escritura.

Cualquier **número seguido de ceros** puede expresarse como el producto de este número por una **potencia de 10 de exponente positivo.**	Cualquier **número decimal** con **parte entera nula** puede expresarse como el producto de sus cifras decimales diferentes de 0 por una **potencia de 10 de exponente negativo.**
$-\mathbf{90\,000} = -9 \cdot \mathbf{10\,000} = -9 \cdot 10^4$	$\mathbf{0{,}000\,000}\,4 = \dfrac{4}{\mathbf{10\,000\,000}} = \dfrac{4}{10^7} = 4 \cdot \dfrac{1}{10^7} = 4 \cdot 10^{-7}$

Las potencias de 10 también se emplean para expresar las diversas equivalencias de los prefijos del Sistema Internacional, como puedes observar en la tabla de la derecha.

1 **kiló**metro (**k**m) = $\mathbf{10^3}$ m

1 **deci**litro (**d**l) = $\mathbf{10^{-1}}$ l

1 **nanó**metro (**n**m) = $\mathbf{10^{-9}}$ m

Para transformar unas unidades en otras, es necesario aplicar los *factores de conversión* correspondientes.

Prefijo (símbolo)		Equivalencia en unidades
tera	(T)	10^{12}
giga	(G)	10^{9}
mega	(M)	10^{6}
kilo	(k)	10^{3}
hecto	(h)	10^{2}
deca	(da)	10^{1}
deci	(d)	10^{-1}
centi	(c)	10^{-2}
mili	(m)	10^{-3}
micro	(μ)	10^{-6}
nano	(n)	10^{-9}
pico	(p)	10^{-12}
femto	(f)	10^{-15}
atto	(a)	10^{-18}

ejemplo 3

¿Cuántos centímetros son 15 nanómetros?

Como 1 nm = 10^{-9} m y 1 cm = 10^{-2} m, podemos escribir estas equivalencias como factores de conversión y obtener centímetros.

$$15\,\text{nm} = 15\,\text{nm} \cdot \frac{10^{-9}\,\text{m}}{1\,\text{nm}} \cdot \frac{1\,\text{cm}}{10^{-2}\,\text{m}} = 15 \cdot 10^{-7}\,\text{cm}$$

Así, 15 nm son $15 \cdot 10^{-7}$ cm.

Actividades

7 Escribe las expresiones siguientes de forma que sólo aparezcan potencias de exponente positivo: $(-7)^{-21}$, $(-3)^{-5}$, 8^{-16}, $(-2)^{-121}$.

8 Escribe las expresiones siguientes de forma que sólo aparezcan potencias de exponente negativo: 2^3, $(-4)^7$, $(-7)^{99}$, $(-5)^{11}$, 9^4.

9 Expresa en forma de una sola potencia:

a) $(-4)^{-3} \cdot (-4)^{-2} \cdot (-4)^{-6}$ b) $[(-3)^2]^{-5}$

10 Efectúa:

a) $(7^5 \cdot 7^7) \div (7^4 \cdot 7^2 \cdot 7^3)$ c) $[(-5)^2 \cdot (-5)^3]^2 \div (-5)^3$

b) $[(-8)^5]^4 \div [(-8)^4]^5$ d) $[(-3)^3 \cdot (-3)^5 \cdot (-3)] \div [(-3)^2 \div (-3)^3]$

11 ¿Cuántos decímetros son 25 micrómetros? ¿Cuántos milímetros son 42 kilómetros? ¿Cuántos picómetros son 120 centímetros ?

1.3. Notación científica

En la pantalla de la calculadora pueden aparecer expresiones como las

5.8149 25   7.3468 -40

siguientes:

Estas expresiones son números, generalmente el resultado de las operaciones efectuadas. La calculadora los presenta así porque estos resultados son números de valor absoluto muy grande o muy pequeño. Sus traducciones son, respectivamente:

$$5{,}8149 \cdot 10^{25} \text{ y } 7{,}3468 \cdot 10^{-40}$$

> Un número expresado en **notación científica** consta de un número decimal cuya parte entera tiene una sola cifra no nula, multiplicado por una potencia de 10 de exponente entero.

Estos números están expresados en *notación científica.*

5,	8149	10^{25}
Parte entera (con una sola cifra)	Parte decimal	Potencia de 10 de exponente entero

Un número expresado en notación científica tiene tantas cifras significativas como cifras hay escritas (cinco en los dos ejemplos anteriores).

Es evidente que, al limitar el número de cifras decimales, se pierde exactitud, pero, por otra parte, se gana en simplicidad y también en el conocimiento del orden de aproximación del número.

El uso de la calculadora científica facilita significativamente las operaciones con números expresados en notación científica. Observa el procedimiento utilizado.

FÍJATE

El número **1,3** $\cdot 10^5$ tiene únicamente **dos** cifras significativas, mientras que el número **1,30** $\cdot 10^5$ tiene **tres** cifras significativas.

LAS TIC Y LA MATEMÁTICA

Para operar con números expresados en notación científica, las calculadoras científicas disponen de una tecla especial para introducirlos en la pantalla: **EXP**

Dicha tecla introduce el exponente entero de 10.

Así, para introducir el número $4{,}72 \cdot 10^{15}$ debes teclear:

4 • 7 2 EXP 1 5   4.72 15

Y para introducir $3{,}45 \cdot 10^{-9}$:

3 • 4 5 EXP (–) 9   3.45 -9

Si ahora quieres efectuar la siguiente operación $(4{,}56 \cdot 10^{12}) \cdot (5{,}1 \cdot 10^{-3})$, debes teclear:

4 • 5 6 EXP 1 2 X 5 • 1

EXP (–) 3 =   2.3256 10

Fíjate en la forma de efectuar operaciones utilizando la notación científica.

ejemplo 4

Efectúa las siguientes operaciones.

a) $3{,}61 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}27 \cdot 10^{-8}$

b) $8{,}43 \cdot 10^{7} + 6{,}24 \cdot 10^{6}$

a) Efectuamos, por separado, la multiplicación de los números decimales y la multiplicación de las potencias de 10, y aplicamos la propiedad asociativa.

$3{,}61 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}27 \cdot 10^{-8} = (3{,}61 \cdot 1{,}27) \cdot 10^{-6+(-8)} =$

$= 4{,}88 \cdot 10^{-14}$

b) En primer lugar, transformamos uno de los dos números expresados en notación científica, de forma que ambos queden multiplicados por potencias de 10 del mismo orden.

$8{,}43 \cdot 10^{7} + 6{,}24 \cdot 10^{6} = 84{,}3 \cdot 10^{6} + 6{,}24 \cdot 10^{6}$

Y, a continuación, aplicamos la propiedad distributiva.

$84{,}3 \cdot 10^{6} + 6{,}24 \cdot 10^{6} = (84{,}3 + 6{,}24) \cdot 10^{6} =$

$= 90{,}54 \cdot 10^{6} = 9{,}054 \cdot 10^{7}$

ejemplo 5

Expresa los siguientes números utilizando la notación científica. A continuación, escríbelos de forma aproximada con cuatro cifras significativas.

a) *2 745 983 245 679*

b) *0,000 000 000 064 321 278*

a) Para que la parte entera de este número conste sólo de una cifra, debemos dividirlo por la unidad seguida de doce ceros. Por tanto, para obtener el número inicial deberemos multiplicar por 10^{12}.

Así:

$$2\,745\,983\,245\,679 = 2{,}745\,983\,245\,679 \cdot 10^{12}$$

Y, aproximando por redondeo, escribiremos:

$$2\,745\,983\,245\,679 \approx 2{,}746 \cdot 10^{12}$$

b) Del mismo modo, podemos escribir:

$$0{,}000\,000\,000\,064\,321\,278 = 6{,}432\,1278 \cdot 10^{-11}$$

Y, aproximando por redondeo:

$$0{,}000\,000\,000\,064\,321\,278 \approx 6{,}432 \cdot 10^{-11}$$

Actividades

12 Expresa en forma de potencias de base 10.

a) $0{,}000\,000\,000\,001$

b) $0{,}000\,01 \cdot 100^{-5}$

c) $0{,}000\,001^{-3} \cdot 1\,000^{3}$

d) $(0{,}1 \cdot 0{,}000\,01) : 10\,000^{-4}$

13 Escribe en notación científica los siguientes números. Utiliza todas sus cifras.

2 742 000; 0,000 000 0675; 4 diezmilésimas; 0,000 000 75; 512,577; $548{,}37 \cdot 10^{5}$; 12 millones

14 Escribe con todas las cifras los números siguientes.

$5{,}42 \cdot 10^{5}$; $4{,}1876 \cdot 10^{7}$; 10^{-3}; $1{,}57 \cdot 10^{-4}$; $-3 \cdot 10^{-2}$

— ¿Cuántas cifras significativas tiene cada uno?

15 Efectúa:

a) $(9{,}536 \cdot 10^{3}) + (5{,}63 \cdot 10^{3})$

b) $(2{,}754 \cdot 10^{-4})^{3}$

c) $(5{,}21 \cdot 10^{3}) : (2{,}07 \cdot 10^{-4})$

d) $(3{,}47 \cdot 10^{5}) \cdot (1{,}1 \cdot 10^{-5})$

e) $(1{,}1427 \cdot 10^{11})^{-1}$

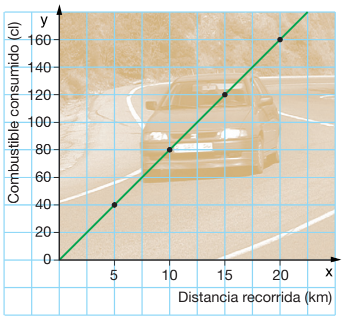
f) $(2{,}3 \cdot 10^{7}) \cdot (4{,}5 \cdot 10^{-3}) : (9{,}1 \cdot 10^{5})$

g) $(3{,}7 \cdot 10^{-4}) - (7{,}83 \cdot 10^{-4})$

—Comprueba los resultados con la calculadora.

16 Ordena de menor a mayor estos números.

$7{,}863 \cdot 10^{-3}$; $5{,}32 \cdot 10^{2}$; $3{,}295 \cdot 10^{0}$; $4{,}25 \cdot 10^{2}$; $9{,}385 \cdot 10^{-6}$; $8{,}42 \cdot 10^{5}$; $3{,}56 \cdot 10^{-3}$; $1{,}57 \cdot 10^{1}$



2 Funciones

A menudo, en la vida cotidiana se dan situaciones en las que se obtienen relaciones de dependencia entre magnitudes.

Consideremos, por ejemplo, la siguiente situación:

Beatriz se desplaza con su automóvil. En el viaje consume 8 l de combustible por cada 100 km o, lo que es lo mismo, 8 cl por km.

En este caso, el consumo de combustible depende de la distancia recorrida, como se observa en la tabla.

Distancia recorrida en km *(x)*	0	5	10	15	20
Combustible consumido en cl *(y)*	0	40	80	120	160

MUCHO OJO

Magnitud es toda característica o propiedad relativa a un cuerpo que puede medirse.

Aquellas magnitudes que varían su valor, como la distancia recorrida o el combustible consumido, también reciben el nombre de **variables.**

Además, la dependencia cumple estas propiedades:

- La variable *distancia recorrida* puede tomar valores de forma arbitraria; por eso, la llamaremos **variable independiente** y la representaremos con la letra ***x.***
- En cambio, los valores que toma la variable *combustible consumido* dependen de los valores de la variable *x;* por eso, la llamaremos **variable dependiente** y la representaremos con la letra ***y.***
- A cada valor de la variable *x* le corresponde un único valor de la variable *y*, por lo que decimos que ***y* está en función de *x,*** y lo simbolizamos por ***y* = *f* (*x*).**

Notación

Normalmente, para representar la **variable independiente** se utiliza la letra ***x,*** y para representar la **variable dependiente** se emplea la letra ***y.***

Para decir que ***y* está en función de *x*** escribimos: ***y* = *f(x)*.**

Las funciones suelen representarse con letras minúsculas *f, g, h...*

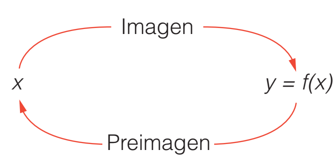
Una **función** es una relación de dependencia entre dos variables, de modo que a cada valor de la variable independiente le corresponde un **único valor** de la variable dependiente.

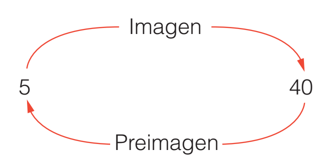
2.1. Imágenes y preimágenes

Consideramos de nuevo la función *f,* que relaciona el consumo de combustible de un automóvil con la distancia recorrida.

Cuando el automóvil ha recorrido 5 km su consumo es de 40 cl. Decimos que la imagen de 5 por la función *f* es 40. Simbólicamente escribimos *f* (5) = 40.

También decimos que la preimagen de 40 por la función *f* es 5.





FÍJATE

En toda función, la imagen *y* de un valor de *x* es única, pero puede ocurrir que un valor de *y* tenga más de una antiimagen.

Por ejemplo, en la función que asigna a cada número su valor elevado al cuadrado, el número 9 tiene dos antiimágenes: –3 y 3.

La **imagen** de un valor *x* por una función *f* es el valor que toma la variable *y* en relación con el valor que tiene la variable *x*.

La **preimagen** de un valor *y* por una función *f* es el valor o valores de la variable *x* a los que corresponde el valor tomado por la variable *y*.

2.2. Dominio y recorrido

Volvamos a considerar la función *f,* que relaciona el consumo de combustible de un automóvil con la distancia recorrida.

Imagina que el trayecto recorrido por Beatriz es de 20 km. Es decir, la variable independiente *distancia recorrida* toma valores entre 0 km y 20 km.

Decimos que este intervalo de valores es el dominio de la función *f*. Se simboliza de la forma: *Dom(f)* = [0, 20].

El **dominio** de una función *f* es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente. Se representa por ***Dom (f).***

La variable dependiente, combustible cosumido, varía de 0 cl en el punto de partida a 160 cl en el punto de destino.

Decimos que este intervalo de valores es el recorrido de la función *f*. Se simboliza de la forma: *Rec (f)* = [0, 160].

El **recorrido** o rango de una función *f* es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente. Se representa por ***Rec (f).***

ejemplo 6

Un depósito de agua de 128 l de capacidad, inicialmente vacío, se llena a un ritmo de 4 l por minuto. Determina el dominio y el recorrido de la función y = f(x) *siendo* y *el volumen de agua que hay en el depósito (en litros) y* x *el tiempo transcurrido (en minutos).*

Como el depósito tiene una capacidad de 128 l y se llena a un ritmo de 4 l por minuto, tardará 32 min en llenarse completamente. Así, la variable *x* toma valores entre 0 min y 32 min. El dominio de la función es *Dom (f)* = [0, 32].

El volumen de agua que hay en el depósito varía de 0 l con el depósito vacío a 128 l con el depósito lleno. El recorrido de la función es *Rec (f)* = [0, 128].

Actividades

17 Indica cuáles de las siguientes relaciones de dependencia son funciones.

a) Las horas del día y la temperatura mínima registrada durante cada hora.

b) La duración de una llamada provincial por la tarde y su valor en dólares.

c) Un número real y el triple de su cuadrado.

d) A cada número natural se le asignan sus divisores.

e) A cada número natural se le asigna el producto de sus divisores.

f) El volumen de una esfera y el valor de su radio.

g) La edad en años de una persona y su masa.

h) La longitud de una circunferencia y el valor de su diámetro.

18 Indica cuál es la variable independiente y cuál la variable dependiente del par de variables relacionadas en cada uno de los siguientes casos.

a) El costo en dólares que hay que pagar y el número de boletos de avión adquiridos.

b) El costo de la factura del gas y los metros cúbicos consumidos.

19 Escribe simbólicamente:

a) La imagen del valor 5 por una función *f* es 16.

b) La imagen del valor $\sqrt{3}$ por una función *g* es 3.

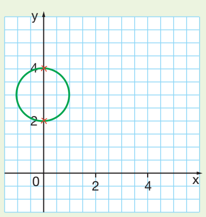
20 Un club excursionista formado por 325 socios ha repartido carnés numerados entre sus afiliados. Sea *f* la función que hace corresponder a cada número de carné su última cifra. Halla su dominio y su recorrido.

FÍJATE

Observa que la gráfica de una función sólo puede cortar el eje *OY* en un punto. ¿Sabrías explicar por qué?

CONTRAEJEMPLO

La siguiente gráfica **no corresponde a una función** porque existe al menos una vertical, el eje OY, que corta a la curva en **dos puntos.**



FÍJATE

Una función es **estrictamente creciente** si:
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Una función es **estrictamente decreciente** si:
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

3 Características de las funciones

Sabemos que una función *f* es una relación de dependencia entre dos variables. La variable independiente *"x"* que pertenece al primer conjunto *"A"*, llamado dominio de la función, se transforma según la ley de f en *"y"*, que pertenece al recorrido de la función y es subconjunto de un conjunto de llegada *"B"*.

Está implícito que una función *f* necesita de dos conjuntos, uno de partida que es el dominio *"A"* y uno de llegada *"B"*; de ahí se afirma que una función va de *"A"* en *"B"*, y se denota por $f\colon A \rightarrow B$.

Si los conjuntos *A* y *B* son subconjuntos del conjunto de los números reales, a la función ***f*** se le llama **función real**.

Existen funciones que no son reales, para ello basta que al menos un conjunto (de partida o de llegada) no sea subconjunto de los reales.

Ratifiquemos que la variable independiente **x** es elemento del dominio de la función que corresponde al conjunto **A,** mientras que imagen y (variable dependiente) pertenece al recorrido de la función que es subconjunto del conjunto de llegada **B.**

ejemplo 7

La función *f* relaciona la edad (en años) de 10 estudiantes con su nombre, según: (Daniel, 14), (Sandra, 14), (Maritza, 15), (Pedro, 14), (David, 15), (Salomé, 13), (Diana, 14), (Rocío, 15), (Luis, 14) y (Santiago, 14).

El dominio de la función *f* que a su vez es su conjunto de partida es:

Dom(f) = A

= {*Daniel, Sandra, Maritza, Pedro, David, Salomé, Diana, Rocío, Luis, Santiago*}

El recorrido de la función *f* que a su vez es subconjunto del conjunto de llegada es:

$$Rec(f) = \{13,14,15\} \subset \mathbb{N}$$

Observa que el recorrido no necesariamente es igual al conjunto de llegada.

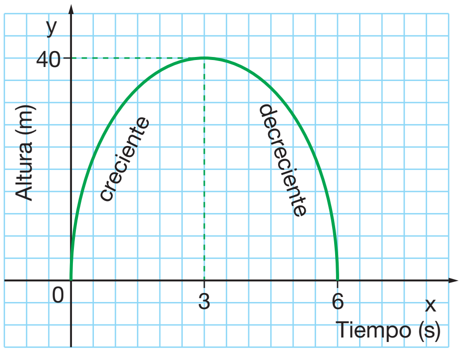
Ésta función *f* no es real puesto que el conjunto de partida A no es un subconjunto del conjunto de números reales.

Si la función es real, la función *f* tiene una **ley de formación** que explica el cómo y está en función de *x*, en general se denota por $y = f(x)$.

Para las funciones reales resulta muy útil la observación y análisis de su gráfica, de ahí se puede ratificar su condición de función, extraer los puntos de intersección, determinar su crecimiento o su decrecimiento, ratificar si es continua o no.

3.1. Función: criterio gráfico

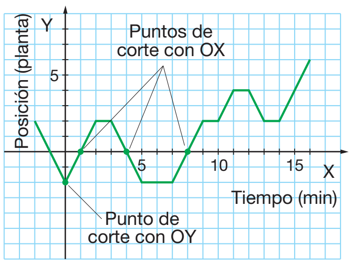
Para reconocer a una función desde su gráfico, observaremos que toda vertical trazada en su dominio debe cortar en un solo punto al mismo.



> El gráfico **corresponde a una función** porque cualquier vertical trazada en su dominio [0,6] corta a la curva en **uno y solo un punto.**

3.2. Intersección con los ejes

En la gráfica del margen se representa la posición del ascensor de un edificio de departamentos durante 16 minutos de funcionamiento.



Los puntos donde la gráfica cortan a los ejes de coordenadas se llaman intersección con los ejes, el que corta al eje OY determina a la ordenada al origen y es único en caso de existir. Los que cortan al eje OX determinan las raíces de la función, en caso de existir puede ser más de uno.

En nuestra gráfica el punto (0, –2) interseca al eje OY. Ésta es la posición del ascensor cuando empieza a contar el tiempo. La ordenada al origen es –2.

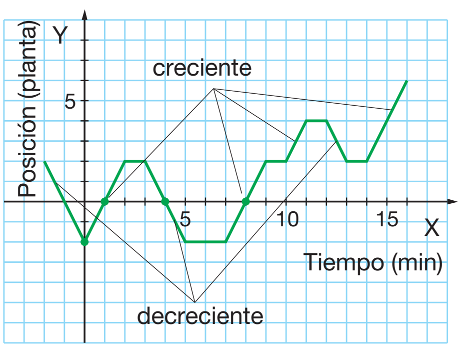
Así también, los puntos (1, 0), (4, 0), (8, 0) intersecan al eje OX. Los puntos de indican los momentos en que el ascensor pasa por la planta baja. Las raíces de la función son 1, 4, 8.

Si conocemos la ley de formación de la función, para determinar el punto de intersección con el eje OY basta reemplazar al valor de la variable independiente por 0, y obtenemos el punto (0, *f*(0)).

De la misma manera, para determinar los puntos de intersección con el eje OX, basta reemplazar en la ley de formación al valor de la variable dependiente por 0, y obtenemos los puntos de la forma (*x*, 0).

3.3. Crecimiento y decrecimiento

En el ejemplo del ascensor observamos intervalos en que él sube, otros en los que permanece sin movimiento y otros en los que baja.



Diremos que la función que representa el movimiento del ascensor es:

- **Creciente** si él no baja, esto se presenta en los intervalos [0, 3], [5, 11] y [13, 16].
- **Estrictamente creciente** si él únicamente sube, esto se presenta en los intervalos [0, 2], [7,9], [10, 11] y [14, 16].

FÍJATE

Una función es **creciente**
si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
Una función es **decreciente**
si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
Una función es **estrictamente creciente**
si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
Una función es **estrictamente decreciente**
si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

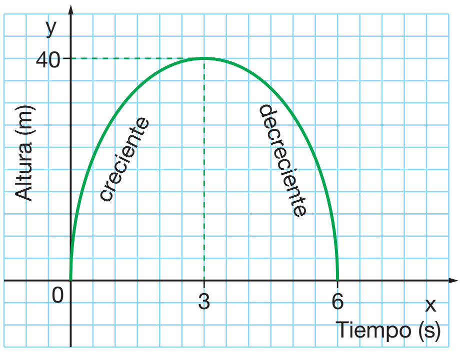
MUCHO OJO

Una función es **monótona** si únicamente es **creciente** o únicamente es **decreciente**.

- **Decreciente** si él no sube, esto se presenta en los intervalos [2, 7], y [11, 14].
- **Estrictamente decreciente** si él únicamente baja, esto se presenta en los intervalos [3, 5] y [12, 13].

3.4. Monotonía de una función a trozos

Si una función es creciente y decreciente, un número finito de veces, dicha función es monótona a trozos.



Consideremos la altura de una pelota lanzada en tiro parabólico en función del tiempo.

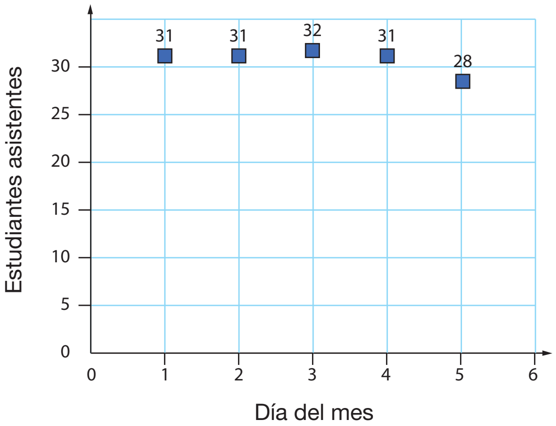
Fíjate que en el intervalo de tiempo [0,3] la función es creciente, mientras que en el intervalo de tiempo [3,6] la función es decreciente, por ello diremos que la función es monótona a trozos.

3.5. Continuidad de la función

Al gráfico de la función *f* se le trazará una línea continua entre sus puntos si sus variables aceptan todos los valores de un intervalo.

Para el ejemplo del ascensor, la variable independiente del tiempo acepta cualquier momento entre [0, 16], pues el tiempo es continuo; así también, la posición en las plantas acepta cualquier valor entre [–2, 6], al moverse el ascensor entre plantas lo hace de manera continua, no en saltos entre ellas.

Ahora, si la función establece la relación entre los cinco primeros días del mes y el número de estudiantes que ha asistido en un paralelo de décimo de básica, tanto el día del mes como el número de estudiantes solo se representan con números naturales. No tiene sentido hablar del día número 3,14 o de una asistencia de 32,7 estudiantes, por ello no es válido unir con una línea continua a los diferentes puntos de la gráfica. Observemos el ejemplo:



4 Función constante

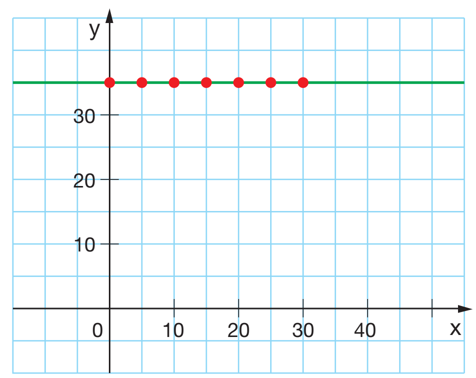
En este apartado vamos a estudiar las *funciones constantes.* Fijémonos en el siguiente ejemplo.

La cuota del gimnasio al que acude Teresa es de $ 35 al mes.

La función que relaciona el gasto mensual que supone a Teresa el gimnasio según el número de días que acude viene dada por la siguiente tabla de valores.

Número de días (x)	0	5	10	15	20	25	30
Importe en dólares (y)	35	35	35	35	35	35	35

La gráfica de esta función es una semirrecta paralela al eje de abscisas ya que no presenta ninguna inclinación respecto al semieje positivo de abscisas.

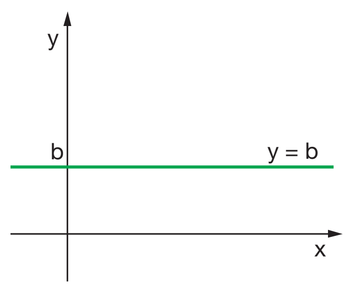


Esta gráfica pasa por el punto de coordenadas (0, 35). El valor de la ordenada en este punto, en el que $x = 0$, recibe el nombre de **ordenada en el origen.**

Observamos que para cualquier valor de la variable x, la variable y no varía.

Decimos que, es una *función constante,* cuya expresión algebraica es $y = 35$.

Una **función constante** es una función cuya expresión algebraica es de la forma $\boldsymbol{y = b}$, siendo $\boldsymbol{b}$ la **ordenada en el origen.**
Su **gráfica** es una **recta** paralela al eje de abscisas.



FÍJATE

La pendiente de una recta nos mide la inclinación de ésta respecto al semieje positivo de abscisas en el plano cartesiano.

En el caso de la función constante, como su gráfica es una recta paralela al eje de abscisas, su pendiente es 0.

Actividades

21 Un determinado trayecto en taxi cuesta $ 5. Construye una tabla de valores en la que se vea la relación entre el importe de la carrera del taxi y el número de ocupantes.

22 Representa gráficamente las siguientes funciones constantes.

a) $y = -2$ b) $y = 3$ c) $y = -7$

— Indica en cada una de ellas la ordenada en el origen.

23 Patricia alquila una bicicleta durante una hora y le cuesta $ 4.

a) Confecciona una tabla de valores y representa la función que relaciona el precio del alquiler con los kilómetros que ha recorrido Patricia durante la hora.

b) ¿A qué eje es paralela la gráfica?

c) Calcula la ordenada en el origen y la pendiente de la recta obtenida.

Obtención de la expresión algebraica de una función constante

Determinar la expresión algebraica de una función constante que viene dada por una tabla de valores o por su gráfica es sencillo.

— Si la función viene dada por una tabla de valores, basta con observar el valor constante de la variable *y.*

— En caso de que la función venga dada por su representación gráfica, observaremos el valor de la ordenada en el origen.

Veamos unos ejemplos.

ejemplo 8

Escribe la expresión algebraica de la función dada por la siguiente tabla de valores.

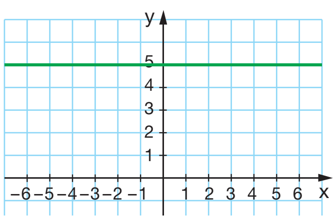
x	1	2	3	4
y	–2	–2	–2	–2

Para cualquier valor de la variable *x,* la variable *y* no varía. Por tanto, es una función constante y su expresión algebraica es de la forma $y = b$.

Como la variable *y* es igual a –2, la expresión algebraica de la función es $y = -2$.

ejemplo 9

Escribe la expresión algebraica de la función cuya gráfica se muestra a continuación.



La recta es paralela al eje de abscisas. Así pues, es una función constante y su expresión algebraica es de la forma $y = b$.

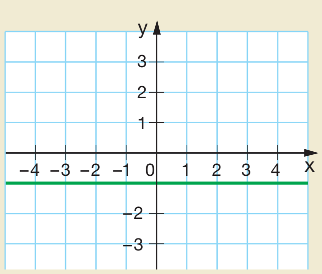
Como la ordenada en el origen es igual a 5, la expresión algebraica de la función es $y = 5$.

Actividades

24 Escribe la expresión algebraica de la función dada por la siguiente tabla de valores.

x	1	2	3	4
y	–6	–6	–6	–6

25 Escribe la expresión algebraica de la función dada por la gráfica de la derecha.



Distribución gratuita - Prohibida la venta

5 Función de primer grado

La función real f de **primer grado,** también llamada afín, es aquella cuya ley de formación es un polinomio de primer grado en la variable x; por lo tanto, esta ley tiene la forma siguiente: $f(x) = mx + b;\ m \neq 0$.

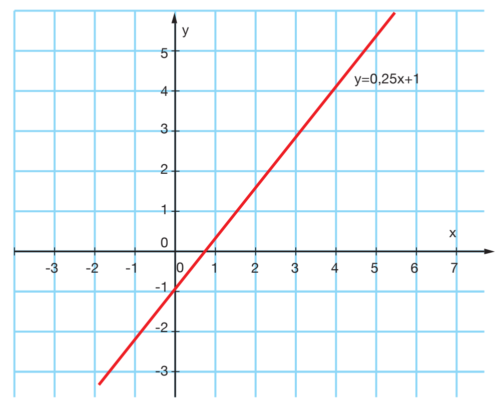
Una función de primer grado tiene por gráfico a una recta oblicua, sea creciente o decreciente, trazada en el plano cartesiano.

Tanto el dominio como el recorrido corresponden al conjunto de los números reales.

$$Dom(f) = \mathbb{R} \text{ y } Rec(f) = \mathbb{R}$$

En la forma general, la ley de formación $f(x) = mx + b$, se tienen a las constantes m y b; donde b es la ordenada al origen, que señala el corte con el eje OY en el punto $(0, b)$, y m se denomina la pendiente de la recta. La pendiente ***m*** es la constante que indica el grado de inclinación de la recta, en coordenadas cartesianas rectangulares, es la proporción en que varía la ordenada "y" con respecto a la abscisa "x".

Si la pendiente es mayor que cero, positiva la recta es creciente. En su gráfica se observa que al aumentar el valor de la variable independiente o abscisa, el valor de la variable dependiente u ordenada, también aumenta.

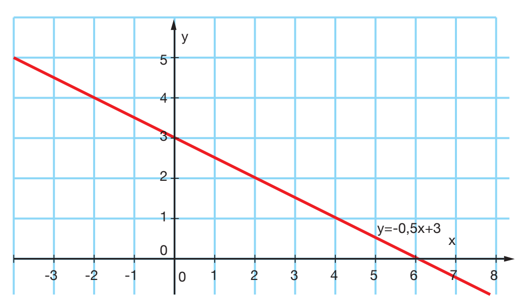


Si la pendiente es menor que cero, negativa la recta es decreciente. En su gráfica se observa que al aumentar el valor de la variable independiente, el valor de la variable dependiente se reduce.

Observa el ejemplo cuya ley es: $f(x) = 1{,}25x - 1$:

En esta función, la pendiente ***1,25*** es positiva, por lo tanto, observamos que la vertical (variación de la ordenada) crece ***1,25*** cuando la horizontal (variación de la abscisa) crece ***1***; además la ordenada al origen b es igual a ***–1***.

Observemos otro ejemplo, cuya ley es: $f(x) = -0{,}5x + 3$:



En esta función, la pendiente es ***–0,5***; es decir negativa, por lo tanto observamos que la vertical decrece ***–0,5*** cuando la horizontal crece ***1***; además la ordenada al origen ***b*** es igual a ***3***.

Dejemos por un momento el estudio de la función de primer grado o afín en términos generales, pues en caso de que la ordenada al origen b sea nula ($b = 0$), la función de primer grado recibe el nombre de **función lineal** o de **proporcionalidad directa.**

5.1. Función lineal o de proporcionalidad directa

La ley de formación de la función lineal es: $f(x) = mx;\ m \neq 0$.

Observemos los siguientes ejemplos que nos ayudarán a estudiar la función lineal:

Un ciclista se desplaza a una velocidad constante de 40 km/h. La función que relaciona el espacio recorrido y el tiempo transcurrido viene dada en la siguiente tabla de valores.

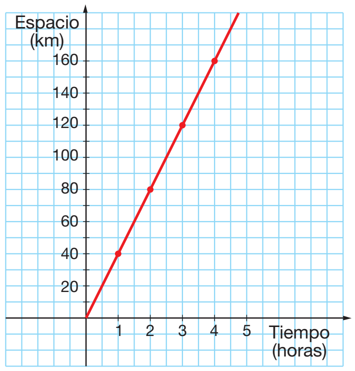


Fig. 1

Tiempo en horas (x)	1	2	3	4
Espacio recorrido en kilómetros (y)	40	80	120	160

En este caso, la constante de proporcionalidad es:

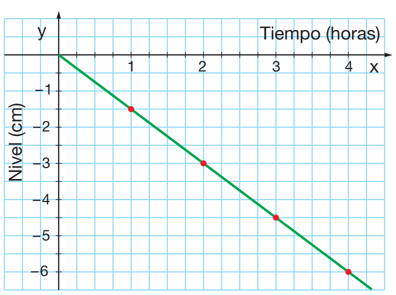
$$\frac{40}{1} = \frac{80}{2} = \frac{120}{3} = \frac{160}{4} = 40$$

La constante corresponde a la pendiente, que al ser positiva, expresa que la función es creciente, y su ley de formación es $f(x) = 40x$

Para calcular el valor de la pendiente basta dividir la ordenada para la abscisa en cada par ordenado de la tabla $m = \frac{y}{x}$.

Consideremos ahora otro ejemplo.

Un embalse se encuentra lleno. Al abrir sus compuertas, el nivel del agua desciende 1,5 cm cada hora; la función que relaciona la profundidad del nivel del agua y el tiempo transcurrido está dada por la siguiente tabla de valores.



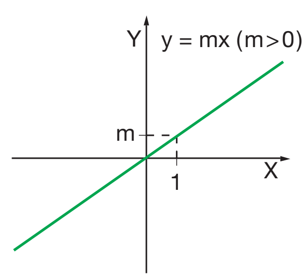
Tiempo en horas (x)	1	2	3	4
Nivel (y)	–1,5	–3	–4,5	–6

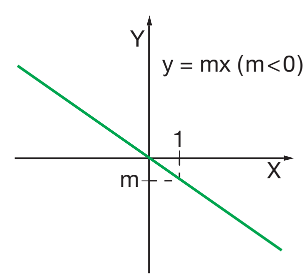
En este caso, la constante de proporcionalidad es –1,5 y la ley de formación es $f(x) = -1{,}5x$ cuya pendiente es negativa y observamos su gráfica decreciente.

En general, la función lineal o de proporcionalidad directa se define para cualquier valor real de la variable x y expresa la relación entre dos variables directamente proporcionales. Sus gráficas pasan por el origen.

Una **función lineal** o **de proporcionalidad directa** es una función cuya expresión algebraica es de la forma $\boldsymbol{y = mx}$ $(m \neq 0)$, siendo m la *constante de proporcionalidad.*

Su **gráfica** es una **recta** que pasa por el **origen de coordenadas** y tiene **pendiente** $\boldsymbol{m}$**.**





Actividades

26 Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = 3x$ b) $y = -2x$ c) $y = 0{,}4x$ d) $y = -0{,}8x$

Indica en cada una de ellas la pendiente y explica por qué pasan por el origen.

27 La sandía es una fruta con muy bajo aporte energético: 30 kcal/100 g. Elabora una tabla de la energía aportada en función de la masa de sandía ingerida y dibuja la gráfica correspondiente. Calcula la pendiente de la recta obtenida.

28 Un alimento con un alto aporte energético son las nueces: 675 kcal/100 g. Elabora la gráfica de la energía aportada en función de la masa de nueces ingerida y compárala con la de la actividad anterior.

Obtención de la expresión algebraica de una función lineal

En el siguiente ejemplo, vamos a aprender el procedimiento para obtener la expresión algebraica de una función lineal *a partir de una tabla de valores.*

ejemplo 10

Escribe la expresión algebraica de la función dada por la siguiente tabla de valores.

x	2	4	6	8
y	–1	–2	–3	–4

Veamos si las variables son directamente proporcionales o no. Para ello, calculamos los cocientes entre cada valor de la variable *y* y el valor correspondiente de la variable *x*.

$$\frac{-1}{2} = \frac{-2}{4} = \frac{-3}{6} = \frac{-4}{8}$$

Observamos que hemos obtenido en todos los casos el mismo valor.

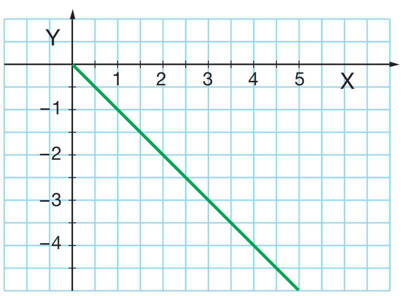
Así, las variables *x* e *y* son directamente proporcionales con constante de proporcionalidad $-\frac{1}{2}$. Se trata, pues, de una función lineal cuya expresión algebraica es de la forma $y = m\,x$, siendo *m* la constante de proporcionalidad.

Por tanto, la expresión algebraica de esta función lineal es $y = -\frac{1}{2}x$.

También podemos obtener la expresión algebraica de una función lineal *a partir de su gráfica.*

ejemplo 11

Escribe la expresión algebraica de la función dada por la siguiente gráfica.



Se observa que la gráfica de la función es una recta que pasa por el origen de coordenadas. Se trata, por tanto, de una función lineal o de proporcionalidad directa cuya expresión algebraica es de la forma $y = m\,x$, siendo *m* la pendiente de la recta.

Para hallar la pendiente consideramos un punto cualquiera de la gráfica, por ejemplo, el punto de coordenadas (1, –1).

La pendiente de la recta es el cociente entre $y = -1$ y $x = 1$. Por tanto, la pendiente es $m = -1$.

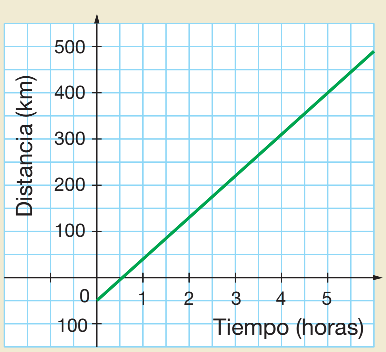
Así, la expresión algebraica de la función es $y = -x$.

Actividades

29 Escribe la expresión algebraica de la función dada por la siguiente tabla de valores.

x	2	3	5	8
y	1,5	2,25	3,75	6

30 Escribe la expresión algebraica de la función dada por la gráfica de la derecha.



5.2. Función afín

Para definir la *función afín,* vamos a estudiar dos situaciones.

A las 0 horas pasa por el punto de control de una carrera de autos, un piloto que circula a una velocidad constante de 90 km/h.

La función que relaciona la distancia a la que se encuentra el auto del punto de control con el tiempo transcurrido viene dada por esta tabla de valores.

Tiempo transcurrido en horas *(x)*	0	1	2	3	4	5
Distancia al control en km *(y)*	0	90	180	270	360	450

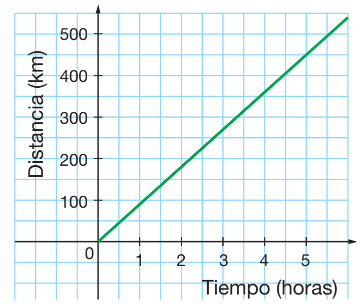


Fig. 1

Podemos observar que es una función de proporcionalidad directa cuya expresión algebraica es $y = 90x$. Observa su gráfica en la figura 1.

Veamos a continuación la segunda situación.

En ese momento a otro piloto que también circula a 90 km/h le faltan 50 km para llegar al control.

En este caso tendremos la siguiente tabla.

Tiempo transcurrido en horas *(x)*	0	1	2	3	4	5
Distancia al control en km *(y)*	−50	40	130	220	310	400

Fig. 2

La gráfica de esta función (fig. 2) es una semirrecta cuyo punto inicial tiene coordenadas (0, −50). El valor de la ordenada de este punto, −50, es la **ordenada en el origen.**

Observa que cuando la variable x incrementa su valor en 1, 2, 3... unidades, se produce un incremento de la variable y de 90, 180, 270... unidades, respectivamente.

El cociente entre la variación de la variable y con relación al incremento de la variable x es un valor constante igual a 90: $\frac{90}{1} = \frac{180}{2} = \frac{270}{3} = 90$.

Este valor constante que se representa por m es la **pendiente** y mide la inclinación de la semirrecta respecto al semieje positivo de abscisas.

La expresión algebraica de la función que nos da la distancia al control del segundo auto es $y = 90x - 50$. Diremos que es una *función afín.*

FÍJATE

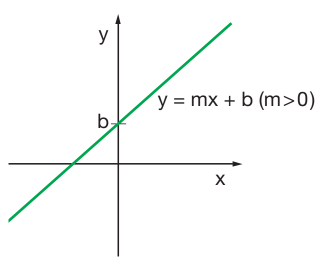
La función lineal $y = 90x$ y la función afín $y = 90x - 50$ tienen la misma pendiente.

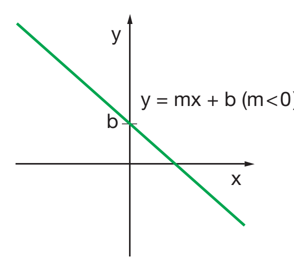
FÍJATE

Las funciones lineales son un caso particular de funciones afines en las que $b = 0$.

Una **función afín** es una función cuya expresión algebraica es de la forma $\boldsymbol{y = mx + b}$ ($m \neq 0$), siendo $\boldsymbol{b}$ la **ordenada en el origen.**

Su **gráfica** es una **recta** que pasa por el **punto (0, *b*)** y tiene **pendiente *m*.**





Actividades

31 Representa gráficamente las siguientes funciones afines: a) $y = 2x + 3$ b) $y = -x + 4$

— Indica en cada una de ellas la pendiente y la ordenada en el origen.

Notación

El símbolo Δ significa 'incremento o variación de' y corresponde a la diferencia entre dos valores.

Obtención de la expresión algebraica de una función afín

Aprendamos en el siguiente ejemplo cómo obtener la expresión algebraica de una función afín *a partir de una tabla de valores.*

ejemplo 12

Escribe la expresión algebraica de la función dada por la siguiente tabla de valores.

x	1	2	3	4
y	−1	1	3	5

Observamos que el cociente entre la variación de la variable *y*, Δy, con relación al incremento de la variable *x*, Δx, es un valor constante igual a 2.

Este valor constante es el valor de la pendiente, *m*.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-(-1)}{2-1} = \frac{3-(-1)}{3-1} = \frac{5-(-1)}{4-1} = 2$$

Se trata, por tanto, de una función afín.

Sustituimos el valor de la pendiente en la expresión algebraica $y = mx + b$. Así, la expresión algebraica de la función es $y = 2x + b$.

Calculamos la ordenada en el origen. Para ello, consideremos cualquier punto de la tabla de valores, por ejemplo, el de coordenadas (1, −1).

Al sustituir sus coordenadas en la expresión algebraica de la función $y = 2x + b$, tendrá que verificarse la igualdad obtenida.

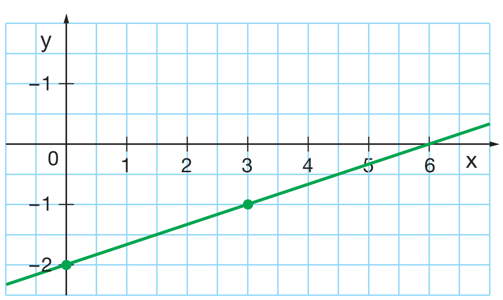
$$-1 = 2 \cdot 1 + b \iff -1 = 2 + b \iff b = -3$$

Por lo tanto, la expresión algebraica de la función es $y = 2x - 3$.

También podemos obtener la expresión algebraica de una función afín *a partir de su gráfica.* Veamos un ejemplo.

ejemplo 13

Escribe la expresión algebraica de la función dada por la siguiente representación gráfica.



Como la recta no es paralela al eje de abscisas, no se trata de una función constante. También observamos que la recta no pasa por el origen de coordenadas, por tanto, no se trata de una función lineal.

Así pues, se trata de una función afín.

Para obtener su expresión algebraica, tenemos que calcular la pendiente y la ordenada en el origen.

— Calculamos la ordenada en el origen *b.* Como la gráfica corta al eje de ordenadas en el punto (0, −2), la ordenada en el origen es $b = -2$. Así pues, la expresión algebraica de la función es $y = mx - 2$.

— Calculamos la pendiente *m.* Para ello, nos fijamos en la gráfica y consideramos un punto de la recta cuyas coordenadas sean fáciles de determinar, por ejemplo, el punto de coordenadas (3, −1). Como es un punto de la recta, tendrá que verificar la ecuación de la recta:

$$-1 = m \cdot 3 - 2 \iff 3m = 1 \iff m = \frac{1}{3}$$

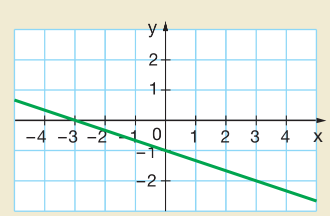
Así, la expresión algebraica de la función es $y = \frac{1}{3}x - 2$.

Actividades

32 Escribe la expresión algebraica de la función dada por la siguiente tabla de valores.

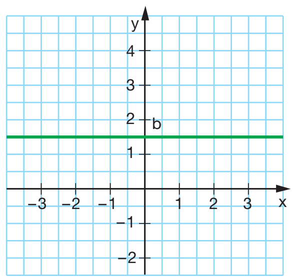
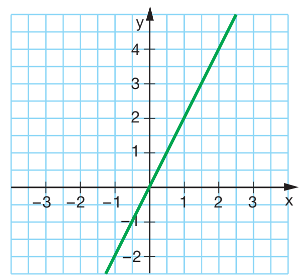
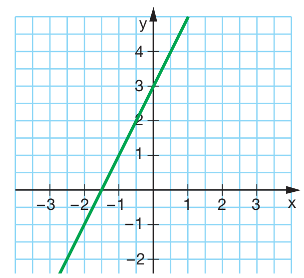
x	1	2	3	4
y	3	1	−1	−3

33 Escribe la expresión algebraica de la función dada por la gráfica de la derecha.



6 Ecuación de una recta

Ya hemos estudiado que las gráficas de las funciones constantes y de las afines son siempre rectas.

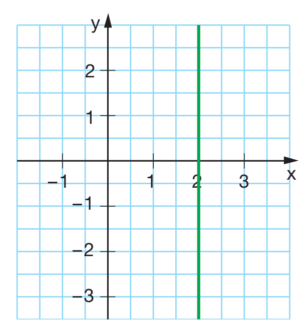
$y = b$	$y = mx \quad (m \neq 0)$	$y = mx + b \quad (m \neq 0, b \neq 0)$
Toda **recta paralela** al **eje de abscisas** tiene una ecuación de la forma $\boldsymbol{y = b}$**,** siendo *b* la ordenada en el origen, y es la gráfica de una función constante.	Toda **recta** que pasa por el **origen de coordenadas** y que **no es paralela** a los **ejes de coordenadas** tiene una ecuación de la forma $\boldsymbol{y = mx}$ **(**$\boldsymbol{m \neq 0}$**),** y es la gráfica de una función afín lineal.	Toda **recta** que **no pasa por el origen de coordenadas** y que **no es paralela** a los **ejes de coordenadas** tiene una ecuación de la forma $\boldsymbol{y = mx + b}$ **(**$\boldsymbol{m \neq 0, b \neq 0}$**),** y es la gráfica de una función afín no lineal.
		

Además de éstas hay otro tipo de rectas que no corresponden a una función, que son las rectas verticales. Veamos un ejemplo.

Consideremos tres puntos con la misma abscisa, por ejemplo (2, –3), (2, –1) y (2, 1).

Si representamos estos puntos en un sistema de coordenadas cartesianas, observamos que están alineados y que pertenecen a una recta paralela al eje de ordenadas.

Fijémonos en que el mismo valor 2 de la variable *x* se relaciona con cualquier valor de la variable *y*. Por este motivo, esta gráfica no corresponde a la de una función. No obstante, podemos describir esta situación mediante la expresión $x = 2$.



Toda **recta paralela** al **eje de ordenadas** tiene una ecuación de la forma $\boldsymbol{x = a}$**.** Esta recta no corresponde a la gráfica de una función.

FÍJATE

El **eje de abscisas** viene dado por la recta $\boldsymbol{y = 0}$ y el **eje de ordenadas** por la recta $\boldsymbol{x = 0}$**.**

MUCHO OJO

Una función es una relación de dependencia entre dos variables de modo que a cada variable *x* le corresponde un único valor de la variable *y*.

Actividades

34 Dibuja una recta que pase por el punto *A* (3, 4) y cuya ordenada en el origen sea –2.

35 Representa gráficamente las siguientes rectas.

a) $y = -3$ b) $y = -8$ c) $x = -6$

— Indica a qué eje de coordenadas es paralela cada una de ellas.

6.1. Obtención de la ecuación de una recta

Hemos visto que la expresión general de una recta que no es paralela al eje de ordenadas es $y = mx + b$. En caso de que la recta pase por el origen de coordenadas el valor de b sería 0 y en caso de que la recta fuese paralela al eje de abscisas el valor de m sería 0.

Si queremos obtener la ecuación de una recta, basta con conocer *dos puntos* de ésta, o bien, *un punto* de la recta y el valor de su *pendiente.*

En los siguientes ejemplos, aprenderemos cómo obtener la ecuación de una recta a partir de **dos puntos** de ésta.

ejemplo **14**

Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos A*(1, 5) y* B*(2, –3).*

Si los puntos $A(1, 5)$ y $B(2, -3)$ pertenecen a la recta, al sustituir sus coordenadas en la ecuación $y = mx + b$, deben verificarse las igualdades.

$$5 = m \cdot 1 + b \qquad\qquad -3 = m \cdot 2 + b$$

Hemos de resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\left.\begin{aligned} 5 &= m \cdot 1 + b \\ -3 &= m \cdot 2 + b \end{aligned}\right\}$$

Al resolverlo, comprobamos que es un sistema compatible determinado cuya solución es $m = -8$ y $b = 13$.

Por tanto, la ecuación de la recta es $y = -8x + 13$.

FÍJATE

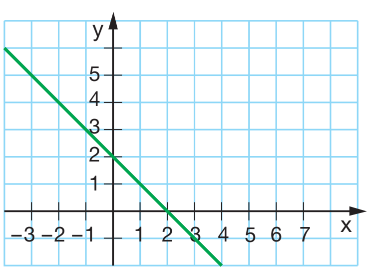
La pendiente de la recta determinada por dos puntos es el cociente entre la variación de la variable y con relación al incremento de x.

Así, en el ejemplo 7, dados los puntos $A(1, 5)$ y $B(2, -3)$, la pendiente de la recta que pasa por A y B es:

$$m = \frac{-3-5}{2-1} = \frac{-8}{1} = -8$$

ejemplo **15**

Escribe la ecuación de la recta de la figura siguiente.



Determinamos dos puntos de la recta, por ejemplo, P y Q: $P(0, 2)$ y $Q(2, 0)$.

A partir de aquí, procedemos como en el ejemplo 14.

Los puntos $P(0, 2)$ y $Q(2, 0)$ deben verificar las igualdades:

$$2 = m \cdot 0 + b \qquad\qquad 0 = m \cdot 2 + b$$

De la primera ecuación, obtenemos:

$$b = 2$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

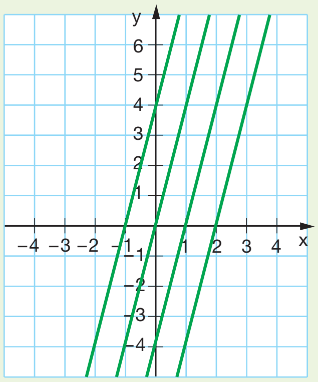
$$2m = -2 \quad \Leftrightarrow \quad m = -1$$

La ecuación de la recta es $y = -x + 2$.

Los siguientes ejemplos nos muestran la obtención de la ecuación de una recta a partir de la **pendiente** y **un punto.**

FÍJATE

La ecuación $y = 4x + b$ representa todas las rectas paralelas que tienen pendiente $m = 4$.



Decimos que $y = 4x + b$ es la ecuación de un **haz de rectas paralelas.**

ejemplo 16

Halla la ecuación de una recta con pendiente –5 que pasa por el punto M*(3, –1).*

La pendiente de la recta es –5, es decir $m = -5$. Por tanto, la ecuación de la recta es $y = -5x + b$.

Como la recta pasa por el punto $M(3, -1)$, se cumplirá que:

$$-1 = -5 \cdot 3 + b \quad \Rightarrow \quad -1 = -15 + b \quad \Rightarrow \quad b = 14$$

Tenemos que la ecuación de la recta es $y = -5x + 14$.

ejemplo 17

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto P*(–2, 1) y es paralela a la recta* y *= 4* x *– 5.*

Si la recta es paralela a $y = 4x - 5$, tendrá la misma pendiente, es decir, $m = 4$. Por tanto, la ecuación de la recta es $y = 4x + b$.

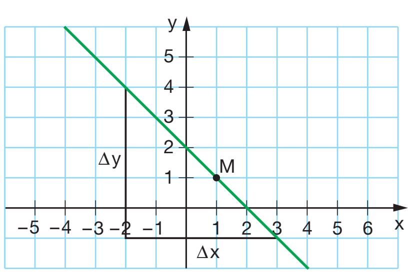
Como la recta pasa por el punto $P(-2, 1)$, se tiene que:

$$1 = 4 \cdot (-2) + b \quad \Rightarrow \quad 1 = -8 + b \quad \Rightarrow \quad b = 9$$

Así, la ecuación de la recta es $y = 4x + 9$.

ejemplo 18

Halla la ecuación de la recta de la figura del ejemplo 15 calculando en primer lugar la pendiente.



El valor de la pendiente es $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{4 - (-1)}{-2 - 3} = -1$

La ecuación de la recta es $y = -x + b$.

Tomamos un punto de la recta, por ejemplo el $M(1, 1)$. Este punto cumplirá:

$$1 = (-1) \cdot 1 + b \quad \Rightarrow \quad 1 = -1 + b \quad \Rightarrow \quad b = 2$$

Por tanto, la ecuación de la recta es $y = -x + 2$.

Actividades

36 Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por los siguientes puntos:

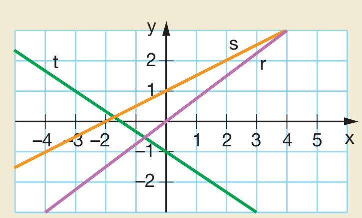
a) $A(2, -1)$ y $B(4, 3)$ b) $P(-3, 2)$ y $Q(1, -4)$

37 Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, -6)$ y es paralela a la recta $y = -6x + 2$.

38 Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2, -3)$ y cuya pendiente es igual a 1.

39 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1, -1)$ y cuya ordenada en el origen es igual a 3.

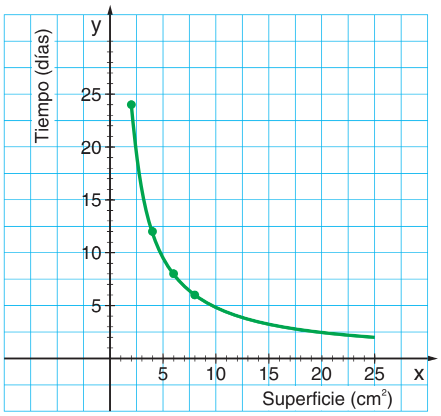
40 Halla las ecuaciones de las rectas *r, s* y *t* a partir de la gráfica de la derecha.



7 Función de proporcionalidad inversa

El tiempo que tarda en llenarse una piscina está en función de la superficie que tenga la boca del grifo.

Si expresamos esta dependencia mediante una tabla de valores, observamos que al multiplicar por una constante la superficie de la boca, el tiempo de llenado queda dividido por la misma constante. Se trata, pues, de dos magnitudes inversamente proporcionales.



Superficie en cm² *(x)*	2	4	6	8
Tiempo en días *(y)*	24	12	8	6

Se observa que el producto de un par de valores correspondientes es siempre el mismo. Dicho producto corresponde a la **constante de proporcionalidad inversa.**

$$2 \cdot 24 = 4 \cdot 12 = 6 \cdot 8 = 8 \cdot 6 = 48$$

En general, $x \cdot y = 48$; es decir, la expresión algebraica de esta función es:

$$y = \frac{48}{x}$$

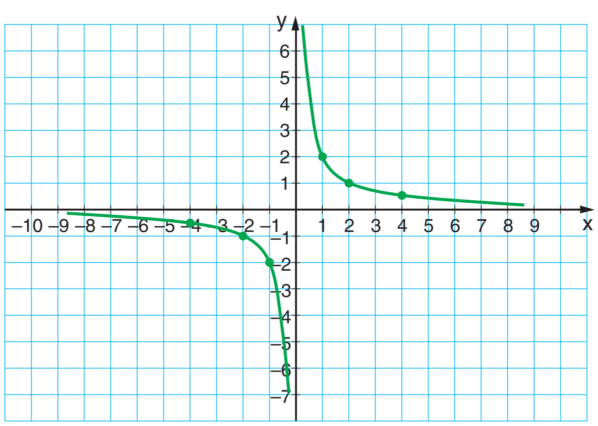
Se trata de una **función de proporcionalidad inversa.** Esta función expresa la relación entre dos variables inversamente proporcionales.

En nuestro ejemplo, las dos variables sólo pueden tener valores positivos y la gráfica de esta función es una curva situada en el primer cuadrante de los ejes de coordenadas, que denominamos *rama de una hipérbola.*

En general, una función de proporcionalidad inversa está definida para cualquier valor de la variable x distinto de 0, ya que no es posible la división entre 0.

Una **función de proporcionalidad inversa** es una función cuya expresión algebraica es de la forma $\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$ $(k \neq 0)$, siendo k la constante de proporcionalidad inversa.

7.1. Gráfica



Veamos, ahora, la función definida por la siguiente expresión algebraica:

$$y = \frac{2}{x}$$

A partir de la expresión algebraica, deducimos que las variables son inversamente proporcionales, con una constante de proporcionalidad inversa $k = x \cdot y = 2$.

La tabla de valores correspondiente es:

x	1	2	4	−1	−2	−4
y	2	1		−2	−1	$-\frac{1}{2}$

La gráfica de esta función es una curva, con dos ramas, denominada **hipérbola.**

Las ramas de la hipérbola están en el primer y el tercer cuadrantes, puesto que la constante de proporcionalidad inversa es positiva. Esto indica que las variables x e y tienen el mismo signo.

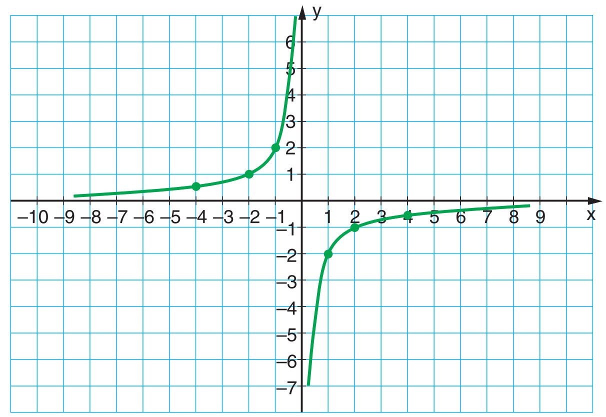
Consideremos ahora la función cuya expresión algebraica es:

$$y = \frac{-2}{x}$$

A partir de la expresión algebraica, se deduce que las variables también son inversamente proporcionales, con una constante de proporcionalidad inversa $k = x \cdot y = -2$.

Confeccionamos la correspondiente tabla de valores.

x	1	2	4	−1	−2	−4
y	−2	−1	$-\frac{1}{2}$	2	1	$\frac{1}{2}$



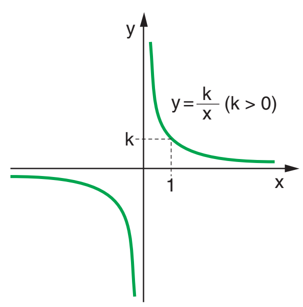
La gráfica de esta función es, pues, una **hipérbola.**

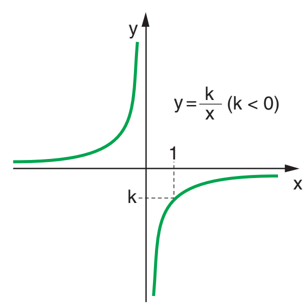
A diferencia de la anterior, esta curva tiene una de sus ramas en el segundo cuadrante y la otra en el cuarto, ya que la constante de proporcionalidad inversa es negativa. Esto indica que las variables x e y tienen distinto signo.

> La gráfica de una función de proporcionalidad inversa es una **curva** con dos ramas denominada **hipérbola.**

Si la constante de proporcionalidad inversa es positiva ($k > 0$), es decir, si las dos variables tienen el mismo signo, las ramas de la hipérbola se encuentran situadas en el primer y el tercer cuadrantes.

Si la constante de proporcionalidad inversa es negativa ($k < 0$), las dos variables tienen signo contrario y las ramas de la hipérbola están en el segundo y el cuarto cuadrantes.





Actividades

41 Determina la constante de proporcionalidad inversa y escribe la expresión algebraica de cada una de las funciones definidas por estas tablas de valores.

a)

x	1	2	3	4	5	6
y	60	30	20	15	12	10

b)

x	2	3	5	−6	−10	−15
y	−15	−10	−6	5	3	2

— Represéntalas gráficamente.

8 Función exponencial

Se llaman función exponencial a todas aquellas que tienen su ley de formación de la forma $f(x) = a^x$, en donde la base a, es una constante y el exponente x la variable independiente.

Estas funciones tienen gran aplicación en campos muy diversos como la demografía, biología, administración, economía, química, física e ingeniería.

La función exponencial obliga a que la base sea positiva y diferente de uno ($a > 0$ y $a \neq 1$). La condición que a sea diferente de uno se debe, a que al reemplazarlo por 1, la expresión a^x transforma a la función en la función constante $f(x) = 1$.

Se nos plantea la siguiente situación.

En un laboratorio se lleva a cabo el cultivo de diversas bacterias. Una de ellas es la denominada *Nitrobacter agilis,* que se divide en dos, aproximadamente, cada día. Así pues, si el primer día tenemos dos bacterias, el segundo día tendremos cuatro y al cabo de una semana tendremos $2^7 = 128$ bacterias.

Observa que la relación que existe entre los días transcurridos, variable *x,* y el número de descendientes, variable *y,* es una función dada por una potencia de base 2, cuya expresión algebraica es $y = 2^x$.

El problema durante la primera semana genera la siguiente tabla de valores.

Número del día *(x)*	1	2	3	4	5	6	7
Número de bacterias *(y)*	2	4	8	16	32	64	128

La función que asigna a la variable independiente x el valor $y = a^x$ se llama **función exponencial de base *a*,** en la que a es un número real positivo diferente de 1.

LAS TIC Y LA MATEMÁTICA

Para calcular una potencia con la calculadora has de utilizar la tecla:

∧

Además en caso de que en la potencia aparezca un entero negativo, debes usar las teclas:

(–) o +/–

Así, para la función $y = 2^x$, el número de bacterias descendientes, *y,* en tres días, *x,* será:

2 ∧ 3 = 8

Actividades

42 Considera la función exponencial $f(x) = 3^x$ y calcula:

a) $f(2)$

b) $f(-2)$

c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$

d) $f\left(-\frac{3}{4}\right)$

43 Una función exponencial tiene por imagen del 2, el 25. ¿Cuál es su base?

44 Calcula:

a) Las imágenes de 2, 3 y 4 para la función $f(x) = 5^x$.

b) Las imágenes de 2, 3 y 4 para la función $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

c) Las antiimágenes de 64 y 1 para la función $f(x) = 4^x$.

8.1. Gráfica

Según si la base de la función exponencial $y = a^x$ es mayor o menor que 1, existen dos tipos de gráficas. Veamos qué tipo de gráfica se obtiene para cada uno de los casos.

- Función $y = a^x$ si $\boldsymbol{a > 1}$.

  Consideramos la función, $y = 2^x$.
  Construimos una tabla para los valores de x (–2, –1, 0, 1 y 2) mediante el empleo de la calculadora científica.

x	–2	–1	0	1	2
y	0,25	0,5	1	2	4

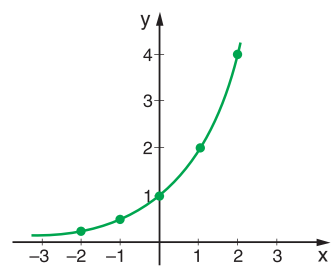
La función $y = k\,a^x$

La función $y = a^x$ es un caso particular de $y = ka^x$ en la que $k = 1$.

La constante k representa el valor de y cuando $x = 0$. Así, por ejemplo, si $k = 1$, las funciones pasan por el punto (0, 1) y si $k = 2$ entonces, las funciones pasan por el punto (0, 2).

Llevamos a cabo su representación gráfica. Fíjate en que la función $y = 2^x$ está situada por encima del eje *OX,* corta al eje *OY* en el punto (0, 1), es estrictamente creciente y continua. Así pues:

$y = a^x$ $a > 1$
• Dominio: $\mathbb{R}$; recorrido: $(0, +\infty)$
• Intersecciones con los ejes: corta al eje *OY* en el punto (0, 1).
• Es estrictamente creciente.
• Es continua.



- Función $y = a^x$ si $\boldsymbol{a < 1}$.

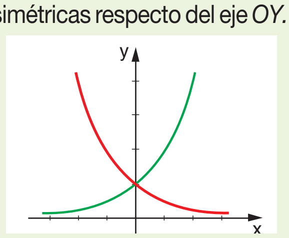
  Consideramos la función $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

  Como en el caso anterior, elaboramos una tabla de valores para los valores de x (–2, –1, 0, 1 y 2).

x	–2	–1	0	1	2
y	4	2	1	0,5	0,25

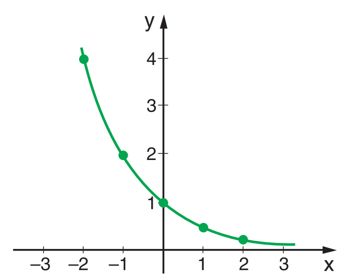
FÍJATE

Las gráficas de las funciones $y = 2^x$ e $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ son simétricas respecto del eje *OY.*



Llevamos a cabo su representación gráfica. Fíjate en que dicha función está situada por encima de *OX,* corta al eje *OY* en el punto (0, 1), es estrictamente decreciente y continua. Por ello:

$y = a^x$ $a < 1$
• Dominio: $\mathbb{R}$; recorrido: $(0, +\infty)$
• Intersecciones con los ejes: corta al eje *OY* en el punto (0, 1).
• Es estrictamente decreciente.
• Es continua.



Actividades

45 Representa gráficamente e indica las características de cada una de estas funciones.

a) $y = 3^x$ b) $y = 3^{-x}$ c) $y = 2^{x+1}$ d) $y = 2^{x-1}$

Cómo resolver problemas

Daniel corre a una velocidad constante de 12 km/h. Su vecino Omar ha salido a correr 1 h antes a una velocidad constante de 8 km/h.

Determina el tiempo de ejercicio que lleva Daniel cuando se encuentra con Omar y el espacio recorrido por ambos hasta este momento.

Comprensión del enunciado

— Vuelve a leer el problema y enúncialo con tus propias palabras.

— Anota los datos que te proporcionan y los que te piden.

Planificación de la resolución

Representamos por s_1 y s_2 las funciones que nos dan el espacio recorrido por Daniel y por Omar en función del tiempo transcurrido, variable *t,* desde la salida de Daniel.

Daremos valores del tiempo expresados en horas a la variable *t,* puesto que la velocidad viene expresada en km/h.

Así, el tiempo de ejercicio que lleva Daniel cuando se encuentra con Omar será la abscisa del punto de intersección de las gráficas de las funciones s_1 y s_2, y el espacio recorrido por ambos en el momento del encuentro será la ordenada de este punto.

Ejecución del plan de resolución

Si tomamos la salida de Daniel en el instante $t = 0$, la expresión algebraica de la función s_1 es $s_1 = 12\,t$.

Elaboramos la tabla de valores de la función s_1 para representarla posteriormente.

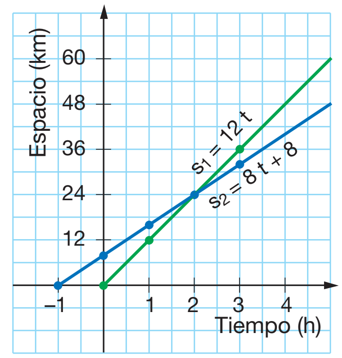
Tiempo en horas (t)	0	1	2	3
Espacio en kilómetros (s_1)	0	12	24	36

Cuando Daniel empieza el ejercicio, en el instante $t = 0$, Omar lleva recorridos 8 km, por lo que la expresión algebraica de la función s_2 es $s_2 = 8\,t + 8$.

Omar empezó a correr 1 h antes que Daniel, por lo que ha salido en el instante $t = -1$. Partiendo de este valor, elaboramos una tabla de valores de la función s_2.

Tiempo en horas (t)	–1	0	1	2	3
Espacio en kilómetros (s_2)	0	8	16	24	32

Representamos gráficamente ambas funciones sobre el mismo sistema de coordenadas cartesianas.



Observamos en la gráfica que el punto donde se cortan las dos rectas es *P*(2, 24).

Por tanto, Daniel encuentra a Omar cuando lleva dos horas de ejercicio y ambos han recorrido 24 km.

Revisión del resultado y del proceso seguido

Revisa los cálculos realizados tanto en las operaciones como en la elaboración de las tablas.

Comprueba que las coordenadas del punto *P*(2, 24) verifican las expresiones algebraicas de las funciones s_1 y s_2.

46 Vuelve a resolver la actividad A si tomas la salida de Omar en el instante $t = 0$ y considerando los siguientes datos:

- Daniel corre a una velocidad constante de 15 km/h.
- Omar corre a una velocidad constante de 10 km/h.
- Omar sale 30 minutos antes que Daniel.

47 Un auto parte de la ciudad *A,* que se encuentra en el kilómetro 0 de una carretera, y mantiene una velocidad constante de 60 km/h. Otro auto sale 2 h más tarde del mismo lugar y circula por la misma carretera con una velocidad constante de 80 km/h.

Representa en un mismo sistema de coordenadas las gráficas de las funciones que relacionan los kilómetros recorridos por cada auto en función del tiempo transcurrido y contesta:

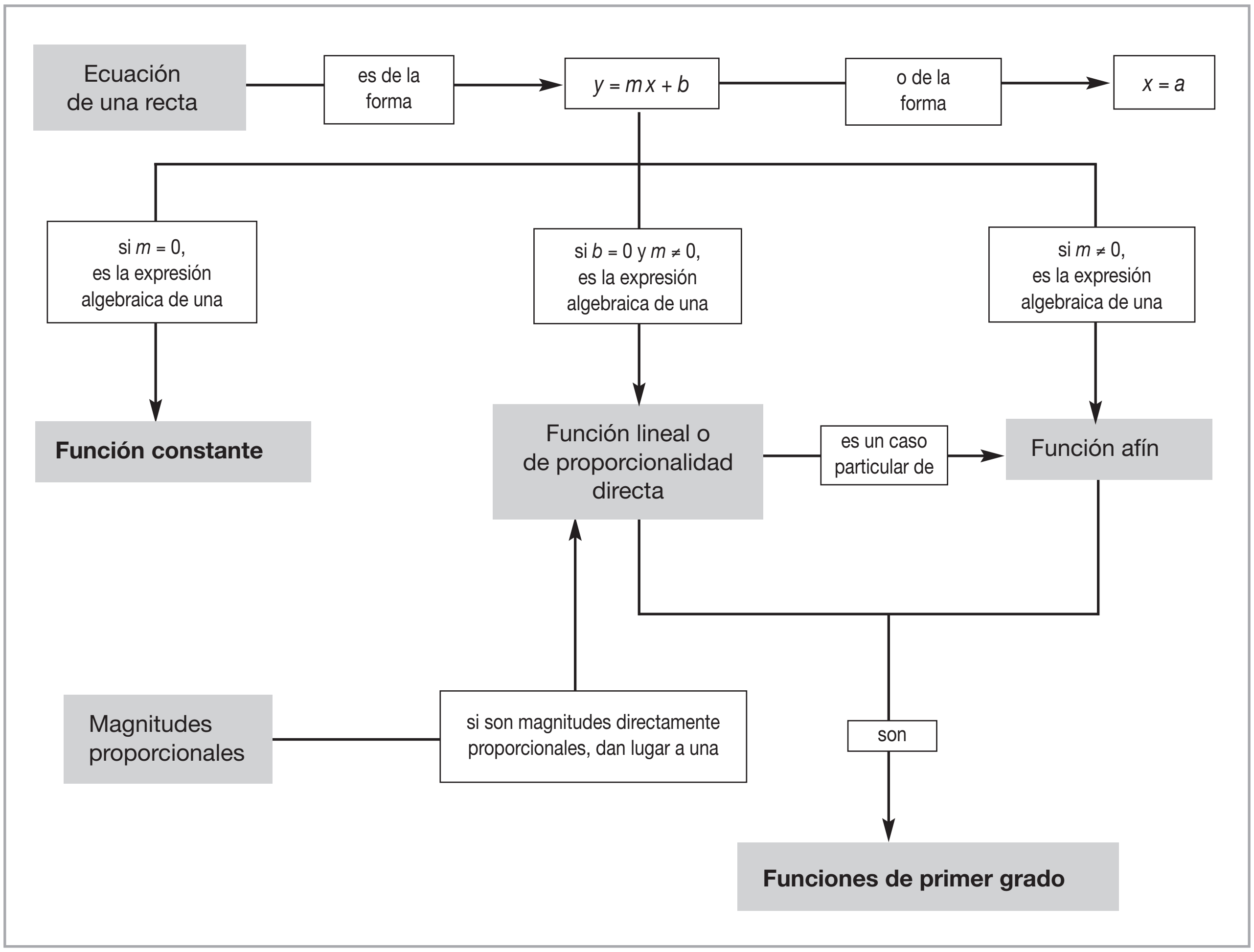
a) ¿Cuál de los dos autos pasa antes por una gasolinera que está situada en el kilómetro 300?

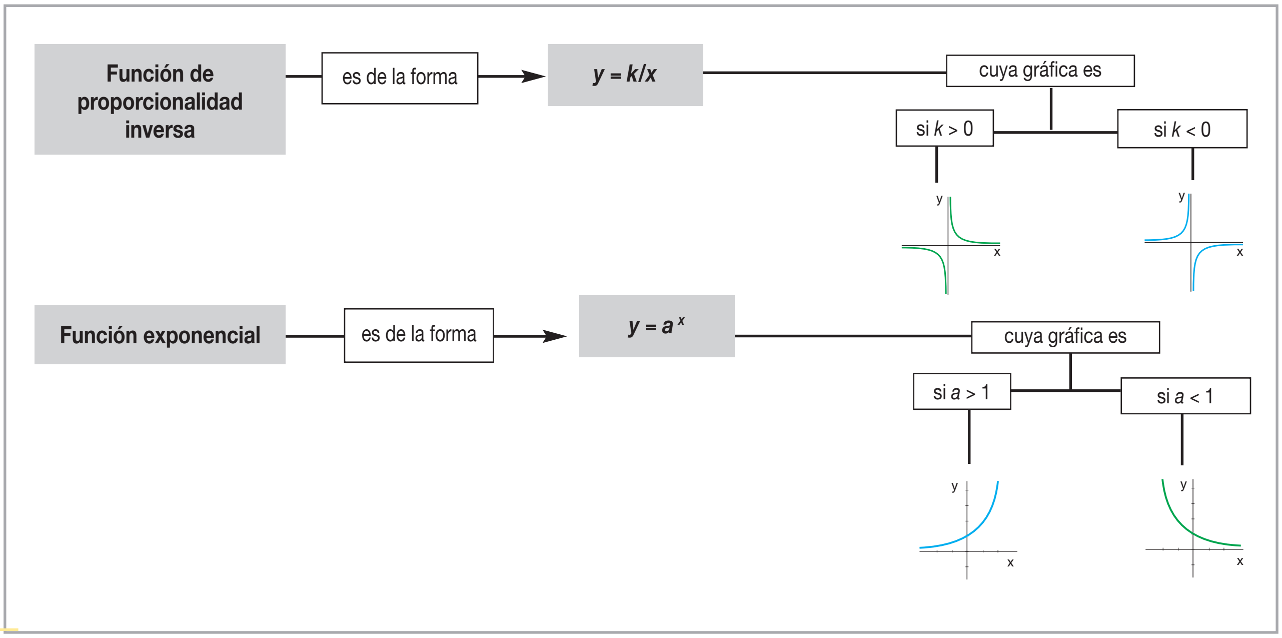
b) ¿Cuánto tiempo tardarán en encontrarse?

c) ¿Cuántos kilómetros habrán recorrido hasta que se encuentran?

En resumen

- Un número expresado en **notación científica** consta de un número decimal cuya parte entera tiene una sola cifra no nula, multiplicado por una potencia de 10 de exponente entero.





Ejercicios y problemas integradores

- Un autobús interprovincial efectúa su recorrido cuya distancia es 480 *km* y su velocidad media es 80 *km/h*.

  a) Calcula el tiempo que tardará en recorrer el trayecto.

  b) Escribe una función que relacione el espacio recorrido con el tiempo.

  c) Construye la tabla de valores de la función.

  d) Representa gráficamente la función en el intervalo de tiempo que dura todo el trayecto.

  e) Calcula la velocidad media que debe alcanzar el vehículo para efectuar el recorrido en una hora menos.

Solución

Para resolver el problema partimos de asignar letras a las variables que se presentan en el mismo, hay dos, al ***"tiempo transcurrido"*** desde el inicio del viaje, variable que es independiente, le asignaremos a la ***"x"*** y a la ***"distancia recorrida"***, variable dependiente del tiempo, le asignaremos a la **"y"**. Empecemos a resolver:

a) El tiempo que tardará en recorrer está dado por la división entre la distancia y la velocidad (que indica la distancia recorrida por hora).

$$Tiempo = \frac{x}{v} = \frac{480\ \cancel{km}}{80\ \cancel{km}/h} = 6\ h$$

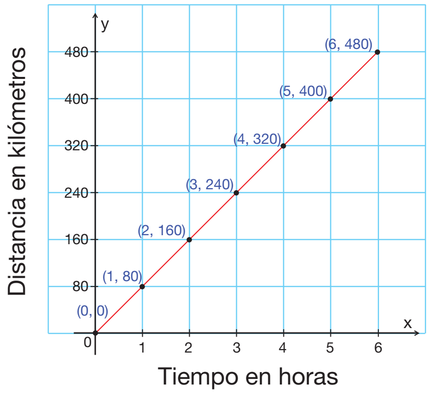
b) Si por cada hora transcurrida, la distancia recorrida es de 80 km, se evidencia que la ley de formación es: $y = 80x$.

Esta ley refleja el enunciado e inclusive ratifica el cálculo anterior, pues si reemplazamos al tiempo por $x = 6$, verificamos que la distancia recorrida es de 480 km.

c) Tabla de valores:

Tiempo (x) en horas	0	1	2	3	4	5	6
Distancia recorrida (y) en kilómetros	0	80	160	240	320	400	480

d) Representaremos únicamente el segmento que va desde el origen, inicio del viaje, (0, 0) hasta el fin del viaje (6, 480).



e) Si queremos saber la velocidad media del mismo viaje, pero que tarde una hora menos, tomaremos el valor $x = 5$, para la distancia de 480 *km*.

$$\text{Velocidad media} = \frac{480\ km}{5\ h} = 96\ km/h$$

Recuerda: No hay que exceder los límites de velocidad establecidos.

- Un avión consume 50 ℓ (litros) de combustible en el despegue y 30 ℓ en el aterrizaje. El consumo durante la travesía es de 20 *ℓ/km.*

a) Escribe la expresión algebraica de la función que relaciona el consumo de combustible con la distancia recorrida (incluyendo el despegue y el aterrizaje).

b) Calcula el consumo de combustible en una travesía de 7 000 *km*.

c) Determina la distancia que puede recorrer si carga 9 000 ℓ de combustible.

Solución

a) Definamos las variables, la independiente "*x*" describe el kilometraje, mientras que la dependiente "*y*", el consumo del combustible en litros. El consumo total es la suma del consumo por el despegue, más el consumo de vuelo, más el consumo de aterrizaje.

$$\text{Consumo total} = 50 + 20 \text{ por kilómetro} + 30$$
$$y = 20x + 80$$

b) El consumo de combustible en la travesía de 7 000 *km* es calculado al reemplazar $x = 7\ 000$ en la expresión algebraica encontrada.

$$y = 20x + 80$$
$$y = 20 \cdot 7\ 000 + 80$$
$$y = 140\ 080\ \ell$$

c) La distancia que puede recorrer con una carga de 9 000 ℓ es calculado al reemplazar $y = 9\ 000$ en la expresión algebraica.

$$y = 20x + 80$$
$$9\ 000 = 20x + 80$$
$$20x = 8\ 920$$
$$x = \frac{8\ 920}{20}$$
$$x = 446\ km$$

R: a) La expresión algebraica de la función que relaciona el consumo de combustible con la distancia recorrida es y = 20x + 80.

b) El consumo de combustible en una travesía de 7 000 km es 140 080 ℓ

c) La distancia que puede recorrer con una carga de 9 000 ℓ es 446 km.

Ejercicios y problemas

En tu cuaderno

Comprensión de conceptos y conocimiento de procesos

Notación científica

48 Resuelve con la calculadora las operaciones indicadas en la siguiente tabla expresando cada uno de los resultados obtenidos en notación científica.

A	B	A + B	A – B	A · B	A : B
$3{,}2 \cdot 10^6$	$2{,}5 \cdot 10^4$				
$-6{,}2 \cdot 10^{10}$	$2{,}5 \cdot 10^{12}$				
$1{,}5 \cdot 10^{-4}$		$1{,}512 \cdot 10^{-4}$			
	$1{,}25 \cdot 10^4$		$3{,}1875 \cdot 10^6$		

Entra en estas páginas web: http://www.webmath.com/k8round.html
http://www.webmath.com/sn_multiply.html
http://www.webmath.com/sn_divide.html
y comprueba los resultados de esta actividad.

Función constante

49 ¿Cuántos puntos de la gráfica de una función constante necesitamos conocer para deducir su expresión algebraica?

50 La entrada a una piscina cuesta $ 3. Construye una tabla de valores y representa gráficamente el gasto que le supone a una persona acceder a la piscina respecto a los kilómetros que ha nadado.

51 Representa gráficamente las siguientes funciones constantes.

a) $y = -8$ b) $y = 6$ c) $y = -3$

Función de primer grado

52 ¿Cuántos puntos de la gráfica de una función lineal necesitamos conocer para deducir su expresión algebraica? ¿Y de una función afín no lineal?

53 ¿Cuáles de las siguientes expresiones algebraicas corresponden a funciones lineales, afines o constantes? ¿Cuáles no son funciones?

a) $y = 8x - 2$ c) $x = 4$
b) $y = -5$ d) $y = 7x$

54 La gráfica de una función lineal pasa por el punto (2, 6). Indica cuál de los siguientes puntos pertenece a la gráfica de dicha función.

a) (4, 6) b) (1, 3) c) (2, 4)

55 Representa gráficamente las siguientes funciones lineales.

a) $y = x$ b) $y = -x$ c) $y = -6x$

— Indica en cada una de ellas la pendiente de la recta.

56 Construye una tabla de valores y representa gráficamente las funciones de proporcionalidad directa dadas por estas relaciones.

a) El precio de una vivienda y su superficie, si cada metro cuadrado cuesta $ 1 500.

b) El gasto en gasolina de un auto y los kilómetros recorridos, si cada 100 km gasta $ 8.

57 Las tarifas mensuales de tres compañías de teléfono son las siguentes:

A: $ 15
B: $ 0,10 por minuto
C: $ 5 más $ 0,05 por minuto.

Indica, para cada una de las compañías, el tipo de función que relaciona el gasto mensual con el tiempo de las llamadas.

58 Representa gráficamente la función dada por la siguiente tabla de valores.

Distancia en km *(x)*	1	2	3	4
Importe en dólares *(y)*	3,8	4,6	5,4	6,2

— Indica qué tipo de función has representado.

— Calcula la pendiente y la ordenada en el origen.

59 Representa gráficamente las siguientes funciones afines.

a) $y = x - 6$ b) $y = -2x + 1$ c) $y = 3x + 2$

— Indica en cada una de ellas la pendiente y la ordenada en el origen.

60 La tarifa de un taxi en un recorrido interurbano es de $ 2 de arranque más $ 0,4 por cada kilómetro recorrido.

Representa gráficamente la función que relaciona el importe que hay que pagar con la longitud del recorrido.

61 Halla las expresiones algebraicas de las funciones afines dadas por cada una de las siguientes tablas de valores.

a)

x	–1	2
y	–5	7

b)

x	–5	5
y	–4	–2

62 Representa gráficamente estas funciones.

a) $y = -3x$ c) $y = -2x + 4$ e) $y = 2x$
b) $y = 2x - 3$ d) $y = 5$ f) $y = -6$

— Indica si se trata de funciones lineales, afines o constantes. Señala en cada una de ellas la pendiente y la ordenada en el origen.

63 Halla la expresión algebraica de cada una de las funciones indicadas a continuación.

a) Una función constante cuya ordenada en el origen es 5.

b) Una función constante que pasa por el punto $P\ (-3, 4)$.

c) Una función lineal cuya pendiente es -3.

d) Una función lineal que pasa por el punto $P\ (3, 2)$.

64 Halla la expresión algebraica de la función afín que pasa por el punto $P\ (2, 7)$ y cuya representación gráfica es una recta paralela a la gráfica de la función $y = 2x$.

65 Halla la expresión algebraica de una función afín f si $f(1) + 3 = f(2)$ y $4 \cdot f(2) = f(6)$.

66 Representa gráficamente la función f dada por la siguiente tabla de valores.

x	0	1	2	3
y	0	12	24	36

a) Indica qué tipo de función has representado.

b) Determina la pendiente de la recta y la ordenada en el origen.

c) Halla el dominio y el recorrido de la función.

d) Determina los puntos de corte, los intervalos de crecimiento y la tasa de variación media en el intervalo [1, 3].

e) Obtén el valor de f para $x = \frac{1}{2}$ y $x = -\frac{1}{2}$.

67 Halla la expresión algebraica de la función cuya representación gráfica es una recta en los siguientes casos.

a) Pasa por el punto $P\ (-3, 2)$ y forma un ángulo de 45º con el semieje positivo de abscisas.

b) Pasa por el punto $Q\ (3, 1)$ y forma un ángulo de 30º con el semieje positivo de abscisas.

68 Halla la expresión algebraica de la función afín que pasa por el punto $P\ (1, -5)$ y su ordenada en el origen es igual a -2.

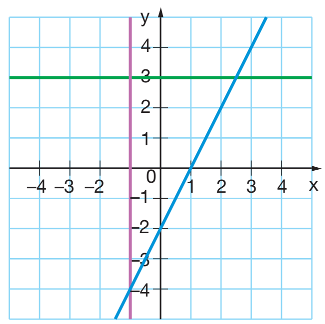
69 Halla la expresión algebraica de la función afín cuya representación gráfica es una recta que pasa por el punto $A\ (-2, 1)$ y cuya pendiente es igual a $\frac{4}{3}$.

Ecuación de una recta

70 ¿Qué condición deben cumplir las ecuaciones de dos rectas para que sean paralelas?

71 ¿Cuántas rectas pasan por dos puntos dados? ¿Cuántas rectas pasan por un punto dado? ¿Y que pasen por un punto y tengan pendiente igual a 4? Razona tus respuestas.

72 Escribe las expresiones algebraicas de estas rectas.



73 Escribe las expresiones algebraicas de las funciones afines si sus gráficas pasan por los puntos indicados.

a) $A(-1, -3)$ y $B(1, 9)$

b) $P(-2, 3)$ y $Q(4, -6)$

74 Determina la ecuación de la recta en los siguientes casos.

a) Pasa por los puntos $A(-1, 10)$ y $B(2, -17)$.

b) Pasa por el punto $P(5, -1)$ y es paralela a la recta $y = 7x + 3$.

c) Pasa por el punto $A(3, -1)$ y la ordenada en el origen es igual a -5.

d) Pasa por el punto $P(8, 5)$ y la pendiente es 2.

Función de proporcionalidad inversa

75 Queremos construir triángulos cuya área sea 6 cm².

a) Completa la siguiente tabla de valores correspondiente a la función que relaciona la base con la altura de cada uno de los triángulos.

Base en cm *(x)*	2	4	6	8	10
Altura en cm *(y)*					

b) Representa gráficamente la función obtenida y escribe su expresión algebraica. ¿De qué tipo de función se trata?

76 El tiempo que tarda un auto en recorrer una determinada distancia depende de la velocidad a la que circule. La función que relaciona la velocidad constante a la que circula un auto con el tiempo que tarda en recorrer 600 km viene dada por esta tabla de valores.

Velocidad en km/h *(x)*	20	40	60	80	100	120
Tiempo en horas *(y)*	30	15	10	7,5	6	5

a) Representa gráficamente la función dada por esta tabla de valores y escribe su expresión algebraica. ¿De qué tipo de función se trata?

b) ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer 600 km un auto cuya velocidad constante sea de 75 km/h?

77 En esta tabla aparecen algunos valores correspondientes a una función de proporcionalidad inversa.

x	−5	−4	−3	−2	−1	1	2	3		5
y							$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{10}$	

a) Determina la constante de proporcionalidad inversa y la expresión algebraica de la función.

b) Completa la tabla de valores y representa gráficamente la función.

Función exponencial

78 Halla los valores desconocidos de la siguiente tabla de valores sabiendo que corresponde a una función de la forma $f(x) = k \cdot a^{x-1}$ (*a* es un número real positivo diferente de 1).

(x)	1	2	3	4
$f(x)$	6,528		40,8	

79 En un laboratorio hay dos cultivos de bacterias cuyos respectivos crecimientos vienen dados por las funciones $A(n) = 5 \cdot 1{,}3^{2n}$ y $B(n) = 2 \cdot 2{,}4^{n}$, donde *n* es el tiempo expresado en horas y *A(n)* y *B(n)* los miles de bacterias.

a) Utiliza la calculadora científica y completa la siguiente tabla.

n	0	1	2	3	4
$A(n)$					
$B(n)$					

b) A partir de los datos que aparecen en la tabla, indica aproximadamente al cabo de cuánto tiempo los dos cultivos tendrán el mismo número de bacterias.

80 El gráfico de la función $f(x) = k \cdot a^{x}$ (*a* es un número real positivo diferente de 1) pasa por el punto *P* (0, 5) y la imagen de 2 por dicha función es el doble de la imagen de 1. Halla los valores de *k* y de *a.*

81 En una ciudad viven 2,5 millones de habitantes y su tasa de crecimiento anual en los últimos años ha sido del 6 %. Si se mantiene esta tasa de crecimiento en los próximos años:

a) Halla la función que permite calcular el número de habitantes en función de los años transcurridos y completa la siguiente tabla.

Tiempo transcurrido en años *(x)*	0	2	4	6	8	10
Número de habitantes en millones *(y)*						

b) Representa gráficamente la función obtenida.

Aplicación en la práctica

82 Para ir a patinar un día festivo con los compañeros y las compañeras de clase alquilamos unos patines. El precio del alquiler es de $ 12 diarios.

a) Representa gráficamente la función que relaciona el importe del alquiler según el número de horas diarias de uso de los patines.

b) ¿Cuál es la pendiente de la recta obtenida?

83 El metro cuadrado de papel que se utiliza para empapelar una habitación de 40 m² cuesta $ 3.

a) Confecciona una tabla de valores y representa gráficamente la función que relaciona los metros cuadrados de pared con el importe.

b) ¿Cuánto cuesta el papel necesario para empapelar toda la habitación?

84 La longitud de la sombra que proyecta un edificio, a una hora determinada, y la altura del edificio son magnitudes directamente proporcionales. Indica las expresiones algebraicas de las funciones de proporcionalidad directa que se obtienen en los siguientes casos.

a) Un edificio de 24 m, a las 8 de la mañana, proyecta una sombra de 30 m.

b) El mismo edificio, a las 10 de la mañana, proyecta una sombra de 20 m.

— Construye una tabla de valores para los 6 m, 12 m, 18 m y 24 m de altura del edificio, y representa gráficamente ambas funciones.

— Determina la pendiente de cada recta.

— ¿Qué crees que ocurrirá a las 11 de la mañana? ¿Las sombras serán mayores o menores?

85 Hay dos gimnasios que prestan sus servicios en el barrio, el primero llamado "Cuerpo sano" establece un costo semanal de $ 7 con obligatoriedad de inscripción mínima de 5 semanas siendo la primera gratuita, el otro gimnasio "Salud y deporte" propone una inscripción mínima de dos semanas a un valor de $ 6 semanal.

a) Construye, para cada uno de los gimnasios, la tabla de valores relativa a las diez primeras semanas de inscripción.

b) Expresa algebraicamente como varía el costo en cada uno de los gimnasios al aumentar el tiempo de inscripción.

c) Representa gráficamente las funciones obtenidas para cada gimnasio.

d) ¿Cuánto pagará una persona al cabo de 5 semanas de asistencia en cada uno de los gimnasios?

e) ¿Al cabo de cuantas semanas es más económico el gimnasio "salud y deporte"

f) El valor de inscripción pagado por una persona es de $ 48 ¿En qué gimnasio se inscribió? ¿Cuántas semanas?

86 Un atleta participa en la carrera 10 K (10 km), organizada por la Federación Provincial de Deportes, él mantiene una velocidad de 5 m/s.

a) ¿A qué distancia de la partida se encontrará luego de transcurrir 5 minutos? ¿20 minutos?

b) ¿Al cabo de cuánto tiempo se hallará a 4 km de la partida?

c) ¿Cuánto tiempo le faltará por recorrer si ha llegado al kilómetro 7?

d) Escribe la expresión algebraica de la función que relaciona la distancia a la que se halla el atleta de la partida.

e) Representa gráficamente dicha función.

87 @ Formen equipos y busquen tablas de valores correspondientes a estas relaciones.

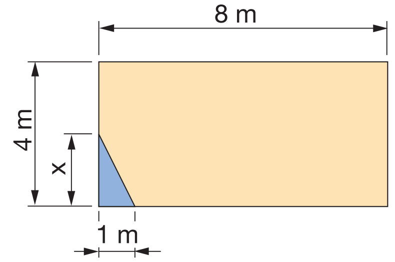
- Cifras de población de varias provincias del país.
- Temperatura media de varias provincias del país durante el primer trimestre de 2011.

— Representen gráficamente dichos valores e interpreten oralmente las gráficas presentadas.

Puedes informarte en la página http://www.inec.gob.ec

Más a fondo

88 En un jardín rectangular se quiere reservar un espacio triangular para construir un parterre.



a) Expresa el área del parterre $A(x)$ en función de x.

b) ¿Qué valores puede tener x?

c) Halla $A(2)$ y $A(4)$.

d) Expresa el área de la parte del jardín que no tiene parterre, $B(x)$, en función de x.

e) Representa gráficamente las funciones $A(x)$ y $B(x)$.

f) ¿Pueden estar situadas las gráficas de las funciones $A(x)$ y $B(x)$ en el segundo cuadrante?

89 Un ciclista parte de un pueblo *A* hacia un pueblo *B* con una velocidad constante de 40 km/h. En el mismo instante, otro ciclista parte del pueblo *B* hacia el pueblo *A* con una velocidad constante de 60 km/h.

Si la distancia entre los dos pueblos es de 100 km, escribe las expresiones algebraicas de las funciones que relacionan con el tiempo las siguientes magnitudes.

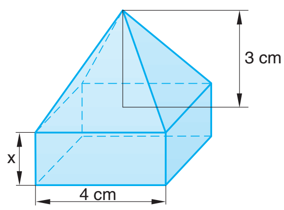
a) La distancia del primer ciclista al pueblo *A*.

b) La distancia del segundo ciclista al pueblo *A*.

c) La distancia que separa los dos ciclistas.

90 Una disolución de $3{,}6 \cdot 10^{24}$ partículas se ha llevado a ebullición y en una hora se ha evaporado el 48 % de la disolución. ¿Cuántas partículas quedan finalmente?

91 Sobre un prisma cuadrangular, cuya base tiene 4 cm de lado, se apoya una pirámide de igual base que el prisma y de altura 3 cm.

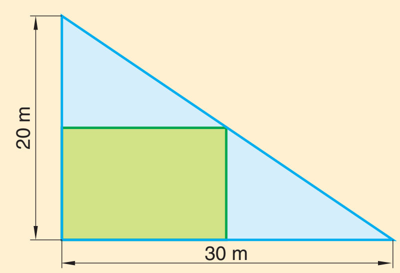


a) Determina la función de primer grado que expresa el volumen de este sólido con relación a la altura del prisma.

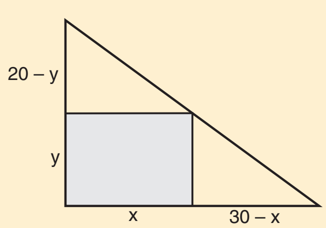
b) Representa gráficamente la función anterior.

c) Halla el volumen del sólido si la altura del prisma es de 2 cm.

• En una esquina de una parcela cuya forma es la de un triángulo rectángulo se quiere construir una casa rectangular cuya superficie sea la mayor posible. Formen grupos de 3 alumnos, observen la figura y calculen cuáles deben ser sus dimensiones.



Representamos por *x* e *y* las dimensiones del rectángulo.

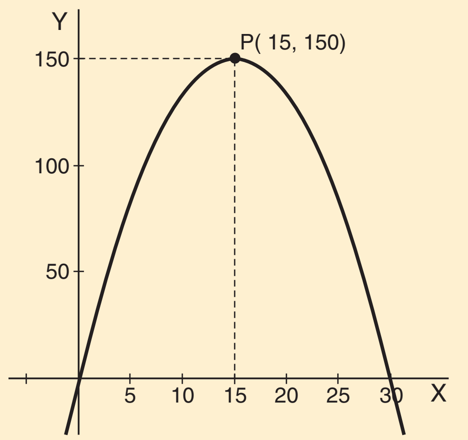


Por semejanza de triángulos:

$$\frac{20}{30} = \frac{y}{30 - x} \Rightarrow y = \frac{20(30 - x)}{30} = 20 - \frac{2}{3}x$$

$$A = x \cdot y = x\left(20 - \frac{2}{3}x\right) = 20x - \frac{2}{3}x^2$$

Representamos la función $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 20x$:



La función tiene un máximo en $x = 15$.

Si $x = 15$, entonces:

$$y = 20 - \frac{2}{3} \cdot x = 20 - \frac{2}{3} \cdot 15 = 10.$$

Así, el área será máxima si el rectángulo tiene 15 m de base y 10 m de altura.

• En una empresa dedicada a la construcción de grúas han comprobado que los gastos mensuales (en millares de dólar) que produce la fabricación de *x* grúas vienen dados por la función $G(x) = x + 9$ y que los ingresos (en millares de dólar) que proporciona su venta vienen dados por la función $I(x) = -x^2 + 7x + 1$. Halla cuántas grúas debe construir en un mes para que el beneficio obtenido sea el máximo.

La función beneficio viene dada por:

$$B(x) = I(x) - G(x) =$$
$$= -x^2 + 7x + 1 - (x + 9) =$$
$$= -x^2 + 6x - 8$$

Si representamos esta función $y = -x^2 + 6x - 8$, obtenemos una parábola con las ramas hacia abajo y con el vértice en:

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) \Rightarrow V(3, 1)$$

Por tanto, esta función presenta un máximo para $x = 3$. Es decir, el beneficio será máximo si la empresa construye 3 grúas en un mes.

Autoevaluación

Coevaluación

Si logras resolver el 70 % de estas actividades individuales y grupales, puedes avanzar.

1. Expresa en notación científica el número $456,78 \cdot 10^{23}$.

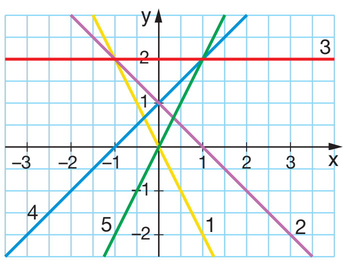
2. Indica los valores de m y b para que la expresión algebraica $y = mx + b$ corresponda a:

   a) Una función constante.

   b) Una función lineal o de proporcionalidad directa.

   c) Una función afín.

3. Determina la representación gráfica que corresponde a cada una de las siguientes funciones.
   a) $y = 2$
   b) $y = 2x$
   c) $y = x + 1$
   d) $y = -x + 1$
   e) $y = -2x$



4. Representa gráficamente las funciones $y = 2x$, $y = x^2$ e $y = 2^x$. ¿Tienen algún punto en común? ¿Cuál crece más rápidamente para $x > 0$?

1. ¿Cuál de las siguientes funciones afines tiene por gráfica una recta con pendiente 4 y ordenada en el origen –3?

   a) $y = -3x + 4$ b) $y = 4x - 3$ c) $y = 4x + 3$

2. Determina la expresión algebraica de una función afín si su gráfica pasa por los puntos $A(1, 4)$ y $B(3, 7)$.

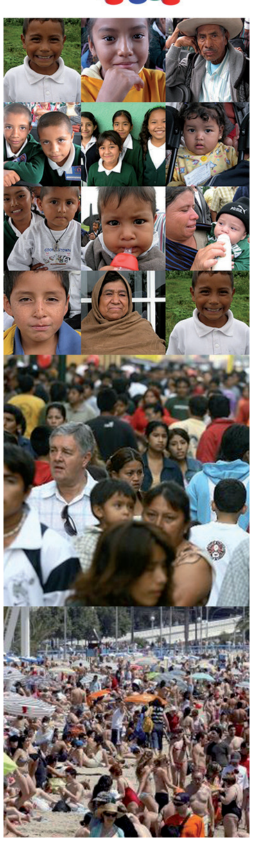
3. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 1)$ y tiene pendiente igual a –2.

4. Indica cuál de las siguientes rectas es paralela al eje de ordenadas.

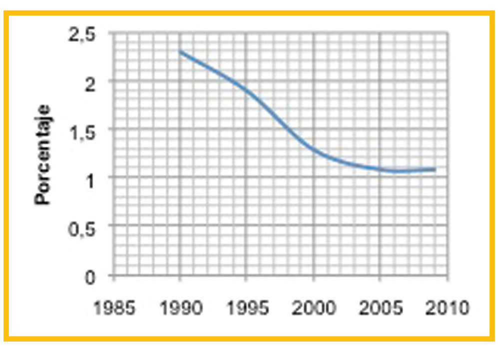
   a) $x = -6$ b) $y = x + 1$ c) $y = 5$

Buen Vivir

Ciencia, tecnología e innovación



Tasa de crecimiento demográfico



De acuerdo a la estadística del Banco Mundial que graficamos para los últimos 19 años, el crecimiento demográfico de la población ecuatoriana permite establecer que en 1990 registraba un 2,3 %, en 1995 bajó al 1,9 %, para el 2000 había descendido al 1,4 %, y a partir de entonces, se mantiene en un rango del 1,1 % hasta el 2009 que describe la gráfica. Sin embargo, de acuerdo al último Censo de Población realizado por el INEC el 2010, entre 2001 al 2010 se ha dado un crecimiento aproximado al 1,5 % por año.

Actividades

1 Consulten por Internet los últimos datos del INEC para establecer cuál es la población actual de 0 a 14 años, 15 a 64 años, y de 65 años en adelante.

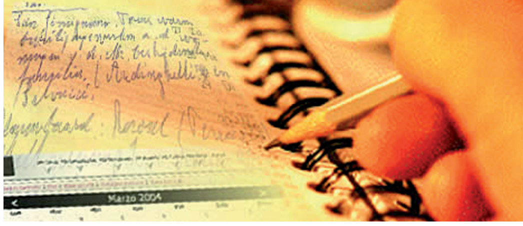
2 Visiten las oficinas del Instituto Nacional de Estadísticas y Censos (INEC) si viven en Quito o la página Web www.inec.gob.ec si viven en provincias, para consultar cuál es su función en el Estado ecuatoriano.

3 ¿Dónde creen que aumentó más la población en los últimos diez años, en la ciudad o en el campo? ¿Por qué?

4 ¿Saben cuál es la esperanza de vida de los ecuatorianos, a qué puede deberse?

5 ¿Crees que nuestro país necesita innovación?, en qué ámbitos?¿cómo podemos ser innovadores?

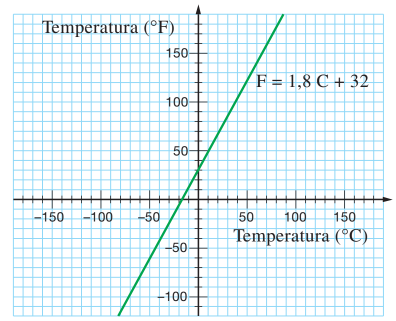
6 ¿Qué idea innovadora puedes proponer para el país?



Crónica matemática

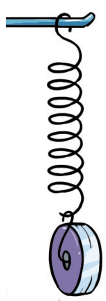
La unidad de temperatura que usamos habitualmente es el grado Celsius (°C). En ciertos países anglosajones, la unidad de temperatura es el grado Fahrenheit (°F). La correspondencia entre estas dos escalas de temperatura es una *función afín.*

Punto de fusión del agua	Punto de ebullición del agua
0 °C	100 °C
32 °F	212 °F



Ley de Hooke

La ley de Hooke es una ley de física que relaciona la masa colgada de un muelle, *m,* con la elongación que éste experimenta, *e.*



La dependencia entre estas dos magnitudes es de proporcionalidad directa. Observa:

$$m = k\,e$$

El valor de la constante de proporcionalidad *k* depende de cada muelle.

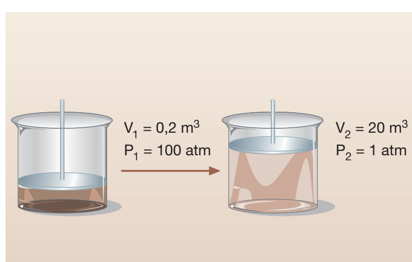
Ley de Boyle-Mariotte

La ley de Boyle-Mariotte es una ley que cumplen los gases sometidos a temperatura constante. Esta ley relaciona la presión, *P,* que se ejerce sobre una cantidad de gas y el volumen, *V,* que éste ocupa.

La dependencia entre estas dos magnitudes es de proporcionalidad inversa.

$$P = \frac{k}{V}$$

El valor de la constante de proporcionalidad *k* depende del valor de la temperatura y de la cantidad del gas.

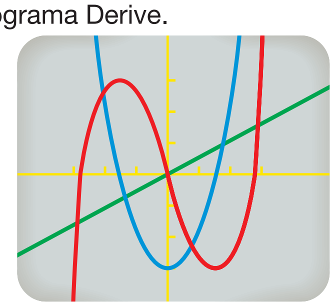


Calculadoras gráficas y computadores

Algunas calculadoras presentan una tecla **Graph** que permite representar gráficamente funciones.

Estas calculadoras muestran en pantalla la gráfica de una función una vez introducida su expresión algebraica para un determinado intervalo de valores de *x.*

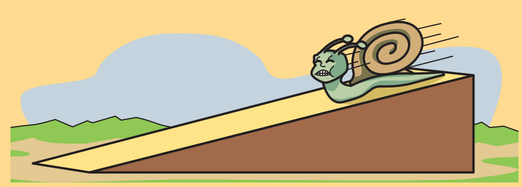
Existen calculadoras que incorporan programas informáticos de gran utilidad en la representación gráfica de funciones, como es el programa Derive.



Demuestra tu ingenio

Un caracol baja por un plano inclinado de 5 m de longitud y 3 m de desnivel con una velocidad constante de 0,02 m/s.

Deduce la expresión algebraica que relaciona la altura a la que se encuentra el caracol con el tiempo.



@ Busca en Internet programas educativos que permitan la representación gráfica de funciones e intenta representar los tipos de funciones estudiadas.

Si no encuentras alguno, puedes conectarte a http://www.xtec.es/~mgarc127/

Módulo 3

Bloques: Numérico. Relaciones y funciones

Buen vivir: Educación, cultura y saberes ancestrales.

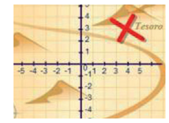
Disponemos de un listón de aluminio para enmarcar un cuadro rectangular pintado por la comunidad de Tigua. Si la anchura del listón es x cm y las dimensiones del cuadro son $x + 15$ cm y $x + 12$ cm, halla:

a) Un polinomio que exprese, en centímetros, la longitud de listón necesario para enmarcar el cuadro.

b) La longitud de listón necesario para enmarcar el cuadro si el valor de x es 4 cm.

http://www.museohnc.fcm.unc.edu.ar

Expresiones algebraicas y numéricas
Polinomios y fracciones algebraicas



Ampliarás tus conocimientos sobre números reales, polinomios y *aprenderás a operar* con fracciones algebraicas.

DCD Destrezas con criterios de desempeño

- Utilizar el lenguaje algebraico con precisión para expresar e interpretar información.
- Operar con números reales aplicados a polinomios.
- Efectuar operaciones con polinomios y fracciones algebraicas.
- Presentar de manera clara y ordenada la resolución de los problemas.
- Confiar en las propias capacidades para resolver problemas.

Prerrequisitos

Recuerda

- Calcula el doble de 6, el triple de 12 y la quinta parte de 25.
  — ¿Cómo representarías el doble de un número cualquiera *a*? ¿Y el triple? ¿Y su quinta parte?
- Calcula el área de un círculo de 5 cm de radio. ¿Cómo expresarías el área de un círculo de un radio *r* cualquiera?
- El número de alumnos de EGB sobrepasa en 15 el número de alumnos de Bachillerato. Indica cuántos son estos últimos si el número de alumnos de EGB es:

  a) 336 b) Un número desconocido *a*

- Calcula el valor que se obtiene al sustituir *a* por –3 y *b* por $\frac{1}{2}$ en la expresión siguiente:

$$2 \cdot a^2 - 4 \cdot a \cdot b$$

- Un número es **múltiplo** de otro si se obtiene multiplicando este último por un número natural.

  Ejemplo: 45 es múltiplo de 15.

Un número es **divisor** de otro si, al dividir el segundo entre el primero, la división es exacta. Ejemplo: 3 es divisor de 45.

Evaluación diagnóstica

- Calcula:

a) $-14x^3 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^3$ b) $-5x^4 \cdot 2x^2 + \frac{3}{2}x^6$

- Resuelve:

$$\frac{3\left(\frac{1}{4} - \frac{12}{15}\right) + \frac{3}{5}\left(\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{9}\right)}{\frac{4}{7} - \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{3}{14}}$$

- Calcula:

  a) El m.c.d. de los números 30, 45 y 100.

  b) El m.c.m. de 300 y 660.

- ¿Qué edad tendrás dentro de 4 años? ¿Qué edad tenías hace 6 años?
- Elena mide 170 cm y es 8 cm más alta que Juan. ¿Cuál es la estatura de Juan?
- Calcula el área de un rectángulo de 50 cm de base y 35 cm de altura.
- Efectúa: $2^2 \times 2^5$; $3^3 \times 3^2 \times 3^7$; $2^3 \times 3^4 \times 2^5 \times 3^6$
- Escribe el número que falta en las siguientes expresiones.

  a) 3 + ... = 21 c) ...... × 9 = 45

  b) 12 – ...... = 7 d) ...... ÷ 8 = 5

- Completa cada apartado con un mismo número.

  a) 4 × (...... – 5) = 3 × ......

  b) 5 – ...... = 4 × ...... – 5

  c) 7 × ...... – 2 = 16 + ...

Educación, cultura y saberes ancestrales

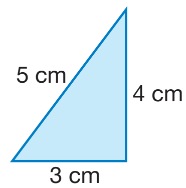
Art. 377. El sistema nacional de cultura tiene como finalidad fortalecer la identidad nacional; proteger y promover la diversidad de las expresiones culturales; incentivar la libre creación artística y la producción, difusión, distribución y disfrute de bienes y servicios culturales; y salvaguardar la memoria social y el patrimonio cultural.

Constitución de la República del Ecuador, 2008.

1 Expresiones algebraicas y numéricas

Si conocemos los valores de los catetos y de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, fácilmente podemos calcular su perímetro y su área.

Por ejemplo:



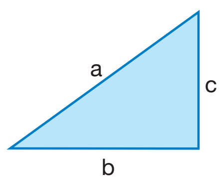
Catetos: 3 cm y 4 cm Hipotenusa: 5 cm

Perímetro: 5 cm + 3 cm + 4 cm = 12 cm

$$\text{Área} = \frac{3\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm}}{2} = 6\,\text{cm}^2$$

Si desconocemos el valor numérico de uno o varios de los lados, podemos utilizar letras que los representen.

Observa cómo expresamos en este caso la información.



Catetos: b y c Hipotenusa: a

Perímetro: $a + b + c$

$$\text{Área} = \frac{b \cdot c}{2}$$

En el primer caso hemos utilizado únicamente *números;* en el segundo, *números* y *letras.*

Las expresiones:

$$a \qquad b \qquad c \qquad a + b + c \qquad \frac{b \cdot c}{2}$$

reciben el nombre de *expresiones algebraicas.*

> Una **expresión algebraica** es una serie de números y letras relacionados mediante los signos de las operaciones aritméticas.

Tengamos presente que las operaciones que efectuamos con expresiones algebraicas son las mismas que las que realizamos con números solamente y, por tanto, cumplen las mismas reglas.

Para leer una expresión algebraica basta con nombrar los números, las letras y los signos que contiene en el orden en que aparecen. Así:

$$5a^2 + b \xrightarrow{\text{se lee}} \text{cinco } a \text{ cuadrado más } b$$

También es frecuente construir una breve frase que la defina. Fíjate en los siguientes ejemplos:

$2a \longrightarrow$ doble de a

$\frac{3b}{2} \longrightarrow$ mitad del triple de b

$(a - b)^2 \longrightarrow$ cuadrado de la diferencia entre a y b

$\frac{a + b}{4} \longrightarrow$ cociente de la suma de a y b entre cuatro

$3\,(b + c)^2 \longrightarrow$ triple del cuadrado de la suma de b y c

MUCHO OJO

- Se denominan **términos** de una expresión algebraica los números y las letras que están unidos únicamente por la multiplicación, es decir, cada uno de los sumandos.

  Así, la expresión $2x^3y - 5xy^2 +$ + $3x$ tiene tres términos: $2x^3y$, $-5xy^2$ y $3x$.

- Cada término consta de una parte numérica, llamada **coeficiente,** y una parte formada por letras con sus exponentes, que recibe el nombre de **parte literal.**

  $-5 \; xy^2$

  Coeficiente

  Parte literal

- Si dos términos tienen la misma parte literal, diremos que son **términos semejantes.**

MUCHO OJO

Al escribir una expresión algebraica, debemos tener en cuenta que:

- Cuando el signo de la multiplicación aparece entre letras o entre un número y una letra, suele suprimirse.
- El factor 1 no se escribe.
- El exponente 1 no se escribe.
- Generalmente, no se escribe el signo de multiplicar delante de un paréntesis.

La traducción del lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico puede resultar algo más difícil, sobre todo si los enunciados son compuestos. En estos casos es conveniente seguir los pasos que se indican:

Procedimiento	Ejemplo
Leemos con atención el enunciado que debemos traducir.	*La diferencia entre el cubo de un número y el triple del cuadrado de otro número es igual al doble de su suma.*
Escogemos la letra o letras que representarán las cantidades desconocidas.	• a para el primer número • b para el segundo
Traducimos al lenguaje algebraico cada una de las partes que componen el enunciado.	• Primer número: a → cubo de a: a^3 • Segundo número: b → cuadrado de b: b^2 → triple del cuadrado de b: $3b^2$ • Diferencia entre el cubo de a y el triple del cuadrado de b: $a^3 - 3b^2$ • Suma de a y b: $a + b$ → doble de su suma → $2(a + b)$
Escribimos la expresión correspondiente al enunciado completo.	$a^3 - 3b^2 = 2(a + b)$

1.1. Valor numérico

Hemos visto que *la diferencia entre el cubo de un número y el triple del cuadrado de otro número* se traduce al lenguaje algebraico como:

$$a^3 - 3b^2$$

Si queremos calcular esta diferencia para los números $a = 4$ y $b = 2$, basta con sustituir estos valores en la expresión anterior y operar.

$$a^3 - 3b^2 = 4^3 - 3 \cdot 2^2 = 64 - 3 \cdot 4 = 52$$

El número obtenido, 52, es el *valor numérico* de la expresión algebraica.

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el número obtenido al sustituir las letras por números determinados y efectuar las operaciones indicadas.

Si ahora sustituimos las letras por otros números, el valor numérico obtenido será distinto. Así, el valor numérico de una expresión algebraica no es único, pues depende del valor que se dé a la letra o letras que en ella intervienen.

Actividades

1 Expresa cada frase en lenguaje algebraico.

a) El doble de la suma de *a* y *b.*

b) El cuadrado del triple de *x.*

c) El doble del cubo de *y* menos el cuadrado del doble de *x.*

d) El triple del cuadrado de *a* menos el cociente de *a* entre *b* es igual al doble de *b.*

2 Escribe una frase que defina cada una de las siguientes expresiones algebraicas.

a) $a + 3b^2$ b) $a^3 - 2b$

3 Halla el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas para $x = 2$ e $y = 3$.

a) $2x + xy$ b) $\dfrac{2xy}{3} + 3x$

2 Polinomios

Intuitivamente diremos que un **polinomio** es la suma o resta de términos algebraicos, el término algebraico básico es el monomio, el monomio en una variable "*x*" en general se encuentra elevada a un exponente y se multiplica por una constante. Observa cómo expresamos en lenguaje algebraico cada una de las siguientes magnitudes:

El volumen de un cubo de arista *x:*	x^3
El área de un círculo de radio *x:*	πx^2
La longitud de una circunferencia de radio *x:*	$2\pi x$

Definamos formalmente al monomio:

> Un **monomio** en una variable "*x*" es una expresión algebraica de la forma ax^n, en la que *a* es un número real y *n* un número natural.

Dado el monomio ax^n, la parte numérica ***a*** es el **coeficiente** del monomio y el exponente ***n*** de la variable *x* es el **grado** del monomio en esa variable.

Grado $n \geqslant 0$

Coeficiente ← $a\ x^{n}$

variable

FÍJATE

El grado de un monomio con más de una variable, como por ejemplo $3x^2y^3$, se obtiene sumando todos los exponentes de las variables.

Así, diremos que el monomio $3x^2y^3$ es de grado 5, de grado 2 respecto de *x* y de grado 3 respecto de *y*.

De manera análoga a como hemos visto con los monomios en una variable, para que dos monomios con varias variables sean semejantes deben tener la misma parte literal; por ejemplo $-4zy^2x$ y $7xzy^2$.

CONTRAEJEMPLO

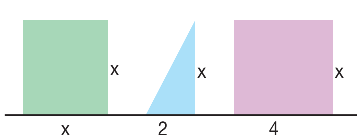
La expresión $5x^{\frac{1}{2}}$ no es un monomio porque el exponente de x no es un número natural.

Observa que $3x^0 = 3$, puesto que cualquier potencia de exponente 0 vale 1. Por lo tanto, los monomios de **grado 0** sólo constan de coeficiente.

Dos monomios son **semejantes** si tienen la misma parte literal; por ejemplo, los monomios $\sqrt{2}\ x^5$ y $-4x^5$.

Formalmente definiremos al **polinomio** en una variable así:

> Un **polinomio** en una variable *x* es una expresión algebraica que puede reducirse a la forma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, en la que los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números reales y *n* es un número natural.



A la izquierda están representadas tres figuras geométricas de altura "x": un cuadrado, un triángulo y un rectángulo. El área de cada una de ellos puede expresarse de esta manera:

$A_{cuadrado} = x \cdot x = x^2 \qquad A_{triángulo} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x = x \qquad A_{rectángulo} = 4 \cdot x = 4x$

Y el área total será la suma de las tres áreas.

$$A_{total} = x^2 + x + 4x = x^2 + 5x$$

- El polinomio $A(x) = x^2 + 5x$, es de grado 2, puesto que éste es el mayor de los grados de sus términos.

> El **grado de un polinomio** es el **mayor de los grados** de sus términos.

- En caso de que la altura de las figuras sea $x = 2$ m, podemos calcular fácilmente la suma de las áreas. Para ello, basta sustituir este valor de la *x* en la expresión polinómica $A(x) = x^2 + 5x$ y operar.

$$A(2) = 2^2 + 5 \cdot 2 = 14$$

Así pues, si la altura es 2 m, la suma de las áreas es de 14 m².

El **valor numérico** del polinomio *P(x)* **para** $x = a$ es el número que se obtiene al sustituir la variable *x* por el número *a* y efectuar las operaciones indicadas. Se representa por ***P(a)***.

- Después de sumar las áreas hemos agrupado y reducido los términos semejantes y hemos ordenado los términos resultantes de mayor a menor. Así pues, decimos que el polinomio $A(x) = x^2 + 5x$ está **ordenado** y **reducido.**
- El polinomio $A(x) = x^2 + 5x$ carece de término independiente (de grado 0). Al no tener términos de cada uno de los grados menor o igual que 2, decimos que el polinomio es **incompleto.**

Tradicionalmente se decía que el monomio está formado por un término y el polinomio está formado por la suma de al menos dos términos, si son dos se llama binomio, tres trinomio, etc.; sin embargo, cuando nos refiramos a los polinomios hablaremos de monomios, binomios, trinomios y, en general, a expresiones de uno o varios términos.

MUCHO OJO

Es conveniente escribir un polinomio en **forma reducida** y **ordenado** de mayor a menor grado.

Así, el polinomio

$$P(x) = x - 2x^3 - 2x^2 + 5x - \\ - 3 - x^2 - 2$$

escrito en forma ordenada y reducida resulta:

$$P(x) = -2x^3 - 3x^2 + 6x - 5$$

Esta manera de escribir un polinomio nos permite identificar de forma rápida su grado y su término independiente. Además, nos facilitará las operaciones que debamos efectuar con él.

3 Adición y sustracción de polinomios

Para **sumar** (adicionar) dos o más polinomios hay que asociar a los términos de éstos en términos semejantes y se procede a sumar sus coeficientes.

En el caso de monomios:

$4x^2+7x^2=(4+7)x^2=11x^2$

En el caso de polinomios:

$(5x^3 + 3x^2 - 3x + 4) + (-4x^3 + 2x - 6) =$

$(5x^3 - 4x^3) + (3x^2) + (-3x + 2x) + (4-6) = x^3 + 3x^2 - x - 2$

Para **restar** (sustraer) dos polinomios, se aplica el algoritmo de la resta, el cual indica que se convierte en la suma del minuendo con el opuesto del sustraendo y se procede como en el caso de adición.

En el caso de monomios:

$-4x^2 - (-7x^2) = 4x^2+7x^2 = (-4+7)x^2 = 3x^2$

En el caso de polinomios:

$(5x^3 + 3x^2 - 3x + 4) - (-4x^3 - 7x^2 + 2x^2 - 6) =$

$(5x^3 + 3x^2 - 3x + 4) + (4x^3 + 7x^2 - 2x + 6)$

$(5x^3 + 4x^3)+(3x^2 + 7x^2)+(-3x - 2x)+(4+6)=9x^3 + 10x^2 - 5x + 10$

4 Escribe la indeterminada, el coeficiente y el grado de los siguientes monomios.

$45x^3$ $\quad 18b^9$ $\quad -25$ $\quad \frac{3}{4}x^7$

5 Clasifica en monomios semejantes:

$12x^3,\ 6y^2,\ -3y^2,\ -25,\ \frac{3}{4}x^3,\ \sqrt{7}$

6 Escribe tres monomios que tengan el mismo coeficiente y el mismo grado pero que no sean semejantes.

7 Calcula:

a) $\frac{-1}{3}x^5 + \frac{2}{3}x^5$ $\qquad$ b) $4z^5 + (-3z^5)$

8 Efectúa las siguientes operaciones reduciendo términos semejantes.

a) $2x^3 - 4x^5 + 5x^3$ $\qquad$ b) $x^2 - 4x^3 + 2x^2 + 5x^3$

9 Calcula:

a) $2y^5 + \frac{2}{3}y^5 - \frac{1}{9}y^5 + 5y^5$

b) $16a^3 - 4a^3 + 7a^3 - 5a^3$

c) $-x^2 - 2x^2 - 5x^2 + 7x^2$

10 Reduce y ordena estos polinomios.

a) $P(x) = 6x^4 - 11x^2 - 3x^2 + 3 - 8x^2 + 3x^3$

b) $Q(x) = 3x^3 + 12x^2 - 2x^3 + 6 - 3x + 2x$

c) $R(x) = 2x^4 - 4x + 4x^3 - 8 + 2x^2 - 4x$

— A continuación, indica si son completos o incompletos.

11 Dados los polinomios $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - x - 5$ y $Q(x) = x^2 - 2x + 4$, calcula:

a) $P(x) + Q(x)$ $\qquad$ b) $Q(x) - P(x)$

4 Multiplicación y división de polinomios

Para **multiplicar monomios,** se asocian y operan los coeficientes y las partes literales por separado, recordando que al multiplicar potencias de igual base se mantiene la base y se suman los exponentes.

$$ax^m \cdot bx^n = (a \cdot b)\, x^{m+n}$$

En el caso de la **división** de **monomios**, igual que en la multiplicación, se asocian y operan los coeficientes y las partes literales por separado, recordando que al dividir potencias de igual base se mantiene la base y se restan los exponentes.

$$ax^m \div bx^n = (a \div b)\, x^{m-n}; \text{ con } bx^n \neq 0$$

Para **multiplicar** dos **polinomios** procedemos según el siguiente cuadro.

Multiplicación de polinomios	
Procedimiento	Ejemplo
Para multiplicar dos polinomios, multiplicamos el primer polinomio por cada uno de los monomios del segundo y después sumamos los polinomios resultantes: — Escribimos los dos polinomios uno debajo del otro. — Debajo, y en filas diferentes, escribimos los polinomios resultantes de multiplicar el primer polinomio por cada uno de los monomios de que consta el segundo polinomio. — Sumamos los polinomios obtenidos. El resultado es un polinomio de grado igual a la suma de los grados de los polinomios iniciales.	*Multiplica los polinomios* $P(x) = 5x^3 + 3x^2 - 3x + 4$ *y* $Q(x) = -4x^3 + 2x - 6$. $5x^3 + 3x^2 - 3x + 4$ $-4x^3 + 2x - 6$ $-30x^3 - 18x^2 + 18x - 24$ $10x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 8x$ $-20x^6 - 12x^5 + 12x^4 - 16x^3$ $-20x^6 - 12x^5 + 22x^4 - 40x^3 - 24x^2 + 26x - 24$ $P(x) \cdot Q(x) = -20x^6 - 12x^5 + 22x^4 - 40x^3 - 24x^2 + 26x - 24$

Para **dividir** dos **polinomios** procedemos según el cuadro siguiente.

Procedimiento	Ejemplo
1. Escribimos los dos polinomios ordenados según las potencias decrecientes de x. Si el polinomio dividendo es incompleto, dejamos espacios en blanco correspondientes a los términos que faltan.	*Divide el polinomio* $3x^5 + 2x^3 - x^2 - 4$ *entre el polinomio* $x^3 + 2x^2 + 1$. dividendo: $3x^5 \quad + 2x^3 - x^2 \quad - 4$ divisor: $x^3 + 2x^2 + 1$
2. Dividimos el primer monomio del dividendo (en este caso $3x^5$) entre el primer monomio del divisor. Multiplicamos el cociente obtenido por el divisor y escribimos el opuesto del resultado.	$3x^5 \quad + 2x^3 - x^2 \quad - 4 \;\;\vert\; x^3 + 2x^2 + 1$ $-3x^5 - 6x^4 \quad - 3x^2 \qquad\qquad 3x^2$
3. Restamos el producto obtenido del dividendo. Ello equivale a sumar el opuesto.	$3x^5 \quad + 2x^3 - x^2 \quad - 4 \;\;\vert\; x^3 + 2x^2 + 1$ $-3x^5 - 6x^4 \quad - 3x^2 \qquad\qquad 3x^2$ $-6x^4 + 2x^3 - 4x^2$

Procedimiento	Ejemplo
4. Se baja el siguiente término del dividendo, en nuestro caso no hay, y se repite el mismo proceso.	$\begin{array}{rrrrr\|l} 3x^5 & & +\ 2x^3 & -\ x^2 & -\ 4 & x^3+2x^2+1 \\ \hline -3x^5 & -\ 6x^4 & & -\ 3x^2 & & 3x^2-6x \\ \hline & -\ 6x^4 & +\ 2x^3 & -\ 4x^2 & & \\ & 6x^4 & +\ 12x^3 & & +\ 6x & \end{array}$
5. El proceso continúa hasta que se obtiene un resto de grado menor que el grado del divisor. En el ejemplo, el grado del divisor es 3 y hemos obtenido un resto de grado 2.	$\begin{array}{rrrrrr\|l} 3x^5 & & +\ 2x^3 & -\ x^2 & & -\ 4 & x^3+2x^2+1 \\ \hline -3x^5 & -\ 6x^4 & & -\ 3x^2 & & & \boxed{3x^2-6x+14} \\ \hline & -\ 6x^4 & +\ 2x^3 & -\ 4x^2 & & & \text{cociente} \\ & 6x^4 & +\ 12x^3 & & +\ 6x & & \\ \hline & & 14x^3 & -\ 4x^2 & +\ 6x & -\ 4 & \\ & & -\ 14x^3 & -\ 28x^2 & & -\ 14 & \\ \hline & & & \boxed{-\ 32x^2} & \boxed{+\ 6x} & \boxed{-\ 18} & \text{resto} \end{array}$

Observa que el grado del polinomio cociente es igual a la diferencia entre los grados del dividendo y el divisor. Por lo anterior la división de polinomios solo admite que el grado del dividendo sea igual o mayor que el grado del divisor.

Al igual que en la división de números enteros, la división de polinomios también verifica la igualdad:

Dividendo = divisor · cociente + resto

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$$

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \hline R(x) & C(x) \end{array}$$

En el ejemplo tenemos:

$3x^5 + 2x^3 - x^2 - 4 = (x^3 + 2x^2 + 1) \cdot (3x^2 - 6x + 14) + (-32x^2 + 6x - 18)$

Verifica esta igualdad.

Actividades

12 Calcula:

a) $8x^2 - 28x^4 \div 4x^2$

b) $20^4 \div 4x$

c) $3a^5 \cdot 6a$

d) $6x^3 \div 2x^2$

13 Dados los polinomios $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - x - 5$ y $Q(x) = x^2 - 2x + 4$, calcula:

a) $P(x) \cdot P(x)$

b) $(Q(x))^2 = Q(x) \cdot Q(x) \cdot Q(x)$

14 Efectúa la siguiente división de polinomios.

$$(2x^3 + 4x^2 - 5) \div (x^2 + 3)$$

— Comprueba que se verifica la igualdad:

Dividendo = divisor · cociente + resto

15 Efectúa estas divisiones.

a) $(x^3 + y^3) \div (x + y)$

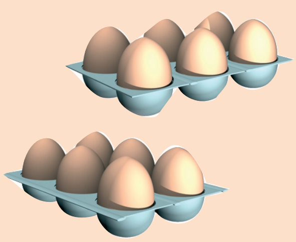
b) $(-2x^3 + 3x - 5) \div (x^2 + x - 2)$

c) $(5x^3 + 2x^2 - 7x + 5)$ ÷` $(x^2 - x + 5)$

MUCHO OJO

Puesto que $2 \cdot 6 = 12$, podemos decir:

- 12 es múltiplo de 2.
- 12 es múltiplo de 6.
- 2 es divisor de 12.
- 6 es divisor de 12.
- 12 es divisible por 2.
- 12 es divisible por 6.



5 Divisibilidad de polinomios

5.1. Múltiplos y divisores

El producto de los polinomios $A(x) = 2x + 1$ y $B(x) = x - 2$ cuyo resultado es el polinomio $C(x) = 2x^2 - 3x - 2$. Verifica la igualdad $C(x) = A(x) \cdot B(x)$.

Decimos que el polinomio $C(x)$ es múltiplo de los polinomios $A(x)$ y $B(x)$.

Puesto que $A(x) \cdot B(x) = C(x)$, si dividimos $C(x) : A(x)$, la división es exacta y su resultado es $B(x)$. De igual manera si dividimos $C(x) : B(x)$, el resultado es $A(x)$; por ello diremos que $A(x)$ y $B(x)$ son divisores de $C(x)$ o que $C(x)$ es divisible por $A(x)$ y $B(x)$. Comprueba las operaciones con los polinomios dados.

Un polinomio es **múltiplo** de otro si se obtiene multiplicando este último por un polinomio. Un polinomio es **divisor** de otro si, al dividir el segundo entre el primero, la división es exacta.

5.2. Teorema del resto

Comprueba que al dividir el polinomio $P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$ entre el polinomio x^{-3}, obtenemos el resultado de $x^2 + 8x + 22$ y un resto de 42.

Una vez comprobado, el resultado obtenido nos permite escribir:

$P(x) = (x - 3) \cdot (x^2 + 8x + 22) + 42$

Ahora, calculemos el valor numérico de $P(x)$ para $x = 3$:

$P(3) = 3^3 + 5 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 - 24 = 27 + 45 - 6 - 24 = 42$

Lo cual es evidente en la expresión obtenida:

$$P(3) = (3 - 3) \cdot (3^2 + 8 \cdot 3 + 22) + 42 = 0 + 42 = 42$$

El resultado obtenido es válido en general y se conoce como **teorema del resto**.

El **resto** de la división del polinomio $P(x)$ entre $x - a$ es igual al **valor numérico** del polinomio $P(x)$ para $x = a$.

MUCHO OJO

El número real a es un **cero** o **raíz** del polinomio $P(x)$ si $P(a) = 0$.

Ahora, calculamos el valor numérico para $x=-4$ para el polinomio $P(x)=x^3+5x^2-2x-24$:

$$P(-4) = -(-4)^3 + 5 \cdot (-4)^2 - 2\,(-4) - 24 = -64 + 80 + 8 - 24 = 0$$

Como el valor numérico $x = -4$ para el polinomio $P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$ es cero, diremos que $P(x)$ es divisible por $x+4$ y podemos concluir que -4 es una raíz de $P(x)$.

5.3. Factorización

Un polinomio con varios divisores puede expresarse como producto de otros polinomios de menor grado, así por ejemplo:

$$2x^2 - 3x - 2 = (2x + 1) \cdot (x - 2)$$

Descomponer factorialmente un polinomio o **factorizar** un polinomio consiste en expresarlo como **producto de otros polinomios** del menor grado posible.

Resumamos algunos métodos para factorizar:

El factor común siempre que exista, es extraer de cada término de un polinomio aplicando la propiedad distributiva recolectiva.

$$P(x = x^4 - 3x^3 = x^3 \cdot \; (x - 3)$$

Aplica las identidades o productos notables, recuerda que al iniciar la factorización se debe extraer el factor común si existe.

$$P(x) = x^3 + 6x^2 + 9x = x \cdot (x^2 + 6x + 9) = x \cdot (x + 3)^2$$

MUCHO OJO

Las **identidades notables** que puedes utilizar en la descomposición factorial de los polinomios son:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Observaste que luego de extraer el factor común x el trinomio resultante tiene la forma de un producto notable en el que el primero y tercer término son cuadrados perfectos y el segundo término es el doble producto de las raíces del primero y tercer términos, por ello, es el cuadrado de la suma de sus raíces.

En general cuando el trinomio de segundo grado $P(x) = ax^2 + bx + c$ es factorizable en los reales, es igual al producto $P(x) = (px + q) \cdot (rx + s)$ si y solo si $p \cdot r = a$, $p \cdot s + q \cdot r = b$ y $q \cdot s = c$.

$$2x^2 + 5x - 12 = (px + q) \cdot (rx + s) = (2x - 3) \cdot (x + 4)$$

Para buscar p y r, se descompone en factores al $2 \rightsquigarrow = 2 \cdot 1$; para encontar q y s, se descompone en factores al $-12 \rightsquigarrow = (-3) \cdot 4$ y se comprueba que el producto de $p \cdot s + q \cdot r$ sea 5.

Observa que el polinomio $x^2 + 4$ no puede descomponerse en factores, por ello diremos que es un **polinomio irreductible.**

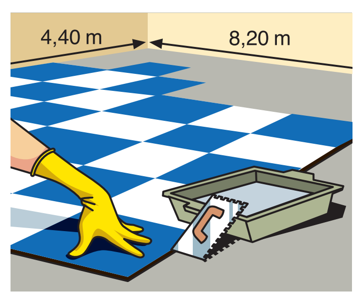
Un polinomio es **irreducible** si no puede descomponerse en producto de dos factores de grado mayor o igual que 1.

La afirmación anterior nos permite ratificar que descomponer factorialmente (factorizar) un polinomio consiste en expresarlo precisamente como producto de polinomios irreducibles.

Una importante aplicación de la factorización es el cálculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo, para calcularlos se procede del mismo modo que con los números enteros.

El **máximo común divisor (m.c.d.)** de dos o más polinomios es todo polinomio de grado máximo que sea divisor de todos ellos.

El **mínimo común múltiplo (m.c.m.)** de dos o más polinomios es todo polinomio de grado mínimo que sea múltiplo de todos ellos.



Si el suelo de la habitación mide 820 × 440 cm y debemos cubrirlo con baldosas cuadradas lo más grandes posible, éstas tienen que medir: m.c.d. (820, 440) = 20 cm.

Actividades

16 Utiliza la regla de Ruffini para averiguar si los siguientes polinomios son divisibles por $x + 5$.

a) $x^3 + 10x^2 + 3x - 54$ b) $2x^4 + 3x^3 - 35x^2 + 9x + 45$

17 Escribe un polinomio que sea simultáneamente múltiplo de $x + 4$ y de $2x^2 + 3x - 2$

18 ¿Puede ser $x = 6$ raíz del polinomio $x^2 + 3x - 15$?

19 Descompón en producto de dos factores los siguentes polinomios.

a) $x^2 - 1$

c) $4x^2 + 6x^3 + 4x^4$

b) $10x^3 - 15x^2 + 5x$

d) $7x^3 - 2x^2$

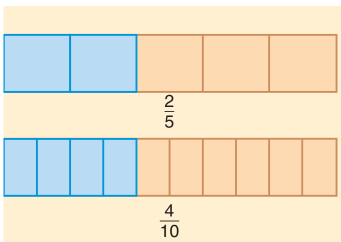
20 Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de los polinomios $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ y $2x^3 - 2x^2 - 4x$.

6 Fracciones algebraicas

Del mismo modo que la división entre dos números enteros puede expresarse en forma de fracción, la división entre dos polinomios da lugar a las *fracciones algebraicas.* Así, las siguientes expresiones son fracciones algebraicas.

$$\frac{x}{x+1} \qquad \frac{4x+3}{x^2+4} \qquad \frac{3x^2-2x+3}{2x^3-4x}$$

Los polinomios que representan los dividendos son los numeradores y los que representan los divisores son los denominadores.



$\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{10}$ *son fracciones equivalentes.*

Se llama **fracción algebraica** en una indeterminada x al **cociente** de dos polinomios en la indeterminada x en el que el numerador es un **polinomio cualquiera** y el denominador, un **polinomio distinto** de **0.**

Representaremos las fracciones algebraicas por:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \text{con } Q(x) \neq 0$$

Al igual que las fracciones numéricas, las fracciones algebraicas pueden ser equivalentes.

Las fracciones algebraicas $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y $\frac{R(x)}{S(x)}$ son **equivalentes** si se cumple que: $P(x) \cdot S(x) = Q(x) \cdot R(x)$

Así, la fracción algebraica $\frac{x+1}{x}$ es equivalente a $\frac{x^2-1}{x^2-x}$, puesto que:

$$(x+1) \cdot (x^2-x) = x\,(x^2-1)$$

$$x^3 - x = x^3 - x$$

FÍJATE

Si las fracciones algebraicas $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y $\frac{R(x)}{S(x)}$ son equivalentes, escribimos:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{R(x)}{S(x)}$$

Actividades

21 Indica cuáles de las siguientes expresiones son fracciones algebraicas.

$$\frac{2x^3+x^2}{x^2+1} \qquad 3x^3-2 \qquad \frac{5x^2-x}{1-x^2} \qquad \sqrt{2}$$

22 Escribe dos fracciones equivalentes a $\frac{x^2-1}{x+1}$.

23 Escribe una fracción equivalente a $\frac{x^2-4x+3}{x+3}$ de denominador x^2-9.

24 Averigua si estas fracciones algebraicas son equivalentes.

a) $\frac{x^2-2}{3x+1}$ y $\frac{2x^2-4x}{6x^2+2x}$

b) $\frac{x+1}{x^2+1}$ y $\frac{2x^2+1}{3x}$

Antes de empezar a operar con una fracción algebraica es conveniente simplificarla, de este modo los cálculos que realicemos serán más sencillos.

Observa, en el siguiente ejemplo, cómo procedemos para **simplificar** una fracción algebraica.

ejemplo 1

Simplifica la siguiente fracción algebraica: $\dfrac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^3 - 3x - 2}$.

— En primer lugar, factorizamos el numerador y el denominador.

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^3 - 3x - 2} = \frac{(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)}{(x+1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)}$$

— A continuación, suprimimos los factores comunes.

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^3 - 3x - 2} = \frac{\cancel{(x+1)}\cdot\cancel{(x-2)}\cdot(x+3)}{\cancel{(x+1)}\cdot(x+1)\cdot\cancel{(x-2)}} = \frac{x+3}{x+1}$$

Para sumar y restar fracciones algebraicas es preciso que éstas tengan denominador común. Observa en el siguiente ejemplo el procedimiento que empleamos para reducir dos fracciones algebraicas a **mínimo común denominador.**

MUCHO OJO

Reducir fracciones a mínimo común denominador significa hallar unas nuevas fracciones equivalentes a las primeras cuyo denominador es el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones dadas.

ejemplo 2

Reduce a mínimo común denominador las fracciones $\dfrac{x}{2x+4}$ *y* $\dfrac{2}{x^2-4}$.

— Calculamos el m.c.m. de los denominadores.

$2x + 4 = 2 \cdot (x + 2)$

$x^2 - 4 = (x + 2) \cdot (x - 2)$

$$\text{m.c.m. } (2x + 4,\ x^2 - 4) = 2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 2) = 2x^2 - 8$$

— Dividimos el m.c.m. por cada uno de los denominadores.

$[2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)] \div [2 \cdot (x + 2)] = x - 2$

$[2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)] \div [(x + 2) \cdot (x - 2)] = 2$

— Multiplicamos el numerador y el denominador de cada fracción por el cociente correspondiente.

$$\frac{x\cdot(x-2)}{(2x+4)\cdot(x-2)} = \frac{x^2-2x}{2x^2-8} \qquad \frac{2\cdot 2}{(x^2-4)\cdot 2} = \frac{4}{2x^2-8}$$

Hemos obtenido dos fracciones algebraicas equivalentes a las de partida cuyo denominador es el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones iniciales.

Actividades

25 Simplifica la siguiente fracción algebraica.

$$\frac{2x-2}{x^2-3x+2}$$

26 Reduce a mínimo común denominador:

$$\frac{x}{4x+4} \text{ y } \frac{2}{x^2+4x+3}$$

6.1. Operaciones con fracciones algebraicas

Veamos ahora la forma como debemos proceder para sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones algebraicas. En todos los casos, los procedimientos son similares a los que utilizamos con las operaciones de fracciones numéricas.

Suma

Para sumar fracciones algebraicas debemos seguir los pasos siguientes:

— Si las fracciones no tienen el mismo denominador, se reducen a mínimo común denominador.

— Se suman los numeradores.

— Se deja el denominador común.

MUCHO OJO

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

ejemplo 3

Suma las siguientes fracciones algebraicas: $\frac{x^2+2}{x^3-2}$ *y* $\frac{x-1}{x^3-2}$

— Estas dos fracciones algebraicas tienen el mismo denominador, por lo tanto, no es necesario reducir a mínimo común denominador.

— Su suma es la fracción algebraica que tiene como numerador la suma de los numeradores y como denominador el denominador común.

$$\frac{x^2+2}{x^3-2}+\frac{x-1}{x^3-2}=\frac{x^2+2+x-1}{x^3-2}=\frac{x^2+x+1}{x^3-2}$$

Resta

Para restar fracciones algebraicas el procedimiento es el mismo que hemos visto en la suma, excepto que ahora se restan los numeradores.

ejemplo 4

Efectúa la siguiente resta: $\frac{x+3}{x^2-x-2}-\frac{2x}{x^2-3x+2}$.

Factorizamos los denominadores de cada fracción,

$$\frac{x+3}{(x+1)(x-2)}-\frac{2x}{(x-1)(x-2)}=$$

Determinamos el m.c.m. de los denominadores para convertir en fracciones equivalentes con denominador común.

m.c.m. $(x^2-x-2),\ x^2-3x+2=$
$(x+1)\ (x-2)\ (x-1)$

$$\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-2)(x-1)}-\frac{2x(x+1)}{(x-1)(x-2)(x+1)}=$$

Restamos las fracciones, para esto, se restan los numeradores y se mantiene el denominador

$$\frac{(x+3)(x-1)-2x(x+1)}{(x+1)(x-2)(x-1)}=$$

Operamos el numerador, respetando la jerarquía de operaciones, primero se multiplica y luego reducimos términos semejantes (suma o resta).

$$\frac{x^2+2x-3-2x^2-2x}{(x^2-x-2)(x-1)}=$$

Multiplicamos los factores del denominador.

$$\frac{-x^2-3}{x^3-2x^2-x+2}$$

Multiplicación

El producto de dos fracciones algebraicas es otra fracción algebraica cuyo numerador es igual al producto de los numeradores y cuyo denominador es igual al producto de los denominadores.

ejemplo 5

Multiplica las siguientes fracciones algebraicas: $\dfrac{x^2+2}{x^3-2}$ *y* $\dfrac{x-1}{x+1}$.

— La multiplicación de dichas fracciones algebraicas se obtiene efectuando el producto de numeradores y el de denominadores.

$$\frac{x^2+2}{x^3-2}\cdot\frac{x-1}{x+1}=\frac{(x^2+2)\cdot(x-1)}{(x^3-2)\cdot(x+1)}=\frac{x^3-x^2+2x-2}{x^4+x^3-2x-2}$$

MUCHO OJO

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\,c}{b\,d}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a\,d}{b\,c}$$

División

El cociente de dos fracciones algebraicas es la fracción algebraica que resulta de multiplicar la primera por la inversa de la segunda.

ejemplo 6

Efectúa la siguiente operación: $\dfrac{x+1}{x^2+3}\div\dfrac{2}{x-3}$.

— Para dividir estas dos fracciones algebraicas, multiplicamos la primera fracción por la inversa de la segunda.

$$\frac{x+1}{x^2+3}\div\frac{2}{x-3}=\frac{x+1}{x^2+3}\cdot\frac{x-3}{2}=\frac{(x+1)\cdot(x-3)}{(x^2+3)\cdot 2}=\frac{x^2-2x-3}{2x^2+6}$$

Actividades

27 Efectúa las siguientes operaciones con fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x+2}{x-1}+\dfrac{3x}{x+5}$

b) $\dfrac{x^2-3}{x-1}-\dfrac{x-1}{x^2+x-2}$

c) $\dfrac{x+3}{x^2-x-2}+\dfrac{x-1}{x^2+4x+3}$

d) $\dfrac{3x^3}{x^2-x-6}-\dfrac{x+2}{2x^2+4x-3}$

28 Calcula estas multiplicaciones.

a) $\dfrac{x-2}{2x+1}\cdot\dfrac{2x}{x^2+x}$

b) $\dfrac{4}{x^2-5}\cdot\dfrac{x-2}{x^2-3x+4}$

29 Efectúa la siguiente división.

$$\frac{3x-2}{x^2-3}\div\frac{2x}{x+7}$$

— Haz una prueba para asegurarte del resultado que has obtenido.

Cómo resolver problemas

Estrategia: Razonamiento inverso

La estrategia del *razonamiento inverso,* también llamado *suponer el problema resuelto,* se aplica en la resolución de problemas de los que conocemos el resultado final. Se trata, entonces, de determinar un valor inicial o una serie de operaciones que nos conduzcan hasta ese resultado.

La estrategia consiste, básicamente, en tomar el resultado como punto de partida e ir retrocediendo hasta llegar a la situación inicial.

Halla un número tal que al dividirlo por 5, multiplicarlo por 12 y sumarle 256 nos dé 844.

Comprensión del enunciado

— Leemos de nuevo el enunciado del problema.

— Anotamos las diferentes operaciones que debemos efectuar con el número inicial y el resultado final que debemos obtener.

$$\boxed{?} \div 5 \times 12 + 256 = 844$$

Planificación de la resolución

Para resolver este problema aplicaremos el *método del razonamiento inverso.*

Para ello, seguiremos estos pasos:

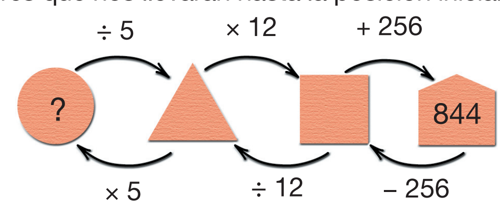
— Dibujaremos un esquema con las operaciones que hay que efectuar para llegar al resultado final.

— Empezando por el final, resolveremos las operaciones inversas hasta llegar al número buscado.

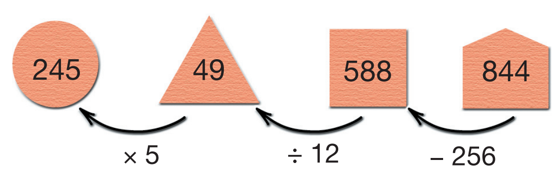
Ejecución del plan de resolución

— Elaboramos un esquema y señalamos con flechas las sucesivas operaciones que hay que efectuar partiendo del número inicial, hasta obtener como resultado 844.

Luego, nos situamos en la posición final y señalamos con flechas las operaciones inversas a las anteriores que nos llevarán hasta la posición inicial.



— Calculamos el número correspondiente a cada casilla.



Así, el número buscado es 245.

Revisión del resultado y del proceso seguido

Comprobamos que, efectivamente, si partimos de 245 y efectuamos las operaciones indicadas, obtenemos como resultado 844:

$$245 \div 5 \times 12 + 256 = 844$$

Actividades

Utiliza la estrategia anterior para resolver los siguientes problemas.

30 En el recorrido del tren desde Chimbacalle hasta la Nariz de Diablo viaja un cierto número de pasajeros. En la primera estación suben 15 y bajan 9. Al salir de la segunda estación, el número de pasajeros es el doble del que llevaba al entrar en ella y, en la tercera estación, sube un grupo de 20 excursionistas y no baja nadie, quedando en el tren 92 personas. ¿Cuántos pasajeros llevaba el tren al llegar a la primera estación?

31 Jaime tiene una cierta cantidad de dinero. La divide entre tres y coge una de las partes para comprar una pelota de básquet y jugar con sus amigos. Poco después, su abuela le da una cantidad equivalente a la que le queda, de modo que al final tiene 32 dólares. ¿Cuánto dinero tenía inicialmente?

En resumen

1 Un **polinomio** en una variable x es una expresión algebraica reducible a la forma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, en la que los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números reales y n es un número natural.

2 • El **grado de un polinomio** es el **mayor de los grados** de sus términos.

3 • El **valor numérico** del polinomio $P(x)$ **para $x = a$** es el número que se obtiene al sustituir la variable x por el número a y efectuar las operaciones indicadas.

4 Un **polinomio** está **ordenado** y en **forma reducida** si se reducen los monomios semejantes y se ordenan de mayor a menor grado.

5 • La **suma** de dos polinomios se obtiene al sumar los monomios semejantes de ambos polinomios.

• La **resta** de dos polinomios se obtienen al restar los monomios semejantes de cada uno de ellos.

• Para **multiplicar** dos polinomios debemos multiplicar cada uno de los términos de uno de ellos por cada uno de los términos del otro y sumar los términos semejantes.

• **Dividir** el polinomio $P(x)$ entre el polinomio $Q(x)$ consiste en hallar los polinomios $C(x)$ y $R(x)$ de modo que se cumpla:

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$$

En caso de que el polinomio divisor sea de la forma $x - a$ solemos aplicar la **regla de Ruffini** para efectuar la división.

6 Un **polinomio** es **múltiplo** de otro si se obtiene multiplicando este último por un polinomio.

7 Un **polinomio** es **divisor** de otro si al dividir el segundo entre el primero la división es exacta.

• El **teorema del resto** establece que el resto de la división del polinomio $P(x)$ entre $x - a$ es igual al valor numérico del polinomio $P(x)$ para $x = a$.

• Si el polinomio $P(x)$ es divisible por $x - a$, a es una raíz del polinomio $P(x)$.

• **Factorizar** un polinomio consiste en expresarlo como producto de otros polinomios del menor grado posible.

Un polinomio es **irreducible** si no puede descomponerse en producto de dos factores de grado mayor o igual que 1.

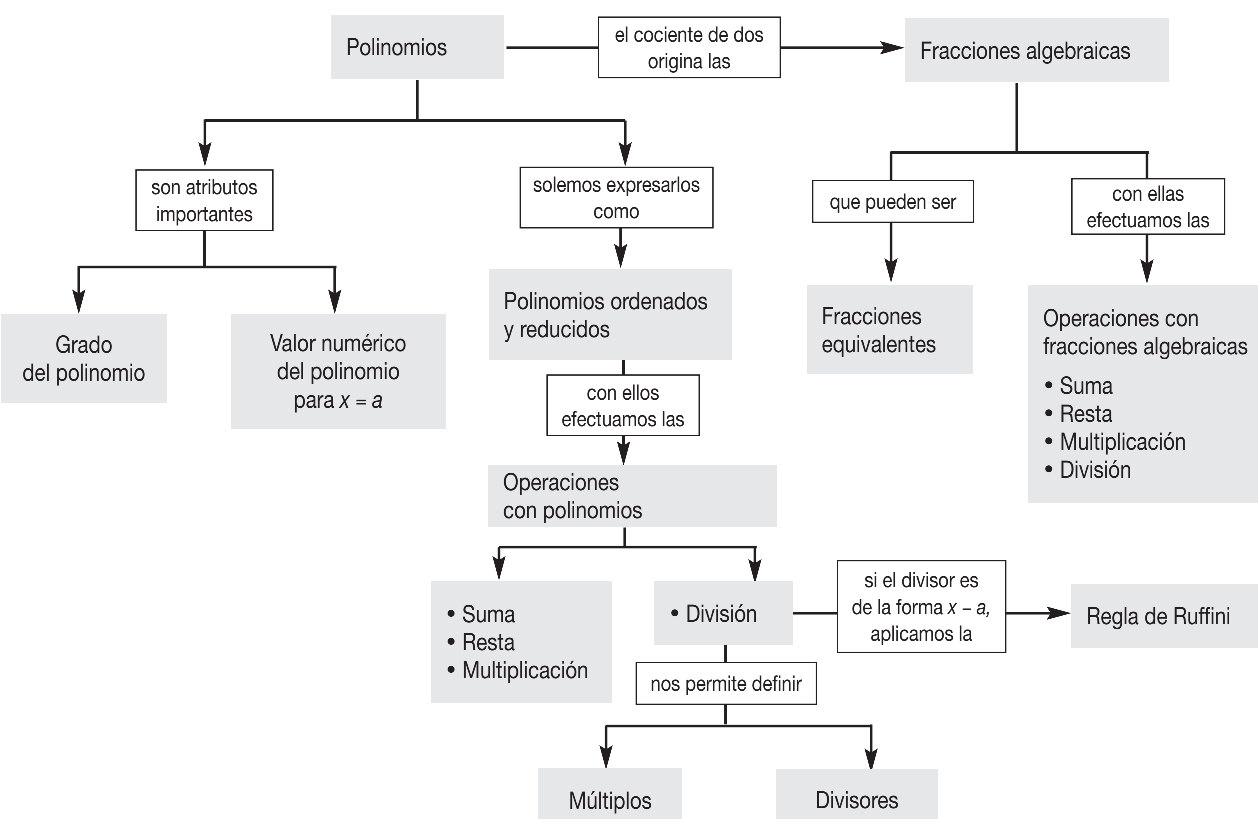
• El **máximo común divisor** de varios polinomios es todo polinomio de grado máximo que sea divisor de todos ellos.

• El **mínimo común múltiplo** de varios polinomios es todo polinomio de grado mínimo que sea múltiplo de todos ellos.

8 Una **fracción algebraica** es el cociente en el que el numerador es un polinomio cualquiera y el denominador es un polinomio distinto de 0.

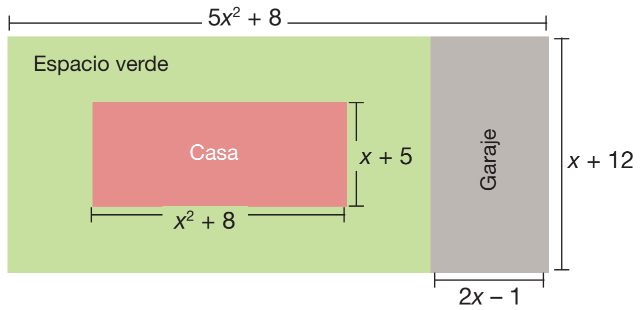
9 Las fracciones algebraicas $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ y $\dfrac{R(x)}{S(x)}$ son equivalentes si cumplen que $P(x) \cdot S(x) = Q(x) \cdot R(x)$.

10 Antes de efectuar **operaciones con fracciones algebraicas,** conviene simplificarlas y, en los casos de la suma y de la resta, reducirlas a mínimo común denominador.



Ejercicios y problemas integradores

- Carlos, en su terreno, construye una vivienda con su respectiva área verde. Como conoce el área total del terreno y de la construcción, Carlos desea saber el área del espacio verde.



- En el gráfico se observa que existen 3 rectángulos. Recuerda que el área de un rectángulo es igual a base por altura.

- Primero calculamos el área de la casa aplicando la fórmula:

$$A_{casa} = b \cdot h = (x^2 + 8)(x + 5) = x^3 + 5x^2 + 8x + 40$$

- Segundo calculamos el área del garaje:

$$A_{garaje} = b \cdot h = (x + 12)(2x - 1) = 2x^2 + 23x - 12$$

- Ahora calculamos el área total del terreno:

$$A_{terreno} = b \cdot h = (5x^2 + 8)(x + 12) = 5x^3 + 60x^2 + 8x + 96$$

- Para hallar el área del espacio verde restamos las áreas de la casa y garaje del área total del terreno:

$$A_{espacio\ verde} = A_{terreno} - A_{casa} - A_{garaje}$$
$$A_{espacio\ verde} = 5x^3 + 60x^2 + 8x + 96 - (x^3 + 5x^2 + 8x + 40) - (2x^2 + 23x - 12)$$

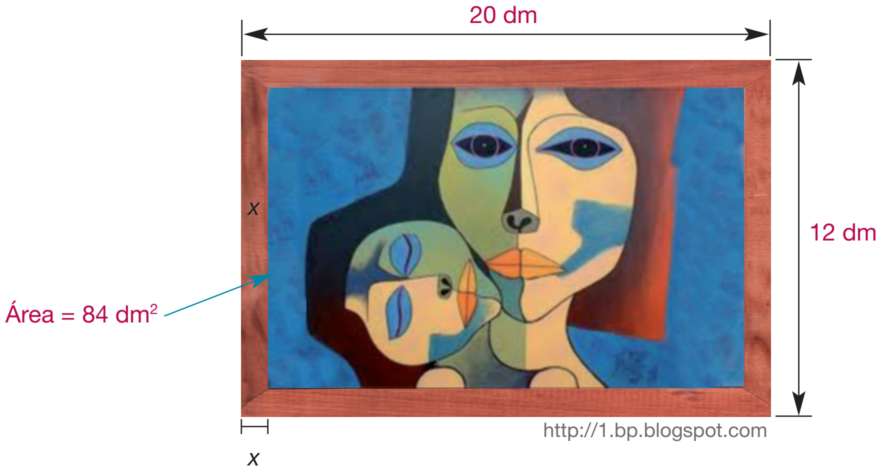
- Como tenemos signos de agrupación precedidos por menos, debemos cambiar los signos de los términos que se encuentran dentro de los paréntesis:

$$A_{espacio\ verde} = 5x^3 + 60x^2 + 8x + 96 - x^3 - 13x^2 - 40 - 2x^2 - 23x + 12$$

- Luego reducimos términos semejantes, y así determinamos el área del espacio verde:

$$A_{espacio\ verde} = 4x^3 + 63x^2 - 23x + 68$$

Una pintura de Guayasamín tiene un marco de 20 dm por 12 dm. Si la pintura vista ocupa un área del 84 dm². ¿Cuál es el ancho del marco?



- La pintura tiene forma rectangular. Su área es igual a base por altura.
- Como se desconoce la distancia que existe entre la pintura vista y el marco, lo representamos con la variable x.
- Ahora, representamos la altura de la pintura vista con la siguiente expresión algebraica: $12 - 2x$, y para la base $20 - 2x$.
- Para calcular el valor de la variable x, sustituimos las expresiones algebraicas en la fórmula de área:

$$A_{pintura\ vista} = b \cdot h$$

$$84 = (12 - 2x)(20 - 2x)$$

- Al desarrollar se obtiene la siguiente ecuación $4x^2 - 64x + 156 = 0$, dividimos para 4 y queda $x^2 - 16x + 39 = 0$.
- Al resolver por el método de descomposición en factores, encontramos los valores de $x = 3$ y $x = 13$.
- Al reemplazar $x = 3$ en la altura de la pintura vista $12 - 2x$, la altura es 6 dm y la base es $20 - 2x$ es 14 dm.
- Pero si reemplazamos $x = 13$ en la base de la pintura vista $20 - 2x$ la base es -6, recordando que no existen distancias negativas, por lo tanto la respuesta correcta es $x = 3$ dm.

R: El ancho del marco es 3 dm.

Practica

- La columna de un puente tiene de ancho $x + 2$ y su altura es el doble del ancho. Encuentra su área y su perímetro.

Ejercicios y problemas

En tu cuaderno

Comprensión de conceptos y conocimiento de procesos

Operaciones con polinomios

32 Escribe tres monomios diferentes.

33 Escribe polinomios de primero, segundo y tercer grado en la variable real x.

34 Sea el polinomio $P(x) = x^3 - 7x + 6$, calcula el valor numérico de $P(x)$ para:

a) $x=1$ b) $x=2$ c) $x=-3$

Obtén las respectivas conclusiones.

35 Calcula el resto, al dividir el polinomio $x^3 - 5x^2 + 11x - 15$ entre el polinomio $x - 2$.

36 Calcula el resto al dividir el polinomio $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 15$ entre el polinomio $x + 3$.

37 Si se suman dos polinomios, uno de segundo grado y otro de tercer grado, ¿el resultado puede ser otro polinomio de primer grado? Argumenta tu respuesta.

38 Si se multiplican dos polinomios, uno de tercer grado y otro de primer grado, ¿el resultado puede ser otro polinomio de segundo grado? Explica.

39 Si se dividen dos polinomios de quinto grado, ¿el resultado puede ser un polinomio de primer grado?

40 ¿Cuál es el mayor grado del resto al dividir un polinomio de cuarto grado entre un polinomio de segundo grado?

41 Sean los polinomios $P(x) = x^3 - 7x + 6$, $Q(x) = 2x^3 - x^2 + 6x$ y $R(x) = -x^2 + 4x - 1$. Calcula:

a) $P(3)$

b) $R(-3)$

c) $P(4) - Q(1)$

42 Sean los polinomios $P(x) = x^3 - x$, $Q(x) = 2x^3 - x^2 + 6x$. Calcula:

a) $P(\sqrt{2})$

b) $Q(-\sqrt{3})$

c) $P(\sqrt{3}) - Q(\sqrt{2})$

43 Sean los polinomios $P(x) = x^3 - 7x + 6$, $Q(x) = 2x^3 - x^2 + 6x$ y $R(x) = -x^2 + 4x - 1$. Calcular:

a) $P(x) + Q(x)$
b) $R(x) - Q(x)$
c) $P(x) - Q(x) + R(x)$

44 Resuelve las siguientes divisiones y determina el residuo:

a) $(x^2 + 4x - 1) \div (x + 1)$

b) $(x^3 - x^2 - 5x + 21) \div (x - 7)$

c) $(4x^4 + 6x^3 + 14x + 2) \div (-2x + 3)$

45 Sea x un número real, expresa mediante un polinomio:

a) El cubo del número.

b) El cuadrado del siguiente número.

c) El producto del número con el siguiente.

d) El cuadrado del número multiplicado con el cuadrado del anterior.

e) La diferencia de cubos del número con el siguiente.

Divisibilidad de polinomios

46 En una división de polinomios el divisor es $3x^3 - 4x^2 + 3x - 2$ y el resto es $-2x + 3$. Halla el dividendo.

47 En una división de polinomios el dividendo es $3x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 3x - 2$; el cociente, $3x^2 + x + 5$ y el resto es $12x - 7$. Halla el divisor.

48 Halla dos raíces del polinomio $x^3 - 7x + 6$.

49 Al dividir el polinomio $P(x) = ax + b$ entre $x - 1$ se obtiene de resto 2 y al dividirlo entre $x - 2$ se obtiene de resto 5. Halla el polinomio $P(x)$.

50 ¿Cuáles de los siguientes polinomios son múltiplos de $2x - 4$?

a) $2x^3 - 6x^2 + 8$ c) $2x^2 + 6x - 4$
b) $x^3 - 2x^2$ d) $x^2 + 3x - 2$

51 ¿Cuáles de los siguientes polinomios son divisores de $3x^3 + 18x^2 + 33x + 18$?

a) $x - 3$ c) $3x^2 + 3x + 6$
b) $x + 1$ d) $x^2 - 4x - 1$

52 Factoriza los siguientes polinomios.

a) $x^3 - 2x^2 + x$

b) $x^3 + x^2 - 9x - 9$

c) $x^4 - 9$

53 Factoriza los siguientes polinomios:

a) $2x - 6$

b) $x^2 - 2x$

c) $2x^2 - 6x + 8$

d) $3x^4 - 6x^3 + 12x^2$

54 Factoriza los siguientes polinomios:

a) $25 - x^2$

b) $4x^2 - 9$

c) $25x^2 - 16y^2$

d) $16x^4 - 81y^4$

55 Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 4x + 4$

b) $9x^2 - 6x + 1$

c) $25x^7 + 70x^6 + 49x^5$

d) $36x^2 - 60xy + 25y^2$

56 Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2 + 4x + 3$

b) $x^2 + 3x - 28$

c) $x^2 - 2x - 15$

d) $x^2 - 6x + 8$

57 Factoriza los siguientes polinomios:

a) $5x^2 + 36x + 7$

b) $2x^2 + 3x - 2$

c) $2x^2 - xy - 28y^2$

d) $60x^6 - 124x^5 + 63x^4$

Fracciones algebraicas

58 Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{2x^2 - 6x + 4}{2x^2 - 5x + 3}$ b) $\dfrac{2x^2 - 6x + 4}{2x^2 - 6x + 4}$

59 Reduce a mínimo común denominador:

a) $\dfrac{x}{x^2 - 4}$ y $\dfrac{3x + 1}{x^2 - 3x + 10}$

b) $\dfrac{2x}{x^2 - x - 12}$ y $\dfrac{1 + x}{x^2 + 2x - 3}$

60 Calcula:

a) $\dfrac{1}{x - 6} + \dfrac{3x}{2}$

b) $\dfrac{5}{x^2 + x - 6} + \dfrac{2x}{x^2 + 2x - 3}$

c) $\dfrac{2x + 2}{x^3 - 2x^2 - 9x + 18} - \dfrac{x - 3}{x^3 - x^2 - 14x + 24}$

61 Calcula estas divisiones.

a) $\dfrac{3x^2 + 1}{2x^2 + 1} \div \dfrac{x + 1}{4x + 3}$

b) $\dfrac{x^2 + 4x - 3}{2x - 3} \div \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x - 4}$

Aplicación en la práctica

62 Determina el valor de k para que el resto de la división $(2x^3 + x^2 - x + k) \div (x - 1)$ sea 1.

63 Determina el polinomio de grado 1, $P(x)$, si sabemos que $P(1) = 1$ y $P(2) = 4$.

64 Determina el valor de k para que el polinomio $x^3 - 2x^2 + kx + 18$ sea divisible por $x - 3$.

65 Halla un polinomio de grado 3 que sea divisible por $x - 3$ y por $x + 1$, y que se anule para $x = 2$.

66 Halla el polinomio de grado 2 si sabemos que el coeficiente de x es nulo, $P(1) = 3$ y $P(2) = 13$.

67 Expresa mediante un polinomio la cantidad de dinero que podrán reunir tres amigos si el dinero que tiene el segundo amigo es igual al cuadrado del que tiene el primero menos el quíntuplo de dicha cantidad y el que dispone el tercero es igual al cuadrado de la décima parte del que tiene el segundo.

— ¿Qué cantidad de dinero podrán reunir si el primer amigo dispone de $ 10?

68 @ Conéctate a la página http://dinamica1.fciencias.unam.mx/Preparatoria8/polinomi/index.html. Examina la explicación que se ofrece sobre polinomios, grado, raíces y factorización de un polinomio.

Más a fondo

69 Suma estas fracciones algebraicas.

$$\frac{2x^3}{x^5 + 9x^4 + 21x^3 - 17x^2 - 102x - 72}$$

y

$$\frac{x^2 - x}{x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 6x - 9}$$

70 Halla los valores de a y b que verifican esta igualdad:

$$a(x - 1) \cdot (x + 2) + b(x + 3) = 3x^2 + 8x + 9$$

71 En una división de polinomios el dividendo es $x^4 + 6x^3 - 4x^2 + ax + b$ y el divisor es $x^2 + 6x - 1$. Determina los valores de a y de b para que:

a) La división sea exacta.

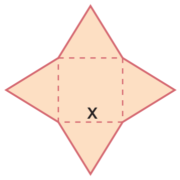
b) El resto de la división sea $5x - 1$.

Autoevaluación

Coevaluación

Si logras resolver el 70 % de estas actividades individuales y grupales, puedes avanzar.

1. La siguiente figura está formada por un cuadrado y cuatro triángulos equiláteros.



a) Escribe un polinomio para expresar su área.

b) Halla el área de la figura si $x = 3$ cm.

2. Indica el resultado de multiplicar los polinomios $2x^2 + 7x + 3$ y $x^2 - 1$.

3. ¿Cuál es el resto de la división del polinomio $x^3 + 2x^2 - 4x - 6$ por $x^2 - x - 2$?

4. Indica el valor numérico de $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ para $x = 7$.

5. ¿Cuál de los siguientes polinomios es divisor de $2x^3 + 9x^2 + 13x + 6$?

a) $x^2 + 3x + 2$ b) $x^2 - 3x - 2$ c) $x^2 + 2x + 3$

1. ¿Cuál de los siguientes polinomios es múltiplo de $2x^2 + 7x + 6$?

a) $2x^3 + 5x^2 - x - 6$

b) $2x^3 + 5x^2 - x + 6$

c) $2x^3 - 5x^2 + x - 6$

2. a) Halla un polinomio tal que al sumarlo con el polinomio $3x^2 + \frac{1}{2}x + 4$ dé como resultado el polinomio $x^3 + 8x^2 + 7$.

b) Halla un polinomio que multiplicado por el polinomio $3x^2 + x$ dé como resultado $3x^4 + x^3 - 15x^2 - 5x$.

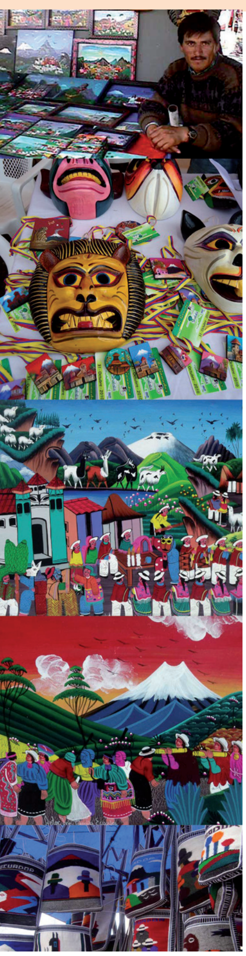
3. Factoriza estos polinomios.

a) $x^3 + x^2 - 9x - 9$ b) $5x^3 + 15x^2 - 65x - 75$

4. ¿Cuál es el máximo común divisor de los polinomios $x^3 - 10x^2 + 31x - 30$ y $x^3 - 5x^2 - 4x + 20$?

5. ¿Cuál de las siguientes fracciones algebraicas es equivalente a la fracción $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 3x + 2}$?

a) $\dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 3x - 2}$ b) $\dfrac{x - 2}{x + 1}$ c) $\dfrac{x + 1}{x - 2}$



Buen Vivir

Educación, cultura y saberes ancestrales

Una de las expresiones artísticas que ha generado mayor interés dentro y fuera del Ecuador es la pintura *naif* de los indígenas de Tigua. Esta comunidad andina de la provincia de Cotopaxi, es un museo viviente, porque la mayor parte de sus habitantes combina la pintura sobre pieles curtidas de borrego con el trabajo ancestral de la tierra y crianza de animales. Sus temáticas de la vida cotidiana son bellos paisajes, montañas con parcelas multicolores, campesinos arando con bueyes, cóndores con rasgos humanos en un cielo azul marino, mujeres hilando y pastando animales; sin descuidar el colorido de las fiestas costumbristas, o los mitos y leyendas de la madre tierra.

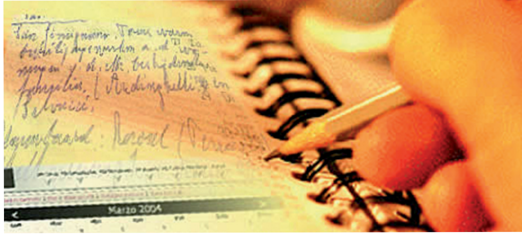
Actividades

1 Intercambiemos criterios con los compañeros/as que conozcan las comunidades de Tigua, para sistematizar la cosmovisión indígena, la relación con los recursos naturales, y la mitología andina.

2 Consultemos por Internet los orígenes de las pinturas de Tigua, su temática y los diversos objetos en los que se pintan sus obras.

3 ¿Cuál será la razón por la que las pinturas de Tigua atraen a turistas extranjeros?

4 ¿Conoces otras expresiones artísticas propias de nuestro país?, ¿qué podemos hacer para conservarlas?, ¿qué para promoverlas? Plantea alternativas al respecto.



Crónica matemática

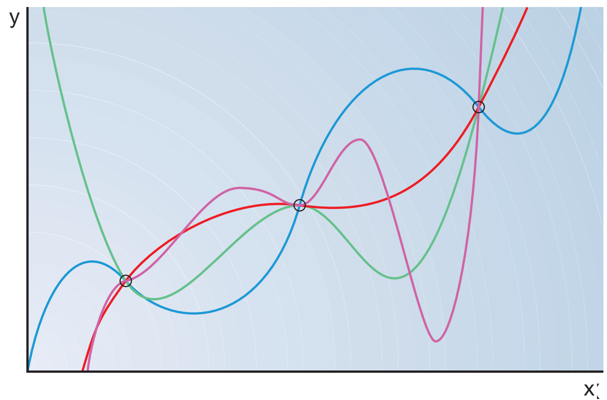
Ajuste de curvas mediante polinomios

En ciencia, tecnología y economía, a menudo, se utilizan los polinomios para obtener una expresión analítica que relacione dos variables distintas. Se supone que *y* está ligada a *x* a través de un polinomio de grado *n:*

$$y = P_n(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots + a_n\,x^n$$

Conociendo los valores que adopta *y* para determinados valores de *x,* pueden hallarse los valores de los coeficientes de los distintos monomios.

Algunos ejemplos de ajuste por polinomios se dan en la relación del nivel de agua y el tiempo de almacenamiento en una presa, la relación entre los kilovatios-hora consumidos y el tiempo, la relación precio/tiempo de un producto en el mercado, o bien en la calibración de distintos instrumentos de medida.



Estas curvas son la representación gráfica de algunos polinomios de distinto grado que pasan por tres puntos dados.

La regla de los signos

Dado un polinomio *P(x)* en forma reducida y con sus monomios ordenados de mayor a menor grado, se dice que hay un cambio de signo cuando dos monomios consecutivos son de signo contrario. Contando los cambios de signo, puede conocerse el número de raíces positivas y negativas de *P(x)* según esta regla enunciada por Descartes:

— El número de raíces positivas de *P(x)* es igual al número de cambios de signo de *P(x)* o bien a uno de los valores obtenidos al ir restando sucesivamente dos unidades a dicho número.

Por ejemplo, $P(x) = x^7 + 3x^6 - 4x^5 - 12x^4 - x^3 - 3x^2 + 4x + 12$ presenta dos cambios de signo, por lo que *P(x)* puede tener dos o ninguna $(2 - 2 = 0)$ raíz positiva.

— El número de raíces negativas de *P(x)* es igual al número de cambios de signo de *P(–x)* o bien a uno de los valores obtenidos al ir restando sucesivamente dos unidades a dicho número.

Por ejemplo, $P(-x) = -x^7 + 3x^6 + 4x^5 - 12x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ presenta cinco cambios de signo. Por tanto, *P(x)* puede tener cinco, tres o una raíz negativa.

Nota: Si al aplicar esta regla se deduce que hay dos o más raíces, éstas pueden coincidir. Considera, por ejemplo: $P(x) = (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$, que no presenta cambios de signo, por lo que no tiene raíces positivas. En cambio, *P(–x)* presenta dos cambios de signo, por lo que *P(x)* puede tener dos o ninguna raíz negativa. En este caso las dos raíces ¡coinciden entre sí! Decimos que $x = -2$ es una raíz doble.

Demuestra tu ingenio

- Determina el número de raíces de estos polinomios aplicando la regla de los signos.

a) $P(x) = x^5 - 3x^4 - 10x^3 + 52x^2 - 72x + 32$

b) $P(x) = x^5 - 6x^4 - 2x^3 + 36x^2 + x - 30$

c) $x^4 - 50x^2 + 625$

d) $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$

Seguidamente halla todas las raíces y comprueba si los resultados obtenidos anteriormente eran correctos. Ten en cuenta que puede haber raíces dobles.

Módulo
4

Bloques: Geométrico. Medida

Buen vivir: Naturaleza y ambiente sano

http://abrelata.files.wordpress.com

Un antiguo procedimiento para determinar la altura de una montaña, como el Cotopaxi, es el llamado **método de doble observación,** que consiste en observar la cumbre desde dos lugares situados en el mismo plano vertical que ésta.

Dos ciudades distan 9,28 km y entre ellas existe una montaña cuya cima está en el mismo plano vertical que ellas. Si desde estas ciudades se observa la cima bajo ángulos de elevación de 21,8° y 68,2°, ¿cuál es la altura de la montaña?

Ángulos notables Razones trigonométricas

Revisarás tus conocimientos sobre los ángulos y su medida, *conocerás* las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera y las relaciones que se establecen entre éstas.

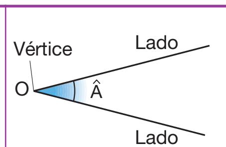
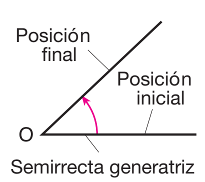
DCD Destrezas con criterios de desempeño

- Reconocer ángulos complementarios; suplementarios; coterminales y de referencia en la resolución de problemas.
- Calcular medidas de ángulos internos en polígonos regulares de hasta seis lados para establecer patrones.
- Definir las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.
- Aplicar las razones trigonométricas en el cálculo de longitudes de lados de triángulos rectángulos.
- Realizar conversiones de ángulos entre radianes y grados.
- Reconocer medidas en radianes de ángulos notables en los cuatro cuadrantes.
- Utilizar el lenguaje geométrico para interpretar y transmitir información.
- Aplicar los conceptos elementales de la trigonometría a la resolución de problemas de la vida cotidiana.
- Apreciar las importantes aplicaciones de la trigonometría en la determinación de alturas y distancias.
- Valorar el uso de recursos tecnológicos como la calculadora y el ordenador en el trabajo con razones trigonométricas.

Prerrequisitos

Recuerda

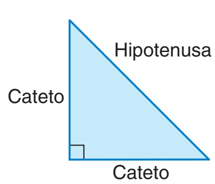
- Un **ángulo** puede interpretarse de dos maneras diferentes:

Es la región del plano limitada por dos semirrectas que tienen el mismo origen.	
Es la región del plano barrida por una semirrecta que gira respecto de su origen desde una posición inicial hasta una posición final.	

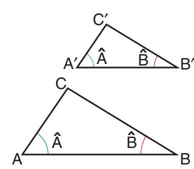
- Un **triángulo rectángulo** es aquel que tiene un ángulo recto. Sus lados reciben nombres especiales:

  Hipotenusa: lado opuesto al ángulo recto.

  Catetos: cada uno de los lados que forman el ángulo recto.

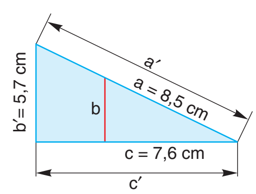


- Decimos que dos triángulos *ABC* y *A′B′C′* son **semejantes** si tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales.



Evaluación diagnóstica

- Expresa 35° 17′ 26″ en forma incompleja de segundos y 32 046″ en forma compleja.
- Calcula el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 25 cm y 32 cm.
- Enuncia los criterios de semejanza de triángulos.
  — ¿Cómo se enuncian estos criterios en el caso de triángulos rectángulos?
- Calcula las medidas que faltan en la figura de la derecha.



- Representa en un sistema de coordenadas cartesianas los puntos (0, 0), (–1, –4) y (–5, 2).
  — Dibuja un triángulo con vértices en estos puntos y calcula las longitudes de sus lados.

Buen Vivir

Derechos de la naturaleza

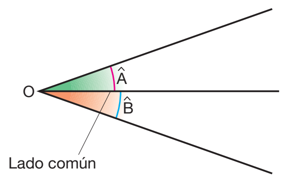
Art. 71. La naturaleza o Pacha Mama, donde se reproduce y realiza la vida, tiene derecho a que se respete íntegramente su existencia y el mantenimiento y regeneración de sus ciclos vitales, estructura, funciones y procesos evolutivos.

Constitución de la República del Ecuador, 2008.

1 Operaciones con ángulos

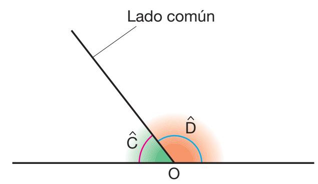
Dos ángulos reciben diferentes nombres según su posición. Observa:

Ángulos consecutivos



Los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ tienen en común el vértice y uno de los lados.

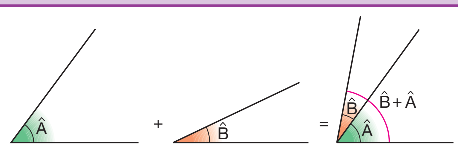
Ángulos adyacentes



Los ángulos $\widehat{C}$ y $\widehat{D}$ son consecutivos y sus lados no comunes forman un ángulo llano.

Los ángulos pueden sumarse, restarse, multiplicarse por un número natural y dividirse por un número natural. Veamos cómo efectuar gráfica y numéricamente estas operaciones.

Suma



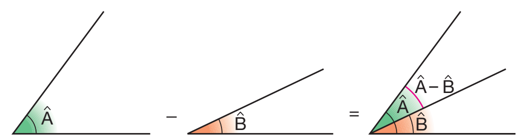
Para sumar dos ángulos, se transporta uno a continuación del otro de manera que resulten ángulos consecutivos.

$\widehat{A} = 60°$

$\widehat{B} = 20°$

$\widehat{A} + \widehat{B} = 80°$

Resta



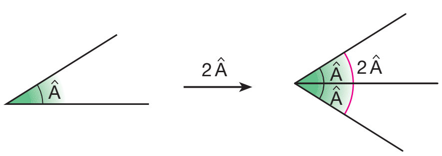
Para restar dos ángulos, superponemos el menor al mayor de modo que tengan un lado y el vértice comunes.

$\widehat{A} = 60°$

$\widehat{B} = 20°$

$\widehat{A} - \widehat{B} = 40°$

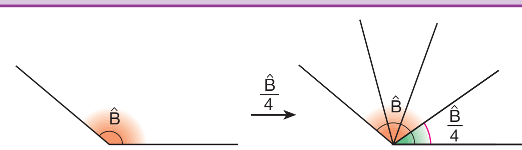
Multiplicación por un número natural



Para multiplicar un ángulo por un número natural, sumaremos tantas veces el ángulo como indica dicho número.

$\widehat{A} = 30°$ $\quad 2 \cdot \widehat{A} = 60°$

División por un número natural



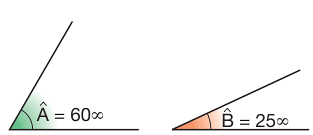
Dividir un ángulo por un número natural es hallar otro ángulo que multiplicado por dicho número dé el primero.

$\widehat{B} = 120°$ $\quad \dfrac{\widehat{B}}{4} = 30°$

Recuerda que en el caso particular en que dividimos el ángulo en dos partes iguales, la semirrecta obtenida es la **bisectriz** del ángulo.

ejemplo 1

Dados los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$, efectúa gráfica y numéricamente:

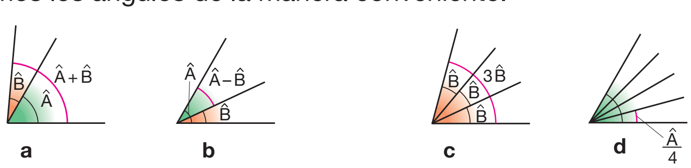


a) $\widehat{A} + \widehat{B}$ c) $3 \cdot \widehat{B}$

b) $\widehat{A} - \widehat{B}$ d) $\widehat{A} \div 4$

Resolución gráfica:

Transportamos los ángulos de la manera conveniente.



Resolución numérica:

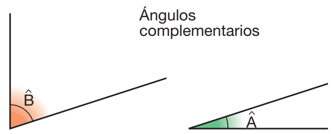
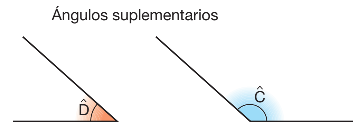
a) $60° + 25° = 85°$

b) $60° - 25° = 35°$

c) $3 \cdot 25° = 75°$

d) $\dfrac{60°}{4} = 15°$

Dado un ángulo, podemos definir su ángulo *complementario* y su ángulo *suplementario* de esta manera:

Ángulos complementarios	Ángulos suplementarios
 $\widehat{A} + \widehat{B} = 90°$	 $\widehat{C} + \widehat{D} = 180°$
Los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ son complementarios porque suman 90°.	Los ángulos $\widehat{C}$ y $\widehat{D}$ son suplementarios porque suman 180°.

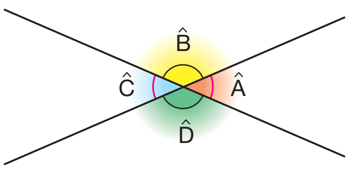
1.1. Relaciones angulares

Veamos a continuación las relaciones entre ángulos y las propiedades que nos permiten determinar si dos ángulos son iguales o si son suplementarios sin necesidad de efectuar ninguna operación.

Ángulos opuestos por el vértice

Los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{C}$ tienen el mismo vértice y los lados de uno son la prolongación de los del otro. Son ángulos opuestos por el vértice.

También los ángulos $\widehat{B}$ y $\widehat{D}$ son opuestos por el vértice.



$\widehat{A}$ y $\widehat{D}$ son adyacentes, por tanto, $\widehat{A} + \widehat{D} = 180°$.

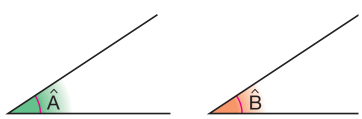
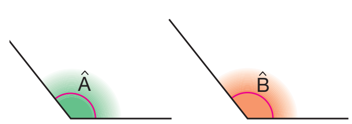
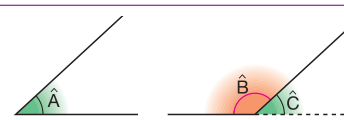
$\widehat{C}$ y $\widehat{D}$ son adyacentes, por tanto, $\widehat{C} + \widehat{D} = 180°$.

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A} = 180° - \widehat{D}\\ \widehat{C} = 180° - \widehat{D}\end{array}\right\} \widehat{A} = \widehat{C}$$

Del mismo modo se obtiene $\widehat{B} = \widehat{D}$.

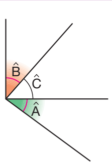
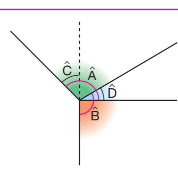
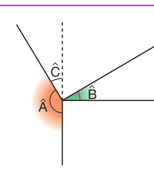
Dos **ángulos** opuestos por el vértice son **de igual medida.**

Ángulos de lados paralelos

Los dos ángulos son agudos.	Los dos ángulos son obtusos.	Un ángulo es agudo y el otro, obtuso.
 $\widehat{A} = \widehat{B}$	 $\widehat{A} = \widehat{B}$	 $\left.\begin{array}{l}\widehat{A} = \widehat{C}\\ \widehat{B} + \widehat{C} = 180°\end{array}\right\} \widehat{A} + \widehat{B} = 180°$

Dos ángulos de **lados paralelos** son **iguales** si los dos son agudos o si los dos son obtusos, y son **suplementarios** si uno es agudo y el otro es obtuso.

Ángulos de lados perpendiculares

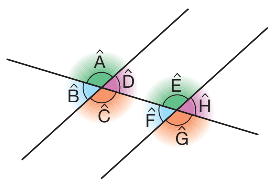
Los dos ángulos son agudos.	Los dos ángulos son obtusos.	Un ángulo es agudo y el otro, obtuso.
 $\left.\begin{array}{l}\widehat{A} + \widehat{C} = 90°\\ \widehat{B} + \widehat{C} = 90°\end{array}\right\} \widehat{A} = \widehat{B}$	 $\left.\begin{array}{l}\widehat{C} = \widehat{D}\\ \widehat{A} = \widehat{C} + 90°\\ \widehat{B} = \widehat{D} + 90°\end{array}\right\} \widehat{A} = \widehat{B}$	 $\left.\begin{array}{l}\widehat{A} + \widehat{C} = 180°\\ \widehat{C} = \widehat{B}\end{array}\right\} \widehat{A} + \widehat{B} = 180°$

Dos ángulos de **lados perpendiculares** son **iguales** si los dos son agudos o si los dos son obtusos, y son **suplementarios** si uno es agudo y el otro es obtuso.

Al cortar dos rectas paralelas por una recta secante se determinan ocho ángulos. Estos ángulos guardan entre sí diferentes relaciones según la posición que ocupan. Observa:

Ángulos determinados por dos paralelas y una secante

Correspondientes

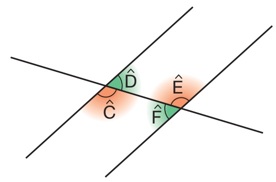


$\hat{A}$ y $\hat{E}$ $\hat{D}$ y $\hat{H}$

$\hat{B}$ y $\hat{F}$ $\hat{C}$ y $\hat{G}$

Dos ángulos **correspondientes** son **iguales.**

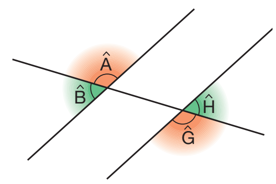
Alternos internos



$\hat{C}$ y $\hat{E}$ $\hat{D}$ y $\hat{F}$

Dos ángulos **alternos internos** son **iguales.**

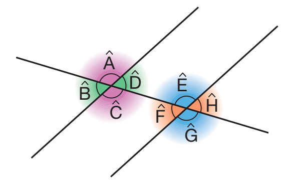
Alternos externos



$\hat{A}$ y $\hat{G}$ $\hat{B}$ y $\hat{H}$

Dos ángulos **alternos externos** son **iguales.**

Opuestos por el vértice

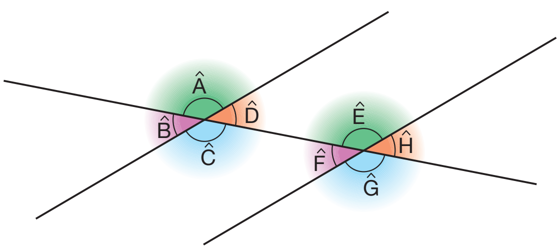


$\hat{A}$ y $\hat{C}$ $\hat{B}$ y $\hat{D}$

$\hat{E}$ y $\hat{G}$ $\hat{F}$ y $\hat{H}$

Dos ángulos **opuestos por el vértice** son **iguales.**

Adyacentes

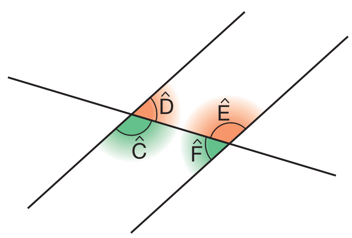


$\hat{A}$ y $\hat{B}$ $\hat{A}$ y $\hat{D}$ $\hat{B}$ y $\hat{C}$ $\hat{C}$ y $\hat{D}$

$\hat{E}$ y $\hat{F}$ $\hat{E}$ y $\hat{H}$ $\hat{F}$ y $\hat{G}$ $\hat{G}$ y $\hat{H}$

Dos ángulos **adyacentes** son **suplementarios.**

Conjugados internos

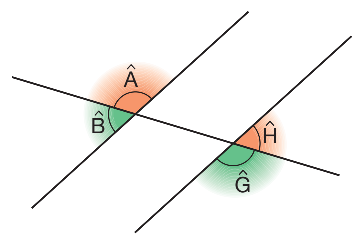


$\hat{C}$ y $\hat{F}$

$\hat{D}$ y $\hat{E}$

Dos ángulos **conjugados internos** son **suplementarios.**

Conjugados externos



$\hat{A}$ y $\hat{H}$

$\hat{B}$ y $\hat{G}$

Dos ángulos **conjugados externos** son **suplementarios.**

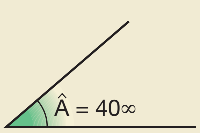
Actividades

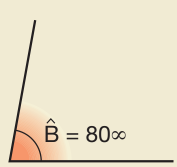
1 Razona y responde:

— ¿Todos los ángulos consecutivos son adyacentes? ¿Y al revés?

— ¿Todos los ángulos suplementarios son adyacentes? ¿Y al revés?

2 Dibuja el ángulo complementario y el suplementario de cada uno de los siguientes ángulos. Determina numéricamente sus valores.

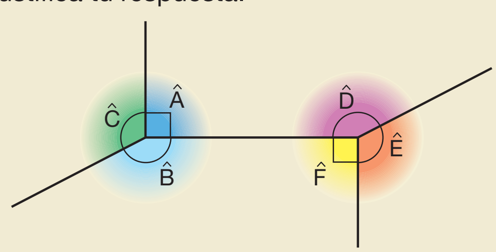




3 Justifica las relaciones entre ángulos alternos internos y alternos externos a partir de las relaciones entre ángulos correspondientes y entre ángulos opuestos por el vértice.

4 En la figura de la derecha, determina los pares de ángulos iguales.

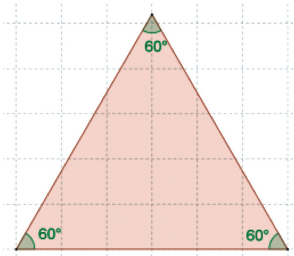
—Justifica tu respuesta.



2 Ángulos internos en polígonos regulares

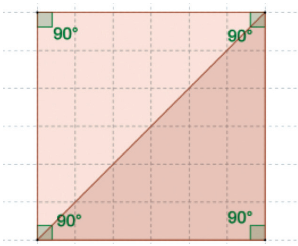
Recordemos que un **polígono** es la figura plana limitada por lados rectos.

Un **polígono** es **regular** si todos sus lados y sus ángulos internos son de igual medida.



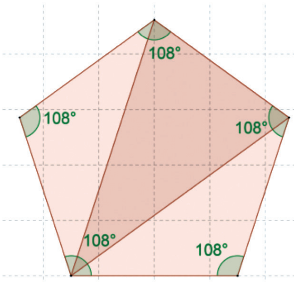
El polígono de menos lados es el triángulo y si es regular se trata de un triángulo equilátero (y equiángulo).

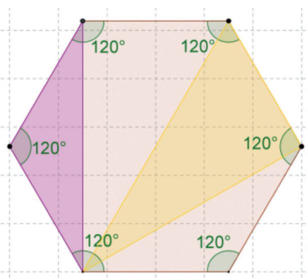
Como la suma de las medidas de los ángulos internos de todo triángulo es 180°, se deduce que los ángulos internos del triángulo equilátero miden 60°.



El polígono regular de cuatro lados es el cuadrado; si trazamos una diagonal desde cualquier vértice, se forman dos triángulos. La suma de las medidas de los ángulos internos de los dos triángulos, que a su vez es la suma de las medidas de los ángulos internos del cuadrado, es 360°, de ello se deduce que cada ángulo interno del cuadrado mide 90°.

El polígono regular de cinco lados, el pentágono regular, forma tres triángulos al trazar dos diagonales desde cualquier vértice, con ello se afirma que la suma de las medidas de los ángulos internos de los tres triángulos, que corresponden a la suma de las medidas de los ángulos internos del pentágonos de 540° y se deduce que cada ángulo interno mide 108°.



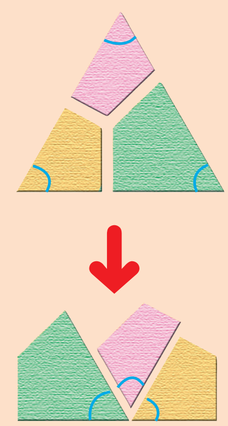


El polígono regular de seis lados, el hexágono regular, forma cuatro triángulos al trazar tres diagonales desde cualquier vértice, con ello concluimos que la suma de las medidas de los ángulos internos del hexágono es 720° y cada ángulo interno mide 120°.

MUCHO OJO

La suma de los ángulos de un triángulo es 180°.

Para comprobarlo, recorta un triángulo y procede del mismo modo que se indica en la figura.



Sea cual sea el triángulo, siempre podrás formar un ángulo llano, es decir de 180°.

La **suma de los ángulos** de un polígono de n lados es igual a:

$$180° \cdot (n - 2)$$

Actividades

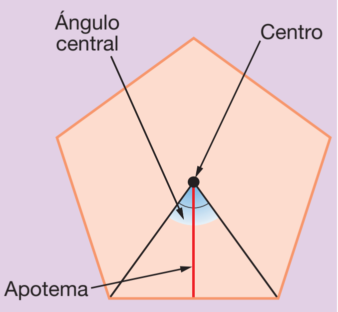
5 Verifica con la fórmula el valor de las medidas de los ángulos internos para en triángulo equilátero, cuadrado, pentágono regular y hexágono regular.

6 Calcula la suma de los ángulos de un eneágono. ¿Cuánto mide cada ángulo si se trata de un polígono regular?

7 Calcula cuánto mide cada uno de los ángulos de un pentágono regular. Con ayuda de un graduador, traza un pentágono regular de 3 cm de lado.

MUCHO OJO

Equidistar: que está a la misma distancia.



Centro

Punto interior del polígono que está a la misma distancia de todos sus vértices.

Apotema

Segmento que une el centro del polígono con el punto medio de cualquier lado.

Ángulo central

Ángulo con vértice en el centro del polígono cuyos lados son semirrectas que pasan por dos vértices adyacentes.

Centro, apotema y ángulo central de un polígono regular

Los polígonos regulares exclusivamente tienen elementos característicos, estos son: el *centro,* las *apotemas* y los ángulos *centrales.*

El **centro** del polígono regular es el punto interior del mismo que equidista de todos los vértices.

La **apotema** del polígono regular es el segmento de recta que une el centro del mismo con el punto medio de cualquier lado, la apotema y su lado correspondiente son perpendiculares.

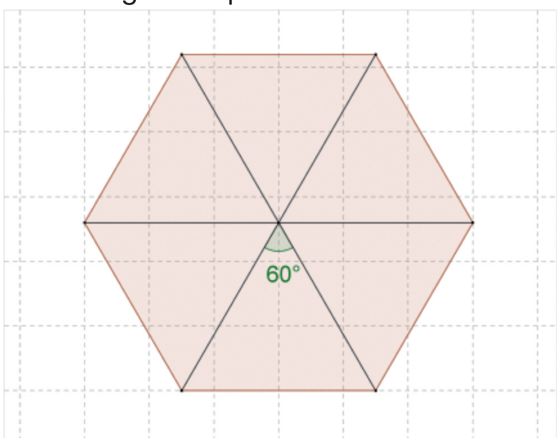
El **ángulo central** de un polígono regular tiene por vértice el centro del mismo y por lados dos segmentos de recta que unen el vértice con dos vértices adyacentes del polígono.

Observa que todas las apotemas de un polígono regular miden lo mismo, es decir son congruentes entre sí.

Diremos que hay tantos ángulos centrales como lados del polígono.

Puesto que todos los ángulos centrales suman 360° y son iguales, tenemos que la medida de cada uno de ellos se calcula al dividir los 360° para el número de lados del polígono.

Razona porque en el caso del hexágono regular, si se trazan sus diagonales, se forman seis triángulos equiláteros.



ejemplo 2

Calcula el valor del ángulo central de un pentágono regular.

$$\alpha = 360° \div 5$$
$$\alpha = 72°$$

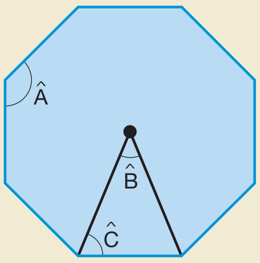
Actividades

8 Dibuja un cuadrado y halla su centro. A continuación, dibuja un ángulo central y una apotema. ¿Cuánto mide el ángulo central? ¿Qué relación existe entre la apotema y el lado del cuadrado?

9 Determina el valor del ángulo central de un octógono regular.

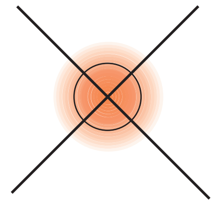
10 ¿Es posible que el ángulo central de un decágono regular mida 30°? Razona tu respuesta.

11 Halla las medidas de los ángulos señalados en el siguiente octógono regular.



3 Medida de ángulos

Si consideramos los ángulos como región del plano, conviene observar que dos rectas perpendiculares en el plano forman cuatro ángulos iguales. Cada uno de estos ángulos es un **ángulo recto.**



A partir del ángulo recto, se definen las unidades de medida de ángulos.

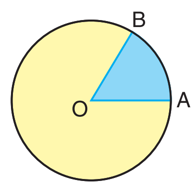
La unidad de medida que utilizamos habitualmente para medir ángulos es el *grado sexagesimal* (°).

> Un **grado sexagesimal** es el ángulo obtenido al dividir el ángulo recto en 90 partes iguales.

Un ángulo recto mide, por tanto, 90° y el ángulo central de una circunferencia mide 360°.

La unidad de medida de ángulos en el SI, que también se utiliza con frecuencia, es el *radián* (rad).

> Un **radián** se define como la medida del ángulo central de una circunferencia que abarca un arco de longitud igual a la del radio.



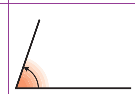
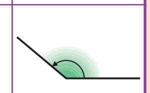
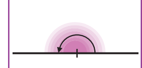
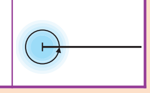
Puesto que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, ésta contiene 2π veces la longitud del radio, luego:

$$360° = 2\pi \text{ rad}$$

Esta equivalencia permite pasar de grados a radianes y viceversa, tal y como se muestra en el ejemplo siguiente.

MUCHO OJO

Los ángulos pueden clasificarse según su amplitud o medida en:

Ángulo recto: 90°	
Ángulo agudo: < 90°	
Ángulo obtuso: > 90°	
Ángulo nulo: 0°	
Ángulo llano: 180°	
Ángulo completo: 360°	

ejemplo 3

Efectúa las transformaciones de unidades angulares.

a) De 45° a radianes.

$$45° = 45\cancel{°} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{360\cancel{°}} = \frac{\pi}{4}\text{rad}$$

b) De $\frac{5\pi}{12}$ rad a grados sexagesimales.

$$\frac{5\pi}{12}\text{rad} = \frac{5\pi}{12}\cancel{\text{rad}} \cdot \frac{360°}{2\pi\cancel{\text{rad}}} = 75°$$

Actividades

12 Indica cuánto miden, en grados sexagesimales, los ángulos interiores de:

a) Un triángulo equilátero.

b) Una escuadra y un cartabón.

13 Pasa estos ángulos de grados a radianes.

a) 12° b) 180° c) –60°

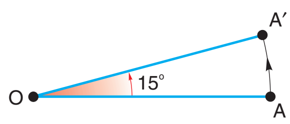
— A continuación, pasa de radianes a grados.

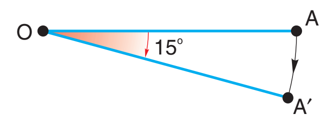
d) $\frac{\pi}{5}$ rad e) $\frac{4\pi}{3}$ rad f) $1{,}5\,\pi$ rad

3.1. Ángulos orientados

Si consideramos los ángulos como giros, cabe tomar en consideración el sentido del giro.

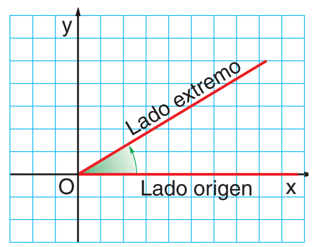
Si el sentido de **giro** es contrario al movimiento de las agujas del reloj, el ángulo es **positivo**.	Si el sentido de **giro** coincide con el del movimiento de las agujas del reloj, el ángulo es **negativo**.





Para representar un ángulo orientado, utilizamos un sistema de coordenadas cartesianas.

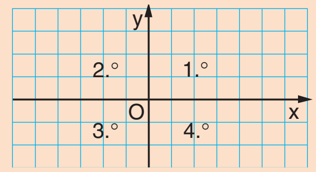
Hacemos coincidir el lado origen del ángulo con el semieje positivo de las abscisas. La posición del lado extremo dependerá de la amplitud del ángulo y de su signo.



Los ángulos se clasifican según el cuadrante al que pertenece su lado extremo. Así, por ejemplo, el ángulo de 150° es un ángulo del segundo cuadrante y el ángulo −45° del cuarto cuadrante (fig. 1).

MUCHO OJO

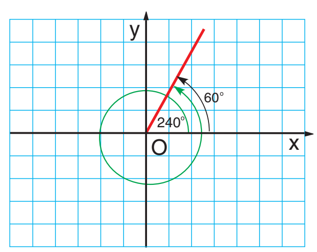
Los ejes de coordenadas dividen el plano en cuatro regiones que reciben el nombre de cuadrantes y que se enumeran según se indica en la figura siguiente.



3.2. Reducción de un ángulo al primer giro

Al considerar los ángulos como giros, es posible definir ángulos mayores de 360°.

Consideremos, por ejemplo, un ángulo de 420°. Para girar 420° hemos de efectuar una vuelta completa y 60° más.



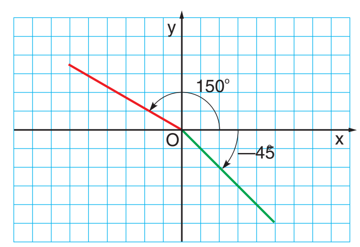


Fig. 1

Así pues, la representación de un ángulo de 420° coincide con la de un ángulo de 60°, y decimos que 60° es el resultado de reducir al primer giro el ángulo de 420°. Es decir el ángulo de 60° es **coterminal** con el de 420°.

Luego, para reducir un ángulo al primer giro, dividiremos la medida del ángulo entre 360° para saber cuántas vueltas completas contiene. El resto de la división nos proporciona el ángulo equivalente del primer giro.

ejemplo 4

Reduce al primer giro un ángulo de −2 295°, represéntalo e indica a qué cuadrante pertenece.

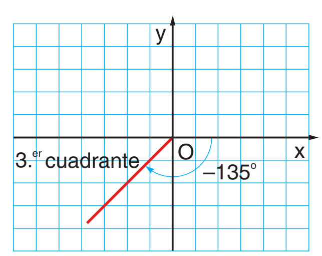
Efectuamos la división entre 360°.

$$\begin{array}{r|l} 2\,295 & 360 \\ \hline 135 & 6 \end{array} \Rightarrow -2\,295° = -6 \cdot 360° - 135°$$

Luego, el ángulo de −2 295° equivale al de −135°.

Situamos el lado origen del ángulo sobre el semieje positivo de las abscisas y giramos 135° en el sentido de las agujas del reloj.

Observa que el ángulo representado pertenece al tercer cuadrante.



Actividades

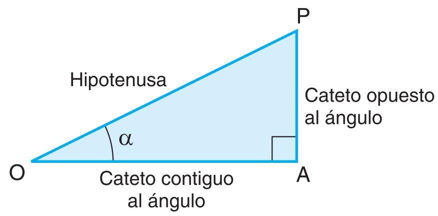
14 Representa e indica a qué cuadrante pertenece cada uno de estos ángulos, reduciéndolos al primer giro en caso necesario.

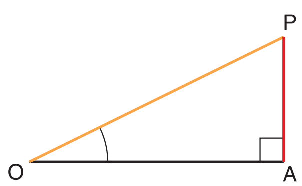
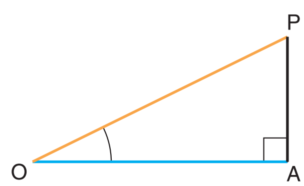
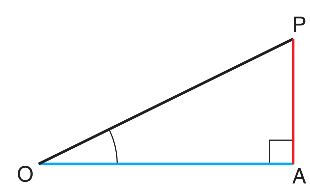
a) 257° b) −73° c) 420° d) 135° e) −270° f) 1 845° g) −870°

4 Razones trigonométricas de un ángulo agudo

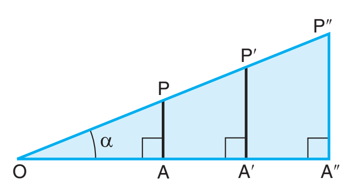
En un triángulo rectángulo pueden establecerse ciertas relaciones entre un ángulo agudo y sus lados. La **trigonometría** es la parte de las matemáticas que trata de la relación entre las longitudes de los lados y las amplitudes de los ángulos de un triángulo.

Fíjate en el ángulo agudo α que hemos indicado del triángulo rectángulo *OAP* de la figura de la derecha. Los cocientes entre las longitudes de dos lados cualesquiera de este triángulo se denominan **razones trigonométricas** de α.



Seno	Coseno	Tangente
La **razón** entre la longitud del **cateto opuesto** al ángulo α y la de la **hipotenusa** se llama **seno** del ángulo α y se escribe **sen α**.	La **razón** entre la longitud del **cateto contiguo** al ángulo α y la de la **hipotenusa** se llama **coseno** del ángulo α y se escribe **cos α**.	La **razón** entre la longitud del **cateto opuesto** al ángulo α y la del **cateto contiguo** se llama **tangente** del ángulo α y se escribe **tg α**.
$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{AP}{OP}$	$\cos\alpha = \dfrac{OA}{OP}$	$\tan\alpha = \dfrac{AP}{OA}$
		

Considera ahora los triángulos *OA′P′* y *OA″P″* de la figura de la derecha. Ambos son semejantes a *OAP* por ser triángulos rectángulos y tener el ángulo α común.



Entonces se cumple que la razón entre la longitud del cateto opuesto al ángulo α y la de la hipotenusa es la misma para cada uno de los triángulos, es decir:

$$\frac{AP}{OP} = \frac{A'P'}{OP'} = \frac{A''P''}{OP''} = \text{sen}\,\alpha$$

Luego el seno del ángulo α es independiente del triángulo rectángulo escogido. Lo mismo sucede con su coseno y con su tangente.

Observa que las razones trigonométricas de un ángulo son adimensionales, ya que están definidas como el cociente entre dos longitudes.

Además, se pueden definir sus **razones trigonométricas inversas.**

Cosecante	Secante	Cotangente
$\csc\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}$	$\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$	$\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$

LAS TIC Y LA MATEMÁTICA

Las calculadoras científicas poseen teclas que permiten obtener las razones trigonométricas de un ángulo.

Si queremos calcular, por ejemplo, sen 53° 15′ tecleamos:

En la pantalla aparece:

Así, sen 53° 15′ = 0,801.

Para calcular el coseno o la tangente, sustituimos la tecla del seno por las correspondientes del coseno y de la tangente.

También podemos hallar el valor de un ángulo conocida una de sus razones trigonométricas. Así, si sen α = 0,75; debemos aplicar su función inversa que el arc sen.

$$\cancel{\text{arc sen}}\,(\cancel{\text{sen}}\,\alpha) = \text{arc sen}\,(0{,}75)$$
$$\alpha = \text{arc sen}\,(0{,}75)$$
$$\alpha = 48{,}59037789$$

En la calculadora tecleamos:

En la pantalla aparece:

Así, 48,590 es un ángulo cuyo seno es 0,75.

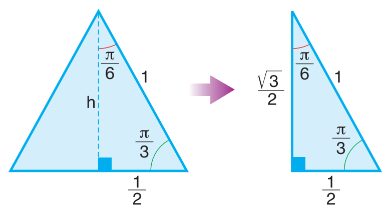
La función inversa del coseno es el arc cos, de la tangente es el arc tan y para encontrar el valor del ángulo, procedemos de forma similar al ejemplo del sen α.

4.1. Razones trigonométricas de los ángulos de $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{3}$

Existen tres ángulos agudos cuyas razones trigonométricas pueden obtenerse a partir de construcciones geométricas sencillas. Son los ángulos de 30°, 45° y 60° o $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{3}$ en radianes.

Razones trigonométricas de los ángulos de $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{3}$

Consideremos un triángulo equilátero de lado la unidad. La altura lo divide en dos triángulos rectángulos iguales, cuyos ángulos agudos miden y $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$



Aplicamos el teorema de Pitágoras a uno de esos triángulos para hallar el valor de *h*.

$$h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Así pues, las razones trigonométricas del ángulo de 30° son:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Y, las razones trigonométricas del ángulo de 60° son:

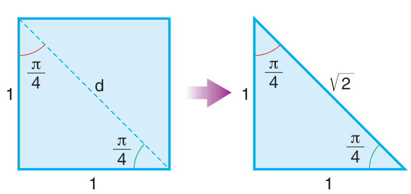
$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Razones trigonométricas del ángulo de $\frac{\pi}{4}$

Consideremos un cuadrado de lado la unidad. La diagonal del cuadrado lo divide en dos triángulos rectángulos iguales cuyos ángulos agudos miden 45°.



Aplicamos el teorema de Pitágoras a uno de estos triángulos para hallar el valor de *d*.

$$d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Así pues, las razones trigonométricas del ángulo de 45° son:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{4} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

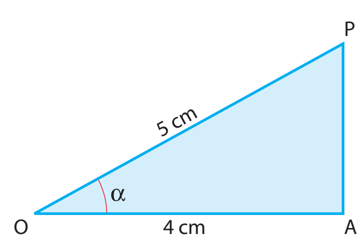
ejemplo 5

Expresa las razones trigonométricas del ángulo α de la figura.

Calculamos la medida del lado *AP*: $AP = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5} \qquad \tan\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{csc}\infty = \frac{5}{3} \qquad \sec\alpha = \frac{5}{4} \qquad \cot\infty = \frac{4}{3}$$



Actividades

15 Los catetos de un triángulo rectángulo miden 6 cm y 8 cm.

Calcula las razones trigonométricas de sus ángulos agudos.

16 Construye un triángulo rectángulo sabiendo que la tangente de uno de sus ángulos agudos es $\frac{3}{2}$.

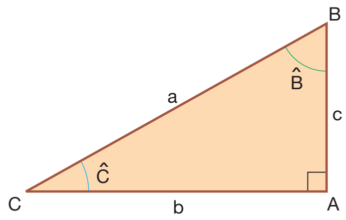


Fig. 2

4.2. Resolución de triángulos rectángulos

El teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas nos permitirán, una vez conocidos algunos de los lados o de los ángulos de un triángulo rectángulo, hallar los restantes; es decir, resolver el triángulo.

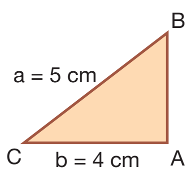
La tabla siguiente resume los diferentes casos que pueden presentarse en la resolución de triángulos rectángulos.

Los datos y las incógnitas hacen referencia a la figura 2.

Primer caso: Dados la hipotenusa y un cateto

Datos	Incógnitas	Fórmulas
a	c	$c=\sqrt{a^2-b^2}$
b	$\hat{B}$	$\operatorname{sen}\hat{B}=\dfrac{b}{a}$
$\hat{A}$	$\hat{C}$	$\cos\hat{C}=\dfrac{b}{a}$

Resuelve el triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 5 cm y uno de sus catetos, 4 cm.



Los datos son a = 5 cm y b = 4 cm.

Debemos calcular c, $\hat{B}$ y $\hat{C}$.

$$c=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{9}=\mathbf{3\ cm}$$

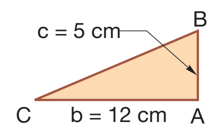
$$\operatorname{sen}\hat{B}=\frac{4}{5}\Rightarrow\hat{B}=\operatorname{arcsen}\frac{4}{5}\Rightarrow\hat{B}=\mathbf{53{,}13^\circ}$$

$$\cos\hat{C}=\frac{4}{5}\Rightarrow\hat{C}=\mathbf{36{,}87^\circ}$$

Segundo caso: Dados dos catetos

Datos	Incógnitas	Fórmulas
b	a	$a=\sqrt{b^2+c^2}$
c	$\hat{B}$	$\tan\hat{B}=\dfrac{b}{c}$
$\hat{A}$	$\hat{C}$	$\tan\hat{C}=\dfrac{c}{b}$

Resuelve el triángulo rectángulo cuyos catetos miden 12 cm y 5 cm.



Los datos son b = 12 cm y c = 5 cm.

Debemos calcular a, $\hat{B}$ y $\hat{C}$.

$$a=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}=\mathbf{13\ cm}$$

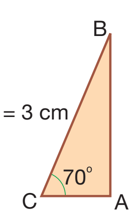
$$\tan\hat{B}=\frac{12}{5}\Rightarrow\hat{B}=\mathbf{67{,}38^\circ}$$

$$\tan\hat{C}=\frac{5}{12}\Rightarrow\hat{C}=\mathbf{22{,}62^\circ}$$

Tercer caso: Dados la hipotenusa y un ángulo agudo

Datos	Incógnitas	Fórmulas
a	b	$b=a\cdot\cos\hat{C}$
$\hat{C}$	c	$c=a\cdot\operatorname{sen}\hat{C}$
$\hat{A}$	$\hat{B}$	$\hat{B}=90^\circ-\hat{C}$

Resuelve el triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 3 cm y uno de sus ángulos es de 70°.



Los datos son a = 3 cm y $\hat{C}$ = 70°.

Debemos calcular b, c y $\hat{B}$.

$$b=3\cdot\cos 70^\circ=\mathbf{1{,}03\ cm}$$

$$c=3\cdot\operatorname{sen} 70^\circ=\mathbf{2{,}82\ cm}$$

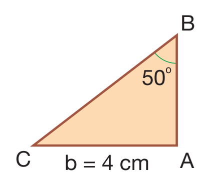
$$\hat{B}=90^\circ-70^\circ=\mathbf{20^\circ}$$

Cuarto caso: Dados un cateto y un ángulo agudo

Datos	Incógnitas	Fórmulas
b	a	$a=\dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}$
$\hat{B}$	c	$c=\dfrac{b}{\tan\hat{B}}$
$\hat{A}$	$\hat{C}$	$\hat{C}=90^\circ-\hat{B}$

Datos	Incógnitas	Fórmulas
b	a	$a=\dfrac{b}{\cos\hat{C}}$
$\hat{C}$	c	$c=b\cdot\tan\hat{C}$
	$\hat{B}$	$\hat{B}=90^\circ-\hat{C}$

Resuelve el triángulo rectángulo uno de cuyos catetos mide 4 cm y el ángulo opuesto es de 50°.



Los datos son b = 4 cm y $\hat{B}$ = 50°.

Debemos calcular a, c y $\hat{C}$.

$$a=\frac{4}{\operatorname{sen} 50^\circ}=\mathbf{5{,}22\ cm}$$

$$c=\frac{4}{\tan 50^\circ}=\mathbf{3{,}36\ cm}$$

$$\hat{C}=90^\circ-\hat{B}=90^\circ-50^\circ=\mathbf{40^\circ}$$

Aplicaciones. Determinación de alturas y distancias

A continuación, veremos unos ejemplos de una de las aplicaciones más importantes de la trigonometría, la determinación de alturas y de distancias.

ejemplo 6

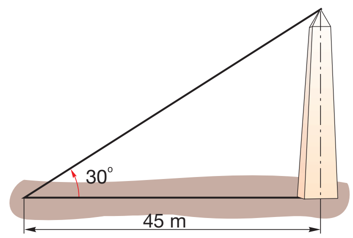
El ángulo de elevación del extremo superior de un obelisco observado desde un punto del suelo situado a 45 m del pie del obelisco es de 30°. Calcula la altura del obelisco.

Sea h la altura del obelisco. Si aplicamos trigonometría, tenemos que:

$$\tan 30° = \frac{h}{45}$$

Sustituimos tan 30° por su valor $\frac{\sqrt{3}}{3}$ y despejamos h.

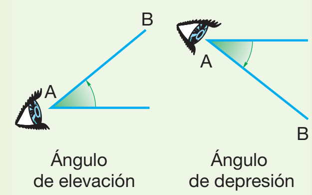
$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{45} \Rightarrow h = 45 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 25{,}98$$



Así pues, la altura del obelisco es de 25,98 m.

FÍJATE

El ángulo que forma la visual con el plano horizontal que pasa por el ojo del observador se llama **ángulo de elevación** si el punto observado está por encima de dicho plano, o **ángulo de depresión** si el punto está por debajo.

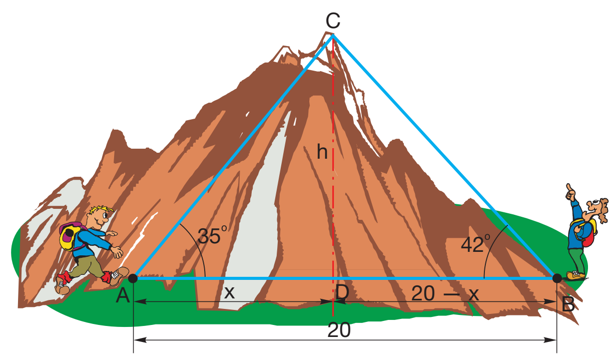


ejemplo 7

Dos excursionistas que distan entre sí una distancia de 20 km observan el punto más alto de una montaña que está en el mismo plano vertical que ellos bajo ángulos de 35° y de 42°. Halla la altura de la montaña y la distancia que separa el punto más alto de la montaña de cada uno de los excursionistas.

Sean h la altura de la montaña y x la distancia AD. Resulta evidente que DB es igual a $20 - x$.
Si aplicamos la trigonometría en los triángulos rectángulos ADC y CDB, tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} \tan 35° &= \frac{h}{x} \\ \tan 42° &= \frac{h}{20 - x} \end{aligned}\right\}$$



Al sustituir tg 35° y tg 42° por sus valores y resolver el sistema, obtenemos el resultado siguiente: $h = 7{,}88$; $x = 11{,}25$.

Así pues, la altura de la montaña es de 7,88 km.

Si aplicamos el teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos ADC y CDB, podremos hallar AC y BC, que corresponden a las distancias que separan el punto más alto de la montaña de cada uno de los excursionistas.

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} \Rightarrow AC = \sqrt{11{,}25^2 + 7{,}88^2} = 13{,}74$$

$$BC = \sqrt{DB^2 + DC^2} \Rightarrow BC = \sqrt{8{,}75^2 + 7{,}88^2} = 11{,}78$$

Por tanto, al excursionista situado en el punto A le faltan 13,73 km para alcanzar el punto más alto de la montaña, mientras que al excursionista situado en el punto B le faltan 11,77 km.

El procedimiento que acabamos de desarrollar recibe el nombre de **método de doble observación**.

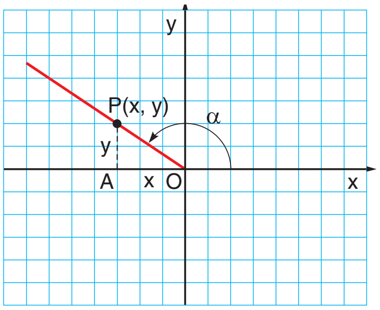
Actividades

17 Calcula la altura de un edificio si situados a 20 m de éste observamos su extremo superior bajo un ángulo de elevación de 54°.

18 Desde un faro se observa un barco bajo un ángulo de depresión de 20°, y si el barco se aproxima 500 m al faro el ángulo pasa a ser de 26°. ¿Qué distancia separa el barco del faro en la segunda observación?

5 Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

Una vez definidas las razones trigonométricas de un ángulo agudo, veamos cómo podemos definir las razones trigonométricas de otros ángulos.



Representamos el ángulo α en un sistema de coordenadas cartesianas y consideramos un punto cualquiera *P* de su lado extremo.

Si (*x, y*) son las coordenadas del punto *P* y *r* es su distancia al origen de coordenadas, definimos las razones trigonométricas del ángulo α de la siguiente forma:

El **seno** de α es la razón entre la ordenada ***y*** del punto ***P*** y su distancia ***r*** al origen de coordenadas.

$$\textbf{sen}\,\alpha = \frac{y}{r}$$

El **coseno** de α es la razón entre la abscisa ***x*** del punto ***P*** y su distancia ***r*** al origen de coordenadas.

$$\textbf{cos}\,\alpha = \frac{x}{r}$$

La **tangente** de α es la razón entre la ordenada ***y*** y la abscisa ***x*** del punto ***P.***

$$\textbf{tan}\,\alpha = \frac{y}{x}$$

Veamos que estas definiciones no dependen del punto *P* escogido.

En efecto, si consideramos otro punto *P'* del lado extremo del ángulo α, obtenemos el triángulo *OP'A'* semejante al *OPA* (fig. 2); entonces se verifica:

$$\frac{y'}{r'} = \frac{y}{r} = \text{sen}\,\alpha \qquad \frac{x'}{r'} = \frac{x}{r} = \cos\alpha \qquad \frac{y'}{x'} = \frac{y}{x} = \tan\alpha$$

Es decir, el valor de las razones trigonométricas no varía.

FÍJATE

La forma en que hemos definido las razones trigonométricas en este apartado coincide con las dadas anteriormente en el caso de un ángulo agudo, ya que si *P*(*x, y*) es un punto del lado extremo de un ángulo agudo, el origen de coordenadas *O*, el punto *P* y la proyección de *P* sobre el eje de abscisas son los vértices de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden *x* e *y*, y cuya hipotenusa mide *r*.

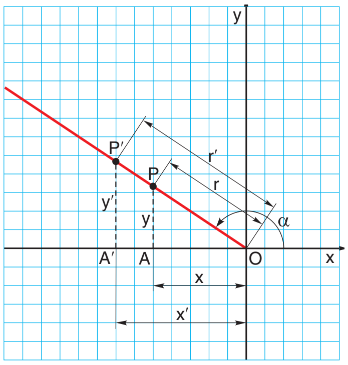


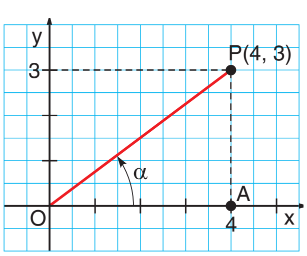
Fig. 2

Ángulo	sen	cos	tan
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	–

Tabla 1. A partir de las definiciones de esta página, podemos hallar las razones trigonométricas de 0° y 90° para completar la tabla.

ejemplo 8

Calcula el valor de las razones trigonométricas del ángulo α cuyo lado extremo pasa por el punto P *(4, 3).*



En primer lugar, aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo *OAP* para calcular *r*.

$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

Entonces, se tiene que:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5} \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{4}{5} \quad ; \quad \tan\alpha = \frac{3}{4}$$

Actividades

19 Sabiendo que las coordenadas de un punto *P* del lado extremo de un ángulo son *P* (–4, –6), calcula el valor de las razones trigonométricas de dicho ángulo.

5.1. Circunferencia goniométrica

Como hemos visto, el valor de las razones trigonométricas de un ángulo α no depende del punto que tomemos sobre su lado extremo.

En particular, podemos considerar un punto *P* de su lado extremo situado sobre una circunferencia de radio 1 centrada en el origen de coordenadas (fig. 3). Esta circunferencia recibe el nombre de **circunferencia goniométrica.**

Vamos a ver cómo la circunferencia goniométrica nos permite obtener gráficamente de forma sencilla las razones trigonométricas de cualquier ángulo.

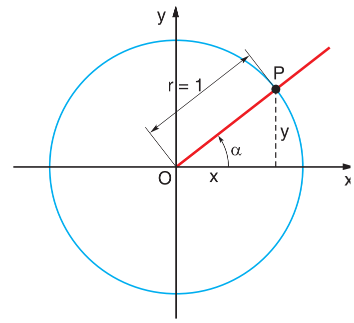
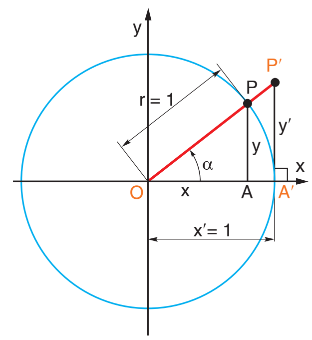
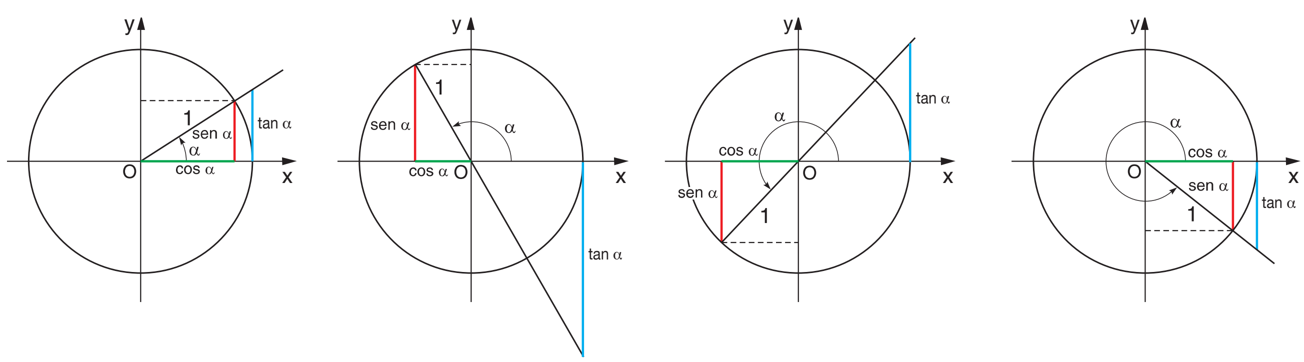


Fig. 3

Seno	Coseno	Tangente
$\text{sen}\,\alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = \boldsymbol{y}$ El seno del ángulo coincide con la ordenada del punto del lado extremo del ángulo cuya distancia al origen vale 1.	$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = \boldsymbol{x}$ El coseno del ángulo coincide con la abscisa del punto del lado extremo del ángulo cuya distancia al origen vale 1.	$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} = \frac{y'}{1} = \boldsymbol{y'}$ Observa en el triángulo OP A , el segmento OA = x = 1. La tangente del ángulo coincide con la ordenada del punto del lado extremo del ángulo cuya abscisa vale 1.



La figura siguiente muestra cómo podemos obtener segmentos representativos del seno, del coseno y de la tangente de ángulos de cualquier cuadrante.



ejemplo 9

Dibuja en una circunferencia goniométrica todos los ángulos cuya tangente sea 0,8.

Sobre una cuadrícula trazamos una circunferencia de radio 10 cuadraditos y que consideramos que representa la unidad (fig. 4).

Contamos 8 cuadraditos hacia arriba sobre la recta tangente que pasa por *A′*, que representan el valor de 0,8 y dibujamos los lados extremos.

Medimos los ángulos con un transportador y obtenemos: 39º y 219º.

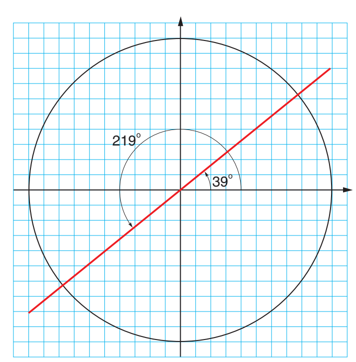


Fig. 4

Actividades

20 Indica sobre una circunferencia goniométrica los segmentos representativos del seno, del coseno y de la tangente del ángulo de 150º.

5.2. Propiedades y relaciones de las razones trigonométricas

Veamos ahora algunas propiedades de las razones trigonométricas que afectan a su valor y su signo, así como las relaciones que existen entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo o de ángulos distintos.

Valor y signo de las razones trigonométricas

Sabemos que si representamos un ángulo α cualquiera sobre un sistema de coordenadas, el valor del seno y el del coseno coinciden respectivamente con la ordenada y la abscisa del punto *P* del lado extremo cuya distancia al origen vale 1 (fig. 6). Y puesto que las coordenadas de dicho punto están comprendidas entre –1 y 1, podemos afirmar que:

$$\mathbf{-1 \le sen\ \alpha \le 1 \qquad -1 \le cos\ \alpha \le 1}$$

Además, el signo de las razones trigonométricas del ángulo α depende únicamente del signo que tengan las coordenadas de *P;* es decir, del cuadrante al que pertenezca el ángulo α (tabla 2).

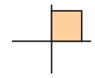
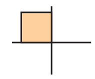
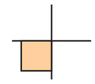
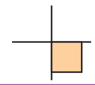
Cuadrante	sen	cos	tan
	+	+	+
	+	–	–
	–	–	+
	–	+	–

Tabla 2.

Relaciones entre las razones trigonométricas de un ángulo

Sepamos ahora qué relaciones pueden establecerse entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo.

Consideremos la circunferencia goniométrica y, por ejemplo, un ángulo α del primer cuadrante (fig. 5). Los catetos del triángulo rectángulo coloreado miden y = sen α y x = cos α. Si aplicamos el teorema de Pitágoras a este triángulo, se tiene: $\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\ \alpha = 1$

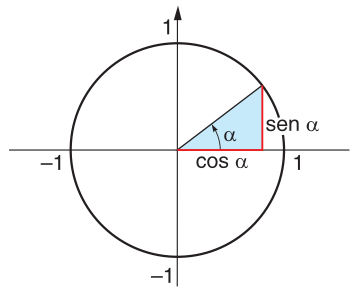


Fig. 5

Puesto que obtendríamos el mismo resultado si el ángulo perteneciera al segundo, al tercero o al cuarto cuadrantes, podemos entonces afirmar que para cualquier ángulo α se verifica:

$$\mathbf{sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1}$$

Esta expresión se conoce como **fórmula fundamental de la trigonometría.**

Por otro lado, se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}\ \alpha = y \\ \cos\alpha = x \\ \tan\alpha = \dfrac{y}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{\tan\alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}}$$

Las expresiones $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ y $\tan\alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha}$ permiten calcular las razones trigonométricas de cualquier ángulo, en valor absoluto, una vez conocida una de ellas. Para determinar su signo es necesario considerar el cuadrante al que pertenece dicho ángulo (tabla 2).

FÍJATE

Escribimos $\text{sen}^2\ \alpha$ para indicar $(\text{sen}\ \alpha)^2$.

ejemplo 10

Sabiendo que α es un ángulo del tercer cuadrante y que sen α = –0,6, calcula cos α y tan α.

— Sustituimos el valor de sen α en la expresión.

$$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\ \alpha = 1 \Rightarrow (-0{,}6)^2 + \cos^2\ \alpha = 1$$

Si despejamos cos α y operamos, tenemos que:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-(-0{,}6)^2} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \pm\, 0{,}8$$

Puesto que α pertenece al tercer cuadrante, sabemos que cos α = –0,8.

— Finalmente, calculamos tan α.

$$\tan\alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{-0{,}6}{-0{,}8} = 0{,}75$$

5.3. Ángulos coterminales

Con un segmento de recta que tiene un extremo fijo en el origen del plano cartesiano, podemos formar una clase de ángulo que utiliza como lado origen el eje positivo de las abscisas y desplaza al segmento de recta hasta algún punto en el plano.

Entre el eje de las abscisas y el segmento de recta desplazado se forman *infinitos número de ángulos,* que tienen los mismos lados de origen y de fin, por lo que son conocidos como **ángulos con las mismas terminales o coterminales**.

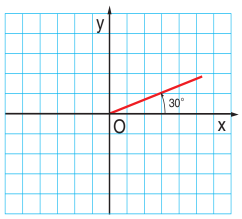
FÍJATE

Los ángulos coterminales pueden ser positivos o negativos y tener más de 360º o (2 π rad)

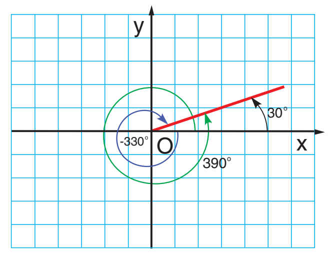
ejemplo **11**

Encuentra dos ángulos coterminales al ángulo de 30° $\left(\frac{\pi}{6}\text{ rad}\right)$

Graficamos el ángulo de 30º $\left(\frac{\pi}{6}\text{ rad}\right)$



Luego, graficamos los ángulos que tengan los mismos terminales que el ángulo del paso anterior.

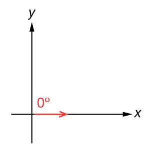
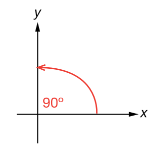
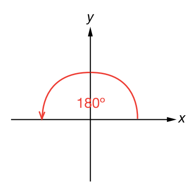
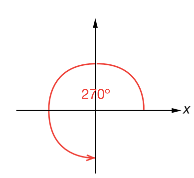


5.4. Ángulos cuadrantales

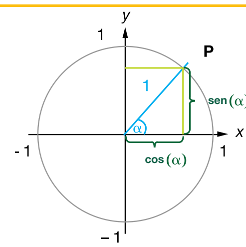
A los ángulos que forman una abertura entre dos ejes coordenados del plano cartesiano se los conoce como ángulos cuadrantales o equivalentes a cuadrantes.

Para formar un ángulo, podemos emplear un segmento de recta fija en el origen del sistema coordenado. Este segmento de recta lo giramos en sentido antihorario para formar ángulos positivos y, en sentido horario, para formar ángulos negativos.

Para formar ángulos cuadrantales, tomamos como **lado origen** el eje positivo de las abscisas y desplazamos el segmento de recta hasta que intercepte con otro eje coordenado.

Ángulo cuadrantal de 0° o 360° (2π rad)	Ángulo cuadrantal de 90° (π/2 rad)
	
Ángulo cuadrantal de 180° (π rad)	**Ángulo cuadrantal de 270° (3π/2 rad)**
	

Para encontrar las relaciones trigonométricas de los ángulos cuadrantales, utilizamos la circunferencia de radio uno, observa:



En la representación anterior, el **cos(α)** corresponde al valor de la abscisa del punto **P**, y el **sen(α)** al valor de la ordenada del mismo punto.

Actividades

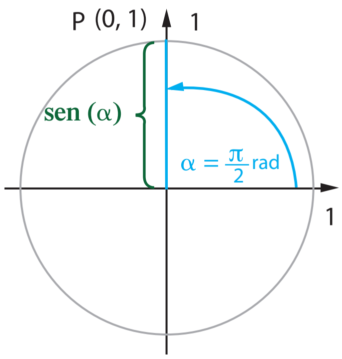
21 Encuentra tres ángulos coterminales de los siguientes ángulos.

a) 60º $\left(\frac{\pi}{3}\text{ rad}\right)$ b) 120º $\left(\frac{2\pi}{3}\text{ rad}\right)$ c) 45º $\left(\frac{\pi}{4}\text{ rad}\right)$

ejemplo 12

Encuentra las relaciones trigonométricas del ángulo cuadrantal de 90° (π/2).

a) Graficamos en un círculo de radio uno, el ángulo $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ rad.



b) Observamos las coordenadas del punto **P.**

$$x = 0$$
$$y = 1$$

c) Asociamos las funciones trigonométricas a cada valor de la coordenada encontrada en el paso anterior.

$$x = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Para calcular la función **tangente** de un ángulo cuadrantal, podemos utilizar los valores calculados para el **coseno** y para el **seno** del mismo ángulo y la relación:

$$\tan(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

ejemplo 13

Encuentra el valor de la tangente que corresponde al ángulo cuadrantal de π/2.

a) Usamos la relación entre las razones trigonométricas y los valores que previamente encontramos para el $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ y para el $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$:

b) $$\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

$= \dfrac{1}{0} \longrightarrow$ *no existe la división para cero.*

c) En este caso, como no podemos dividir un número para cero, el valor de la $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$ **no está definido**.

Actividades

22 Usando el círculo de radio uno, encuentra los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos cuadrantales y completa la tabla en tu cuaderno:

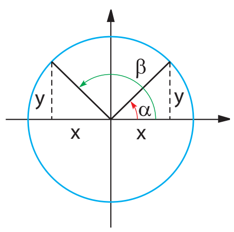
α	sen (α)	cos (α)	tan (α)
0° (0 rad)	0	.....	.....
90° (π/2 rad)	.....	.....	indefinido
180° (π rad)	.....	- 1	.....
270° (3π/2 rad)	.....	.....	.....

23 Con un círculo de radio 3, encuentra la relación entre las funciones trigonométricas del ángulo α y los valores del punto **P** en los ejes coordenados. Comprueba tu respuesta, encontrando los valores que calculaste para las funciones trigonométricas de los ángulos cuadrantales.

5.5. Reducción al primer cuadrante

La tabla siguiente nos muestra cómo las razones trigonométricas de cualquier ángulo siempre coinciden, excepto en el signo, con las de algún ángulo del primer cuadrante.

Reducción del segundo cuadrante al primer cuadrante



$\beta = \pi - \alpha$

$y' = y$

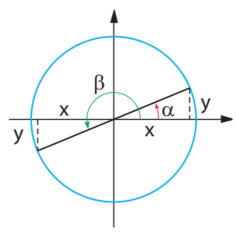
$x' = -x$

$\text{sen}\,(\pi - \alpha) = \text{sen}\,\alpha$

$\cos\,(\pi - \alpha) = -\cos\,\alpha$

$\tan\,(\pi - \alpha) = -\tan\,\alpha$

Reducción del tercer cuadrante al primer cuadrante



$\beta = \pi + \alpha$

$y' = -y$

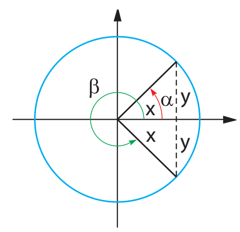
$x' = -x$

$\text{sen}\,(\pi + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$

$\cos\,(\pi + \alpha) = -\cos\,\alpha$

$\tan\,(\pi + \alpha) = \tan\alpha$

Reducción del cuarto cuadrante al primer cuadrante



$\beta = 2\pi - \alpha$

$y' = -y$

$x' = x$

$\text{sen}\,(2\pi - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$

$\cos\,(2\pi - \alpha) = \cos\,\alpha$

$\tan\,(2\pi - \alpha) = -\tan\,\alpha$

Estas relaciones permiten calcular las razones trigonométricas de cualquier ángulo, conociendo las de los ángulos del primer cuadrante.

ejemplo 14

Calcula las razones trigonométricas de un ángulo de $\frac{5\pi}{6}$ *rad.*

Se trata de un ángulo del segundo cuadrante. Por tanto:

$$\text{sen}\,\frac{5\pi}{6} = \text{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{5\pi}{6} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ejemplo 15

Calcula las razones trigonométricas de un ángulo de $\frac{4\pi}{3}$ *rad.*

Se trata de un ángulo del tercer cuadrante. Por tanto:

$$\text{sen}\,\frac{4\pi}{3} = \text{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{4\pi}{3} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

ejemplo 16

Calcula las razones trigonométricas de un ángulo de $\frac{7\pi}{4}$ *rad.*

Se trata de un ángulo del cuarto cuadrante. Por tanto:

$$\text{sen}\,\frac{7\pi}{4} = \text{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\frac{7\pi}{4} = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$

Actividades

24 Indica qué ángulo del primer cuadrante nos servirá para calcular las razones trigonométricas de cada uno de los ángulos siguientes.

a) $\frac{7\pi}{9}$ rad b) $\frac{22\pi}{15}$ rad c) $\frac{17\pi}{12}$ rad d) $\frac{25\pi}{4}$ rad e) $\frac{7\pi}{12}$ rad

25 Calcula, utilizando siempre un ángulo del primer cuadrante, las razones trigonométricas de estos ángulos.

a) $\frac{3\pi}{4}$ rad b) $\frac{5\pi}{4}$ rad c) $\frac{5\pi}{3}$ rad d) $\frac{7\pi}{6}$ rad e) $-\frac{\pi}{3}$ rad

26 Halla todos los ángulos comprendidos entre 0 y 2π rad que verifican $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$.

Cómo resolver problemas

A Una finca tiene forma de triángulo acutángulo. Dos de sus lados miden 3 km y 6 km, y su área es 5,4 km^2. Halla el perímetro de la finca y las medidas de los tres ángulos del triángulo.

Comprensión del enunciado

Un triángulo acutángulo tiene tres ángulos agudos. Su perímetro es la suma de las longitudes de los lados y su área es igual a la base por la altura dividido entre 2.

Planificación de la resolución

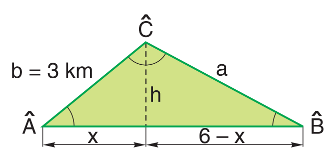
— Representaremos mediante letras los elementos del triángulo: ángulos y lados.

— A partir del área, determinaremos una altura. Sabemos que la altura divide el triángulo en dos triángulos rectángulos y podremos aplicar el teorema de Pitágoras para hallar los lados de ambos triángulos.

— Una vez conocidos los lados, podremos hallar el perímetro de la finca. Los ángulos podrán ser hallados a partir de sus razones trigonométricas usando la calculadora.

Ejecución del plan de resolución

Dibujamos el triángulo y procedemos a calcular los parámetros desconocidos.



$A = 5{,}4 \Rightarrow \dfrac{6 \cdot h}{2} = 5{,}4$

$\Rightarrow h = \dfrac{2 \cdot 5{,}4}{6} = 1{,}8 \qquad x = \sqrt{3^2 - 1{,}8^2} = 2{,}4$

$6 - x = 6 - 2{,}4 = 3{,}6 \qquad a = \sqrt{1{,}8^2 + 3{,}6^2} = 4$

Con estos datos hallamos el perímetro de la finca y el valor de los ángulos: $P = 4 + 3 + 6 = 13$

$\text{sen}\,\hat{A} = \dfrac{1{,}8}{3} \Rightarrow \hat{A} = 36{,}87° \qquad \tan\hat{B} = \dfrac{1{,}8}{3{,}6} \Rightarrow \hat{B} = 26{,}57°$

$\hat{C} = 180° - (36{,}87° + 26{,}57°) = 116{,}56°$

El perímetro de la finca es 13 km y los ángulos del triángulo miden 36,87°, 26,57° y 116,56°.

Revisión del resultado y del proceso seguido

Repasamos los cálculos y comprobamos que las respuestas son las correctas.

B ¿Cómo calcularías la altura de una casa de la cual no puedes acceder a su pie?

Comprensión del enunciado

Recuerda el método de doble observación que hemos desarrollado en el ejemplo 8.

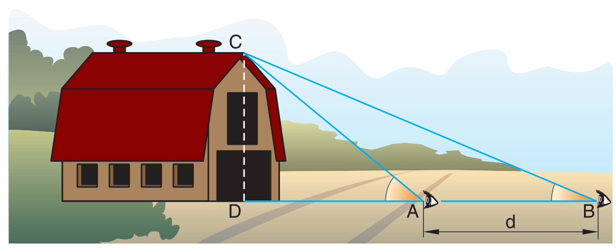
Planificación de la resolución

Aplicaremos el método de doble observación:

— Nos situamos delante de la casa y medimos el ángulo α que forma la horizontal con la visual al punto más elevado, *C*.

— Nos alejamos en línea recta según la dirección *AD* una distancia *d* hasta situarnos en un punto *B* arbitrario, y repitiendo el proceso anterior obtenemos el valor del ángulo β.

— Medimos la distancia *d* y con estos datos ya podemos resolver el problema.



Ejecución del plan de resolución

Procedemos según hemos planificado y supongamos que obtenemos los valores: $\alpha = 36°$, $\beta = 16°$ y $d = 25$ m. Denotamos por *h* la altura de la casa y por *x* la distancia de *A* a *D*. Si aplicamos trigonometría, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \tan 36° = \dfrac{h}{x} \\[2ex] \tan 16° = \dfrac{h}{x + 25} \end{array}\right\}$$

Al resolver el sistema, obtenemos: $x = 16{,}30$; $h = 11{,}84$

Luego la altura de la casa es de 11,84 m.

Revisión del resultado y del proceso seguido

Repasamos los cálculos y comprobamos que la respuesta es la correcta.

Actividades

27 Dos personas salen nadando de un mismo punto de la playa y sus trayectorias rectilíneas forman un ángulo de 30°. Si sus velocidades son 5 km/h y 6 km/h, ¿a qué distancia se encontrarán transcurridos 3 minutos?

28 Una persona situada en la ribera de un río observa un árbol en la ribera contraria bajo un ángulo de 56°. Si se aleja 15 m, lo observa bajo un ángulo de 17°. ¿Cuánto mide el árbol?

En resumen

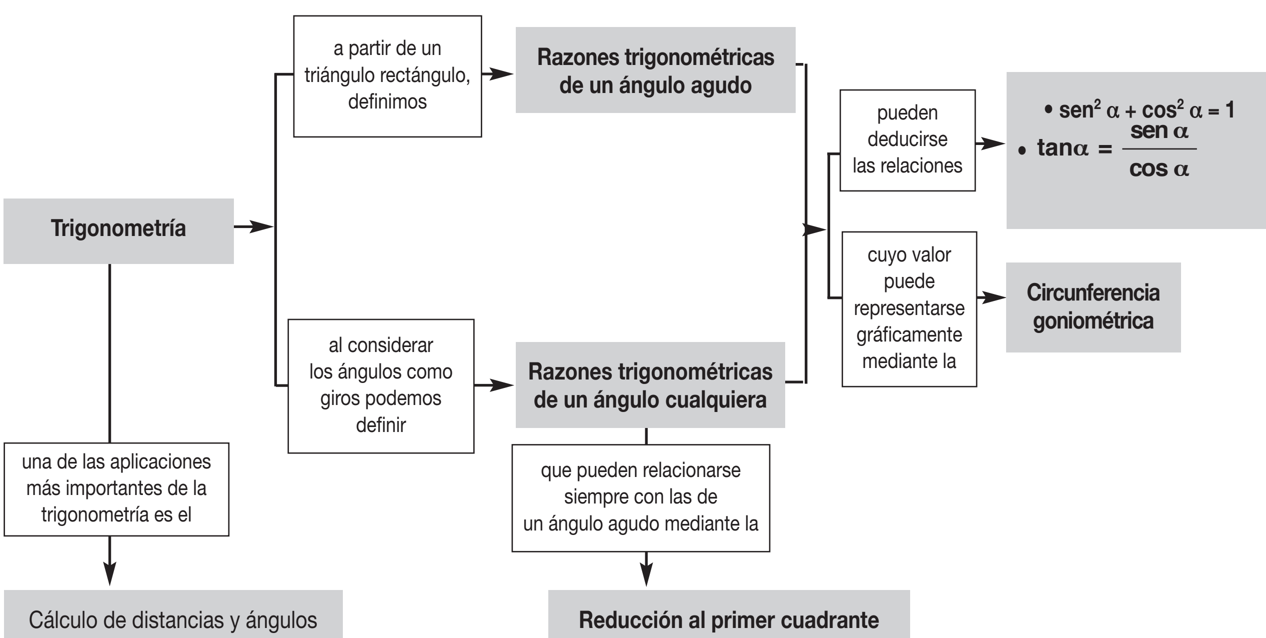
- **Dos ángulos son consecutivos si sólo tienen en común el vértice y un lado. Son adyacentes si son consecutivos y sus lados no comunes forman un ángulo llano.**
- **Dos ángulos son complementarios si suman 90°. Son suplementarios si suman 180°.**

La unidad de medida que utilizamos habitualmente para medir ángulos es el grado sexagesimal (°). Se define como el ángulo obtenido al dividir el ángulo recto en 90 partes iguales.

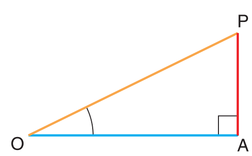
La unidad de medida de ángulos en el SI, que también se utiliza con frecuencia, es el **radián** (rad). Se define como la medida del ángulo central de una circunferencia que abarca un arco de longitud igual a la del radio.

La relación entre ambas unidades es:

$$360° = 2\pi \text{ rad}$$



1 La **trigonometría** nos permite relacionar las longitudes de los lados y las amplitudes de los ángulos de un triángulo.

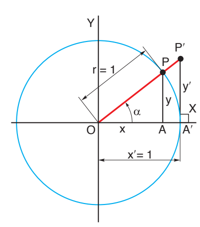


2 Consideramos las siguientes **razones trigonométricas** de un ángulo agudo:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{AP}{OP} \qquad \cos \alpha = \frac{OA}{OP} \qquad \tan \alpha = \frac{AP}{OA}$$

3 La circunferencia de radio 1 y centrada en el origen de coordenadas, que nos permite representar gráficamente el valor de las razones trigonométricas de cualquier ángulo, recibe el nombre de **circunferencia goniométrica**.

La circunferencia goniométrica nos permite obtener gráficamente las razones trigonométricas de cualquier ángulo.



$\operatorname{sen} \alpha = y \qquad \cos \alpha = x \qquad \tan \alpha = y'$

4 Las razones trigonométricas de un ángulo verifican, entre otras, estas relaciones:

$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ **(fórmula fundamental de la trigonometría)**

$$\tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

5 El procedimiento de **reducción al primer cuadrante** nos proporciona unas relaciones que nos permiten calcular las razones de cualquier ángulo, conocidas las de los ángulos del primer cuadrante.

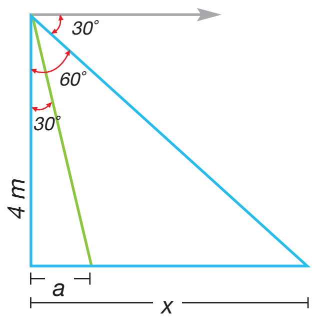
Ejercicios y problemas integradores

- Desde una altura de 4 metros, Marco observa la inundación provocada por las fuertes lluvias en Quito, con un ángulo de depresión de 30^0. Calcular la distancia horizontal en la que se encontraba el trolebús de la acera.

http://www.lahora.com.ec

Solución

- Según la gráfica, tenemos un triángulo rectángulo, para hallar la distancia horizontal aplicamos la función trigonométrica tangente.



- Conocemos la altura del triángulo que son 4 metros y el ángulo que forma la visual del observador con el trole que es 60°.

$$\tan 60^\circ = \frac{x}{4}$$

$x = 6{,}93$ m

- Ahora, calculamos la distancia horizontal (a):

$$\tan 30^\circ = \frac{a}{4}$$

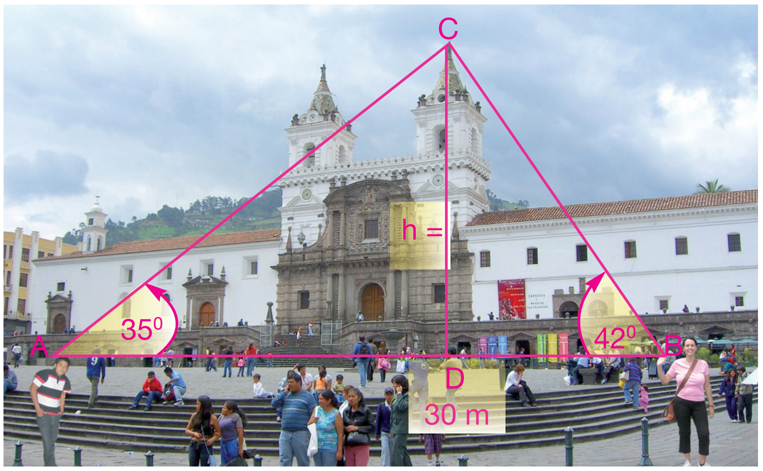
$a = 2{,}31$ m

- Para calcular la distancia que se encuentra el trole de la acera restamos la distancia *a* de *x*.

6,93 m - 2,31 m = 4,62 m

R: El trolebús está a una distancia de 4,62 m de la acera en la inundación.

- Juan y Rebeca se encuentran en la plaza de San Francisco, separados por una distancia de 30 metros. Los dos observan la parte más alta de la iglesia con ángulos de elevación 35° y 42°, respectivamente. Halla la altura de la iglesia y la distancia a la que se encuentran cada uno de ellos de la parte más alta de la iglesia.



Solución

- En la gráfica se observa dos triángulos rectángulos. Representamos con *x* la distancia desde Juan hasta el punto D y, de este punto hasta donde se encuentra Rebeca, es 30 – *x*. La altura la señalamos con la h .
- Aplicamos la función tangente y se obtiene

$$\tan 35^0 = \frac{h}{x}$$

$$\tan 42^0 = \frac{h}{30 - x}$$

- Al calcular los valores de tangente de cada ángulo y resolver el sistema de ecuaciones se obtiene los siguientes resultados $x = 16{,}88$ m y h = 11,82 m .

  R: La altura de la iglesia es de 11,82 m

- Para calcular la distancia de la parte más alta a cada uno de ellos, debemos utilizar la función trigonométrica seno, así tenemos

  $\text{sen } 42^0 = \frac{h}{AC}$, reemplazando valores se obtiene AC = 17,665 m

  $\text{sen } 35^0 = \frac{h}{CB}$, reemplazando valores se obtiene CB = 20,61 m

  R: Juan se encuentra a una distancia 20,6 m y Rebeca se encuentra a una distancia de 17,665 m de la parte más alta de la iglesia.

Practica

- Carlos quiere calcular la altura del condominio donde vive, si se ubica a 5 metros de la base del edificio y observa con un ángulo de 73° a la terraza del mismo.
- El avión en que viaja Pablo se encuentra 2 300 m de altura sobre Quito, cuando comienza su descenso para aterrizar. ¿Qué distancia debe recorrer el avión antes de tocar la pista si baja con un ángulo de depresión de 25°?

Ejercicios y problemas

Comprensión de conceptos y conocimiento de procesos

En tu cuaderno

Ángulos internos en polígonos regulares

29 Los ángulos interiores de un polígono miden 106°, 60°, 110° y 84°. ¿Cuántos vértices y cuántos lados tiene? ¿Es cóncavo o convexo?

30 Dibuja un pentágono y un hexágono convexos. Calcula mentalmente:

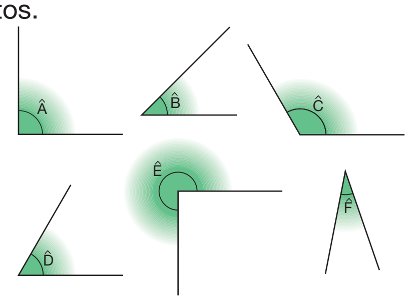
a) El número de diagonales de un pentágono y el de un hexágono.

b) La suma de los ángulos de un pentágono y de un hexágono.

c) El número de ejes de simetría de un pentágono y de un hexágono.

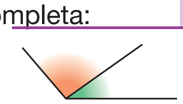
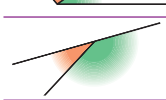
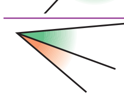
Ángulos

31 Observa los siguientes ángulos y haz una estimación de sus medidas. Comprueba después con el graduador si los valores que has estimado son correctos.

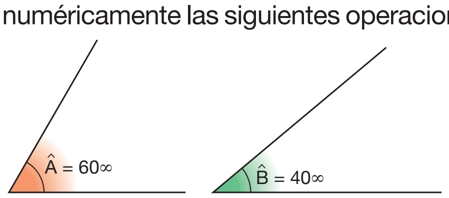


32 ¿Cuántos ángulos llanos son 360 grados sexagesimales?

33 Completa:

	Adyacentes	Consecutivos
	....	Sí
	....	....
	....	....

34 Traslada los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ a tu cuaderno y realiza gráfica y numéricamente las siguientes operaciones:



a) $\hat{A} + \hat{B}$ b) $\hat{A} - \hat{B}$ c) $3 \cdot \hat{A} - 2 \cdot \hat{B}$

35 A partir de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ del ejercicio anterior, efectúa las actividades indicadas.

— Representa gráficamente el ángulo $2 \cdot \hat{A} + \hat{B}$.

— Dibuja el ángulo complementario del ángulo $\hat{A}$.

— Dibuja el ángulo suplementario del ángulo $\hat{B}$.

— Clasifica los ángulos $\hat{A}$, complementario de $\hat{A}$, $\hat{B}$ y suplementario de $\hat{B}$ según sean agudos, rectos, obtusos o llanos.

36 Calcula mentalmente las siguientes operaciones e indica el resultado en grados sexagesimales.

— Un ángulo llano + un ángulo recto

— Un ángulo completo − tres ángulos rectos + + dos ángulos nulos

— Dos ángulos rectos − un ángulo completo + + tres ángulos llanos

$$\frac{\text{Cuatro ángulos rectos} - \text{dos ángulos nulos}}{4}$$

Medida de ángulos

37 ¿Qué significado tiene el signo de un ángulo?

— Representa gráficamente los siguientes ángulos.

a) −15° b) −60° c) 30° d) −90° e) 150°

38 Convierte de grados sexagesimales a radianes.

a) −45° b) 135° c) 225° d) 300°

— A continuación, convierte de radianes a grados.

e) $-1{,}4\,\pi$ f) $\frac{4\pi}{9}$ g) $\frac{14}{15}\pi$ h) $\frac{4\pi}{3}$

39 Indica a qué cuadrante pertenece cada uno de estos ángulos.

a) $\frac{67\pi}{9}$ rad c) $\frac{2\pi}{9}$ rad e) $-\frac{5\pi}{2}$ rad g) $\frac{37\pi}{2}$ rad

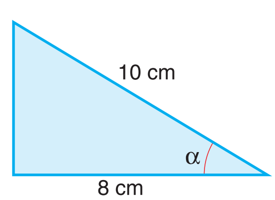
b) $\frac{-25\pi}{18}$ rad d) $\frac{287\pi}{36}$ rad f) 4π rad h) $-\frac{5\pi}{6}$ rad

Razones trigonométricas de un ángulo agudo

40 ¿Es posible que el seno de un ángulo agudo sea mayor que 1? Razona tu respuesta.

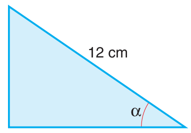
41 Averigua si existe alguna relación entre la cosecante y la secante de dos ángulos complementarios.

42 Calcula el seno, el coseno y la tangente del ángulo α de la figura de la derecha.

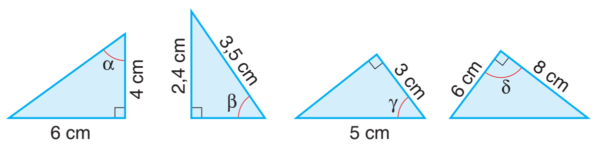


43 Sabiendo que $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, ¿cuál es la longitud del lado *x* en este triángulo rectángulo?

— Calcula sen α y tan α



44 Calcula las razones trigonométricas de los ángulos α, β, γ y δ de estos triángulos rectángulos.



45 Los catetos de un triángulo rectángulo miden 5 cm y 8 cm. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de dicho triángulo.

46 Resuelve el triángulo *ABC,* rectángulo en *A,* en los casos siguientes:

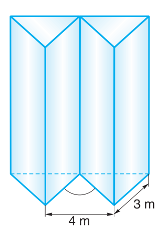
a) $a = 20$ cm, $b = 16$ cm

b) $c = 10$ cm, $b = 5$ cm

c) $b = 5$ cm, $\hat{C} = 40°$

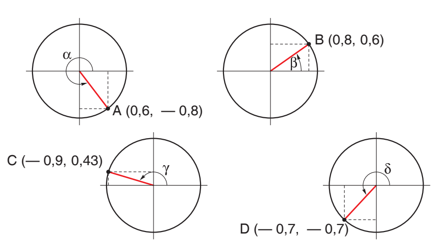
d) $c = 8$ cm, $\hat{C} = 50°$

47 Un escaparate está formado por dos prismas triangulares regulares de cristal. Halla el ángulo formado por las aristas básicas de los dos prismas.



Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera

48 Calcula las razones trigonométricas de los ángulos representados a continuación.



49 Halla las razones trigonométricas de los ángulos siguientes, utilizando para ello, un compás, una regla graduada y un graduador.

a) $\dfrac{31\pi}{90}$ rad b) $\dfrac{14\pi}{15}$ rad c) $\dfrac{13\pi}{9}$ rad d) $\dfrac{71\pi}{36}$ rad

— Comprueba los resultados que has obtenido con los de tu calculadora.

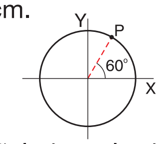
50 Calcula las razones trigonométricas de un ángulo α que pertenece al cuarto cuadrante y cuyo seno es

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

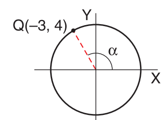
51 Relaciona las razones trigonométricas de los ángulos siguientes con las de un ángulo del primer cuadrante.

a) $\dfrac{7\pi}{10}$ rad b) $\dfrac{62\pi}{45}$ rad c) $\dfrac{35\pi}{18}$ rad d) $-\dfrac{11\pi}{18}$ rad

52 Halla las coordenadas del punto *P* de la circunferencia si su radio mide 5 cm.



— Halla el ángulo α señalado en la siguiente figura.



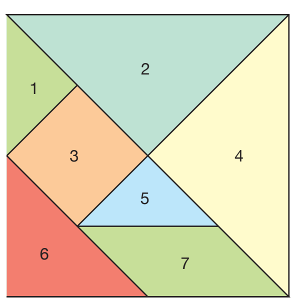
53 Calcula el valor exacto de la expresión 5 sen α + + 2 cos α − 7 tan α si α es un ángulo que pertenece al segundo cuadrante cuyo coseno es $-\dfrac{1}{2}$.

54 Completa la siguiente tabla si en cada uno de los casos α corresponde a un ángulo menor que 2 π rad.

sen α	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
cos α	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	
tan α		$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$		-1
α				

Aplicación en la práctica

55 **Material concreto:** Construye el *tangram* de la figura y halla la amplitud de los ángulos que forman los vértices de cada una de las siete piezas.



56 Calcula el área de un octágono regular inscrito en una circunferencia de 4 cm de radio.

57 El campanario de una iglesia proyecta una sombra de 70 m en el mismo instante en que un bastón de 1 m proyecta una sombra de 0,8 m. Resuelve los apartados siguientes:

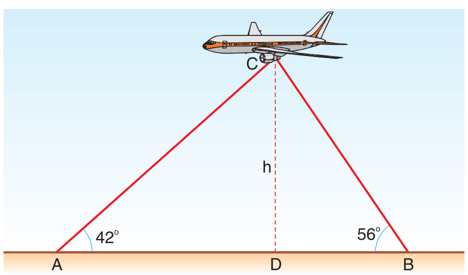
a) ¿Cuánto mide el campanario?

b) ¿Qué ángulo forman los rayos solares con el suelo?

58 ¿A qué distancia de la pared hemos de colocar el pie de una escalera de 6 m para que alcance una altura de 4 m?

59 ¿Qué ángulo formará la escalera del problema anterior con el suelo? ¿Y con la pared?

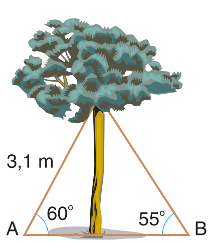
60 Dos radares que distan entre ellos 15 km detectan un avión que se encuentra en el mismo plano vertical bajo ángulos de 42° y 56°. Calcula la altura a la que vuela el avión y la distancia del avión a cada uno de los radares.



61 Desde la torre de un faro se observa un barco con un ángulo de depresión de 35°. Al aproximarse el barco en línea recta 500 m al faro, el ángulo pasa a ser de 70°.

Calcula la distancia que separa el barco del faro en la segunda observación y la altura de éste.

62 Un árbol está sujeto mediante dos cuerdas atadas a la parte superior de su tronco. Observa la figura y halla la altura del tronco y la distancia entre los puntos *A* y *B*.



63 Formen grupos. Deben visitar un parque próximo a su centro escolar y medir las alturas de varios árboles usando la trigonometría.

— Una vez en el parque, escojan algunos árboles de distintas alturas. Cerca de ellos, claven en el suelo una estaca de forma que sobresalga aproximadamente unos 150 cm. Midan su altura exacta.

— Entre todos y al mismo tiempo, marquen en el suelo los extremos de las sombras de los árboles escogidos y de la estaca.

— Midan las longitudes de las sombras.

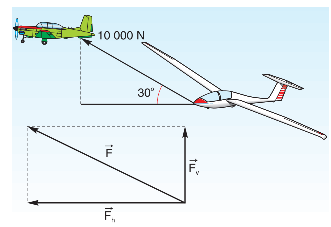
— Con los datos necesarios para determinar las alturas reales de los árboles. Piensen cómo hacerlo y calculen las alturas.

64 Visita la página http://www.phy6.org/stargaze/Mtrig1.htm. Te explica para qué sirve la trigonometría con ejemplos reales y cómo se determinó la altura del Everest, el pico más alto del mundo, usando la trigonometría.

Más a fondo

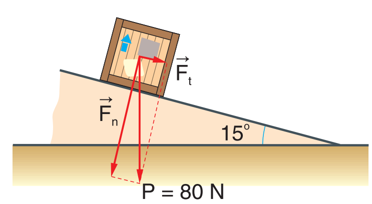
65 Una avioneta sobrevuela una pista de aterrizaje arrastrando un planeador. Sabiendo que ambos aparatos están unidos por un cable que forma 30° con la horizontal y la fuerza que actúa sobre el planeador es de 10 000 N, ¿cuál es el valor de la componente horizontal de dicha fuerza?

Indicación. Si la línea sobre la que actúa una fuerza no es horizontal, ésta puede descomponerse en dos componentes, una horizontal y otra vertical.



66 Un avión que vuela siguiendo la dirección N a una velocidad de 1 200 km/h se ve inmerso en una turbulencia que se desplaza hacia el E a una velocidad de 120 km/h. Calcula qué ángulo forma su trayectoria con la dirección E.

67 Sabiendo que el peso del cuerpo que reposa sobre la rampa o *plano inclinado* representado en la figura es de 80 N, calcula el valor de la fuerza que se ejerce perpendicularmente al plano o *normal* (F_N), y la fuerza paralela al plano o *tangencial* (F_t).



68 Halla dos ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ del primer cuadrante que cumplan:

$\operatorname{sen} \hat{A} + 2 \cos \hat{B} = 1$

$2 \operatorname{sen} \hat{A} - \cos \hat{B} = 1$

Indicación. Efectúa los cambios $\operatorname{sen} \hat{A} = x$; $\cos \hat{B} = y$, y a continuación resuelve el sistema obtenido.

Autoevaluación

Coevaluación

Si logras resolver el 70 % de estas actividades individuales y grupales, puedes avanzar.

1. Expresa las medidas de estos ángulos en radianes.

a) Un ángulo llano.

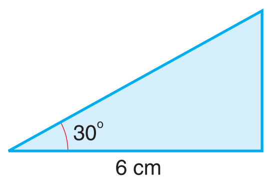
b) Las dos terceras partes de un ángulo recto.

c) Un ángulo de una vuelta y 75°.

2. Reduce estos ángulos al primer giro.

a) 414° b) 1 095° c) 905° d) –402°

3. Averigua, con los datos de la figura, cuál es la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo.



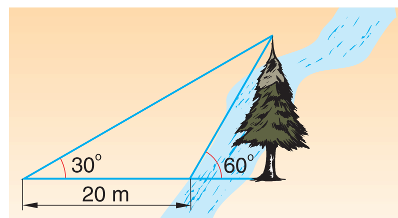
4. De un triángulo rectángulo se conocen el cateto a = 14 cm y el ángulo $\hat{A}$ = 70°. Halla los restantes ángulos y lados.

1. Calcula cos α sabiendo que α es un ángulo del primer cuadrante y que sen α = 0,6.

2. Si sabemos que α es un ángulo del segundo cuadrante y que cos α = –0,70, calcula tan α .

3. Un cable de 26,50 m de longitud, que sujeta un poste vertical, forma con la horizontal un ángulo de 50°. Determina la altura del poste.

4. Una persona situada en la ribera de un río ve un árbol en la orilla opuesta bajo un ángulo de 60°. Al alejarse 20 m en línea recta, lo observa bajo un ángulo de 30°. Calcula la altura del árbol y la anchura del río.



Buen Vivir

Naturaleza y ambiente sano

Los parques son el pulmón de las ciudades por ser espacios verdes dedicados al esparcimiento y la diversión de sus habitantes. Estos parques son el lugar ideal donde los niños socializan con otros a través de sus juegos. Sin embargo, estos espacios deben cumplir ciertas condiciones de seguridad para evitar accidentes: que los materiales de los juegos infantiles no sean peligrosos, mucho menos conductores de electricidad y que no desprendan astillas que puedan ocasionar heridas en los niños, con el suelo blando de césped o arena removida y limpia para amortiguar los golpes en caso de caídas, cerramiento con vallas y a 30 metros del tráfico que impidan la salida tanto de niños como de instrumentos de juego, no circular vehículos al interior del parque; y sobre todo, otras de higiene, como agua potable de fácil acceso, baterías sanitarias limpias y en buen estado, y recipientes para arrojar la basura de manera ecológica.

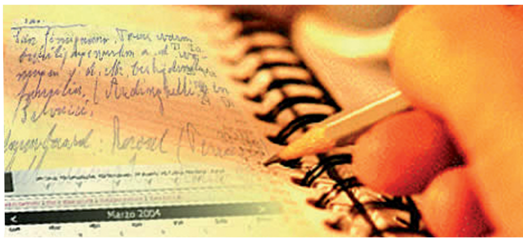
Actividades

1 Consulten en Internet cuántos parques, áreas ecológicas o zonas verdes existen en el país, y qué porcentaje de la superficie total está destinado a este propósito.

2 Visiten un parque un domingo cualquiera y recorran al trote o en bicicleta un sendero que saliendo de un sitio, les permita circunvalar una parte del parque hasta llegar al mismo punto de partida.

3 Realicen una encuesta en el aula para determinar cómo se divierten los domingos: **a)** en el parque; **b)** en el campo y la naturaleza; **c)** jugando fútbol; **d)** viendo televisión; **e)** juegos electrónicos. Saquen el porcentaje de cada uno y coloquen en la cartelera.

4 Pongan en marcha una campaña escolar para fomentar la actividad física y el uso adecuado de parques y áreas verdes.



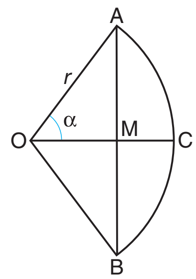
Crónica matemática

Nacimiento y primer desarrollo de la trigonometría

El término griego *trigonometría* significa 'medida de triángulos'. Aunque este vocablo se utilizó por primera vez en el siglo XVI, la trigonometría tiene sus orígenes en las antiguas astronomías babilonia y griega.

En el s. II a. C., **Hiparco de Nicea** adoptó el sistema babilónico de dividir el círculo en 360 grados y tabuló los valores de la cuerda de la circunferencia en relación con el arco para una serie de ángulos.

Ptolomeo, en el s. II d. C, amplió las tablas de Hiparco utilizando el hoy llamado teorema de Ptolomeo. Para distintos valores del ángulo central (2α, en la figura adjunta), Ptolomeo hallaba la longitud de la cuerda *AB*.

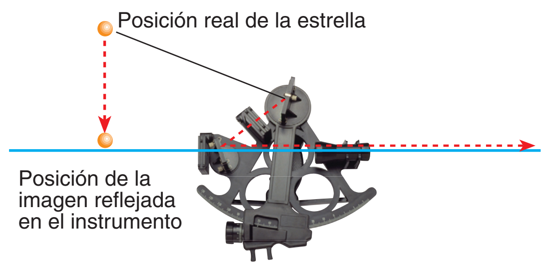


A inicios del s. VI, el matemático indio **Varahamihira** modificó el sistema de Ptolomeo y relacionó el ángulo central α con la longitud de la semicuerda (*AM* en la figura), magnitud más acorde con la actual definición de seno.

Posteriormente, los **árabes** adoptaron de la cultura india las funciones seno y coseno, así como sus inversas. También describieron la tangente y la cotangente, de forma análoga al estudio de longitudes de sombras que ya había realizado Tales de Mileto en el s. VI a. C. La civilización árabe elaboró las tablas trigonométricas más precisas de su época, sistematizó la trigonometría tanto plana como esférica y presentó la trigonometría como una ciencia independiente de la astronomía.

El sextante

El sextante es un instrumento para medir ángulos, generalmente el ángulo de un astro con el horizonte. El sextante tiene forma de sector circular. Su lado curvo contiene una escala graduada de 0° a 60°, la sexta parte de la circunferencia, de ahí su nombre. En el vértice de unión de los dos lados rectos hay una barra oscilante que en su extremo superior lleva un espejo para recoger la luz del astro. En la parte central del sextante hay un espejo fijo con la mitad izquierda transparente y la derecha, reflectante. Alineado con este espejo hay un anteojo con filtros para la protección ocular.



Para medir el ángulo de un astro, se orienta el sextante en la línea del horizonte. Después se mueve la barra oscilante hasta lograr ver el astro a través del anteojo por reflexiones sucesivas de la luz del astro en el espejo de la barra y en la mitad reflectante del espejo fijo. Cuando esta imagen del astro está alineada con la línea del horizonte vista a través de la mitad transparente del espejo fijo, la parte inferior de la barra oscilante señala, en la escala graduada, el valor del ángulo.

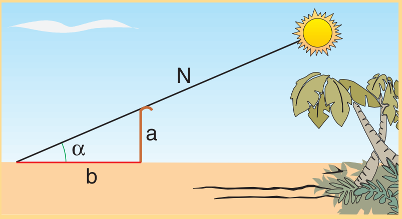
Demuestra tu ingenio

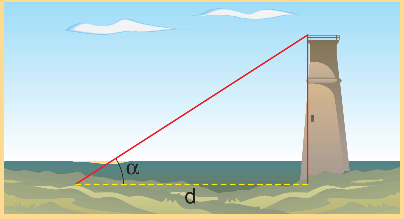
La trigonometría permite resolver numerosos problemas prácticos. Indica cómo te las ingeniarías para resolver los siguientes.

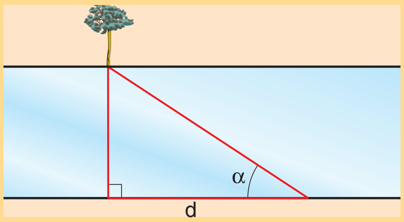
a) Calcular el ángulo del Sol sobre el horizonte a partir de la longitud de un bastón y la de la sombra que éste proyecta sobre el suelo.

b) Medir la altura de una torre si sólo podemos obtener directamente longitudes sobre el suelo y el ángulo que forma la visual a la parte más alta de la torre con el suelo.

c) Medir la anchura de un río si sólo podemos medir longitudes sobre la orilla en la que nos encontramos y los ángulos formados por las visuales a un punto de la otra orilla.







Módulo 5

Bloques: Geométrico. Estadística y probabilidad

Buen vivir: Uso del tiempo libre

En el Parque Acuático del Puyo hay una piscina de 15 m de largo y 5 m de ancho, la profundidad en uno de sus extremos es de 3 m y en el otro extremo de 2 m. Durante los meses en los que no se utiliza se quiere pintar su interior.

Calcula el costo total que supone realizar esta reforma si:

— Se quieren dar dos capas de pintura.

— La pintura que necesitamos cuesta \$ 5 el litro y tiene un rendimiento de 0,5 l cada metro cuadrado.

Fíjate en que antes de pintar tenemos que vaciar la piscina y al terminar volverla a llenar. Esta operación repercutirá en el costo final de la reforma (el precio del litro de agua es de \$ 0,01).

http://www.servigroup.com

Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

Media aritmética

En este tema ampliarás tus conocimientos sobre los cuerpos geométricos y la forma de calcular sus áreas y volúmenes. Así como también *resolverás* problemas utilizando la media aritmética.

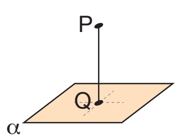
DCD Destrezas con criterios de desempeño

- Calcular áreas laterales de conos y pirámides en la resolución de problemas.
- Calcular volúmenes de pirámides y conos con la aplicación del teorema de Pitágoras.
- Aplicar el teorema de Pitágoras en el cálculo de áreas y volúmenes.
- Calcular la media aritmética de una serie de datos reales.
- Apreciar, en diferentes ámbitos de la vida cotidiana, los aspectos que pueden ser expresados por medio de la geometría.
- Tener una predisposición a aplicar las nociones geométricas a situaciones cotidianas.

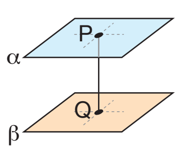
Prerrequisitos

Recuerda

- Los **polígonos regulares** son los que tienen todos sus lados y ángulos iguales.
- La **distancia entre un punto y un plano** es la longitud del segmento perpendicular *PQ* interceptado por el plano.



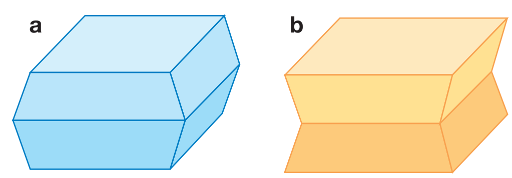
- La **distancia entre dos planos paralelos** es la longitud del segmento perpendicular *PQ* interceptado por los planos.



- Determina cuál es el valor que más se repite en la siguiente serie de cifras: 1, 5, 6, 7, 3, 4, 7, 2, 8, 2, 6, 3, 7, 3, 6, 1, 8, 3, 5, 1, 4, 7, 9, 3, 1, 5, 3, 4, 7, 2 y 5.

Evaluación diagnóstica

- Observa los ángulos poliedros de estos cuerpos e indica cuál de ellos es convexo y cuál es cóncavo.



- Escribe las fórmulas que permiten calcular las áreas de las figuras planas sencillas.
- ¿Cuál es la unidad de volumen derivada del metro? Escribe tres múltiplos de esta unidad.
- Completa en tu cuaderno:

  Cada unidad de volumen es .... veces mayor que la inmediatamente inferior y .... veces menor que la inmediatamente superior.

- La edad, en años, de los participantes en un campeonato de ajedrez es la siguiente: 16, 21, 45, 36, 30, 18, 29, 27, 18, 47, 22 y 40. Calcula la media aritmética de estos datos.

Buen Vivir

Uso del tiempo libre

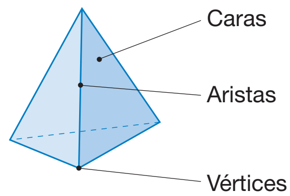
Art. 381. El Estado protegerá, promoverá y coordinará la cultura física que comprende el deporte, la educación física y la recreación, como actividades que contribuyen a la salud, la formación y desarrollo integral de las personas; impulsará el acceso masivo al deporte y a las actividades deportivas a nivel formativo, barrial y parroquial.

Constitución de la República del Ecuador, 2008.

1 Cuerpos geométricos

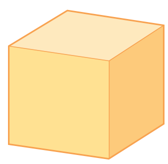
1.1. Poliedros

Como ya sabes, un **poliedro** es la región del espacio limitada por polígonos. Sus elementos son:

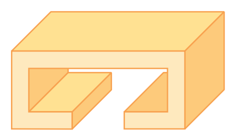


- **Caras:** cada uno de los polígonos.
- **Aristas:** cada uno de los lados de los polígonos.
- **Vértices:** cada uno de los puntos en los que se cortan las aristas.

Las caras que concurren en un mismo vértice forman un **ángulo poliedro.** Atendiendo a estos ángulos, podemos clasificar los poliedros en *convexos* y *cóncavos*.



Poliedro convexo: todos sus ángulos poliedros son convexos.



Poliedro cóncavo: alguno de sus ángulos poliedros es cóncavo.

Observa que:

- Si un poliedro es convexo, todas sus caras pueden apoyarse sobre un plano.
- Si un poliedro es cóncavo, alguna de sus caras no puede apoyarse en un plano.

Relación de Euler

Todos los poliedros convexos cumplen una propiedad, conocida como **relación de Euler,** que relaciona el número de caras, aristas y vértices.

Todo **poliedro convexo** cumple que el número de caras, *C,* más el número de vértices, *V,* es igual al número de aristas, *A*, más 2.

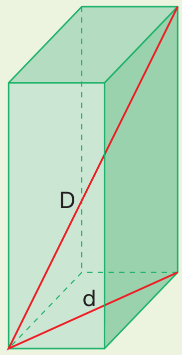
$$C + V = A + 2$$

FÍJATE

Debemos distinguir las diagonales del poliedro de las diagonales de las caras.

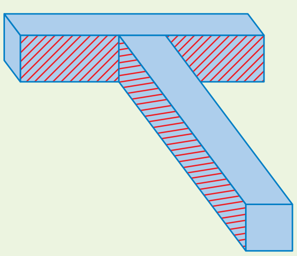
Diagonales del poliedro *(D):* cada uno de los segmentos que unen dos vértices situados en caras diferentes.

Diagonales de una cara *(d):* cada uno de los segmentos que unen dos vértices no adyacentes situados en la misma cara.



FÍJATE

El poliedro de la figura es cóncavo, pues las caras rayadas no pueden apoyarse sobre un plano.



Actividades

1 Contesta las siguientes preguntas. Justifica tus respuestas.

a) Un poliedro convexo tiene 4 caras y 6 aristas. ¿Cuántos vértices tiene?

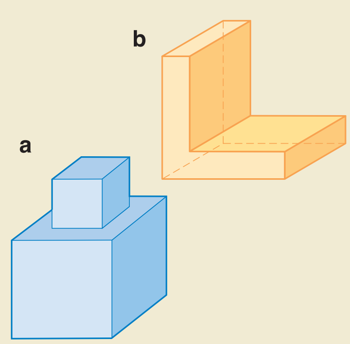
b) Un poliedro convexo tiene 6 vértices y 12 aristas. ¿Cuántas caras tiene?

c) Un poliedro tiene 9 vértices, 20 aristas y 12 caras. ¿Es convexo?

2 Observa estos poliedros. ¿Son convexos? Comprueba si cumplen la relación de Euler y, a continuación, indica si las siguientes afirmaciones son ciertas.

a) Todos los poliedros cumplen la relación de Euler.

b) Existen poliedros cóncavos que cumplen la relación de Euler.

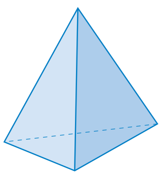
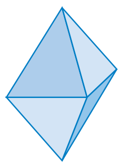
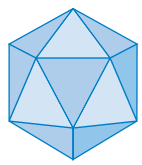
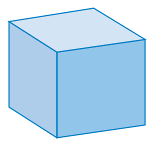
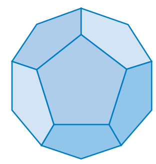


A continuación, centraremos nuestra atención en *poliedros regulares, prismas, pirámides* y *troncos de pirámide.*

Poliedros regulares

Un poliedro es **regular** cuando sus caras son polígonos regulares e iguales entre sí, y en cada vértice concurre el mismo número de aristas.

A diferencia del plano, donde existen infinitas formas poligonales regulares, en el espacio sólo se dan cinco poliedros regulares. Observa:

Tetraedro	Octaedro	Icosaedro	Hexaedro o cubo	Dodecaedro
				
4 triángulos equiláteros	8 triángulos equiláteros	20 triángulos equiláteros	6 cuadrados	12 pentágonos regulares

CONTRAEJEMPLO

Este balón de fútbol, a pesar de estar formado por pentágonos y hexágonos regulares, no es un poliedro regular.

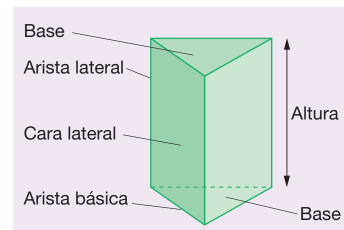
Prismas

Los **prismas** son poliedros en los cuales dos caras son polígonos iguales y paralelos entre sí, y las demás caras son paralelogramos. En la figura 1 puedes observar sus elementos.

La distancia entre los planos que contienen las bases es su **altura.**

Los prismas se nombran según los polígonos que forman sus bases: triangulares, cuadrangulares...

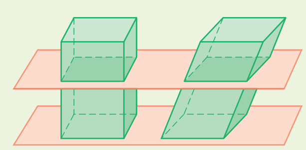
Además, los prismas se clasifican en rectos y oblicuos.

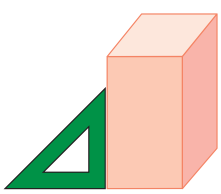


■ *Fig. 1*

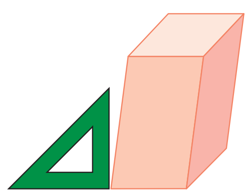
FÍJATE

Si seccionamos un prisma, recto u oblicuo, por un plano paralelo a sus bases, la sección del prisma que obtenemos es un polígono igual que sus bases.





Un prisma es **recto** si las aristas laterales son perpendiculares a las aristas básicas.



Un prisma es **oblicuo** si las aristas laterales no son perpendiculares a las aristas básicas.

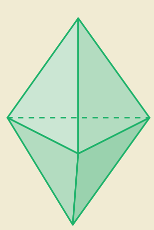
Un prisma es **regular** si es recto y sus bases son polígonos regulares.

Actividades

3 ¿Son convexos los poliedros regulares? ¿Cumplen la relación de Euler?

4 ¿Es regular este poliedro? Justifica tu respuesta.

Observa que está limitado por triángulos equiláteros e iguales entre sí.



5 Explica qué son la diagonal de un poliedro y la diagonal de una de sus caras.

a) Dibuja un cubo e indica la diagonal de una de sus caras y la diagonal del cubo.

b) ¿Cuántas diagonales tiene un prisma cuadrangular? ¿Y cuántas diagonales tiene cada una de sus caras?

6 ¿Son convexos los prismas? ¿Cumplen la relación de Euler?

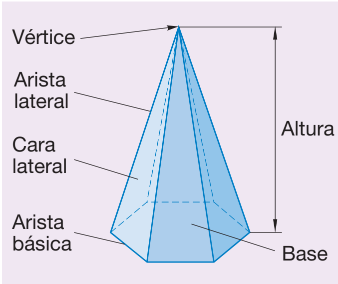


Fig. 2

Pirámides

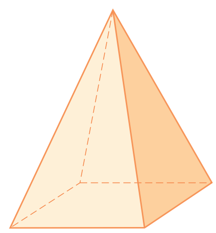
Las **pirámides** son poliedros en los cuales una cara es un polígono cualquiera y las otras son triángulos que tienen un vértice común.

En la figura 2 puedes observar sus elementos.

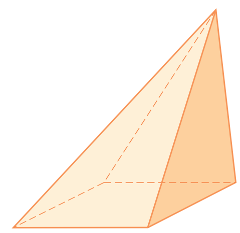
La distancia entre el vértice y el plano que contiene su base es su **altura.**

Como en el caso de los prismas, las pirámides se nombran según el polígono que forma su base: triangulares, cuadrangulares...

Las pirámides también se clasifican en rectas y oblicuas.



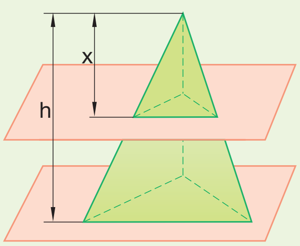
Una pirámide es **recta** si todas sus caras laterales son triángulos isósceles.



Una pirámide es **oblicua** si no todas sus caras laterales son triángulos isósceles.

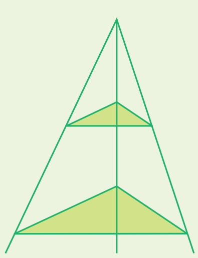
Una pirámide es **regular** si es recta y su base es un polígono regular. La apotema de una pirámide regular es la altura de cualquiera de sus caras laterales.

FÍJATE



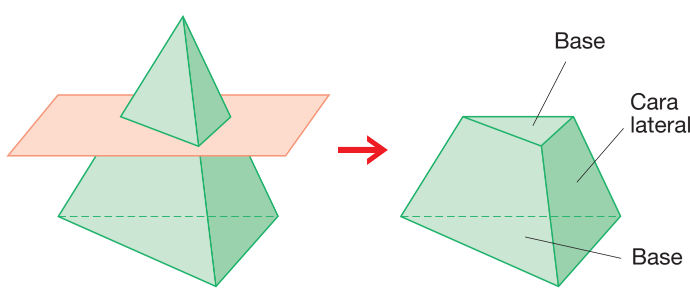
La sección de una pirámide recta u oblicua por un plano paralelo a la base es un polígono semejante a la base de razón de semejanza $k = \frac{x}{h}$.

Este resultado se obtiene aplicando el teorema de Tales a los triángulos señalados en la figura siguiente:



Troncos de pirámide

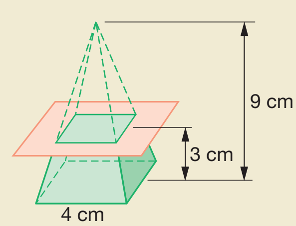
Observa en la siguiente figura como, al seccionar una pirámide por un plano paralelo a su base, obtenemos otro cuerpo geométrico llamado **tronco de pirámide.**



Actividades

7 ¿Cuándo es cóncava una pirámide? ¿Puede ser cóncava una pirámide regular? ¿Cumplen la relación de Euler las pirámides regulares?

8 Halla las medidas de las aristas de las bases de un tronco de pirámide, si sabemos que el tronco se ha obtenido al seccionar la pirámide de la derecha por el plano que indicamos.

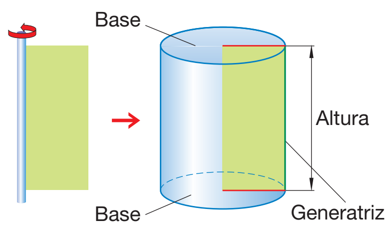


1.2. Cuerpos de revolución

Los **cuerpos de revolución** son los cuerpos geométricos que se obtienen al girar una figura plana 360° alrededor de un eje.

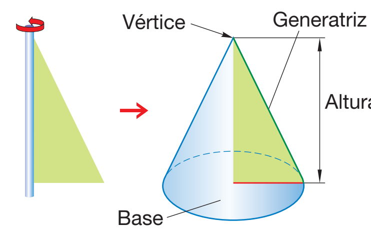
Cilindro, cono y esfera

Los tres cuerpos de revolución más sencillos son el *cilindro,* el *cono* y la *esfera*.



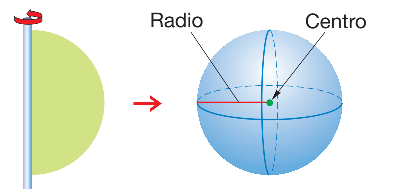
Un **cilindro** se obtiene al girar 360° un rectángulo sobre uno de sus lados.

La superficie que lo delimita se llama **superficie cilíndrica.**



Un **cono** se obtiene al girar 360° un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos.

La superficie que lo delimita se llama **superficie cónica.**



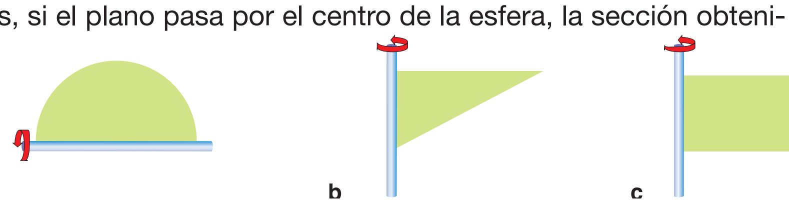
Una **esfera** se obtiene al girar 360° un semicírculo sobre su diámetro.

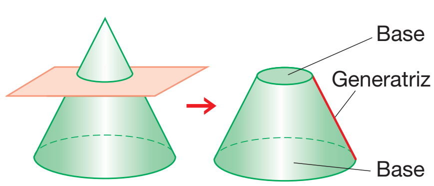
La superficie que lo delimita se llama **superficie esférica.**

Secciones de los cuerpos de revolución

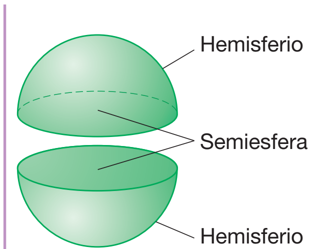
La sección de un cilindro o de un cono por un plano paralelo a la base es un círculo. La sección de una esfera por un plano siempre es un círculo. Además, si el plano pasa por el centro de la esfera, la sección obtenida se llama círculo máximo y la circunferencia que lo delimita, circunferencia máxima.

Observa los cuerpos de revolución que se obtienen al seccionar el cono y la esfera.

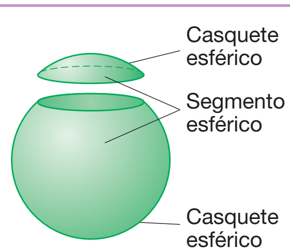




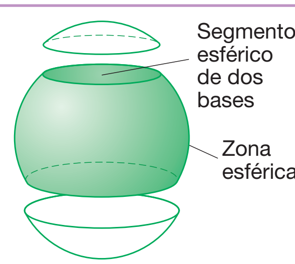
Al seccionar un cono por un plano paralelo a su base, se obtiene otro cuerpo geométrico que se llama **tronco de cono.**



Al seccionar una esfera por un plano que pasa por su centro, se obtienen dos **semiesferas.** La parte de la superficie esférica que delimita una semiesfera se llama **hemisferio.**



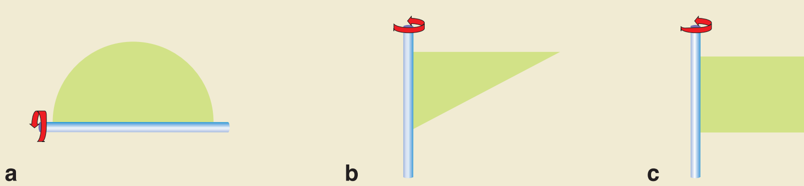
Al seccionar una esfera por un plano que no pasa por su centro, se obtienen dos **segmentos esféricos.** La parte de la superficie esférica que delimita un segmento esférico se llama **casquete esférico.**



Al seccionar una esfera por dos planos paralelos, se obtiene un **segmento esférico de dos bases.** La parte de la superficie esférica que lo delimita se llama **zona esférica.**

Actividades

9 Dibuja el cuerpo de revolución que se obtiene al girar 360° cada una de estas figuras planas alrededor del eje indicado. Trabaja en tu cuaderno.



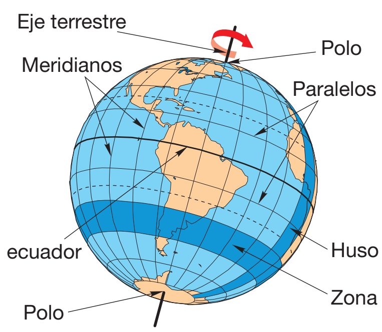
Esfera terrestre

En geometría, una esfera es un cuerpo limitado por una superficie curva cerrada, cuyos puntos equidistan de otro interior llamado centro de la esfera. En la vida cotidiana hay muchos objetos y elementos que nos recuerdan a una esfera. La Tierra es un claro ejemplo. La esfera que representa la Tierra se llama **esfera terrestre.**

Fíjate en sus elementos:

MATERIAL CONCRETO

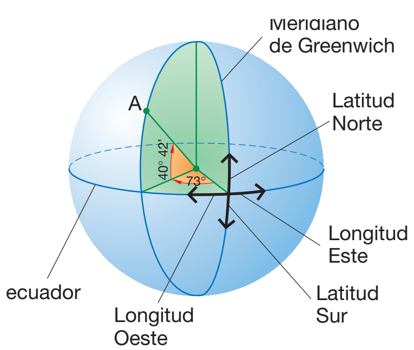
Globo terraqueo



- **Eje terrestre:** línea imaginaria alrededor de la cual gira la Tierra en su movimiento de rotación. Su intersección con la superficie esférica son dos puntos llamados **polos.**
- **ecuador:** circunferencia máxima contenida en un plano perpendicular al eje terrestre.
- **Paralelos:** circunferencias obtenidas al seccionar la esfera por planos paralelos al plano del ecuador.
- **Meridianos:** semicircunferencias máximas con extremos en los polos.
- **Zona:** parte de la superficie terrestre comprendida entre dos paralelos.
- **Huso:** parte de la superficie terrestre comprendida entre dos meridianos.

Por cualquier punto de la superficie terrestre pasan un meridiano y un paralelo. Esto nos permite determinar la posición de un punto sobre la esfera terrestre asociándole un par de números: su *longitud* y su *latitud*.

Para determinarlos, se toma como meridiano origen el que pasa por la ciudad inglesa de Greenwich, denominado meridiano de Greenwich, y como paralelo origen, el ecuador.



La **longitud** de un punto *A* es la medida del ángulo que forma el plano del meridiano que pasa por ese punto con el plano que contiene el meridiano de Greenwich.

- La longitud se mide de 0° a 180° en dirección Este y Oeste desde el meridiano de Greenwich.

La **latitud** de un punto *A* es la medida del ángulo correspondiente al arco de meridiano que pasa por *A*, comprendido entre el ecuador y dicho punto.

- La latitud se mide de 0° a 90° en dirección Norte y Sur desde el ecuador.

Para indicar las coordenadas geográficas de un punto cualquiera de la superficie terrestre, escribimos primero su longitud y, a continuación, su latitud. Así, las coordenadas geográficas del punto *A* son (73° O, 40° 42′ N).

FÍJATE

Existen tres tipos de hora:

— La hora solar (o local), determinada por la incidencia del Sol en cada meridiano y que varía en cada punto según su longitud.

— La hora local media, determinada por el meridiano medio del huso horario correspondiente.

— La hora oficial, que es la que fija el gobierno de un país para su uso, y que puede diferir en un número entero con la hora local media.

Debido al movimiento de rotación de la Tierra, la hora del día varía de un lugar a otro y viene determinada por el meridiano.

Puesto que la Tierra tarda 24 horas en dar una vuelta sobre sí misma, se ha dividido la superficie terrestre en 24 husos, llamados **husos horarios,** cada uno de los cuales abarca 15° de longitud. De esta forma, todos los lugares situados en un mismo huso horario adoptan la misma hora.

Cuando pasamos de un huso horario a otro, debemos avanzar el reloj 1 h si viajamos hacia el Este o retrasarlo 1 h si viajamos hacia el Oeste.

Actividades

10 Busca un planisferio en un atlas e indica las coordenadas geográficas de las siguientes ciudades: París, Tokio, Río de Janeiro, Quito, Guayaquil.

11 ¿Cuál es la diferencia de hora solar entre las ciudades del Tena y Puerto Baquerizo?

1.3. Teorema de Pitágoras en el espacio

A partir del teorema de Pitágoras, podemos obtener distintas relaciones métricas entre diferentes elementos de un cuerpo geométrico que nos permitirán calcular áreas y volúmenes de cuerpos geométricos. Fíjate en los siguientes ejemplos.

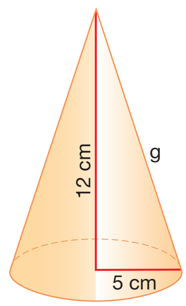
ejemplo 1

Calcula el valor de la generatriz del cono de la figura.

La generatriz del cono es la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son la altura del cono y el radio de la base.

— Calculamos el valor de la generatriz aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo anterior.

$$g = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$



Así, la generatriz del cono mide 13 cm.

ejemplo 2

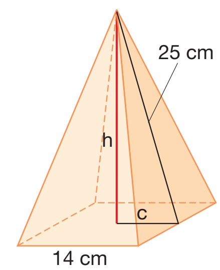
Calcula el valor de la altura de la pirámide regular de la figura.

La altura de la pirámide es uno de los catetos del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la apotema de la pirámide y cuyo otro cateto es la apotema de la base.

— Calculamos el cateto y la altura.

$$c = \frac{14}{2} = 7$$

$$h = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$$



La altura de la pirámide mide 24 cm.

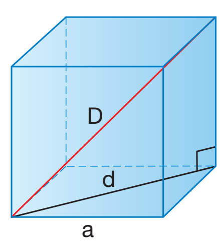
MATERIAL CONCRETO

ejemplo 3

Calcula la diagonal de un cubo de 3 cm de arista.

— Dibujamos un cubo en el que representamos el enunciado del problema.

Observamos que la diagonal del cubo es la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son la arista del cubo y la diagonal de su base.



Construye este cubo y comprueba tu resultado.

— Aplicamos el teorema de Pitágoras y calculamos la diagonal de la base del cubo.

$$d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}\,a$$

— Aplicamos de nuevo el teorema de Pitágoras y calculamos la diagonal D del cubo.

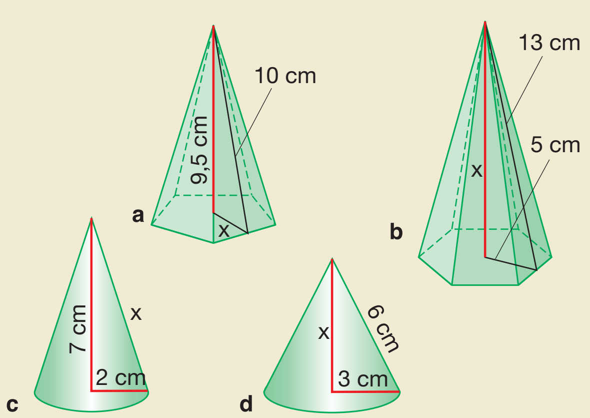
$$D = \sqrt{d^2 + a^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}\,a$$

$$D = \sqrt{3} \cdot 3 = 5,2$$

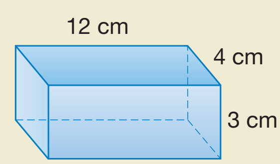
Así, la diagonal del cubo mide 5,2 cm.

Actividades

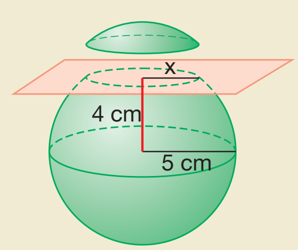
12 Calcula el valor de x en cada uno de estos cuerpos geométricos.



13 Calcula el valor de la diagonal del prisma de la figura.



14 ¿Cuánto mide el radio de la base del segmento esférico obtenido al seccionar una esfera de radio 5 cm por un plano que dista 4 cm del centro de la esfera?



2 Áreas

Conoces a varios cuerpos geométricos, por ejemplo el cubo, los prismas, ahora estudiaremos las pirámides y los conos.

Existen las **pirámides** y las **pirámides truncadas**, también los **conos** y **conos truncados**; en el caso de los cuerpos truncos debemos observar que estos tienen dos bases (inferior y superior) mientras que las pirámides y conos normales tienen una base inferior y por cúspide a un vértice.

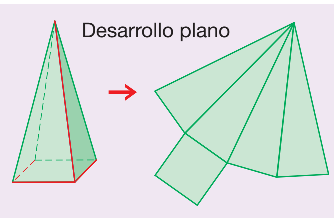


Fig. 3

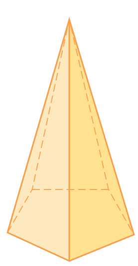
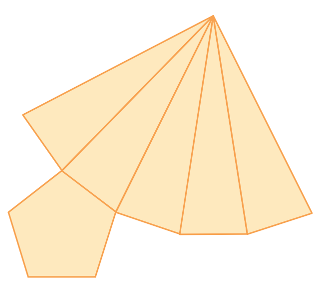
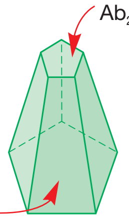
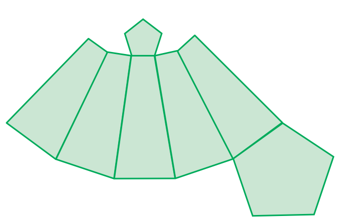
En los cuerpos truncos trataremos a los que tienen sus bases paralelas.
Una **pirámide** es regular si su base es un polígono regular.

Las pirámides tienen varias caras laterales, que son triángulos en los cuerpos normales y trapecios en los truncadas.

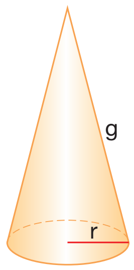
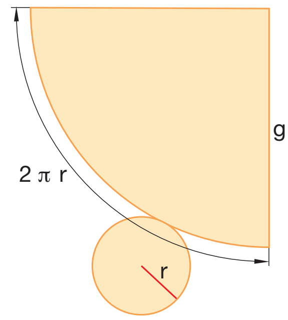
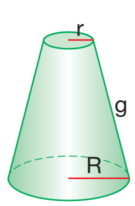
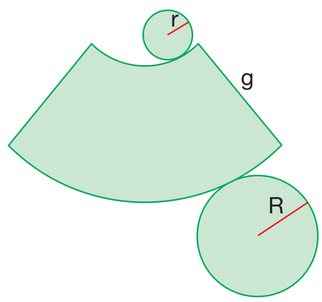
Como ya sabes, el **área** de un cuerpo geométrico es la medida de la superficie que lo delimita.

En los cuerpos geométricos hablamos del **área lateral**, la cual se obtiene al sumar todas las áreas de las caras laterales y del **área total** cuando se suma al valor del área lateral el área de la base o las bases.

2.1. Áreas de la pirámide y pirámide truncada

Figura	Patrón plano	Área lateral y área total
 **Pirámide**		• **Área lateral:** la superficie lateral está formada por triángulos. $A_{lateral}$ = Área de sus caras laterales • **Área total:** se obtiene sumando el área lateral y el área de la base. $A_{total} = A_{lateral} + A_{base}$
 **Pirámide Truncada**	1 	• **Área lateral:** la superficie lateral está formada por trapecios. $A_{lateral}$ = Área de sus caras laterales • **Área total:** se obtiene sumando el área lateral y el área de las dos bases. $A_{total} = A_{lateral} + A_{b_1} + A_{b_2}$

2.2. Área del cono y del cono truncado

Figura	Patrón plano	Área lateral y área total
 **Cono**		• **Área lateral:** la superficie lateral es un sector circular de radio la generatriz del cono y de longitud de arco la longitud de la circunferencia de la base. $A_{\text{lateral}} = \cancel{2}\,\pi r \dfrac{g}{\cancel{2}} = \pi r \cdot g$ • **Área total:** se obtiene sumando el área lateral y el área de la base. $A_{\text{total}} = \pi r \cdot g + \pi r^2 = \pi r \cdot (g + r)$
 **Cono Truncado**		• **Área lateral:** la superficie lateral es un trapecio circular. $A_{\text{lateral}} = \dfrac{(2\pi R + 2\pi r)\cdot g}{2} = \pi g \cdot (R + r)$ • **Área total:** se obtiene sumando el área lateral y el área de las dos bases. $A_{\text{total}} = \pi g \cdot (R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$

ejemplo **4**

Calcula el área total de un cono truncado que tiene una base inferior de radio 5 cm, base superior de radio 2 cm y su generatriz de 12 cm.

Organicemos los datos: $R = 5$ cm; $r = 2$ cm; $g = 12$ cm

Reconozcamos las fórmulas respectivas:

$A_{\text{lateral}} = \pi g \cdot (R + r)$

$A_{\text{total}} = \pi g \cdot (R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$

Calculemos el área lateral:

$A_{\text{lateral}} = \pi \cdot g \cdot (R + r) = \pi \cdot 12 \cdot (5+2) \approx 263{,}89$

Calculemos el área total:

$A_{\text{total}} = \pi g \cdot (R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$

$A_{\text{total}} = \pi \cdot 12 \cdot (5+2) + \pi \cdot 5^2 + \pi \cdot 2^2$

$A_{\text{total}} = 113 \cdot \pi \approx 400$

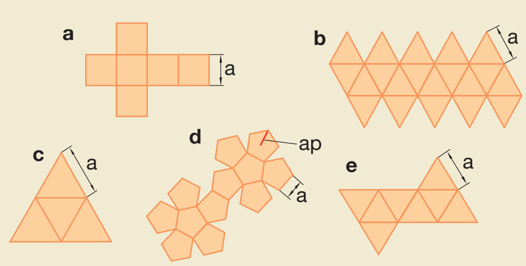
$A_{\text{total}} \approx 400\ \text{cm}^2$

Actividades

15 Relaciona cada poliedro regular con su patrón plano y con la fórmula que permite calcular su área.

dodecaedro octaedro cubo

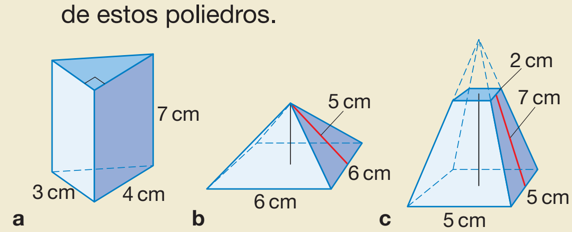
icosaedro tetraedro



$A = 5\sqrt{3}\,a^2$ $A = 30\,a \cdot ap$ $A = 2\sqrt{3}\,a^2$

$A = 6a^2$ $A = \sqrt{3}\,a^2$

16 a) Calcula el área lateral y el área total de cada uno de estos poliedros.

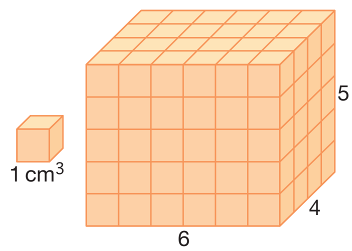


b) Calcula las áreas laterales y las áreas totales de estos cuerpos de revolución.

3 Volúmenes

El **volumen** de un cuerpo geométrico expresa el número de veces que el cuerpo contiene una unidad de volumen.

Así, para calcular el volumen de este ortoedro, contaremos la cantidad de unidades de volumen de 1 cm^3 que contiene. Observa:



$$V_{\text{ortoedro}} = 6 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \text{ cm}^3$$

Fíjate en que el número de unidades de volumen que contiene coincide con el producto del área de su base por su altura. Por lo tanto:

$$V_{\text{ortoedro}} = A_{\text{base}} \cdot \text{altura}$$

No siempre podemos deducir la fórmula del volumen de un cuerpo geométrico cubicándolo. El siguiente principio nos servirá para obtener los volúmenes del resto de los cuerpos geométricos estudiados: *prisma, cilindro, pirámide, cono* y *esfera.*

FÍJATE

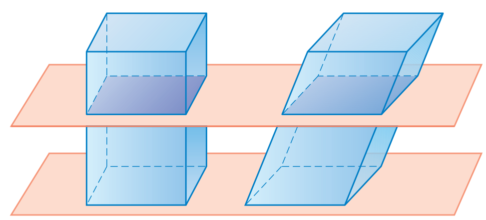
A la izquierda tenemos un montón de monedas perfectamente alineadas; a la derecha las mismas monedas no alineadas. Evidentemente, ambos montones ocupan el mismo volumen.

La formalización de este principio es, precisamente, el principio de Cavalieri.

3.1. Principio de Cavalieri

Observa los dos cuerpos geométricos de la figura.

- Tienen la misma altura.
- Las secciones por planos paralelos a las bases tienen la misma área.



Estas condiciones permitieron asegurar a Bonaventura Cavalieri, matemático del siglo XVII y discípulo de Galileo Galilei, que estos dos cuerpos geométricos tienen el mismo volumen.

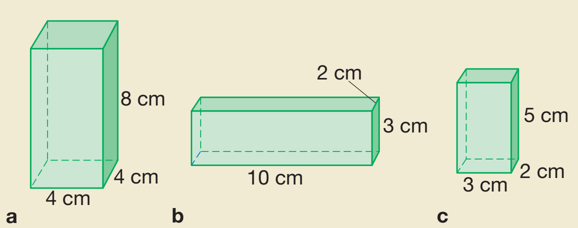
Principio de Cavalieri

Si dos cuerpos geométricos de la misma altura cumplen que las secciones por planos paralelos a sus bases tienen la misma área, entonces estos cuerpos tienen el mismo volumen.

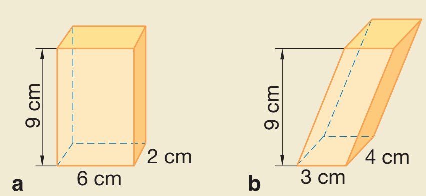
Actividades

17 Escribe la fórmula para calcular el volumen de un cubo de arista *a*.

18 Calcula los volúmenes de los siguientes ortoedros:

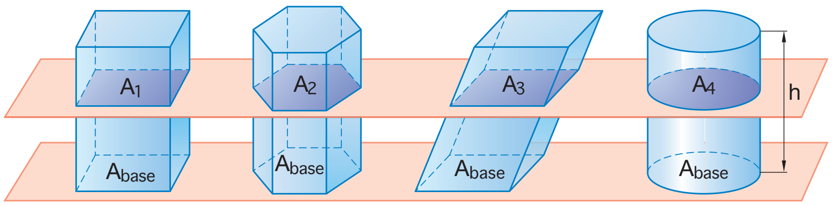


19 Observa estos cuerpos geométricos. Aplica el principio de Cavalieri y razona si tienen el mismo volumen.



3.2. Volúmenes de prismas y cilindros

La imagen muestra un ortoedro, un prisma recto, un prisma oblicuo y un cilindro que tienen la misma área de la base, A_{base}, y la misma altura, h.



Observa que en estas figuras las secciones siempre son iguales al área de la base. Por tanto, podemos afirmar que las secciones por un plano paralelo a sus bases tienen la misma área:

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4$$

Así, por el principio de Cavalieri, los cuatro cuerpos tienen el mismo volumen, que podemos calcular a partir del volumen del ortoedro.

$$V_{\text{prisma recto}} = V_{\text{prisma oblicuo}} = V_{\text{cilindro}} = V_{\text{ortoedro}}$$

El volumen del ortoedro es el área de su base por su altura.

$$V_{\text{ortoedro}} = A_{\text{base}} \cdot h$$

Por tanto, podemos concluir que:

El **volumen** de un **prisma** o de un **cilindro** es igual al área de su base por su altura.

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h$$

$$V_{\text{cilindro}} = A_{\text{base}} \cdot h = \pi r^2 \cdot h$$

ejemplo 5

Halla los volúmenes de los siguientes cuerpos geométricos.

a) Un prisma recto de altura 150 cm y base un cuadrado de lado 20 cm. ¿Obtendrías el mismo resultado si el prisma fuera oblicuo?

b) Un cilindro de radio 8 cm y altura 34 cm.

a) Calculamos el área de la base y aplicamos la fórmula del volumen del prisma.

$$A_{\text{base}} = a^2 = 20^2 = 400 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h = 400 \cdot 150 = 60\,000 \text{ cm}^3$$

Si el prisma fuera oblicuo, se obtendría el mismo resultado en virtud del principio de Cavalieri.

b) Calculamos el área de la base y aplicamos la fórmula del volumen del cilindro.

$$A_{\text{base}} = \pi r^2 = \pi \cdot 8^2 = 201{,}1 \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{cilindro}} = A_{\text{base}} \cdot h = 201{,}1 \cdot 34 = 6\,837{,}4 \text{ cm}^3$$

Actividades

20 Calcula el volumen de cada cuerpo geométrico de la figura 4.

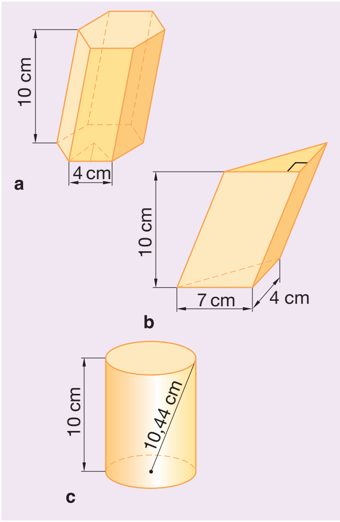


Fig. 4

3.3. Volúmenes de pirámides y conos

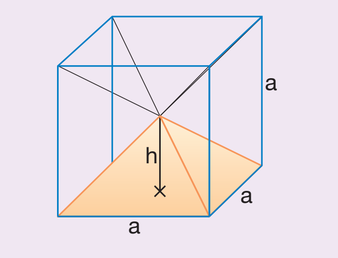


Fig. 5

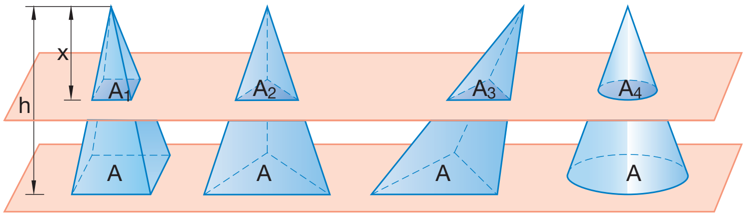
Para obtener las fórmulas de los volúmenes de las pirámides y de los conos, deducimos en primer lugar la del volumen de una pirámide recta de base cuadrada a partir de la fórmula del volumen de un cubo.

En la figura 5 puedes observar que el cubo de arista *a* se descompone en seis pirámides rectas iguales cuyas bases son cada una de las caras del cubo y cuya altura es $h = \frac{a}{2}$. Por tanto:

$$V_{\substack{\text{pirámide recta}\\ \text{de base cuadrada}}} = \frac{1}{6} V_{\text{cubo}} = \frac{1}{6} A_{\text{base}} \cdot 2\,h = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h$$

A partir de este resultado, vamos a obtener el volumen de las pirámides y el de los conos en general.

En la siguiente figura se muestran una pirámide recta de base cuadrada, una pirámide triangular recta, una pirámide triangular oblicua y un cono que tienen la misma área de la base, A_{base}, y la misma altura, h.



@

La pirámide de Keops es la mayor de las tres pirámides de Gizeh, en Egipto, la única de las siete maravillas del mundo antiguo que aún sigue en pie. Busca sus dimensiones y calcula su volumen. Para ello puedes conectarte a la página http://www.egiptologia.com/sociedad/piramides/jufu/jufu.htm.

Puesto que cada sección es semejante a la base correspondiente con razón de semejanza $k = \frac{x}{h}$, se cumple que:

$$\frac{A_1}{A_{\text{base}}} = \frac{A_2}{A_{\text{base}}} = \frac{A_3}{A_{\text{base}}} = \frac{A_4}{A_{\text{base}}} = \left(\frac{x}{h}\right)^2 \Rightarrow A_1 = A_2 = A_3 = A_4$$

FÍJATE

La razón entre las áreas de dos polígonos semejantes es igual al **cuadrado** de la **razón de semejanza.**

Por consiguiente, las secciones por un plano paralelo a sus bases tienen la misma área.

Así, por el principio de Cavalieri, los cuatro cuerpos tienen el mismo volumen, que podemos calcular a partir del volumen de la pirámide recta de base cuadrada.

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h$$

Por tanto, podemos concluir que:

El **volumen** de una **pirámide** o de un **cono** es igual a un tercio del área de su base por su altura.

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h \qquad V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot \text{h}$$

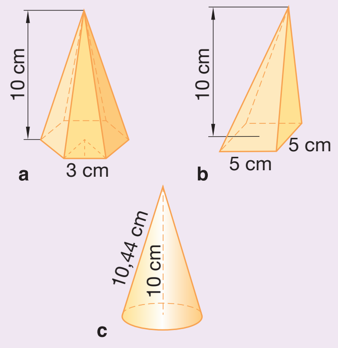


Fig. 6

Actividades

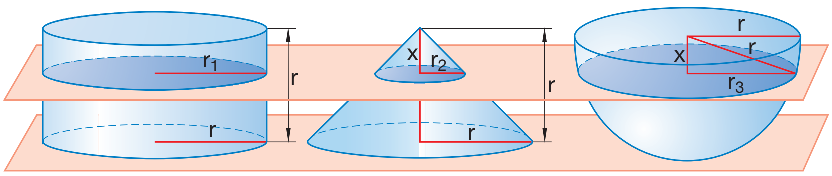
21 Calcula el volumen de cada uno de los cuerpos geométricos de la figura 6.

3.4. Volumen de la esfera

En el siglo III a. C., Arquímedes determinó el volumen de una esfera relacionándolo con el volumen de un cilindro y el de un cono. Veamos el procedimiento que utilizó.

Consideramos un cilindro y un cono cuyos radios sean r y cuyas alturas sean iguales a los radios, y una semiesfera de radio r.

Observa la relación entre el radio de sus bases y el radio de las secciones por un plano paralelo a dichas bases.



$$r_1 = r \qquad \frac{r_2}{r} = \frac{x}{r} \Rightarrow r_2 = x \qquad r_3^{\,2} = r^2 - x^2$$

Así, las áreas de las secciones por planos paralelos a sus bases son:

$$A_1 = \pi\, r^2 \qquad A_2 = \pi\, x^2 \qquad A_3 = \pi\,(r^2 - x^2)$$

Es decir: $A_3 = \pi\,(r^2 - x^2) = \pi\, r^2 - \pi\, x^2 = A_1 - A_2$

Las secciones de la semiesfera por un plano paralelo a la base son iguales a las del cilindro menos las del cono. Así, si aplicamos el principio de Cavalieri a la semiesfera y al cuerpo que resulta de extraer el cono del cilindro (figura 7), tenemos que:

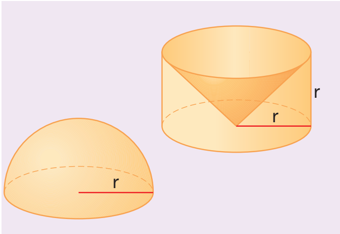


Fig. 7

$$V_{\text{semiesfera}} = V_{\text{cilindro – cono}}$$

Por tanto, el volumen de la esfera es:

$$V_{\text{esfera}} = 2\, V_{\text{semiesfera}} = 2\,(V_{\text{cilindro – cono}}) = 2\,(V_{\text{cilindro}} - V_{\text{cono}}) =$$

$$= 2\left(\pi r^2 r - \frac{1}{3}\pi r^2 r\right) = 2\left(\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3\right) = 2 \cdot \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

El **volumen** de una **esfera** es igual a cuatro tercios del número π por su radio al cubo.

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\boldsymbol{\pi} r^3$$

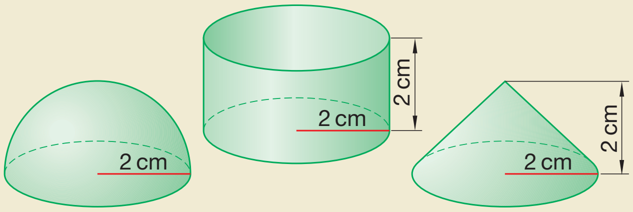
@

¿Sabes de cuál de sus descubrimientos Arquímedes se mostraba más orgulloso? Infórmate en la página http://www.arrakis.es/~mcj/arquimed.htm

Actividades

22 Calcula los volúmenes de la semiesfera, del cilindro y del cono representados en la figura.

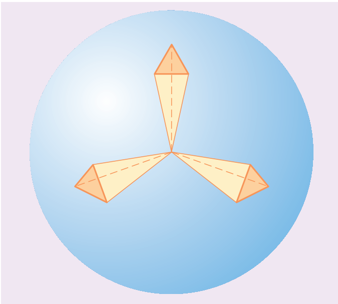
— ¿Cómo se relaciona el volumen de la semiesfera con el de los otros dos cuerpos geométricos? Justifica tu respuesta.



Área de la esfera

La obtención del área de la esfera no es tan sencilla como la de otros cuerpos geométricos. Esto es debido a que no tiene desarrollo plano, a diferencia del cilindro y el cono.

Veamos cómo obtener el área de la esfera a partir de su volumen.



Recubrimos la superficie esférica con triángulos iguales y consideramos las pirámides con vértices en el centro de la esfera cuyas bases son estos triángulos y cuya altura es el radio de la esfera. Así, obtenemos que el volumen de la esfera puede aproximarse sumando los volúmenes de dichas pirámides.

$$V_{\text{esfera}} = V_1 + V_2 + \ldots = \frac{1}{3} A_{b_1} \cdot r + \frac{1}{3} A_{b_2} \cdot r + \ldots =$$

$$= \frac{1}{3}\left(A_{b_1} + A_{b_2} + \ldots\right) \cdot r = \frac{1}{3} A_{\text{esfera}} \cdot r$$

Por otro lado, hemos visto que $V_{\text{esfera}} = \dfrac{4}{3} \pi r^3$.

Por lo tanto, igualando las dos fórmulas obtenemos:

$$\frac{1}{3} A_{\text{esfera}} \cdot r = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Despejando el área de la esfera, tenemos que $A_{\text{esfera}} = 4 \pi r^2$

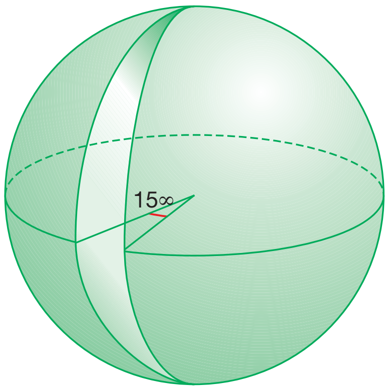
El **área** de la **esfera** es igual a cuatro veces el número π por su radio al cuadrado.

$$A_{\text{esfera}} = 4 \pi r^2$$

ejemplo 6

Calcula el área de una esfera de 5 cm de radio.

— ¿Cuál será el área de un huso esférico que abarca 15° sobre la superficie de la esfera?



Aplicamos la fórmula con la que obtenemos el área de la esfera.

$$A_{\text{esfera}} = 4 \pi r^2 = 4 \pi 5^2 = 314{,}16$$

El área de la esfera es 314,16 cm^2.

— Veamos qué fracción de la superficie esférica representa el huso esférico de 15°.

Puesto que la superficie esférica tiene 360°:

$$360 \div 15 = 24$$

Así, la superficie esférica puede dividirse en 24 husos como el de la figura. Por lo tanto:

$$A_{\text{huso esférico}} = A_{\text{esfera}} \div 24 = 314{,}16 \div 24 = 13{,}09$$

El área del huso esférico es 13,09 cm^2.

Actividades

23 Calcula el área de una esfera de 7 cm de radio y el área de un huso esférico que abarca 36° sobre su superficie esférica.

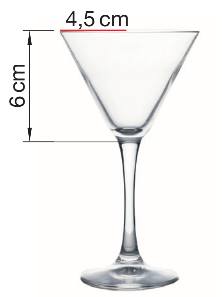
24 El volumen de una esfera es 288 π cm^3. ¿Cuál es su área?

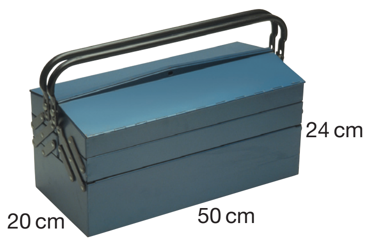
3.5. Cálculo aproximado de volúmenes

No siempre podemos calcular de una forma exacta el volumen de un cuerpo geométrico, pues quizá **no** tenga una **forma regular** que nos permita aplicar las ecuaciones estudiadas anteriormente. En cambio, en muchos casos sí podemos realizar una aproximación.

ejemplo 7

Obtén el volumen aproximado de cada uno de estos objetos. Expresa el resultado en cm³.





— El cuerpo geométrico que más se parece a la copa es el cono. Así, aplicando la fórmula del volumen de un cono:

$$V_{copa} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 4{,}5^2 \cdot 6 \approx 127$$

El volumen aproximado de la copa es 127 cm³.

— El cuerpo geométrico que más se parece a la caja de herramientas es un prisma de base rectangular. Así, aplicando la fórmula del volumen de un ortoedro:

$$V_{\text{caja de herramientas}} = A_{base} \cdot h = 50 \cdot 20 \cdot 24 = 24\,000$$

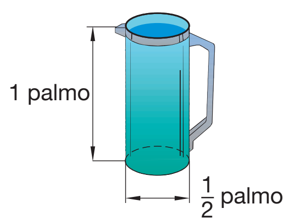
El volumen aproximado de la caja de herramientas es 24 000 cm³.

Otras veces deseamos obtener el volumen de un cuerpo con forma regular pero **no** tenemos **instrumentos de medida** para hacerlo. En estos casos también podemos hallar su volumen de forma aproximada.

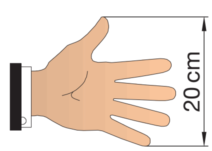
ejemplo 8

Halla una aproximación de la capacidad de la jarra sin utilizar ningún instrumento de medida.

Expresa el resultado en litros.



Un palmo equivale, aproximadamente, a 20 cm.



El cuerpo geométrico que más se parece a la jarra es el cilindro.

Por otro lado, podemos considerar que el radio del cilindro mide 5 cm y su altura, 20 cm.

Aplicamos la fórmula del volumen de un cilindro:

$$V_{jarra} = \pi \cdot r^2 h = \pi \cdot 5^2 \cdot 20 \simeq 1\,571$$

Por otro lado se cumple que:

$$1571 \text{ cm}^3 = 1{,}571 \text{ dm}^3 = 1{,}571 \text{ l}$$

Así, el volumen aproximado de la jarra es 1,571 l.

Actividades

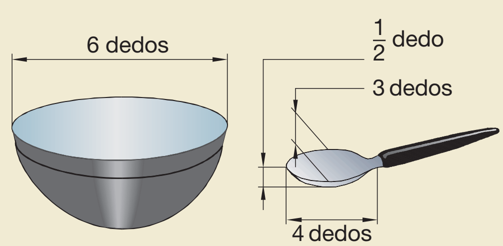
25 Averigua las capacidades aproximadas del tazón y de la cuchara. Expresa dicha aproximación en litros.

Como ayuda ten en cuenta lo siguiente:

— Media esfera es una buena aproximación a la forma del tazón.

— El cuerpo geométrico que más se parece a la cuchara es un ortoedro.

— Un dedo mide aproximadamente 1,5 cm.



26 Calcula aproximadamente la capacidad en litros de cada uno de estos objetos.

a) Un envase *tetra brik* de un jugo de frutas.

b) Una botella pequeña de refresco.

4 Media aritmética

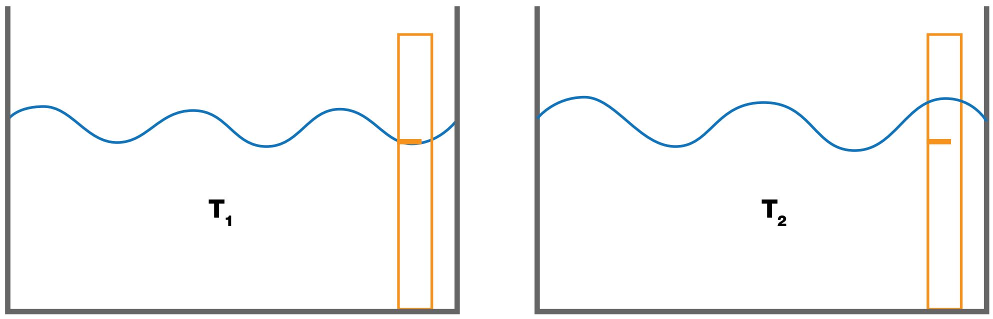
Para que el agua de una piscina se mantenga limpia, se deben colocar líquidos limpiadores en una cantidad que depende del volumen de agua que esta contenga.

El agua de una piscina se mueve continuamente por las corrientes de aire del lugar; por esta razón, la profundidad varía en cada punto de la piscina al transcurrir el tiempo. Si medimos la profundidad de esta piscina en un mismo lugar pero en distinto tiempo, la medida será distinta, pese a que el ancho y el largo de esta no varían cuando se mueve el agua.

Para que la variación en la altura no impida que podamos calcular el volumen del agua, podemos encontrar un valor representativo de la altura del agua en el tiempo, usando una herramienta matemática conocida como media aritmética.

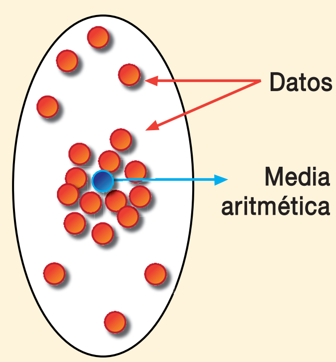
MUCHO OJO

Promedio es el punto en que algo se divide por la mitad o casi por la mitad.



A la media aritmética también se la conoce como **promedio** o **media**.

Cada dato representa la observación de un lugar y la media aritmética indica el centro alrededor de las observaciones.



El valor de la media aritmética puede ser un dato observado o no.

FÍJATE

Un dato es un antecedente necesario para llegar al conocimiento de algo.

Puede ser una cantidad, un valor, un documento, un hecho, etc.

Actividades

27 Escribe dos ejemplos en los que se pueda encontrar la media aritmética.

28 Comenta con tus compañeros y compañeras en qué problemas creen que se puede aplicar la media aritmética y por qué.

Si en un mismo lugar de la piscina medimos la atura del agua en varias ocasiones y deseamos calcular la altura promedio del agua, debemos realizar lo siguiente:

1. Enumeramos las medidas de la altura del agua.

Número de medida	Medida [m]	Número de medida	Medida [m]	Número de medida	Medida [m]
1	3,10	**4**	3,10	**7**	3,15
2	3,15	**5**	3,12	**8**	3,12
3	3,11	**6**	3,13	**9**	3,10

2. La media aritmética se calcula sumando todas las medidas que realizamos y dividiendo esta suma para el número de medidas tomadas:

$$Media = \frac{\textit{Suma de las medidas realizadas}}{\textit{Número de medidas hechas}}$$

$$Media = \frac{3,10 + 3,15 + 3,11 + 3,10 + 3,12 + 3,13 + 3,15 + 3,12 + 3,10}{9}$$

$$Media = \frac{28,08}{9} = 3,12$$

ejemplo 9

Calcula la distancia promedio que un grupo de estudiantes debe recorrer para llegar desde sus respectivos hogares hasta el colegio.

a) Enumeramos la distancia que cada uno recorre para llegar al colegio.

Número de medida	Medida [km]	Número de medida	Medida [km]	Número de medida	Medida [km]
1	5,0	**5**	2,5	**9**	1,5
2	3,5	**6**	5,0	**10**	4,0
3	1,2	**7**	6,1	**11**	6,4
4	4,1	**8**	7,9	**12**	8,0

b) Usamos la fórmula de la media aritmética, para calcular la distancia promedio que recorren los estudiantes:

$$Media = \frac{\textit{Suma de las medidas realizadas}}{\textit{Número de medidas hechas}}$$

$$Media = \frac{5,0 + 3,5 + 1,2 + 4,1 + 2,5 + 5,0 + 6,1 + 7,9 + 1,5 + 4,0 + 6,4 + 8,0}{12}$$

$$Media = \frac{55,2}{12} = 4,6$$

c) La distancia promedio que los estudiantes recorren para llegar al colegio es 4,6 km.

Actividades

29 Consulta cuánto falta para el cumpleaños de cada uno de tus compañeros y compañeras. Calcula el número de meses promedio que faltan para que los estudiantes de tu curso cumplan años.

30 Investiga los años de fundación de cinco ciudades del Ecuador; luego; encuentra el año promedio de esas fundaciones.

4.1. Resolución de problemas utilizando la media aritmética

Para analizar los datos que recogimos en un experimento o una observación, podemos agruparlos según sus clases o tipos, utilizando una tabla de frecuencias.

$$\text{Media} = \frac{\textbf{Suma} \text{ de las medidas realizadas}}{\text{Número de medidas hechas}}$$

$$\text{Media} = \frac{\textbf{Suma} \text{ de cada: (Clase de dato } \textbf{multiplicado} \text{ por su frecuencia)}}{\text{Suma de las frecuencias}}$$

ejemplo **10**

De una investigación sobre la cantidad de leche que producen las vacas de un rancho durante 50 horas, se obtuvieron los siguientes datos.

Realiza una tabla de frecuencias y calcula el promedio de litros de leche por hora.

0	1	3	6	3	3	6	5	2	3	2	3	5	6	4	1	5
5	3	4	1	2	1	4	0	4	1	5	1	4	5	2	4	2
3	1	5	4	2	6	3	5	2	3	0	1	2	3	1	2	

a) En la primera columna escribimos cada valor obtenido. En la siguiente, registramos la frecuencia:

Litros producidos por hora	Datos	Frecuencia
0	x x x	3
1	x x x x x x x x x	9
2	x x x x x x x x x	9
3	x x x x x x x x x x	10
4	x x x x x x x	7
5	x x x x x x x x	8
6	x x x x	4

b) Para calcular la media aritmética con los datos agrupados en una tabla de frecuencias, usamos la fórmula deducida anteriormente:

$$\text{Media} = \frac{0{\cdot}3 + 1{\cdot}9 + 2{\cdot}9 + 3{\cdot}10 + 4{\cdot}7 + 5{\cdot}8 + 6{\cdot}4}{3 + 9 + 9 + 10 + 7 + 8 + 4}$$

$$\text{Media} = \frac{149}{50} = 2{,}98$$

Actividades

31 Utilizando una tabla de frecuencias, encuentra la media aritmética de los siguientes datos:

15	23	12	11	17	9	22	8	15	22	8	23	11	17	23	17
12	15	15	11	22	15	15	12	21	9	8	12	27	15	9	15

32 Organicen un grupo que investigue y recolecte cincuenta datos de un tema que les interese; luego, calculen el promedio de los datos recolectados. Por ejemplo, puedes calcular el promedio de partidos de futbol que se juegan cada día en América.

En una investigación estadística, los datos que se obtienen pueden ser distintos entre sí. Para utilizar este tipo de datos, los debemos agrupar por intervalos.

ejemplo 11

En un curso vacacional se ha clasificado a los asistentes según sus edades. Para calcular el valor medio de cada intervalo, debemos tomar en cuenta los siguientes parámetros:

a) Cada intervalo debe tener dos números que indican el principio y el fin de éste.

b) La distancia de cada intervalo debe ser la misma.

c) Por lo general se construyen seis intervalos.

Intervalo	Valor medio	Distancia del intervalo	Frecuencia
[0,5 a 3,5)	$\frac{0,5 + 3,5}{2} = \mathbf{2}$	3,5 - 0,5 = **3**	7
[3,5 a 6,5)	$\frac{3,5 + 6,5}{2} = \mathbf{5}$	6,5 - 3,5 = **3**	20
[6,5 a 9,5)	$\frac{6,5 + 9,5}{2} = \mathbf{8}$	9,5 - 6,5 = **3**	15
[9,5 a 12,5)	$\frac{9,5 + 12,5}{2} = \mathbf{11}$	12,5 - 9,5 = **3**	12
[12,5 a 15,5)	$\frac{12,5 + 15,5}{2} = \mathbf{14}$	15,5 - 12,5 = **3**	8
[15,5 a 18,5]	$\frac{15,5 + 18,5}{2} = \mathbf{17}$	18,5 - 15,5 = **3**	23

Con los valores medios de cada intervalo, es posible calcular el promedio de los datos tomados.

ejemplo 12

Calcular el promedio de edades de los asistentes al curso vacacional.

a) Calculamos los valores medios de cada intervalo.

b) Usamos los valores medios y la frecuencia de cada intervalo en la fámula de la media aritmética.

$$\textit{Media} = \frac{\textit{\textbf{Suma} de cada: (valor medio \textbf{multiplicado} por la frecuencia del intervalo)}}{\textit{Suma de las frecuencias}}$$

$$\textit{Media} = \frac{2 \cdot 7 + 5 \cdot 20 + 8 \cdot 15 + 11 \cdot 12 + 14 \cdot 8 + 17 \cdot 23}{7 + 20 + 15 + 12 + 8 + 23}$$

$$\textit{Media} = \frac{869}{85} \approx 10,22$$

c) La edad promedio de los asistentes es 10,2 años.

Actividades

33 En la muestra de cosecha de una exportadora de mangos, se han calculado los siguientes pesos. Organiza los pesos en intervalos y encuentra el promedio.

12,3	12,5	13,1	13,9	14,5	14,4	12,7	15,2	16,7	15,9
13,8	13,5	14,2	14,8	14,9	12,6	13,8	17,5	17,9	16,4
17,8	17,2	15,3	16,8	17,3	15,5	16,7	17,9	15,3	12,8
15,6	14,2	16,5	15,8	16,4	16,9	16,5	15,2	17,0	17,5

Cómo resolver problemas

Una empresa comercializa dos tipos de latas de refresco.

- La lata *estándar* tiene forma cilíndrica, de radio 3,2 cm y altura 10,35 cm. El precio de un refresco estándar es de 45 cts.
- La lata *maxi* es semejante a la estándar, pero tiene un volumen de 500 cm^3. El precio de un refresco maxi es de 60 cts.

— ¿Qué tipo de lata sale más rentable al consumidor?

— La empresa desea envasar 1 000 l. ¿Con cuál de los dos tipos de lata necesitará menor cantidad de aluminio?

Comprensión del enunciado

Las latas estándar y maxi son semejantes. De la primera conocemos las dimensiones y de la segunda el volumen. Será más rentable para el consumidor aquella que tenga una relación precio/volumen menor y tendrá menor coste para la empresa aquella que tenga una relación superficie/volumen menor.

Planificación de la resolución

En primer lugar, calcularemos el volumen de la lata estándar. La relación entre los volúmenes de ambas latas nos permitirá obtener la razón de semejanza.

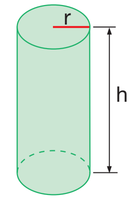
A continuación, calcularemos el área de la lata estándar. A partir de la razón de semejanza, hallaremos también el área de la lata maxi.

Finalmente, calcularemos las relaciones precio/volumen y superficie/volumen para ambas latas y deduciremos cuál es la más rentable para el consumidor y la que empleará menor cantidad de aluminio para contener los 1 000 litros.

Ejecución del plan de resolución

— Volumen de la lata estándar:

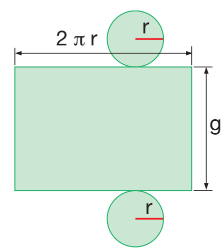
$$V_e = \pi\, r_e^2 \cdot h_e = \pi \cdot 3{,}20^2 \cdot 10{,}35 =$$
$$= 333 \text{ cm}^3$$



— Cociente entre volúmenes y razón de semejanza:

$$\frac{V_m}{V_e} = \frac{500}{333} = 1{,}5 \Rightarrow k = \sqrt[3]{1{,}5} = 1{,}145$$

— Áreas totales:



$$A_e = 2\,\pi\, r_e\,(g_e + r_e) = 2\,\pi \cdot 3{,}20\,(10{,}35 + 3{,}20) = 272{,}44 \text{ cm}^2$$
$$A_m = k^2\, A_e = 1{,}145^2 \cdot 272{,}44 = 357{,}18 \text{ cm}^2$$

— Relaciones precio/volumen y superficie/volumen:

$$\frac{p_e}{V_e} = \frac{45}{333} = 0{,}135\,\frac{\text{cts.}}{\text{cm}^3}\,;\quad \frac{p_m}{V_m} = \frac{60}{500} = 0{,}12\,\frac{\text{cts.}}{\text{cm}^3}$$

$$\frac{A_e}{V_e} = \frac{272{,}44}{333} = 0{,}82 \text{ cm}^{-1};\quad \frac{A_m}{V_m} = \frac{357{,}18}{500} = 0{,}71 \text{cm}^{-1}$$

La lata maxi sale más rentable al consumidor. Esta misma lata requerirá menos aluminio para envasar los 1 000 litros.

Revisión del resultado y del proceso seguido

Repasa los cálculos efectuados y comprueba que son correctos.

Actividades

34 Un escultor ha realizado una estatua en bronce que representa a un célebre investigador científico, de cuerpo entero, sosteniendo un tubo de ensayo.

— Si el investigador tiene una estatura de 1,72 m y la estatua una altura de 2,15 m, ¿cuál es el factor de escala?

— En la estatua, el científico aparece con un lente circular cuya área es 43 cm^2. ¿Qué radio tiene el lente real?

— El tubo de ensayo es un cilindro de radio 0,5 cm y altura 15 cm. ¿Qué cantidad de bronce ha sido necesaria para reproducirlo?

35 Un arquitecto ha construido una maqueta de una urbanización residencial a escala 1: 850.

— Si proyecta un hotel de una altura real de 84 m, ¿qué altura tendrá el correspondiente edificio en la maqueta?

— Si el área total de la maqueta es de 11 800 cm^2, ¿qué extensión total ocupará la urbanización?

— En la maqueta se puede ver una piscina con forma de prisma rectangular de dimensiones 2,9 × 0,5 × 0,2 cm. ¿Cuál será la capacidad de la piscina real?

En resumen

1 Un **poliedro** es una región del espacio limitada por polígonos.

- Todo **poliedro convexo** cumple la **relación de Euler:**

  El número de caras, *C,* más el número de vértices, *V,* es igual al número de aristas, *A,* más 2:

  $$\boldsymbol{C + V = A + 2}$$

- Un **poliedro** es **regular** cuando sus caras son polígonos regulares e iguales entre sí, y en cada vértice concurre el mismo número de aristas.
- Los **prismas** son poliedros que tienen dos caras que son polígonos iguales y paralelos entre sí, y las demás son paralelogramos.
- Las **pirámides** son poliedros que tienen una cara que es un polígono cualquiera y las demás son triángulos que tienen un vértice común.

2 Los **cuerpos de revolución** son los cuerpos geométricos que se obtienen al girar una figura plana 360° alrededor de un eje.

- Un **cilindro** se obtiene al girar 360° un rectángulo sobre uno de sus lados.
- Un **cono** se obtiene al girar 360° un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos.
- Una **esfera** se obtiene al girar 360° un semicírculo sobre su diámetro.

3 El **área** de un cuerpo geométrico es la medida de la superficie que lo delimita.

4 Si recortamos un cuerpo geométrico por las aristas adecuadas y lo desplegamos, obtenemos su **desarrollo plano.** El área del desarrollo plano coincide con el área del cuerpo geométrico.

5 El **volumen** de un cuerpo geométrico expresa el número de veces que el cuerpo contiene una unidad de volumen.

6 **Principio de Cavalieri:**

Si dos cuerpos geométricos de la misma altura cumplen que las secciones por planos paralelos a sus bases tienen la misma área, entonces estos cuerpos tienen el mismo volumen.

○ La **media aritmética** de una serie de datos se obtiene sumando todos los datos y dividiendo entre el número total de ellos.

Áreas	
Prisma $A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2\,A_{\text{base}}$	Cilindro $A_{\text{lateral}} = 2\pi r \cdot g$ $A_{\text{total}} = 2\pi r \cdot (g + r)$
Pirámide $A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + A_{\text{base}}$	Cono $A_{\text{lateral}} = \pi r \cdot g$ $A_{\text{total}} = \pi r \cdot (g + r)$
Tronco de pirámide $A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + A_{b_1} + A_{b_2}$	Tronco de cono $A_{\text{lateral}} = \pi g \cdot (R + r)$ $A_{\text{total}} = \pi g \cdot (R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$
Esfera	$A = 4\pi r^2$

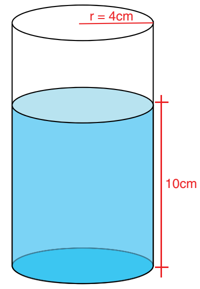
Volúmenes	
Prisma $V = A_{\text{base}} \cdot h$	Cilindro $V = A_{\text{base}} \cdot h = \pi r^2 \cdot h$
Pirámide $V = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h$	Cono $V = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$
Esfera	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

Cuerpos geométricos → se clasifican en →
- Poliedros → entre ellos destacan →
  - Poliedros regulares
  - Prismas
  - Pirámides
- Cuerpos de revolución → entre ellos destacan →
  - Cilindros
  - Conos
  - Esferas

Cuerpos geométricos → podemos calcular sus →
- **Áreas** → se obtienen a partir del → Desarrollo plano
- **Volúmenes** → se obtienen a partir del → Principio de Cavalieri

Ejercicios y problemas integradores

- Elizabeth organiza una fiesta con 20 invitados, para esto necesita 21 vasos para servir gaseosa a sus invitados. ¿Cuántas gaseosas de 3 litros necesitará si las dimensiones de cada vaso son de 4 cm de radio y 14 cm de altura, pero solo llenará hasta 10 cm de altura?



- El vaso que se observa tiene una forma cilíndrica
- Si el volumen de un cilindro es igual al área de la base por la altura, entonces calculamos el área de la base del cilindro:

$$A_{base} = \pi r^2 = \pi 4^2 = 50{,}27\ cm^2$$

- Si conocemos el área de la base del cilindro entonces, el volumen es

  $V_{cilindro} = A_{\ base} \cdot h = 50{,}27\ cm^2 \cdot 10\ cm = 502{,}7\ cm^3$

- Entonces el volumen aproximado de cada vaso es de $502{,}7\ cm^3$
- Como se tienen 21 vasos, multiplicamos:

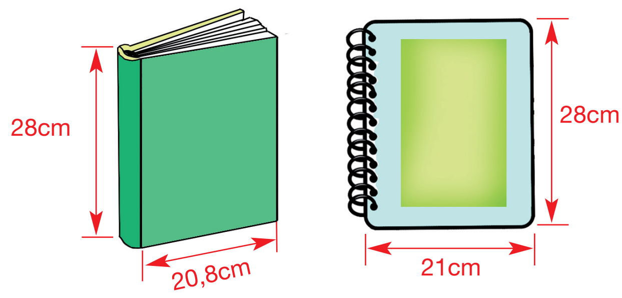
$$21 \cdot 502{,}7 = 10\ 556{,}7\ cm^3$$

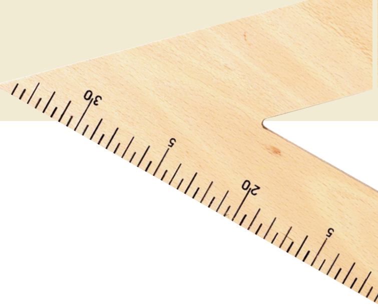
- Si cada botella contiene 3 litros de gaseosa y cada litro tiene $1\ 000\ cm^3$, entonces una botella de gaseosa contiene $3\ 000\ cm^3$.
- Ahora dividimos el volumen total de vasos para el volumen de la botella de gaseosa:

$$10\ 556{,}7\ cm^3 \div 3\ 000\ cm^3 = 3{,}51$$

R: Elizabeth necesita aproximadamente $3\frac{1}{2}$ botellas de gaseosa de 3 litros para servir a sus invitados.

- Al inicio de clases un estudiante adquiere libros y cuadernos para los estudios durante el año lectivo, lo básico son 7 cuadernos universitarios de 100 hojas y 3 libros del Ministerio de Educación de 95 páginas. Calcular la cantidad de papel necesario durante el año y el espacio que se necesita para guardar estos materiales. Si las hojas del cuaderno tienen una dimensión de 21 cm x 28 cm y las hojas de los libros 20,8 cm x 28 cm.





- Las hojas de los cuadernos y de los libros tienen forma rectangular.
- Si sabemos que el área de un rectángulo es base por altura, entonces tenemos el área de una hoja del cuaderno:

$$A = b \cdot h = 21 \text{ cm} \cdot 28 \text{ cm} = 588 \text{ cm}^2$$

- Como cada cuaderno tiene 100 hojas y 2 pastas. Calculamos el área total del cuaderno que resulta:

$$588 \text{ cm}^2 \cdot 102 = 59\,976 \text{ cm}^2$$

- Si el área de un cuaderno es de 59 976 cm^2, multiplicamos por 7 cuadernos tenemos: 419 832 cm^2.
- Recordemos que un metro cuadrado tiene diez mil centímetros cuadrados, entonces un estudiante utiliza 41,9832 m^2 de papel en cuadernos.
- Ahora vamos a calcular el área de las hojas de los libros, realizando el mismo procedimiento:

$$A = b \cdot h = 20{,}8 \text{ cm} \cdot 28 \text{ cm} = 582{,}4 \text{ cm}^2$$

- Como cada libro tiene 97 hojas. Calculamos el área total del libro que resulta:

$$582{,}4 \text{ cm}^2 \cdot 97 = 56\,492{,}8 \text{ cm}^2.$$

- Si el área de las hojas del libro es 56 492,8 cm^2 y multiplicamos por 3 libros tenemos: 169 478,4 cm^2.
- Si un metro cuadrado tiene diez mil centímetros cuadrados, Entonces un estudiante utiliza 16,95 cm^2 de papel en libros.
- Sumando las dos áreas se tiene: 58,93 m^2.

R: Un estudiante utiliza durante el año lectivo 58,93 m² de papel.

- El volumen de una hoja de papel es área de la base por la altura en este caso es el grosor de hoja que equivale a 0,017 cm.
- Calculando el volumen de los cuaderno se tiene

$$V = \text{Área}_{\text{cuaderno}} \cdot h = 419\,832 \text{ cm}^2 \cdot 0{,}017 \text{ cm} = 7\,137\,144 \text{ cm}^3$$

- Calculando el volumen de los libros se tiene

$$V = \text{Área}_{\text{libro}} \cdot h = 56\,492{,}8 \text{ cm}^2 \cdot 0{,}017 \text{ cm} = 960{,}38 \text{ cm}^3$$

$$\text{Volumen}_{\text{total}} = 7\,137\,144 \text{ cm}^3 + 960{,}38 \text{ cm}^3 = 7\,138\,104{,}38 \text{ cm}^3$$

$$\text{Volumen}_{\text{total}} = 7{,}138 \text{ m}^3$$

Practica

Según la EMAAP, una persona no debe usar más de 150 litros diarios de agua, pero la realidad es otra, el promedio de consumo al día es de 240 litros diarios por persona. ¿Cuánto consumirá tu familia al mes? Reflexiona.

Ejercicios y problemas

En tu cuaderno

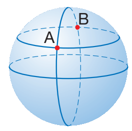
Comprensión de conceptos y conocimiento de procesos

Cuerpos geométricos

36 ¿Puede tener un poliedro convexo el mismo número de caras, vértices y aristas? Justifica tu respuesta.

37 ¿Qué longitud y qué latitud tienen los puntos situados en el meridiano de Greenwich? ¿Y los de la línea ecuatorial? ¿Y los polos?

38 Observa los puntos *A* y *B* de la figura. Si las coordenadas geográficas de *A* son (22° E, 45° N), ¿cuáles son las de *B*?



39 Dibuja la figura plana que genera cada uno de los siguientes cuerpos de revolución: un tronco de cono, una semiesfera y un casquete esférico.

40 Dibuja un prisma recto cuya base sea un rectángulo de lados 9 cm y 12 cm, y cuya altura sea 18 cm.

— ¿Cuánto miden la diagonal de la base y la diagonal del prisma?

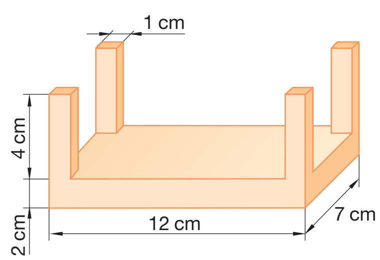
Áreas

41 Dibuja el patrón plano de un prisma pentagonal y el de una pirámide triangular.

42 ¿Cómo podemos calcular el área de un cubo si conocemos la arista?

43 ¿Qué relación satisfacen el área de una esfera y la de un círculo máximo?

44 Obtén el área del cuerpo geométrico representado en la figura.



45 Calcula las áreas de estos poliedros regulares:

a) Tetraedro de 4 cm de arista.

b) Octaedro de 5 cm de arista.

c) Icosaedro de 6 cm de arista.

d) Cubo de 7 cm de arista.

e) Dodecaedro de 1,8 cm de arista y 1,24 cm de apotema.

46 Calcula el área de un cubo de 10 cm de diagonal.

47 ¿Cuánto miden las aristas de un tetraedro y las de un octaedro si el área de cada uno de ellos es de 240 cm^2?

48 La base de un prisma recto es un trapecio isósceles de 20 cm de altura cuyas bases miden 10 cm y 15 cm. Calcula el área lateral y el área total del prisma si su altura es de 30 cm.

49 La base de una pirámide recta es un cuadrado cuya diagonal mide 15 cm. Calcula el área lateral y el área total de la pirámide si su altura es de 17 cm.

50 Calcula el área lateral y el área total de un cilindro generado por un cuadrado de 6 cm de lado al girar 360° sobre uno de sus lados.

51 Calcula las áreas de estos cuerpos de revolución:

a) Cilindro de 2 cm de radio y 7 cm de generatriz.

b) Cono de 3 cm de radio y 4 cm de altura.

c) Tronco de cono que resulta al cortar el cono anterior con un plano que dista 2 cm de su base.

Volúmenes

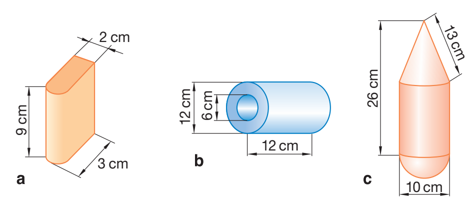
52 Si un prisma y un cilindro tienen la misma altura y sus bases tienen la misma área, ¿qué relación cumplen sus volúmenes?

53 ¿Qué relación satisfacen el volumen de una esfera y su área?

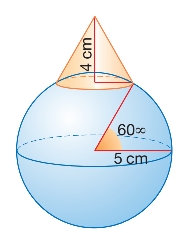
54 Cita objetos de tu entorno que tengan forma de prisma. Fíjate en uno de ellos y haz una estimación de su área y su volumen. Después, toma las medidas y calcula los valores exactos.

55 Calcula el volumen de los conos que resultan al girar 360° un triángulo rectángulo sobre cada uno de sus catetos si éstos miden 5 cm y 12 cm.

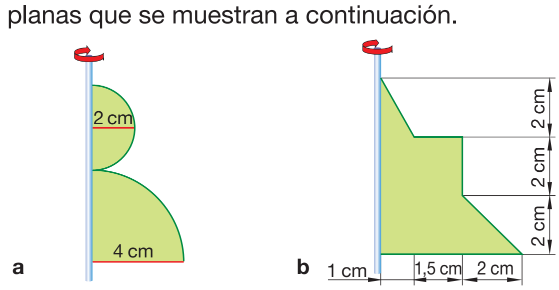
56 Calcula las áreas y los volúmenes de estos cuerpos.



57 Calcula el área y el volumen del cono de la figura.



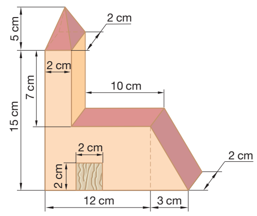
58 Calcula las áreas y los volúmenes de los cuerpos de revolución que resultan al girar 360° las figuras planas que se muestran a continuación.



Distribución gratuita - Prohibida la venta

Aplicación en la práctica

59 Se quiere restaurar la fachada de un edificio como el de la figura. Si se invierte una hora en restaurar medio metro cuadrado, ¿cuánto tiempo se empleará en restaurar toda la fachada?



60 Calcula los kilómetros cuadrados de la superficie terrestre ocupados por tierra firme sabiendo que el 70 % de dicha superficie está bañada por agua. Recuerda que el radio terrestre mide 6 371 km.

61 Se quiere pintar la cúpula semiesférica de un edificio de 6 m de radio. Si por cada 6 m^2 se utiliza 1 l de pintura, ¿qué cantidad de pintura será necesaria?

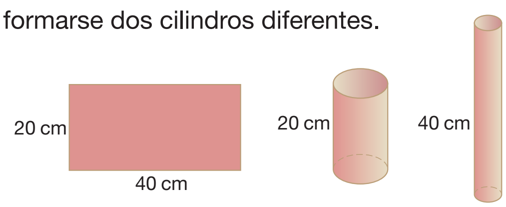
62 ¿Qué cantidad de papel se necesita para etiquetar un lote de 100 latas de aceite de forma cilíndrica de 20 cm de altura y 7 cm de radio, si sabemos que la etiqueta recubre toda la superficie lateral de la lata? Si el aceite tiene una densidad de 0,92 g/cm^3, ¿cuántos kilogramos necesitaremos para llenar el lote completo?

63 Un tetraedro de hierro tiene una arista de 5 cm. Calcula cuál será su masa si la densidad del hierro es d = 7,8 g/cm^3.

64 En un museo de medidas antiguas se encuentra un juego de pesas de 10 g, 20 g, 50 g, 100 g, 200 g, 500 g, 1 kg y 2 kg. Si todas ellas son figuras semejantes y la mayor mide 8 cm de altura, ¿cuáles son las alturas de las restantes pesas?

65 Compramos un jugo contenido en un envase cilíndrico de radio de la base 3,2 cm y altura 11 cm, y lo repartimos a partes iguales entre dos vasos cilíndricos de radio de la base 2,8 cm y altura 8 cm. ¿A qué altura llegará el refresco dentro de cada uno de los vasos?

66 **Material concreto:** Enrollando una lámina de cartulina de 40 cm × 20 cm sobre uno de sus lados pueden formarse dos cilindros diferentes.

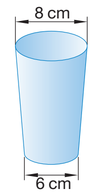


Calcula:

a) El volumen de los dos cilindros.

b) La relación V/A_{total} para los dos cilindros.

67 Calcula la capacidad de este vaso.



68 Calcula el volumen de la corteza terrestre sabiendo que tiene un espesor de 50 km. Recuerda que el radio terrestre mide 6 371 km.

69 Formen grupos y, utilizando un atlas o un globo terrestre, indiquen la longitud y la latitud de:

a) Su localidad | c) Lima

b) Sidney | d) Los Ángeles

70 Busca en una enciclopedia o en Internet las coordenadas geográficas de tu ciudad y de Madrid, donde viven muchos ecuatorianos/as que han emigrado de nuestro país. ¿Qué hora es en cada una de estas ciudades cuando en la otra son las 12:00 (hora solar)?

71 Haz una estimación del área y del volumen de la pelota utilizada en estos deportes:

a) pimpón | c) fútbol

b) tenis | d) baloncesto

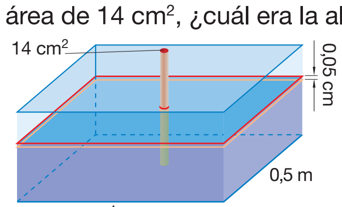
— A continuación, busca información, en una enciclopedia o en Internet, sobre las dimensiones de estos objetos. Calcula sus áreas y volúmenes, y compara los resultados con las estimaciones efectuadas.

72 En una carrera estudiantil de 400 metros planos, los participantes cronometran los siguientes tiempos al cruzar la meta: 1, 0; 1,2; 1,1; 1,5; 1,3; 1,4; 1,2; 1,6; 1,3; 1,5; 1,7; 1,6; 1,2; 1,3 minutos. Encuentra cuál es el tiempo promedio que tardaron estos estudiantes en recorrer los 400 metros.

Más a fondo

73 Se secciona un cono de 10 cm de altura y 4 cm de radio por un plano paralelo a la base. Si el área de la sección obtenida es 13,58 cm^2, ¿a qué distancia se encuentra la base del cono de dicho plano?

74 En una pecera de 1 m × 0,5 m se introduce un adorno con forma de cilindro macizo. En consecuencia, el nivel del agua sube 0,05 cm. Si la base del cilindro tiene un área de 14 cm^2, ¿cuál era la altura inicial del agua?



Autoevaluación

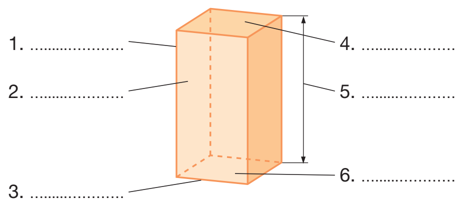
Coevaluación

Si logras resolver el 70 % de estas actividades individuales y grupales, puedes avanzar.

Autoevaluación

1. ¿Cuántas aristas tiene un poliedro convexo de 12 vértices y 8 caras?

2. ¿Cuál es el nombre del siguiente poliedro? Completa, en tu cuaderno, la figura con sus elementos.



3. La siguiente tabla muestra las edades de los participantes en un campeonato de ajedrez.

Edad	Frecuencia absoluta
11	3
12	2
13	3
a	2

Sabiendo que la media de edad es 12,4 años, calcula:

a) El valor de *a*.

4. Calcula el área de un cubo de 24 cm de diagonal.

Coevaluación

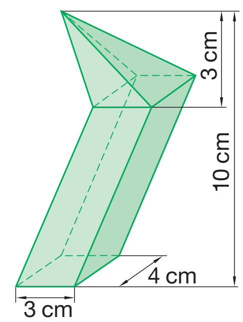
1. Determina el volumen de una esfera si su área es de 7 854 cm^2.

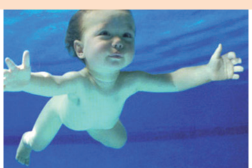
2. Dos cilindros tienen la misma área lateral y sus radios miden 3 cm y 5 cm. La generatriz del primero es 12 cm. ¿Cuánto mide la generatriz del segundo?

3. Un prisma regular hexagonal tiene una arista básica de 5 cm, una apotema básica de 4,33 cm y una arista lateral de 23 cm. Calcula el área total y el volumen.

4. Un cono de radio 12 cm y altura 36 cm se divide en dos partes al ser cortado por un plano transversal paralelo a la base y situado a 24 cm de distancia de ésta. ¿Cuáles son los volúmenes de las dos figuras resultantes?

5. ¿Cuál es el volumen del cuerpo geométrico de la figura?







Buen Vivir

Uso del tiempo libre

Una buena forma de emplear el tiempo libre es la natación. Este deporte es completo y beneficioso tanto para el cuerpo como para la mente, porque al realizar movimientos en el agua, favorece la contracción de todos los músculos y mejora la respiración.

Los movimientos efectuados de manera simultánea favorecen la circulación de la sangre y la eliminación progresiva de grasas en forma natural; además de que, el ejercicio de la respiración permite recuperar la serenidad y la calma. En cuanto a los estilos, el de espaldas, ayuda a que los músculos se relajen al no soportar la carga completa del cuerpo.

Actividades

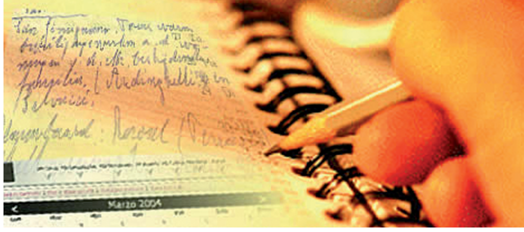
1 Visiten una piscina que esté cerca de su hogar este fin de semana, para disfrutar en familia las bondades del tiempo libre.

2 Consulten los beneficios de la natación para la salud de quienes la practican con regularidad.

3 ¿Qué beneficios tienen las aguas termales para nuestra salud? Averigüen la composición química de las piscinas de aguas termales más cercanas a su localidad.

4 ¿Existen suficientes espacios para la recreación en la localidad donde viven?

5 ¿Pueden la comunidad y ustedes mismos crear espacios de recreación? ¿Cómo? Planteen alternativas viables y anímense a ponerlas en práctica para construir el Buen Vivir.



Crónica matemática

¿Qué volumen ocupa una peonza (trompo)?

Observa cómo podemos calcular aproximadamente su volumen:

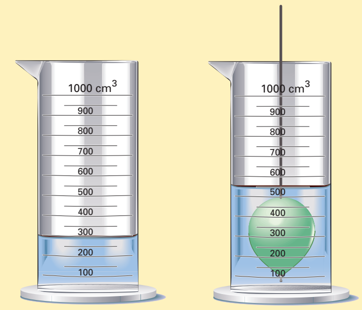
— Llenamos una probeta con un volumen de agua conocido.

— Introducimos la peonza.

— Miramos qué volumen ocupan ahora el agua y la peonza.

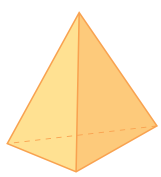
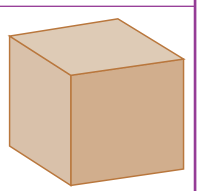
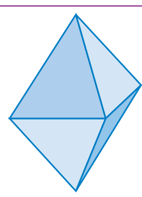
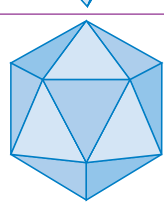
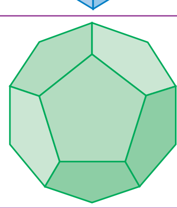
— El volumen de la peonza será la diferencia entre el volumen total y el volumen que ocupaba el agua.

De esta manera puedes medir el volumen de cualquier cuerpo por muy irregular que sea su forma.



Los cinco poliedros regulares

Ya eran conocidos en el siglo VI a. C. por Pitágoras y sus discípulos. También son llamados sólidos platónicos, pues Platón (427-347 a. C.) identificaba cada uno de ellos con un elemento de la materia.

El tetraedro representaba el fuego.	
El cubo, la tierra.	
El octaedro, el aire.	
El icosaedro, el agua.	
Y el dodecaedro, el universo.	

Arquímedes (287-212 a. C.)

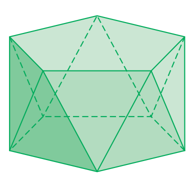
Fue uno de los matemáticos que más se dedicó al estudio de las áreas y los volúmenes de los cuerpos geométricos. Suyas son las fórmulas:

$$A_{esfera} = 4\pi r^2 \qquad V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot h \qquad V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h \qquad V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Prismas y antiprismas

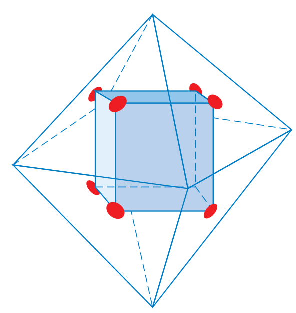
Como ya sabemos, un **prisma** es un poliedro en el cual dos caras son polígonos iguales y paralelos entre sí (las bases), y las demás son paralelogramos.

Si unimos las bases con triángulos en lugar de paralelogramos, obtenemos un poliedro llamado **antiprisma.** En la figura aparece un antiprisma pentagonal.



Poliedros duales

Si en un poliedro unimos entre sí los centros de las caras, obtenemos otro poliedro que tiene tantas caras como vértices el primero, y viceversa. Estos poliedros se llaman **poliedros duales.** Por ejemplo, el poliedro dual de un octaedro es un cubo.



Demuestra tu ingenio

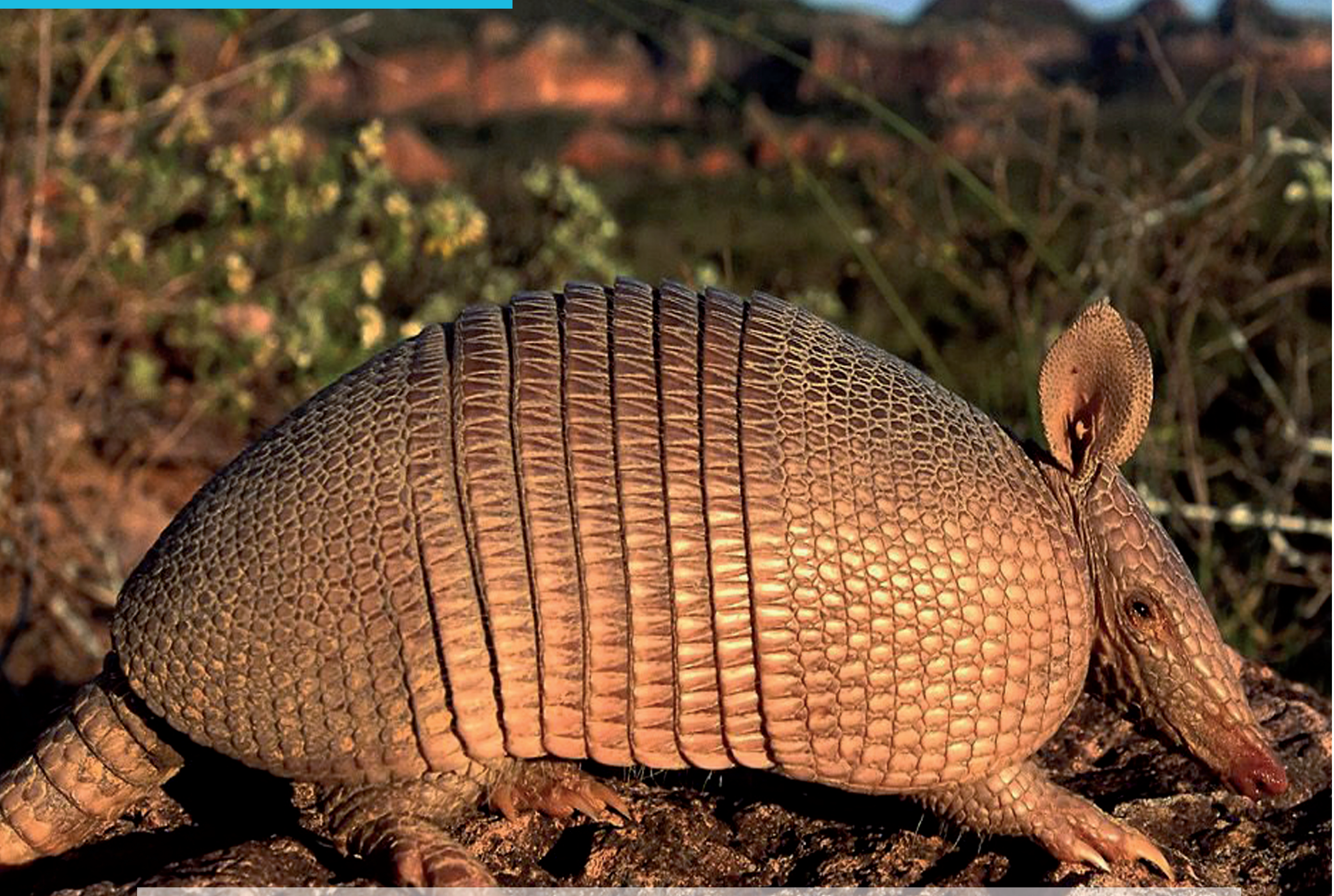
- Imagina que tienes una lata de pintura roja, una de pintura azul y una gran provisión de cubos de igual tamaño. Si pintas los cubos de manera que cada cara quede pintada de un mismo color, ¿cuántos cubos diferentes obtienes?

- Hay a la venta dos sandías de tamaño diferente. Una de ellas es la cuarta parte más ancha que la otra y cuesta vez y media más cara. ¿Cuál de las dos debemos comprar para que nos resulte más ventajoso?

Módulo 6

Bloques: Medida. Estadística y probabilidad

Buen vivir: Derecho a la educación



Javier está haciendo una colección, en fascículos semanales, sobre la vida de los animales. Al finalizar la colección, de 80 fascículos, quiere realizar un trabajo sobre el armadillo, uno de los animales que habita en las zonas subtropicales del Ecuador.

Coloca en los círculos las siguientes situaciones de manera que queden ordenadas de menor a mayor probabilidad de disponer de información sobre la vida del armadillo.

A. Si compra todos los fascículos de la colección.

B. Si no compra ningún fascículo.

C. Si no compra tres fascículos.

D. Si sólo compra cinco fascículos.

◯ — ◯ — ◯ — ◯

Imposible | Seguro

http://www.setab.gob.mx

Probabilidad
Conversiones entre unidades del Sistema Internacional

Identificarás experimentos deterministas y experimentos aleatorios, y *calcularás* la probabilidad de que ocurra un determinado suceso. También *realizarás* reducciones y conversiones de unidades del S.I.

DCD Destrezas con criterios de desempeño

- Calcular probabilidades simples con el uso de fracciones.
- Reconocer situaciones susceptibles de ser tratadas mediante la teoría de la probabilidad.
- Utilizar las unidades de medida más adecuadas a cada situación.
- Comparar y ordenar diversas medidas expresadas en distintas unidades.
- Conocer las posibilidades que ofrece el uso de la calculadora y el computador.
- Reconocer e interpretar el lenguaje relacionado con la probabilidad que se presenta en la vida cotidiana.

Prerrequisitos

Recuerda

- Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son **equivalentes** si cumplen:

$a \cdot d = b \cdot c.$

- La **frecuencia absoluta** de un valor de la variable estadística es el número de veces que se repite dicho valor.

La **frecuencia relativa** de un valor de la variable estadística es el resultado de dividir la frecuencia absoluta de dicho valor por el número total de datos.

Las frecuencias relativas pueden expresarse en forma fraccionaria, en forma decimal o en porcentaje.

- El **metro** es una unidad de longitud. Tiene varios múltiplos y submúltiplos.

El **gramo** y el **litro,** respectivamente, son unidades de masa y de capacidad. También se utilizan sus múltiplos y sus submúltiplos.

Evaluación diagnóstica

- Comprueba si las siguientes fracciones son equivalentes.

  a) $\frac{13}{65}$ y $\frac{3}{15}$ b) $\frac{3}{51}$ y $\frac{7}{119}$

- Al lanzar un dado se obtienen los siguientes valores: 5, 3, 2, 2, 1, 4, 6, 3, 1, 5, 6, 4, 1, 1, 3, 2, 3, 2, 5 y 6.

  a) Dispón los datos en una tabla de distribución de frecuencias.

  b) ¿Qué porcentaje de resultados corresponde al valor 2?

- Las siguientes frecuencias relativas se presentan en forma de porcentaje. Exprésalas en forma fraccionaria y en forma decimal.

  a) 23,4 b) 76,6

- Indica qué situación es más probable.

  a) Acertar el número que sale al tirar un dado.

  b) Acertar en el bingo.

- Describe tres situaciones en tu entorno que muy probablemente sucederán y otras tres que muy probablemente no sucederán.
- Busca en el diccionario los significados de estas palabras: *experimento, aleatorio, determinista, suceso.*
- Escribe las unidades de masa y de capacidad que conozcas ordenadas de mayor a menor.

  — ¿Cómo pasamos de una unidad a otra?

  — Pasa 145 g a centigramos y a decagramos.

Buen Vivir

Derechos

Art. 11.2. Todas las personas son iguales y gozarán de los mismos derechos, deberes y oportunidades. El Estado adoptará medidas de acción afirmativa que promuevan la igualdad real a favor de los titulares de derechos que se encuentren en situación de desigualdad.

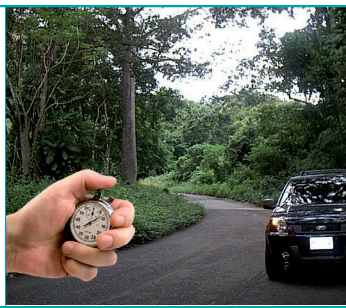
Constitución de la República del Ecuador, 2008.

1 Conceptos iniciales

1.1. Experimentos deterministas y experimentos aleatorios

Si observamos algunos de los experimentos o fenómenos que ocurren a nuestro alrededor, comprobaremos que para unos de ellos podemos predecir o determinar el resultado. En cambio, para otros resulta prácticamente imposible predecir o determinar su resultado.

Fíjate en los siguientes experimentos y comprueba si es posible o no predecir el resultado.

http://nosolo.eu		http://www.loteria.com.ec	
			
Lanzar un dado y observar la puntuación de la cara superior.	Averiguar el tiempo que tarda un automóvil en recorrer una distancia si conocemos su velocidad constante.	Adivinar el número que saldrá premiado en el próximo sorteo de la lotería de Navidad.	Extraer una manzana al coger una fruta de una cesta que sólo contiene naranjas.

En los experimentos segundo y cuarto podemos determinar su resultado antes de realizarlos, mientras que en el primero y en el tercero no los podemos predecir. Tenemos así experimentos *deterministas* y experimentos *aleatorios.*

Los **experimentos deterministas** son aquéllos en los que es posible predecir el resultado antes de que se realicen.

Los **experimentos aleatorios** son aquéllos en los que no es posible predecir el resultado antes de que se realicen.

Actividades

1 Indica cuáles de los experimentos siguientes son aleatorios y cuáles no.

a) *Extraer una carta de una baraja y observar de qué palo es.*

b) *Calentar una olla con agua y observar a qué temperatura hierve el agua.*

c) *Extraer una bola de una bolsa opaca que contiene bolas azules y observar su color.*

d) *Extraer una bola de una bolsa opaca que contiene bolas rojas, azules y violetas, y mirar su color.*

e) *Lanzar una moneda trucada que siempre sale cara al lanzarla.*

2 Escribe tres experimentos aleatorios y otros tres deterministas, diferentes de los expuestos en esta página.

1.2. Espacio muestral

Para estudiar un experimento aleatorio debemos conocer, en primer lugar, todos los posibles resultados que pueden darse.

Suceso elemental es cada uno de los resultados posibles que pueden obtenerse en un experimento aleatorio.

El **espacio muestral,** representado por la letra Ω, es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

Notación

La letra griega omega, Ω, representa el espacio muestral de un experimento.

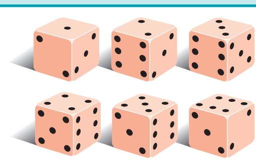
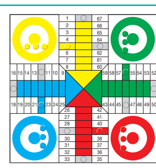
ejemplo 1

Indica el espacio muestral y los sucesos elementales de cada uno de los siguientes experimentos.

a) Lanzar un dado.

b) Tirar una moneda.

c) Elegir un color para jugar al parchís.

Experimento	Sucesos elementales	Espacio muestral
Lanzar un dado.	 {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}	Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Tirar una moneda.	 {cara}, {cruz}	Ω = {cara, cruz}
Elegir un color para jugar este divertido juego de mesa.	 {rojo}, {verde}, {amarillo}, {azul}	Ω = {rojo, verde, amarillo, azul}

FÍJATE

Generalmente, al hablar de un dado, nos referimos al dado de seis caras con forma de cubo.

Sin embargo, también existen dados con otras formas: tetraedro, octaedro, dodecaedro...

Actividades

3 Escribe el espacio muestral del experimento *tirar un dado con forma de tetraedro y anotar la puntuación que se obtiene.*

4 Determina el espacio muestral del experimento *sacar una bola de una bolsa opaca que contiene cinco bolas numeradas del 1 al 5.*

5 Determina para cada uno de los siguientes espacios muestrales un posible experimento aleatorio realizado.

a) Ω = {1, 2, 3, 4, 5 ,6}

b) Ω = {rojo, amarillo, azul}

c) Ω = {cc, cx, xc, xx}, c = salir cara, x = salir cruz

1.3. Sucesos

A menudo, lo que nos interesa de un experimento aleatorio es estudiar aspectos particulares de dicho experimento.

Se llama **suceso** a cada uno de los aspectos que pueden estudiarse de un experimento aleatorio. Se corresponde con una parte del espacio muestral Ω.

ejemplo 2

Señala distintos sucesos en el experimento lanzar un dado y observar el resultado.

Algunas situaciones que pueden estudiarse son:

A: Obtener un número impar.

B: Obtener un número mayor que 2.

C: Obtener un 4.

Los resultados que caracterizan cada uno de los sucesos son:

A: Obtener un número impar, $A = \{1, 3, 5\}$

B: Obtener un número mayor que 2, $B = \{3, 4, 5, 6\}$

C: Obtener un 4, $C = \{4\}$.

Decimos que se **verifica** o que **ocurre** un suceso cuando al realizar un experimento el resultado es uno de los que caracterizan este suceso.

De entre todos los sucesos que podemos definir al realizar un experimento aleatorio, hay algunos que tienen características especiales. A continuación, describiremos los más importantes: *suceso seguro, suceso imposible, suceso contrario, sucesos compatibles* y *sucesos incompatibles.*

Notación

El símbolo $\varnothing$ se lee «conjunto vacío» y es el conjunto que no tiene ningún elemento.

Suceso seguro y suceso imposible

Puede ocurrir que sea cual sea el resultado de un experimento, este suceso ocurra con absoluta certeza o bien que no ocurra.

FÍJATE

Un suceso A es **seguro** si $A = \Omega$.

Un suceso A es **imposible** si $A = \varnothing$.

Suceso seguro es el suceso que ocurre siempre que se realiza el experimento aleatorio. Coincide con el espacio muestral Ω.

Suceso imposible es el suceso que no ocurre jamás al realizar el experimento aleatorio. Se representa por el símbolo $\varnothing$.

ejemplo 3

Señala un suceso seguro y un suceso imposible en el experimento lanzar un dado y observar el resultado.

Consideremos el suceso *A: Obtener un número menor o igual a 6,* y escribimos el conjunto de los resultados favorables a este suceso.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$$

Observamos que este suceso contiene todos los resultados posibles del experimento y, por tanto, coincide con el espacio muestral. Es un suceso seguro.

Si consideramos ahora el suceso *B: Obtener un 7,* este suceso no tiene ningún resultado favorable. Es un suceso imposible. Escribiremos:

$$B = \varnothing$$

Suceso contrario

En el experimento *lanzar un dado* consideramos los sucesos *A: Obtener un número par* y *B: Obtener un número impar,* y escribimos el conjunto de los resultados favorables a cada uno de los sucesos.

$$A = \{2, 4, 6\} \qquad B = \{1, 3, 5\}$$

Observa que el suceso B está formado por todos los resultados del experimento que no están en A y, por lo tanto, estos sucesos no se verifican simultáneamente.

Sea cual sea el resultado del experimento *lanzar un dado,* el suceso B se verificará si no se verifica el suceso A.

El **suceso contrario** a un suceso A es aquel que se verifica siempre y cuando no se verifica A, y se representa mediante $\overline{A}$.

FÍJATE

El suceso **contrario** de A es $\overline{A} = \Omega - A$.

Sucesos compatibles y sucesos incompatibles

Si tenemos un experimento aleatorio con varios sucesos definidos, puede ocurrir que, al obtener un resultado, se verifiquen simultáneamente más de uno de los sucesos considerados.

Dos sucesos son **compatibles** si pueden verificarse a la vez. En caso contrario, son **incompatibles.**

Los sucesos compatibles tienen algún resultado en común y los incompatibles ninguno.

FÍJATE

- Dos sucesos A y B son **compatibles** si $A \cap B \neq \varnothing$.
- Dos sucesos A y B son **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.

ejemplo 4

Señala en el ejemplo 2 los sucesos compatibles e incompatibles, y el suceso contrario de B.

Los sucesos A y B tienen resultados favorables comunes, 3 y 5, por lo que son sucesos compatibles. Los sucesos B y C también son compatibles porque tienen en común el resultado 4.

Los sucesos A y C no tienen ningún resultado en común, por lo que son incompatibles.

El suceso contrario de B es el formado por los resultados que no están en B, es decir, $\overline{B} = \{1, 2\}$.

Actividades

6 Realizamos el experimento *tirar un dado con forma de dodecaedro y observar la puntuación de la cara superior*. Describe los resultados que forman los siguientes sucesos.

A: Obtener un número par.

B: Obtener un número impar.

C: Obtener un número impar mayor que 5.

D: Obtener un 15.

— Al realizar una prueba del experimento se obtiene un 9. Indica cuáles de los sucesos anteriores ocurren.

— ¿Algunos de los sucesos anteriores son compatibles? ¿Y contrarios? ¿Es algún suceso imposible?

2 Concepto de probabilidad

2.1. Frecuencia absoluta y frecuencia relativa

En un experimento aleatorio no podemos conocer de antemano cuáles serán los resultados, pero es interesante saber si éstos presentan algún tipo de regularidad.

Para ello, podemos repetir el experimento un elevado número de veces y analizar los resultados obtenidos.

Se llama **frecuencia absoluta** del suceso al número de veces que ocurre un suceso al realizar un experimento aleatorio un número determinado de veces.

Por otra parte, si lo que queremos es comparar el comportamiento de un suceso cuando varía el número de realizaciones, no basta con conocer la frecuencia absoluta.

En este caso calculamos el cociente entre la frecuencia absoluta del suceso y el número total de realizaciones. El valor obtenido es la *frecuencia relativa* del suceso.

MUCHO OJO

La frecuencia relativa de un suceso está comprendida entre 0 y 1.

La suma de las frecuencias relativas de todos los sucesos elementales es 1.

Se llama **frecuencia relativa** del suceso al cociente entre la frecuencia absoluta de un suceso y el número de realizaciones.

ejemplo 5

Al lanzar un dado obtenemos los siguientes resultados: 1, 5, 4, 4, 6, 2, 3, 1, 3, 6, 2, 1, 4, 2, 6, 2, 3, 3, 5, 1, 3, 5, 3, 4, 2, 1, 2, 4, 2, 4. Calcula la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa de cada uno de los sucesos.

Construimos una tabla estadística.

Suceso	Recuento	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
1	𝍸	5	0,167
2	𝍸 𝍷𝍷	7	0,233
3	𝍸 𝍷	6	0,200
4	𝍸 𝍷	6	0,200
5	𝍷𝍷𝍷	3	0,100
6	𝍷𝍷𝍷	3	0,100

Actividades

7 Elige los nombres de ocho compañeros y compañeras de clase. Anota el número de veces que aparece cada vocal en los nombres y calcula la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa de cada una de las vocales.

Compara tus resultados con los de los demás y analízalos.

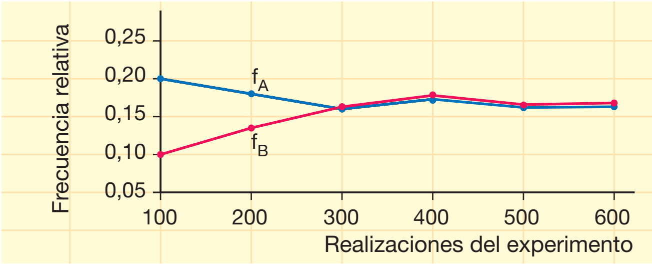
2.2. Definición de probabilidad

Consideremos el experimento *lanzar un dado* y vamos a anotar en una tabla el comportamiento de sus frecuencias relativas para los sucesos *A: Obtener un 1* y *B: Obtener un 5,* al aumentar el número de realizaciones del experimento.

Suceso	Realizaciones del experimento: *lanzar un dado*					
	100	200	300	400	500	600
$A = \{1\}$	0,200	0,180	0,160	0,173	0,162	0,163
$B = \{5\}$	0,100	0,135	0,163	0,178	0,166	0,168

Observamos que las frecuencias relativas de cada suceso tienden a estabilizarse en torno a un determinado valor a medida que aumenta el número de realizaciones del experimento.

Esto se hace más evidente si representamos en un sistema de coordenadas los valores de las frecuencias relativas de cada uno de los sucesos en función del número de realizaciones del experimento.



En general, el comportamiento de las frecuencias relativas que acabamos de observar en este experimento es común a todos los experimentos aleatorios.

Este hecho se conoce como **ley de los grandes números** y nos permite enunciar:

Al repetir un experimento aleatorio, la **frecuencia relativa de un suceso** *A* tiende a **estabilizarse** en torno a un determinado valor que llamamos **probabilidad,** ***P*(*A*),** a medida que aumenta el número de realizaciones.

La probabilidad se considera como una medida de la posibilidad de que ocurra un suceso.

Notación

La probabilidad de un suceso *A* se representa *P*(*A*).

FÍJATE

Al aumentar el número de realizaciones de un suceso *A*, su frecuencia relativa, f_A, tiende a ser su probabilidad.

$$f_A \longrightarrow P(A)$$

Actividades

8 Considera el experimento *lanzar una moneda* y anota en una tabla el comportamiento de las frecuencias relativas de los sucesos *C: Obtener cara* y *X: Obtener cruz* para las 25, 50, 75, 100 y 125 realizaciones del experimento. ¿Qué probabilidad asignarías a los sucesos *C* y *X*?

@

¿A qué matemático se debe la ley de los grandes números? Puedes encontrar información en la página http://www.educa.aragob.es/cursofpg/msolana/Biografias.htm

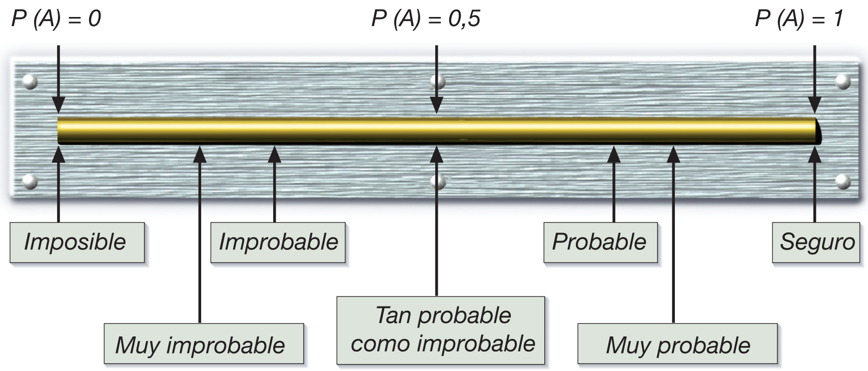
Puesto que la frecuencia relativa de un suceso *A* tiende a ser su probabilidad, ésta se medirá asignándole un número comprendido entre 0 y 1, al que representaremos por *P (A).*

$$A \longrightarrow P(A)$$
$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$$

Cuanto mayor es la probabilidad, mayor es la posibilidad de que ocurra el suceso al realizar el experimento.

Así, *P (A)* = 0 significa que al realizar el experimento aleatorio el suceso *A* no sucederá nunca; mientras que *P (A)* = 1 significa que el suceso *A* se verificará siempre.

Los valores intermedios de *P (A)* se corresponden con diversos grados de certeza: muy improbable, improbable...



FÍJATE

- La probabilidad de un suceso imposible es 0.
- La probabilidad de un suceso seguro es 1.
- La probabilidad del suceso contrario es igual a 1 menos la probabilidad del suceso.
- La probabilidad de un suceso es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos elementales favorables.
- La suma de la probabilidad de un suceso y la probabilidad del suceso contrario es igual a 1.

ejemplo 6

Indica qué es más probable al lanzar un dado: sacar más de 3 o menos de 3.

Los resultados que forman el suceso *A: Sacar más de 3* son *A* = {4, 5, 6}, y los que forman el suceso *B: Sacar menos de 3* son *B* = {1, 2}.

El suceso *A* tiene más resultados que el suceso *B;* por tanto, el suceso *A* es más probable que el *B.*

Actividades

9 Repite hasta cien veces el experimento *lanzar una moneda*, copia la tabla en tu cuaderno y anota el número de veces que obtienes los sucesos *cara* y *cruz.*

Suceso	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
cara		
cruz		

— Razona, a partir del experimento realizado, si es igual de probable obtener cara o cruz al lanzar una moneda.

10 Ordena de menos probable a más probable los siguientes sucesos, correspondientes a distintos experimentos aleatorios.

A: Acertar un número de una cifra.

B: Acertar una lotería de la localidad.

C: Obtener simultáneamente cara y cruz al lanzar una moneda.

D: Extraer una bola numerada de un bombo que contiene bolas numeradas.

E: Obtener cara al lanzar una moneda.

3 Cálculo de probabilidades

3.1. Asignación de probabilidades

No siempre es posible realizar un gran número de veces un experimento para determinar la probabilidad de un determinado suceso.

En el experimento *lanzar un dado* es lógico pensar que tan fácil es obtener un 1 como resultado que obtener un 6. Así pues, los sucesos elementales {1}, {2}, {3}, {4}, {5} y {6} del experimento *lanzar un dado* presentan la misma probabilidad. Esta situación se llama *situación de equiprobabilidad.*

Cuando en un experimento aleatorio puede suponerse que los diferentes sucesos elementales tienen la misma probabilidad, diremos que estamos en una **situación de equiprobabilidad.**

En una situación de equiprobabilidad es posible calcular la probabilidad de cualquier suceso *A* con la llamada **regla de Laplace:**

$$P(A) = \frac{\textbf{Número de resultados favorables de } A}{\textbf{Número de resultados posibles}}$$

Veamos un ejemplo de aplicación de la regla de Laplace.

ejemplo 7

Lanzamos un dado y observamos el resultado. Halla la probabilidad de los siguientes sucesos: A: Sacar un 1, B: Sacar más de 4 *y* C: Sacar un número par.

Podemos suponer que todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad, por lo que estamos en una situación de equiprobabilidad.

Así pues, podemos aplicar la regla de Laplace. Para ello, determinamos los resultados que forman los sucesos *A, B* y *C: A* = {1}, *B* = {5, 6} y *C* = {2, 4, 6}.

Puesto que el número de resultados es 6, tenemos que:

$$P(A) = \frac{1}{6} \qquad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

FÍJATE

En el experimento *lanzar un dado* las probabilidades de los sucesos elementales son:

$$P(1) = \frac{1}{6}$$

$$P(2) = \frac{1}{6}$$

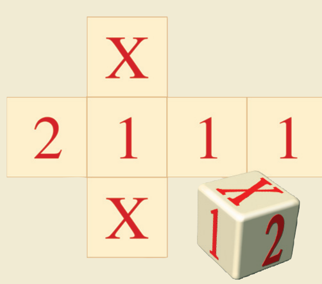
...

$$P(6) = \frac{1}{6}$$

Observa que la suma de la probabilidad de todos y cada uno de los sucesos elementales del experimento aleatorio es igual a 1.

Actividades

11 **Material concreto:** Construye este dado y observa el desarrollo de un juego con dados en la figura de la derecha.



— Efectúa cien lanzamientos con uno de ellos y anota el número de veces que sale cada signo. Calcula la frecuencia relativa de los sucesos *1, X* y *2.* ¿Son equiprobables?

— Asigna la probabilidad de obtener *1, X* o *2* al tirar el dado sin necesidad de realizar el experimento.

— Compara la frecuencia relativa de los sucesos con la probabilidad obtenida.

@

¿Cuánto dinero debes gastarte para asegurarte un 14 en la lotería? Puedes ayudarte con el enlace *Te puede tocar a ti...* de la página http://aula.elmundo.es/aula/laminas.html

3.2. Técnicas de recuento

En muchas ocasiones, para conocer el número de resultados posibles en un experimento aleatorio y el número de resultados favorables a un suceso, utilizamos las técnicas de recuento.

Dos técnicas muy utilizadas son los *diagramas en árbol* y las *tablas de contingencia.*

MUCHO OJO

Las **tablas estadísticas** permiten llevar a cabo el recuento de resultados a partir de la frecuencia absoluta del suceso.

- Los **diagramas en árbol** consisten en un recuento gráfico de las distintas posibilidades que presenta un experimento aleatorio compuesto de dos o más experimentos simples.

ejemplo 8

En el cajón de un armario tenemos tres camisetas de distinto color (roja, blanca y azul) y dos pantalones, unos son negros, los otros grises. Si cogemos al azar una camiseta y un pantalón, ¿qué probabilidad tenemos de llevar puesta la camiseta roja y el pantalón gris? Efectúa el recuento de resultados posibles a partir de un diagrama en árbol.

En primer lugar, representamos la camiseta roja por C_1, la camiseta blanca por C_2 y la camiseta azul por C_3. Y los pantalones negros por P_1 y los pantalones grises por P_2.

Dibujamos el diagrama en árbol (figura de la derecha).

Designamos el suceso *Llevar puesta camiseta roja y pantalón gris* como suceso *A*.

Observamos que el suceso *A* corresponde al resultado C_1 - P_2. Es decir, hay 1 resultado favorable. Y el número de resultados posibles es 6.

Si aplicamos la regla de Laplace, tenemos que la probabilidad del suceso *Llevar puesta camiseta roja y pantalón gris es* $P(A) = \frac{1}{6} = 0{,}167$.

Camisetas	***Pantalones***	***Resultados***
C_1	P_1	C_1 - P_1
	P_2	C_1 - P_2
C_2	P_1	C_2 - P_1
	P_2	C_2 - P_2
C_3	P_1	C_3 - P_1
	P_2	C_3 - P_2

- Las **tablas de contingencia** son tablas de doble entrada entre variables estadísticas. Se utilizan cuando se dispone de datos agrupados a los que puede accederse por dos vías.

	D	$\bar{D}$
H	300	150
M	275	275

Tabla 1.

ejemplo 9

La tabla 1 es una tabla de contingencia de una encuesta a 1 000 personas sobre si practican o no deporte. Las filas corresponden al sexo de los encuestados (H y M) *y las columnas corresponden a si practican o no deporte* (D y $\bar{D}$)*. ¿Qué probabilidad hay de ser hombre y practicar deporte?*

Si observamos la tabla, tenemos que el número de resultados totales es 1 000 y que el número de hombres que practican deporte es 300.

Si escogiéramos una de las personas encuestadas al azar, la probabilidad de ser hombre y practicar deporte sería $P(H \text{ y } D) = \frac{300}{1000} = 0{,}30$.

Actividades

12 Una rifa consiste en acertar un número de dos cifras formado por los dígitos 1, 2 y 3. ¿Qué probabilidad tenemos de que salga el número 33 si pueden repetirse las cifras? ¿Y si no pudieran repetirse?

13 Confecciona una tabla de contingencia de los compañeros y compañeras de clase en la que en las filas aparece el sexo y en las columnas si es diestro o zurdo. ¿Qué probabilidad hay de que al elegir al azar un alumno sea una chica zurda?

Simulaciones aleatorias con la computadora

En este apartado veremos cómo utilizar una hoja de cálculo para simular el experimento aleatorio *lanzar un dado.*

Encendemos la computadora y abrimos el programa. Aparece una hoja de cálculo vacía.

En ella vamos a escribir los comandos necesarios para que aparezcan los cálculos que observamos en la figura:

- Rango A2:J11. En cada una de estas celdas se genera un número entero aleatorio del 1 al 6.
- Rango M2:M7. Aparecen las frecuencias absolutas de los sucesos elementales {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}.
- Rango N2:N7. Aparecen las frecuencias relativas de los sucesos elementales {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1													n_i	N_i
2	3	3	1	4	5	3	1	5	6	5		1	18	0,18
3	5	2	3	3	6	3	4	6	2	4		2	17	0,17
4	1	5	2	5	3	3	1	2	6	5		3	22	0,22
5	1	6	2	2	6	3	3	3	2	4		4	10	0,10
6	3	6	1	3	2	5	5	2	2	6		5	16	0,16
7	4	6	5	4	3	5	2	1	1	1		6	17	0,17
8	5	2	1	3	2	2	4	3	6	2				
9	3	6	6	6	1	1	1	3	6	6				
10	2	4	5	1	5	5	5	3	1	6				
11	2	4	3	3	1	1	1	4	3	6				
12														

Los comandos empleados dependen del tipo de programa, pero en todos ellos son muy parecidos. Nosotros utilizaremos los comandos ALEATORIO, ENTERO y CONTAR.SI. Observa su descripción y busca en la ayuda del programa que uses los comandos equivalentes.

ALEATORIO()	Nos da un número aleatorio mayor o igual que 0 y menor que 1.
ENTERO(A)	Nos da la parte entera de *A*. *A* puede ser un número o una fórmula.
CONTAR.SI(rango;*n*)	Cuenta las veces que aparece el número *n* en el rango escrito.

La siguiente tabla muestra los comandos que debemos introducir en cada una de las celdas.

En la celda **A2** escribimos la fórmula = **ENTERO ALEATORIO(*6 + 1).** Volvemos a situarnos en la celda A2, copiamos su contenido, seleccionamos el rango A2:J11 y pegamos el contenido del portapapeles.
En la celda **M2** escribimos la fórmula = **CONTAR.SI(A2:J11;1).** En las siguientes celdas M3, M4, M5, M6 y M7 introducimos la misma función para contar los números 2, 3, 4, 5 y 6.
En la celda **N2** escribimos la fórmula = **M2/100.** Copiamos el contenido de la celda en las celdas N3, N4, N5, N6 y N7. Observamos que en la celda N3 aparece = M3/100, en la N4, = M4/100, etc.

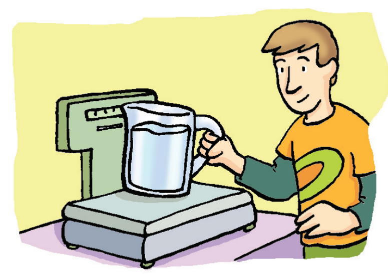
Cada vez que pulsamos la tecla F9 se reharán todos los cálculos y obtendremos la simulación correspondiente a lanzar cien veces un dado.

- Pulsa una vez F9 y observa las frecuencias obtenidas. Realiza el experimento *lanzar un dado* manualmente y compara los valores obtenidos mediante computador y manualmente. ¿Has obtenido resultados similares? ¿Qué ventajas e inconvenientes crees que presenta la simulación con computador?
- Pulsa diez veces la tecla F9. Anota cada vez la frecuencia absoluta de cada uno de los sucesos y súmalas al finalizar. De este modo, hemos obtenido las frecuencias absolutas de mil lanzamientos. Calcula las frecuencias relativas para cada uno de los sucesos y compáralas con las obtenidas anteriormente. ¿A qué número se acercan las frecuencias relativas al aumentar el número de realizaciones?

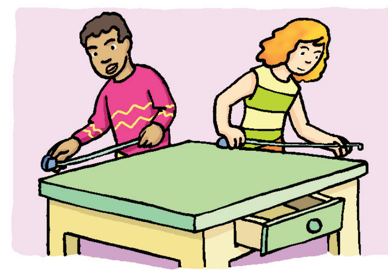
4 Magnitudes y su medida

Los chicos de la imagen realizan medidas.

La *longitud* de la valla es 6,57 m.



La *masa* de agua es 3 kg. La *capacidad* de la jarra es 3 l.



La *superficie* de la mesa es 1,8 m^2. El *volumen* del cajón es 0,025 m^3.

Las expresiones 6,57 m, 3 kg, 3 l, 1,8 m^2 y 0,025 m^3 son *medidas.*

La longitud, la masa, la capacidad, la superficie y el volumen son ejemplos de propiedades o características de los cuerpos que pueden medirse. Son ejemplos de *magnitudes.*

Magnitud es toda propiedad de un cuerpo que puede medirse.

Una **medida** es el resultado de comparar la cantidad de una magnitud que presenta un cuerpo con una cantidad fija considerada como **unidad.**

Así, cuando decimos que una mesa tiene una longitud de 3 palmos, estamos comparando la longitud de la mesa con la de nuestro palmo: la longitud de la mesa es tres veces mayor que la unidad empleada, el palmo.

Toda medida consta de un número y una unidad de medida:

Número ← **3** **palmos** → *Unidad de medida*

Medidas directas e indirectas

Una medida es directa si su valor se obtiene directamente del proceso de medición. Por ejemplo, la longitud de una cuerda.

Una medida es indirecta si se obtiene como resultado de una operación matemática entre medidas directas. Por ejemplo, la medida de la superficie de una finca.

4.1. Sistema Internacional de unidades

Hemos visto que podemos expresar la longitud de una mesa en palmos. Pero, dependiendo de la mano de la persona, el número de palmos no será el mismo, aunque midamos la misma mesa.

Para evitar confusiones, es preciso establecer un *sistema de unidades* de carácter universal.

Un **sistema de unidades** es un conjunto de unidades que permiten medir las distintas magnitudes.

En todo sistema de unidades distinguimos:

- **Unidades básicas.** Se definen por sí mismas y son independientes entre sí y del resto de unidades.
- **Unidades derivadas.** Se obtienen a partir de las unidades básicas.En la actualidad se utiliza el **Sistema Internacional de unidades (SI),** adoptado en la XI Conferencia General de Pesas y Medidas (París, 1960).

El SI consta de siete *unidades básicas*, que puedes observar en la tabla.

Magnitud	*Unidad*	*Símbolo*
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	amperio	A
Temperatura	kelvin	K
Cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

A partir de estas unidades básicas podemos obtener *unidades derivadas.*

Así, por ejemplo, al dividir la unidad básica *metro* entre la unidad básica *segundo* se obtiene la unidad de la velocidad, que es derivada.

$$\text{unidad de velocidad: } \frac{\text{metro}}{\text{segundo}} = \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{m/s}$$

Se lee *metro por segundo.*

Algunas unidades derivadas tienen nombre propio. Por ejemplo, el **litro** es una unidad de capacidad y se define como la capacidad de un cubo de 1 dm de arista.

CONTRAEJEMPLO

La yarda no es una unidad de medida de longitud del SI.

Actividades

14 Enumera tres magnitudes distintas de las que se han citado anteriormente.

15 En el siguiente párrafo hay una serie de expresiones que son medidas. Analízalas y, a continuación, completa la tabla en tu cuaderno.

«A los 15 minutos de salir de la escuela, Laura llega a su casa, que se encuentra a 200 m, se come un bocadillo de 100 g de pan con 50 g de jamón y bebe 0,25 l de agua.»

Magnitud	Medida	Unidad

5 Longitud, masa, capacidad, superficie y volumen

Como sabes, se trata de magnitudes, pues son propiedades de un cuerpo que podemos medir.

En este apartado estudiaremos las *unidades empleadas* para medir estas magnitudes, las *diferentes formas de expresar sus medidas* y un tipo especial de relación entre magnitudes, la *proporcionalidad directa*.

Eduardo ha saltado una longitud de 4,2 metros.

5.1. Unidades

Nos ocuparemos en primer lugar de la longitud, la masa y la capacidad, pues tienen un sistema de unidades similar.

Unidades de longitud

La **longitud** es una magnitud física que expresa la distancia entre dos puntos.

La unidad de longitud en el SI es el **metro.**

Pero el metro no es siempre la unidad más adecuada para realizar mediciones. Cuando queremos medir objetos muy grandes o muy pequeños, utilizamos múltiplos y submúltiplos de éste.

Fíjate en los múltiplos y los submúltiplos del metro.

	Nombre	Abreviatura	Equivalencias
Múltiplos	**kiló**metro	km	1 km = 1 000 m
	hectómetro	hm	1 hm = 100 m
	decámetro	dam	1 dam = 10 m
	metro	m	1 m
Submúltiplos	**decí**metro	dm	1 dm = 0,1 m
	centímetro	cm	1 cm = 0,01 m
	milímetro	mm	1 mm = 0,001 m

Prefijos del SI

Prefijo	*Equivalencia en unidades*
kilo (k)	1 000
hecto (h)	100
deca (da)	10
deci (d)	0,1
centi (c)	0,01
mili (m)	0,001

El metro, junto con sus múltiplos y sus submúltiplos, pertenece al **Sistema Internacional.** En él cada unidad de longitud es diez veces mayor que la inmediata inferior y diez veces menor que la inmediata superior.

$$\text{km} \underset{\div 10}{\overset{\times 10}{\rightleftarrows}} \text{hm} \underset{\div 10}{\overset{\times 10}{\rightleftarrows}} \text{dam} \underset{\div 10}{\overset{\times 10}{\rightleftarrows}} \textbf{m} \underset{\div 10}{\overset{\times 10}{\rightleftarrows}} \text{dm} \underset{\div 10}{\overset{\times 10}{\rightleftarrows}} \text{cm} \underset{\div 10}{\overset{\times 10}{\rightleftarrows}} \text{mm}$$

Según este esquema, para pasar de decámetros a centímetros, debemos multiplicar tres veces por 10. Así:

$$1 \text{ dam} = 10 \cdot 10 \cdot 10 \text{ cm} = 1\,000 \text{ cm}$$

Del mismo modo:

$$1 \text{ km} = 10\,000 \text{ dm} \qquad 1 \text{ mm} = 0{,}1 \text{ cm}$$

Para transformar unas unidades en otras empleamos los *factores de conversión.*

Un **factor de conversión** es un cociente entre dos cantidades equivalentes expresadas en diferentes unidades. Por tanto, su valor es uno y al multiplicar por él una medida, ésta no varía, aunque sí cambia de unidad.

Veamos un ejemplo de su utilización.

ejemplo 10

Expresa 4 hm en centímetros.

— Para pasar de hectómetros a centímetros debemos multiplicar 4 veces por 10, es decir, debemos multiplicar por 10 000. Así, se tiene:

$$1 \text{ hm} = 10\,000 \text{ cm}$$

— Escribimos esta equivalencia en forma de factor de conversión y operamos.

$$4 \text{ hm} = 4 \cancel{\text{hm}} \cdot \frac{10\,000 \text{ cm}}{1 \cancel{\text{hm}}} = 40\,000 \text{ cm}$$

4 hm equivalen a 40 000 cm.

Cuando las medidas están expresadas en unidades diferentes debemos convertirlas a una misma unidad antes de operar con ellas. Observa el siguiente ejemplo.

ejemplo 11

Si el segundo puesto de control de la maratón dista 101 452 dm del primero y el tercero dista 1 236,89 dam del segundo, ¿cuántos metros separan el primero y el tercer puestos?

Expresamos los 101 452 dm y los 1 236,89 dam en metros y efectuamos su suma.

$$\left.\begin{array}{l} 101\,452 \text{ dm} = 10\,145{,}2 \text{ m} \\ 1\,236{,}89 \text{ dam} = 12\,368{,}9 \text{ m} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 101\,452 \text{ dm} + 1\,236{,}89 \text{ dam} = \\ = 10\,145{,}2 \text{ m} + 12\,368{,}9 \text{ m} = 22\,514{,}1 \text{ m} \end{array}$$

El tercer puesto de control dista 22 514,1 m del primero.

Unidades para lo grande y lo pequeño

- Para medir distancias astronómicas utilizamos las siguientes unidades:
  - — El **año luz,** que equivale a:
    $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km
  - — La **unidad astronómica (UA),** que se define como la distancia media entre el Sol y la Tierra, y equivale a:
    $1{,}5 \cdot 10^{8}$ km
- Para medir distancias microscópicas utilizamos:
  - — El **micrómetro (μm),** que equivale a **0,001 mm.**

    El micrómetro también se llama **micra.**

Actividades

16 Completa en tu cuaderno:

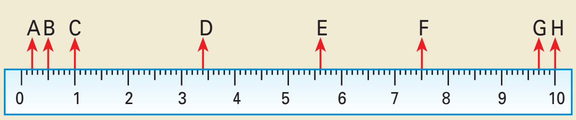
a) 1 hm = 100 m

b) 10 dm = ... hm

c) 0,1 cm = ... km

d) 0,01 dam = ... dm

17 Di qué medida, en milímetros y en centímetros, indican los puntos marcados en la regla.



18 Indica qué cantidades son mayores que 1 km.

a) 30 dam b) $4{,}5 \cdot 10^{7}$ mm c) 76 481 cm

19 Ordena de mayor a menor:

4 dm ; 0,3 dam ; 90 mm ; 120 m ; 0,7 km

20 Efectúa las siguientes operaciones en tu cuaderno.

21 dm + 37 cm = ... mm

700 dm + 0,4 km = ... dam

La masa de Carmen es de 45 kilogramos.

Unidades de masa

La **masa** es una magnitud física que expresa la cantidad de materia que contiene un cuerpo.

La unidad de masa en el SI es el **kilogramo,** un múltiplo del gramo. Observa cuáles son los múltiplos y los submúltiplos del gramo.

	Nombre	Abreviatura	Equivalencias
Múltiplos	**kilo**gramo	kg	1 kg = 1 000 g
	hectogramo	hg	1 hg = 100 g
	decagramo	dag	1 dag = 10 g
	gramo	g	1 g
Submúltiplos	**deci**gramo	dg	1 dg = 0,1 g
	centigramo	cg	1 cg = 0,01 g
	miligramo	mg	1 mg = 0,001 g

Unidades para lo grande y lo pequeño

Existen dos unidades mayores que el kilogramo muy utilizadas en la vida cotidiana: la **tonelada** (t) y el **quintal** (q).

1 t = 1 000 kg

1 q = 100 lb ≈ 45 kg

Para medir masas de átomos y moléculas se utiliza la **unidad de masa atómica** (u).

$1\ u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg

Como ocurre con las unidades de longitud, cada unidad de masa es diez veces mayor que la inmediata inferior y diez veces menor que la inmediata superior.

$$\text{kg} \underset{\div 10}{\overset{\times 10}{\rightleftarrows}} \text{hg} \underset{\div 10}{\overset{\times 10}{\rightleftarrows}} \text{dag} \underset{\div 10}{\overset{\times 10}{\rightleftarrows}} \textbf{g} \underset{\div 10}{\overset{\times 10}{\rightleftarrows}} \text{dg} \underset{\div 10}{\overset{\times 10}{\rightleftarrows}} \text{cg} \underset{\div 10}{\overset{\times 10}{\rightleftarrows}} \text{mg}$$

Para transformar unas unidades en otras utilizamos factores de conversión. Veamos un ejemplo.

ejemplo 12

Expresa 5 g en miligramos.

— Según el esquema anterior, para pasar de gramos a miligramos debemos multiplicar tres veces por 10, es decir, debemos multiplicar por 10^3. Así, se tiene:

$$1\ \text{g} = 1\,000\ \text{mg}$$

— Escribimos esta equivalencia como factor de conversión y obtenemos los miligramos.

$$5\ \text{g} = 5\ \cancel{\text{g}} \cdot \frac{1\,000\ \text{mg}}{1\ \cancel{\text{g}}} = 5000\ \text{mg}$$

Actividades

21 Efectúa en tu cuaderno las siguientes transformaciones.

a) 125,3 dag = 1 253 000 mg

b) 10 654 dg = ... q

c) 125 t = ... dag

22 Un camión tiene una capacidad de carga de 2 t y transporta una carga de 1 230 kg. Expresa ambas masas en hectogramos.

— ¿Cuál es la masa total del camión?

Trabaja en tu cuaderno.

Unidades de capacidad

La **capacidad** es una magnitud física que expresa la propiedad de un cuerpo de contener otros cuerpos.

La unidad de capacidad más utilizada es el **litro.**

Observa los múltiplos y los submúltiplos del litro.

La jarra contiene 2 litros de refresco de limón.

	Nombre	Abreviatura	Equivalencias
Múltiplos	**kilo**litro	kl	1 kl = 1 000 l
	hectolitro	hl	1 hl = 100 l
	decalitro	dal	1 dal = 10 l
	litro	l	1 l
Submúltiplos	**deci**litro	dl	1 dl = 0,1 l
	centilitro	cl	1 cl = 0,01 l
	mililitro	ml	1 ml = 0,001 l

En este caso también se cumple que cada unidad es diez veces mayor que la inmediata inferior y diez veces menor que la inmediata superior.

$$\text{kl} \underset{\div 10}{\overset{\times 10}{\rightleftarrows}} \text{hl} \underset{\div 10}{\overset{\times 10}{\rightleftarrows}} \text{dal} \underset{\div 10}{\overset{\times 10}{\rightleftarrows}} \text{l} \underset{\div 10}{\overset{\times 10}{\rightleftarrows}} \text{dl} \underset{\div 10}{\overset{\times 10}{\rightleftarrows}} \text{cl} \underset{\div 10}{\overset{\times 10}{\rightleftarrows}} \text{ml}$$

Como en los casos anteriores, podemos transformar unas unidades en otras mediante factores de conversión. Demostrémoslo con un ejemplo.

ejemplo 13

Expresa 20 ml en decalitros.

— Según el esquema anterior, para pasar de mililitros a decalitros debemos dividir cuatro veces por 10, es decir, debemos dividir por 10 000. Así se tiene:

$$1 \text{ ml} = 0{,}0001 \text{ dal}$$

— Escribimos esta equivalencia como factor de conversión y obtenemos los decalitros.

$$20 \text{ ml} = 20 \cancel{\text{ml}} \cdot \frac{0{,}0001 \text{ dal}}{1 \cancel{\text{ml}}} = 0{,}002 \text{ dal}$$

Actividades

23 Efectúa las siguientes transformaciones.

a) 1 470,5 cl = 0,014 705 kl

b) 167,9 ml = ... hl

c) 0,036 cl = ... cm^3

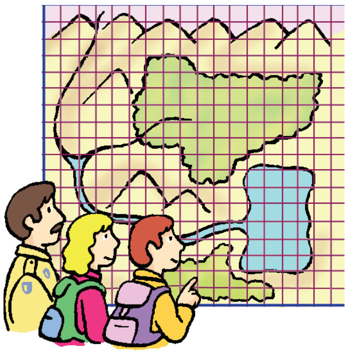
24 Una persona bebe en un día 500 ml de leche, 1 l de agua y 25 cl de zumo de frutas. Otra persona bebe 250 ml de leche, 1,5 l de agua y 30 cl de zumo.

— Expresa en litros y en cm^3 cada una de estas cantidades.

— ¿Cuál de los dos toma más líquido en un día?

Ahora, nos ocuparemos de la superficie y el volumen, cuyo sistema de unidades se construye a partir del correspondiente sistema de longitudes.

Unidades de superficie

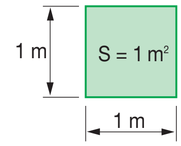


El área del estanque es de 24 m².

Llamamos **superficie** a la parte más externa de un cuerpo, que lo separa de lo que lo rodea. La medida de la extensión que ocupa una superficie se llama **área.**

La unidad de superficie en el Sistema Internacional es la unidad derivada del metro, el *metro cuadrado* (m^2).

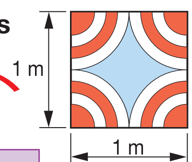
El **metro cuadrado** es la medida de la superficie de un cuadrado de 1 m de lado.



$$S = 1\ m \cdot 1\ m = 1\ m^2$$

Al igual que en otras magnitudes, existen también los múltiplos y los submúltiplos del metro cuadrado.

múltiplos ← → **submúltiplos**



kilómetro cuadrado (km^2)	*hectómetro cuadrado (hm^2)*	*decámetro cuadrado (dam^2)*	**metro cuadrado (m^2)**	*decímetro cuadrado (dm^2)*	*centímetro cuadrado (cm^2)*	*milímetro cuadrado (mm^2)*

Unidades agrarias

Se usan habitualmente para medir extensiones de cultivo o de bosque.

Hectárea	1 ha = 1 hm^2
Área	1 a = 1 dam^2
Centiárea	1 ca = 1 m^2

Cada unidad de superficie es cien veces mayor que la inmediata inferior y cien veces menor que la inmediata superior.

$$km^2 \underset{\div 100}{\overset{\times 100}{\rightleftarrows}} hm^2 \underset{\div 100}{\overset{\times 100}{\rightleftarrows}} dam^2 \underset{\div 100}{\overset{\times 100}{\rightleftarrows}} m^2 \underset{\div 100}{\overset{\times 100}{\rightleftarrows}} dm^2 \underset{\div 100}{\overset{\times 100}{\rightleftarrows}} cm^2 \underset{\div 100}{\overset{\times 100}{\rightleftarrows}} mm^2$$

Estas relaciones nos permiten transformar unas unidades de superficie en otras usando factores de conversión.

FÍJATE

Puesto que 100 = 10^2 y que 10 000 = 10^4, entonces:

$$\overbrace{km^2 \xrightarrow{\times 10^2} hm^2 \xrightarrow{\times 10^2} dam^2}^{\times 10^4}$$

ejemplo 14

Expresa 32 km^2 en decámetros cuadrados.

— Según el esquema anterior, para pasar de kilómetros cuadrados a decámetros cuadrados debemos multiplicar dos veces por 100, es decir, debemos multiplicar por 10^4. Así se tiene:

$$1\ km^2 = 10^4\ dam^2$$

— Escribimos esta equivalencia como factor de conversión y obtenemos los decámetros cuadrados.

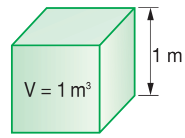
$$32\ km^2 = 32\ \cancel{km^2} \cdot \frac{10^4\ dam^2}{1\ \cancel{km^2}} = 320\,000\ dam^2$$

Unidades de volumen

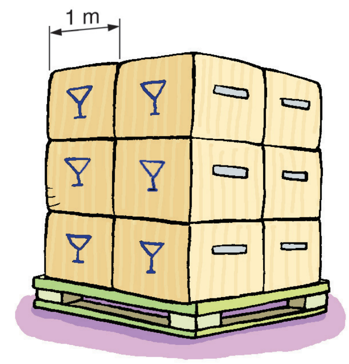
El **volumen** de un cuerpo es la medida del espacio que ocupa.

La unidad de volumen en el Sistema Internacional es la unidad derivada del metro, el *metro cúbico* (m^3).

Un **metro cúbico** es la medida del espacio que ocupa un cubo de 1 m de arista.



$$V = 1\ \text{m} \cdot 1\ \text{m} \cdot 1\ \text{m} = 1\ \text{m}^3$$



■ *La pila de cajas ocupa un volumen de 12 m^3.*

Observa cuáles son los múltiplos y los submúltiplos del metro cúbico.

múltiplos **submúltiplos**

kilómetro cúbico (km^3)	*hectómetro cúbico (hm^3)*	*decámetro cúbico (dam^3)*	**metro cúbico (m^3)**	*decímetro cúbico (dm^3)*	*centímetro cúbico (cm^3)*	*milímetro cúbico (mm^3)*

Cada unidad de volumen es mil veces más grande que la inmediata inferior y mil veces más pequeña que la inmediata superior.

$$\text{km}^3 \underset{\div\,1\,000}{\overset{\times\,1\,000}{\rightleftarrows}} \text{hm}^3 \underset{\div\,1\,000}{\overset{\times\,1\,000}{\rightleftarrows}} \text{dam}^3 \underset{\div\,1\,000}{\overset{\times\,1\,000}{\rightleftarrows}} \textbf{m}^3 \underset{\div\,1\,000}{\overset{\times\,1\,000}{\rightleftarrows}} \text{dm}^3 \underset{\div\,1\,000}{\overset{\times\,1\,000}{\rightleftarrows}} \text{cm}^3 \underset{\div\,1\,000}{\overset{\times\,1\,000}{\rightleftarrows}} \text{mm}^3$$

Estas relaciones nos permiten transformar unas unidades de volumen en otras usando factores de conversión.

ejemplo 15

Expresa 254 000 cm^3 en metros cúbicos.

— Para pasar de centímetros cúbicos a metros cúbicos debemos dividir dos veces por 1 000, es decir, debemos dividir por 10^6. Así se tiene:

$$1\ \text{cm}^3 = 0{,}000\,001\ \text{m}^3$$

— Escribimos esta equivalencia como factor de conversión y operamos:

$$254\,000\ \text{cm}^3 = 254\,000\ \cancel{\text{cm}^3} \cdot \frac{0{,}000001\,\text{m}^3}{1\ \cancel{\text{cm}^3}} = 0{,}254\ \text{m}^3$$

Relación entre las unidades de capacidad y volumen

El volumen y la capacidad se relacionan de una forma invariable.

En un recipiente cúbico de 1 dm de arista cabe exactamente 1 litro de agua.

Esto conduce a las siguientes equivalencias entre las unidades de capacidad y volumen:

$$1\ \text{l} = 1\ \text{dm}^3$$

O, lo que es igual:

$$1\ \text{ml} = 1\ \text{cm}^3$$

Actividades

25 Halla la equivalencia en cm^2 de estas medidas.

0,250 dm^2 ; 27,2 m^2 ; 1 547 mm^2 ; 0,38 m^2

26 Expresa en metros cúbicos las medidas siguientes.

75 dm^3 ; 8,34 dam^3 ; 0,015 km^3 ; 748 000 mm^3

Cómo resolver problemas

A Un experimento aleatorio consiste en lanzar simultáneamente al aire una moneda y un dado.

a) ¿Cuántos resultados posibles pueden obtenerse?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda y el dado simultáneamente?

Comprensión del enunciado

Vuelve a leer atentamente el enunciado y anota qué se pide en cada uno de los casos.

Planificación de la resolución

a) Al tratarse de un experimento compuesto por dos experimentos simples determinaremos el número de resultados posibles y el número de resultados favorables al suceso a partir de un diagrama en árbol.

b) Asociaremos la probabilidad del suceso al valor que tiende la frecuencia para un número elevado de realizaciones del experimento y la calcularemos a partir del número de resultados previsibles.

Ejecución del plan de resolución

a) Dibujamos el diagrama en árbol para determinar el número de resultados posibles del experimento.

Moneda	Dado	Resultados
c	1	c - 1
	2	c - 2
	3	c - 3
	4	c - 4
	5	c - 5
	6	c - 6
x	1	x - 1
	2	x - 2
	3	x - 3
	4	x - 4
	5	x - 5
	6	x - 6

Así pues, el número de resultados posibles es 12.

b) Designamos como suceso *A: Obtener cara al lanzar la moneda y el dado simultáneamente.*

El suceso $A = \{c - 1, c - 2, c - 3, c - 4, c - 5, c - 6\}$. Así pues, el número de resultados favorables a obtener cara al lanzar la moneda y el dado es 6.

Podemos considerar que la frecuencia relativa del suceso tiende a $\frac{6}{12} = 0{,}50$. Por lo tanto, $P(A) = 0{,}50$.

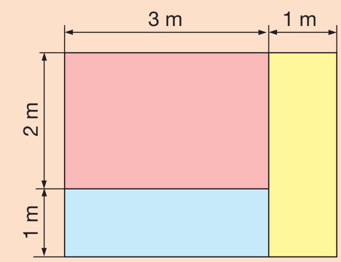
Revisión del resultado y del proceso seguido

Repasamos el diagrama en árbol construido y los cálculos empleados en la determinación de la probabilidad.

Actividades

27 Efectuamos el experimento *lanzar dos monedas a la vez.* Indica los resultados posibles del experimento y calcula la probabilidad de *obtener dos caras.*

B Lanzamos al aire una piedra que cae dentro de este rectángulo.



¿Qué probabilidad tenemos de que la piedra caiga en el rectángulo azul?

Comprensión del enunciado

Vuelve a leer atentamente el enunciado y anota qué se pide en él.

Planificación de la resolución

Observamos la figura y asociamos la probabilidad al porcentaje de área que ocupa el rectángulo azul.

Ejecución del plan de resolución

Calculamos el área del rectángulo grande, A_1.

$$A_1 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ m}^2$$

Calculamos el área del rectángulo azul, A_2.

$$A_2 = 3 \cdot 1 = 3 \text{ m}^2$$

Asociamos la probabilidad de que la piedra caiga en el rectángulo azul a partir del porcentaje de área que ocupa el rectángulo azul respecto al área del rectángulo grande.

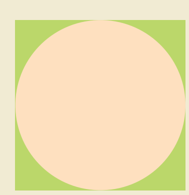
$$P = \frac{3}{12} = 0{,}25$$

Revisión del resultado y del proceso seguido

Repasamos los cálculos efectuados.

Actividades

28 ¿Qué probabilidad tenemos de que un objeto lanzado al aire caiga dentro del círculo interior de este cuadrado?



29 Comenta tu respuesta en clase.

En resumen

1 Un **experimento determinista** es aquél cuyo resultado puede predecirse.

2 Un **experimento aleatorio** es aquél cuyo resultado no puede predecirse.

3 Cada uno de los resultados posibles que pueden obtenerse en un experimento aleatorio se llama **suceso elemental.**

4 El **espacio muestral** es el conjunto de todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio. Se representa por la letra griega Ω.

5 Un **suceso** es cada uno de los aspectos que pueden estudiarse al realizar un experimento aleatorio y es un subconjunto del espacio muestral del experimento aleatorio.

6 Las **técnicas de recuento** son un abanico de recursos matemáticos que forman parte de la combinatoria y facilitan el cálculo o recuento de posibilidades.

7 Dado un suceso *A* de un experimento aleatorio, su **probabilidad** es el valor hacia el que tienden las frecuencias relativas de *A* al aumentar el número de realizaciones del experimento.

• Entre todas las propiedades de la probabilidad cabe destacar aquella que relaciona la de un suceso *A* y la de su suceso contrario $\bar{A}$.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

8 En una situación de equiprobabilidad, la **regla de Laplace** nos permite calcular la probabilidad de un suceso *A* mediante l

$$P(A) = \frac{\textbf{Número de resultados favorables a } A}{\textbf{Número de resultados posibles}}$$

9 Dados dos sucesos *A* y *B*, con $P(A) \neq 0$, la **probabilidad de *B* condicionada a *A*,** *P*(*B*/*A*), es igual al cociente:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

10 De la probabilidad condicionada se deriva una fórmula que resulta muy útil en el cálculo de probabilidades en experimentos compuestos, el **principio de la probabilidad compuesta:**

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

○ Una **magnitud** es cualquier propiedad de un cuerpo que puede medirse.

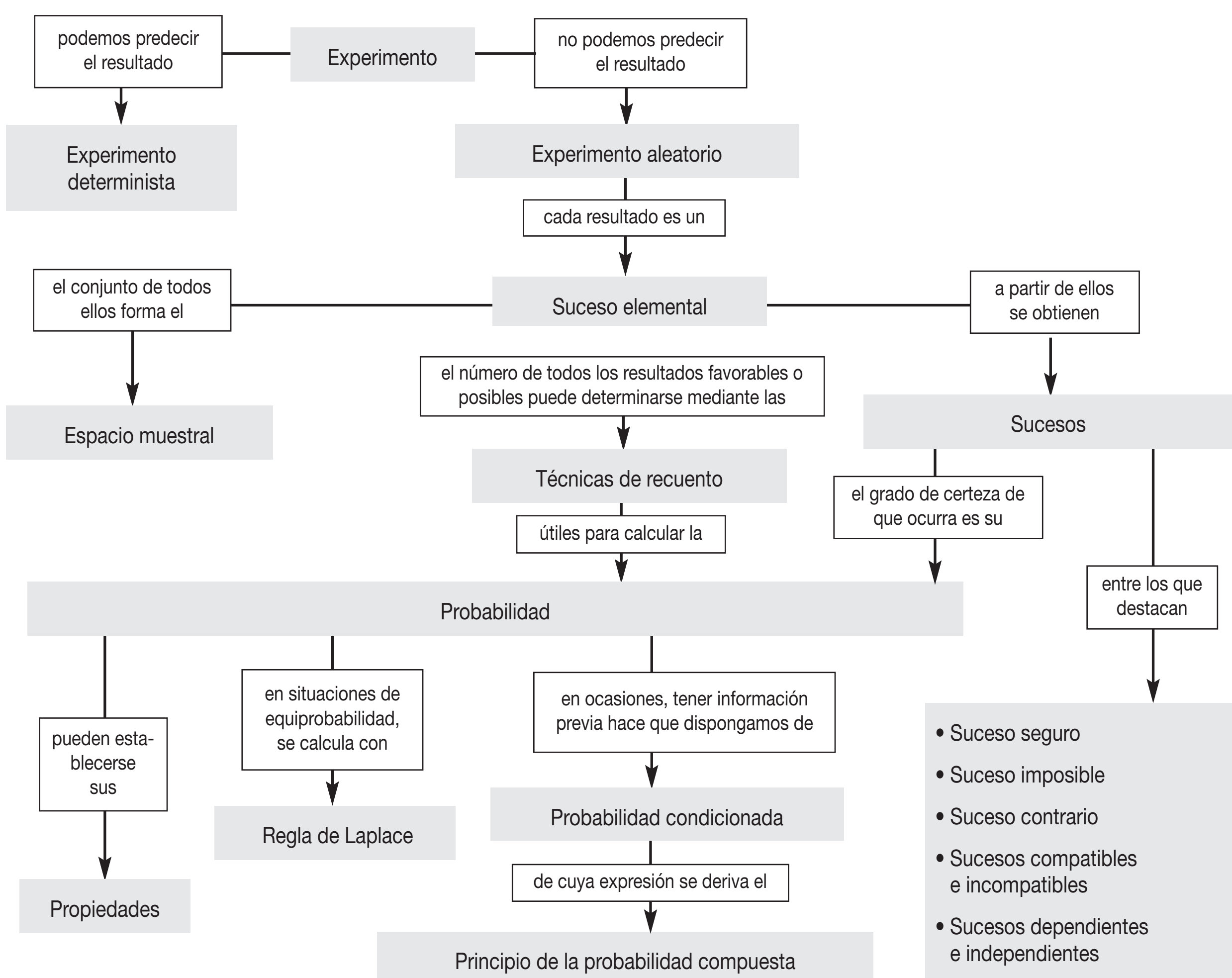
Una **medida** es el resultado de comparar la cantidad de una magnitud que presenta un cuerpo con una cantidad fija considerada como **unidad.**

○ Un **sistema de unidades** es un conjunto de unidades que permiten medir las distintas magnitudes.

En la actualidad se utiliza habitualmente el **Sistema Internacional de unidades (SI).**

Algunas unidades de uso frecuente son:

Longitud ------------------------- el metro (m)
Masa ----------------------------- el kilogramo (kg)
Capacidad ----------------------- el litro (l)
Superficie ----------------------- el metro cuadrado (m^2)
Volumen ------------------------- el metro cúbico (m^3)



Ejercicios y problemas integradores

- Existe la feria de Matemática en el Colegio de Juan y Alexandra, ellos han propuesto realizar un bingo (juego de azar), el cual consiste en acertar un determinado número de elementos de un total de 10 (numerados del 1 al 10). Juan propone que sean 7 los números que se escriban en la cartilla, mientras que Alexandra propone que sean 8 los números impresos en la cartilla. Además se ha previsto que con la venta de 80 boletos se financia el premio.

¿Qué probabilidad de ganar tienes si se imprimen 7 números? ¿Y si son 8? ¿En cuál de las dos propuestas se tiene mayor probabilidad de ganar?¿Tendrán problemas Juan o Alexandra en sus propuestas?

Solución

Para iniciar, ratifiquemos que la probabilidad es la razón entre el número de resultados favorables de un suceso entre el número de resultados posibles. En el caso de sacar un determinado número del total de diez números se tiene una probabilidad $P = \frac{1}{10}$

Además se observa que en el presente problema el orden con el que se extraigan los números no son relevantes, el objetivo es que se tengan los números pedidos, 7 según la propuesta de Juan y 8 la de Alexandra.

Ahora para ayudarle a Juan, quien propone que con 7 números escogidos de un total de 10, calcularemos su probabilidad de ganar.

El primer número del juego tiene 7 resultados favorables (cualquiera de los 7 números esperados) de un total de 10 resultados posibles (de los 10 números del juego), entonces: $P_1 = \frac{7}{10}$

Para el segundo número se tiene 6 resultados favorables (ya se obtuvo un primer número) de un total de 9 resultados posibles (ya se extrajo un número), entonces: $P_2 = \frac{6}{9}$

El tercer número tiene 5 resultados favorables (ya se obtuvieron dos números) de un total de 8 resultados posibles (ya se extrajo dos números), entonces: $P_3 = \frac{5}{8}$

Con el mismo razonamiento y hasta obtener el séptimo número tendremos las probabilidades siguientes:

$P_4 = \frac{4}{7}$; $P_5 = \frac{3}{6}$; $P_6 = \frac{2}{5}$ y ; $P_7 = \frac{1}{4}$

Con todas las probabilidades calculadas para cada número, calcularemos la probabilidad compuesta: $P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 \cdot P_5 \cdot P_6 \cdot P_7$

Reemplacemos los valores:

$$P = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{120}$$

Concluimos que un boleto de cada ciento veinte vendidos tiene la posibilidad de ganar.

Una vez conocida la mecánica del cálculo ayudemos a Alexandra, quien propuso 8 números.

El primer número del juego tiene 8 resultados favorables de un total de 10 resultados posibles: $P_1 = \frac{8}{10}$ El segundo número tiene 7 resultados favorablesde un total de 9 resultados posibles:, $P_2 = \frac{7}{9}$. Y los otros son:

$$P_3 = \frac{6}{8};\ P_4 = \frac{5}{7};\ P_5 = \frac{4}{6};\ P_6 = \frac{3}{5};\ P_7 = \frac{2}{4} \text{ y } P_8 = \frac{1}{3}$$

Con todas las probabilidades parciales, ocho en esta propuesta, calculemos la probabilidad compuesta: $P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 \cdot P_5 \cdot P_6 \cdot P_7 \cdot P_8$

Reemplacemos los valores:

$$P = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{1}{45}$$

Concluimos que un boleto de cada cuarenta y cinco vendidos tiene la posibilidad de ganar.

Alexandra y Juan concluyen que la propuesta de ella tiene mayor probabilidad de ganar pues $\frac{1}{45} > \frac{1}{120}$.

Así mismo concluyen que la propuesta de Alexandra tiene inconvenientes, pues deben vender 80 boletos, y para obtener el premio bastan 45. En cambio con la de Juan si venden 120 boletos para que uno gane, le da una ganancia de 40 boletos.

- Dos mineros extraen oro aluvial (procedente de los ríos), el primer día Alberto extrae 2,89 *g* y el segundo día 2,43 *g* ; en cambio Martín obtiene 26,1 *dg* de oro cada día, ellos desean saber quién extrajo mayor cantidad de oro en los dos días de labor.

Solución

Primero debemos calcular el total de la producción de cada minero, luego convertir a una misma unidad de masa y comparar los valores.

Extracción de Alberto:

Día 1: 2,89 *g*
Día 2: 2,43 *g*
Total: 5,32 *g*

Extracción de Martín:

Día 1: 26,1*g*
Día 2: 26,1 *g*
Total: 52,2 *g*

Transformando lo extraído por Martín a gramos se tiene 52,2 *dg* =5,22 *g*.

Comparando se determina que Alberto que extrajo 5,32 *g* obtuvo más oro que Martín quien extrajo 5,22 *g*.

Comprensión de conceptos y conocimiento de procesos

Conceptos iniciales

30 Indica si los siguientes experimentos son aleatorios o deterministas, y explica por qué.

a) *Repartir una mano de* cuarenta *y mirar las cartas que nos han tocado.*

b) *Mezclar pinturas amarilla y azul, y observar qué color obtenemos.*

c) *Determinar la presión a la que se encontrará un submarinista a 25 m de profundidad.*

31 Escribe el espacio muestral de estos experimentos.

a) *Lanzar una moneda*.

b) *Lanzar dos monedas.*

c) *Lanzar un dado con forma de dodecaedro.*

d) *Extraer una bola de una bolsa que contiene cinco bolas numeradas del 1 al 5.*

32 Escribe el espacio muestral del experimento consistente en hacer girar la siguiente ruleta y observar sobre qué número se detiene la bola.

— Determina qué números corresponden al suceso *Obtener color rojo y número par en la ruleta.*

33 ¿Es cierto que dos sucesos contrarios son siempre incompatibles? Razona tu respuesta y pon un ejemplo.

34 Cogemos una carta de la baraja. Indica los resultados favorables a cada uno de los siguientes sucesos.

A: Obtener tréboles.

B: No obtener una letra.

C: Obtener un 5.

D: Obtener una figura que no sea un rey.

— Indica el suceso contrario al suceso *A*.

35 Considera el experimento *sacar una bola de una bolsa con diez bolas numeradas del 1 al 10.* Describe dos sucesos compatibles y dos sucesos incompatibles de dicho experimento.

Concepto de probabilidad

36 ¿Cuál es la frecuencia relativa del suceso seguro? ¿Y la del suceso imposible?

37 Pinta de distinto color tres fichas iguales e introdúcelas en una bolsa opaca. Repite ciento cincuenta veces la operación de extraer una ficha, apuntar el color y volver a introducir la ficha en la bolsa.

Completa la siguiente tabla estadística para cada cincuenta extracciones. Trabaja en tu cuaderno.

Suceso	Frecuencias	Extracciones		
		50	100	150
Color 1	Absoluta	....	....	....
	Relativa	....	....	....
Color 2	Absoluta	....	....	....
	Relativa	....	....	....
Color 3	Absoluta	....	....	....
	Relativa	....	....	....

— ¿Hacia qué valores se aproximan las frecuencias relativas?

38 Entra en esta dirección de Internet: http://www.shodor.org/interactivate/activities/spinner3/index.html. Comprueba la ley de los grandes números.

39 La probabilidad de un suceso *A* es $P(A) = 0{,}8$. ¿Cuál es la probabilidad del suceso contrario $\bar{A}$?

Cálculo de probabilidades

40 ¿Qué significa que los sucesos elementales de un experimento aleatorio son equiprobables? Pon un ejemplo.

41 Considera el experimento aleatorio *sacar una bola de una urna que contiene diez bolas numeradas del 1 al 10* y los siguientes sucesos:

A: Sacar un número menor o igual que 10.

B: Sacar un número par.

C: Sacar un número menor que 10.

D: Sacar un 10.

E: No sacar un número menor que 11.

F: Sacar un número menor que 3.

G: Sacar un número menor que 7.

Ordénalos según la siguiente escala de ocurrencia:

imposible, muy improbable, improbable, tan probable como improbable, probable, muy probable, seguro.

42 Razona qué es más probable al lanzar una moneda cuatro veces: que salgan dos caras y dos cruces, o que salgan tres caras y una cruz.

Probabilidad de experimentos compuestos

43 Explica qué quiere decir que la posibilidad de un suceso *A* está condicionada a un suceso *B*. Relaciónalo con los sucesos dependientes e independientes. Pon un ejemplo.

44 Considera el experimento *lanzar un dado y dos monedas.* Representa los diferentes sucesos elementales mediante un diagrama en árbol y, a partir de él, calcula la probabilidad de los sucesos *A: obtener un número mayor que 4 y dos caras* y *B: obtener una cara y una cruz, sin que importe el orden.*

45 Consideramos dos urnas, la primera que contiene dos bolas blancas y tres rojas y la segunda una bola blanca y cuatro rojas.

Lanzamos una moneda y, si sale cara, elegimos al azar una bola de la primera urna; mientras que si sale cruz, elegimos al azar una bola de la segunda urna. Calcula la probabilidad de:

a) *Obtener bola roja.*

b) *Obtener bola roja, si se ha obtenido cara.*

c) *Obtener bola roja, si se ha obtenido cruz.*

Conversión de unidades:

46 Expresa en metros las siguientes medidas de longitud: 15 cm; 25 mm; 16 km; 0,1 hm; 5,6 dam.

47 Expresa en kilogramos:

36 t - 475,3 q - 6,7 t - 0,08 t - 123,4 q

48 Completa en tu cuaderno:

a) 5 dl = ... kl	d) 1,5 hg = ... dg
b) 45 hm = ... cm	e) 371 ml = ... dal
c) 5 q = ... kg	f) 64,3 cm = ... hm

49 Ordena de menor a mayor: 3 800 dag; 6,9 hg; 7 800 cg; 0,89 hg; 0,036 kg.

50 Completa en tu cuaderno:

a) 0,000 000 1424 km^3 = ... dm^3

b) 0,024 867 dam^3 = ... mm^3

c) 265 435 m^3 = ... hm^3

51 *Expresa en centilitros:*

a) 4 dal 5 l *b) 6 l 9 ml*

a) $4 \text{ dal} = 4 \cancel{\text{dal}} \cdot \dfrac{1000 \text{ cl}}{1 \cancel{\text{dal}}} = 4000 \text{ cl}$

$5 \text{ l} = 5 \cancel{\text{l}} \cdot \dfrac{100 \text{ cl}}{1 \cancel{\text{l}}} = 500 \text{ cl}$

4 000 cl + 500 cl = 4 500 cl

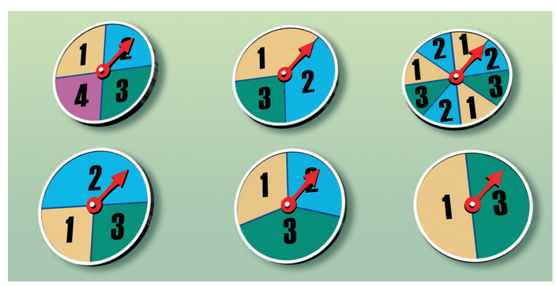
b) 6 l = 6 l · $\dfrac{\text{..........}}{\text{..........}}$ = ... cl

9 ml = 9 ml · $\dfrac{\text{..........}}{\text{..........}}$ = ... cl

.... cl + ... cl = ... cl

Aplicación en la práctica

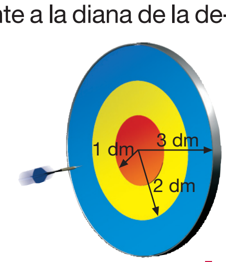
52 Indica en cuál o cuáles de las siguientes ruletas los sucesos *A: Obtener un 1* y *B: Obtener un 3* son equiprobables.



53 Calcula la probabilidad de obtener una bola roja de cada uno de estos sacos.

54 Lanzamos un dardo aleatoriamente a la diana de la derecha.

Calcula, a partir de las áreas, las probabilidades de que el dardo se clave en el círculo rojo o en las distintas coronas circulares.



55 Observa a tus compañeros y compañeras de clase, y completa en tu cuaderno esta tabla.

Sexo \ Color de pelo	Oscuro	Claro
Chico		
Chica		

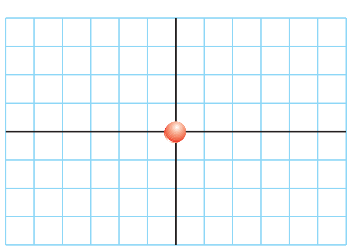
— Si escogemos al azar a un compañero o compañera, ¿qué probabilidad tenemos de que sea un chico de cabello claro?

56 Paula dispone de cuatro camisetas, tres pantalones y dos pares de zapatillas.

a) Construye un diagrama en árbol que describa las distintas posibilidades que tiene de vestirse.

b) ¿De cuántas formas diferentes puede vestirse?

57 Colocamos una ficha en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas y realizamos el experimento aleatorio que consiste en *lanzar un dado tetraédrico y sumar los puntos que no corresponden al vértice superior*.



Los movimientos que debe realizar la ficha según la suma obtenida se indican en esta tabla.

Suma	Movimientos
6	Avanzar 1 unidad hacia el Norte.
7	Avanzar 1 unidad hacia el Oeste.
8	Avanzar 1 unidad hacia el Sur.
9	Avanzar 1 unidad hacia el Este.

Después de lanzar sesenta veces el dado, obtenemos los resultados de la derecha.

Suceso	Frecuencia absoluta
6	16
7	
8	14
9	15

a) Indica la posición final de la ficha después de sesenta lanzamientos.

b) Completa la tabla con las frecuencias relativas de cada suceso.

c) ¿Qué probabilidad atribuirías a cada uno de los sucesos?

58 Formen un grupo con dos compañeros o compañeras, diseñen y realicen mediante el computador uno de los siguientes experimentos aleatorios.

a) *Lanzar una moneda.*

b) *Lanzar un dado (1, X, 2).*

c) *Sacar una bola de una caja que contiene 10 bolas numeradas del 1 al 10.*

— Efectúen el experimento cien veces y determinen si la frecuencia relativa obtenida de cada suceso elemental se aproxima a su probabilidad.

59 Para llevar a cabo una actividad de plástica, Laura compra 3,20 m de cinta blanca a $ 0,80 el metro, 25,5 dm de cinta azul a $ 0,60 el metro y 1 m 5 dm de cinta verde a $ 0,90el metro.

a) ¿Cuántos metros ha comprado?

b) ¿Cuál es el importe total de la compra?

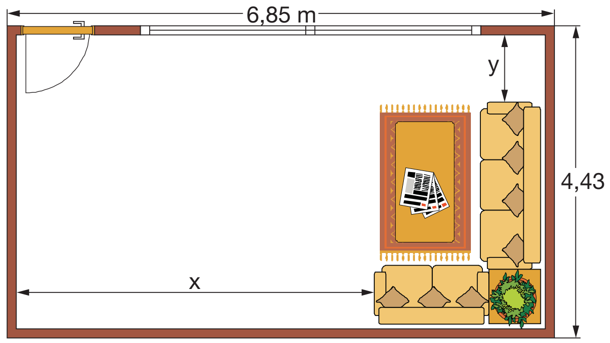
60 El 10 % del agua de un recipiente expuesto al sol se ha evaporado. Si inicialmente contenía 23 l 46 cl, ¿cuántos centilitros se han evaporado? ¿Cuántos litros de agua quedan en el recipiente?

61 Un bosque de eucaliptos tiene una extensión de 21 ha 14 a. Un bosque de pumamaqui ocupa una superficie de 245 000 m^2. ¿Qué bosque tiene mayor extensión? Expresa la diferencia en centiáreas.

62 Di qué capacidad tiene un vaso de 0,25 dm^3 de volumen si no se tiene en cuenta el volumen que ocupan las paredes.

— Si el vaso tuviese unas paredes muy gruesas que ocupasen 20 cm^3, ¿cuál sería su capacidad?

63 Las medidas de un salón rectangular son 6 m 85 cm de largo y 4 m 43 cm de ancho. En dicho salón se coloca un sofá de tres plazas de 2 m de largo y 0,85 m de ancho y uno de dos plazas de 1,50 m de largo y 0,85 m de ancho tal como se observa en la figura. Halla las medidas *x* e *y*.

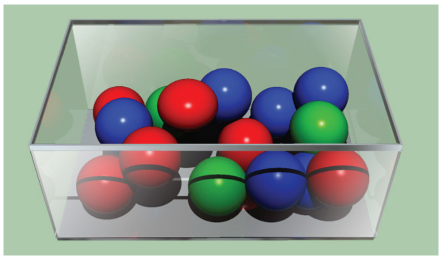


Más a fondo

64 Una caja contiene bolas rojas, azules y verdes. Determina su composición si contiene más de 10 bolas y menos de 20, y además sabemos que:

a) La probabilidad de sacar una bola roja es la misma que la de sacar una bola azul.

b) La probabilidad de sacar una bola verde es la mitad que la de sacar una bola azul.



65 Gracias a unos estudios realizados se sabe que el 4 % de los habitantes de una provincia no tiene ningún tipo de teléfono, que el 96 % tiene teléfono en su casa y que la sexta parte de los que tienen teléfono en su casa también tiene teléfono celular.

a) ¿Qué porcentaje de habitantes de la provincia tiene teléfono celular?

b) Si se escoge un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga teléfono en su casa? ¿Y de que tenga teléfono celular? ¿Y de que no tenga ningún tipo de teléfono?

c) En un pueblo de esta provincia con 1 500 habitantes, ¿cuántos es previsible que tengan teléfono en su casa? ¿Y que tengan teléfono celular? ¿Y que no tengan ningún tipo de teléfono?

66 Se tienen tres pesos, P_1, P_2, P_3, que cumplen:

a) La suma de los tres pesos es 1 kg.

b) El peso P_1 menos 10 dag es dos veces el peso P_3.

c) La suma de los pesos P_2 y P_3 entre 2 es el 50 % del peso P_1.

¿Cuál es la medida de cada peso?

67 Si un cubo macizo de un metro de arista tiene una masa de 80 hg, ¿cuál será la masa de un cubo del mismo material de 50 cm de arista?

— Expresa la densidad del cubo en unidades del SI.

68 Formen grupos y averiguen cómo se medían, en nuestro país, antiguamente la leche, el aceite y el agua y cuáles eran las medidas de volumen usadas. A continuación, lleven a cabo el mismo estudio con las medidas de volumen que se usan en la actualidad.

— Preparen un informe en el que se comparen las unidades de medida de volumen antiguas y actuales.

— Hagan constar las razones por las que el aceite y la leche se vendían en diferentes unidades de medida de volumen en la antigüedad.

— Analicen por qué ha cambiado la forma como se vende el agua en la actualidad y cómo se vendía antiguamente.

— Preparen una presentación con diapositivas y expónganla ante la clase. Comenten su opinión acerca de las medidas de volumen y de la importancia de los productos que se han utilizado para esta actividad.

Autoevaluación

Coevaluación

Si logras resolver el 70 % de estas actividades individuales y grupales, puedes avanzar.

Autoevaluación

1. El experimento *lanzar una tachuela y observar la posición que adopta al caer* es:

a) Determinista.

b) Incompleto.

c) Aleatorio.

2. Efectuamos el experimento *sacar una bola de una caja opaca en la que hay cinco bolas numeradas del 1 al 5.*

¿Qué nombre recibe el suceso *A: Sacar una bola con un número mayor o igual que 1?*

3. Efectuamos quinientas extracciones de una bolsa en la que hay una bola azul y otra blanca.

Sabemos que la frecuencia absoluta del suceso *A: Sacar bola blanca* es 245.

¿Cuál será la frecuencia relativa del suceso *B: Sacar bola azul?*

4. Clasifica las siguientes propiedades de un objeto según puedan medirse o no:

a) la masa

b) la utilidad

c) la altura

d) la forma

e) el espacio que ocupa

Coevaluación

1. Efectuamos el experimento *lanzar dos veces consecutivas una moneda y apuntar los resultados en el orden en que aparecen.* Si en la primera realización del experimento obtenemos *x c,* ¿cuál de los siguientes sucesos se verifica?

a) *A: No sacar cruz.*

b) *B: Sacar al menos dos cruces.*

c) *C: No sacar dos cruces.*

2. Completa en tu cuaderno la siguiente definición.

La probabilidad de un suceso es la medida del grado de .... de que ocurra.

3. Ordena de menos probable a más probable estos sucesos correspondientes a distintos experimentos aleatorios.

A: Acertar un número del 1 al 9.

B: Obtener cruz al lanzar una moneda.

C: Sacar una bola roja de una bolsa que contiene bolas azules.

D: Sacar una bola blanca de una bolsa que contiene bolas blancas numeradas.

4. Efectúa estas transformaciones.

a) 15 hg = ... dg

b) 45,6 km = ... cm

c) 567 ml = ... dl

d) 23,4 t = ... hg

e) 68,98 m^2 = ... cm^2

f) 5 700 mm^3 = ... dm^3

Buen Vivir

Derecho a la educación

Escoger una carrera, profesión u oficio es un paso muy importante en la vida de una persona porque de esto dependerá el camino a seguir durante mucho tiempo. Sin embargo, debido a la importancia de la decisión, suele ser una tarea difícil. Por este motivo, es necesario que, poco a poco, cada uno comience a descubrir sus intereses e inclinaciones laborales, con un ligero examen sobre las reales capacidades: ¿cómo es mi personalidad?, ¿para qué me siento capaz?, ¿qué me agradaría hacer en el futuro y durante el resto de mi vida?

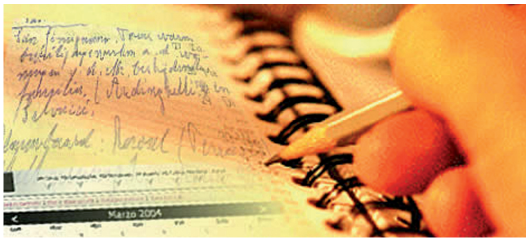
La etapa colegial es un momento ideal para comenzar porque te permite saber qué materia o rama del saber o del arte te gusta más; con qué carreras, oficios o profesiones se relaciona; de estas opciones, cuál te gusta más a ti y por qué; cómo puedo financiar mis estudios. En definitiva, se trata de reconocer las propias potencialidades para tomar una decisión que te permita ser feliz y realizarte.

Actividades

1 Visiten por grupos cuatro Centros de Educación Superior, y pidan prospectos de opciones técnicas, pedagógicas, contables, sociales y tecnológicas. Intercambien con sus compañeros las impresiones.

2 ¿Conocen la función del Instituto Ecuatoriano de Crédito Educativo y Becas (IECE)? ¿Existen otras formas de financiar los estudios?

3 Consulte por Internet la situación del mercado laboral en nuestro país. Realicen un foro en su colegio para conversar acerca de la importancia de la educación especializada (técnica, universitaria) y de cómo esta permite el progreso del país. Saquen sus conclusiones y comiencen a pensar en aquellas opciones que sean más viables para su futuro.



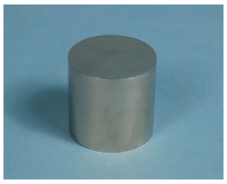
Crónica matemática

Sistema Métrico Decimal y Sistema Internacional

A finales del siglo XVIII, la Academia de Ciencias de París establece, a fin de evitar la confusión creada por la utilización de unidades de medida diferentes en cada zona del planeta, un sistema de unidades de carácter universal. Así nace el **Sistema Métrico Decimal (SMD),** cuyas unidades principales, el metro y el kilogramo, fueron definidas de esta manera:

- **Metro:** diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre.
- **Kilogramo:** masa de agua destilada, a 4 °C, contenida en un cubo de 1 dm de arista.

Para obtener múltiplos y submúltiplos de estas unidades se multiplica o divide por 10, 100, 1 000… De aquí el nombre de Sistema Métrico Decimal.



Metro y kilogramo patrón depositados en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas de Sèvres (Francia).

En la XI Conferencia General de Pesas y Medidas (París, 1960) se amplió y mejoró el sistema de medidas dando lugar al **Sistema Internacional de unidades (SI),** que en la actualidad es aceptado mundialmente, y consta de siete unidades básicas: metro, kilogramo, segundo, amperio, kelvin, mol y candela.

El euro

Desde el 1 de enero de 2002 doce países pertenecientes a la Unión Europea (Alemania, Austria, Bélgica, España, Finlandia, Francia, Grecia, Holanda, Irlanda, Italia, Luxemburgo y Portugal) utilizan un sistema monetario común. Las unidades que forman este sistema son ocho monedas emitidas en 1, 2, 5, 10, 20 y 50 céntimos de euro y en 1 y 2 euros, y siete billetes emitidos en 5, 10, 20, 50, 100, 200 y 500 euros.
En Sudamérica, al momento se está tratando de lograr un acuerdo similar que permita manejar una moneda común.

Zurdos

Cada año, el 13 de agosto, más de 700 millones de personas celebran un día muy especial: el *Día Internacional de los Zurdos.*

Los zurdos naturales están repartidos por todo el planeta de manera homogénea. Aproximadamente entre un 8 y un 13% de la población mundial es zurda. Hay más zurdos varones (13 %) que mujeres (9 %), sin que se sepa todavía la causa.

Un chico, hijo de padre zurdo, tiene un 10 % de posibilidades de ser zurdo. Si la madre es zurda, aumenta a un 20 % las posibilidades de ser zurdo. Y si los dos padres son zurdos, el porcentaje llega al 46 %.

@ Busca información en Internet sobre el LRRTM1, el gen que hace a una persona más propensa a ser zurda, según los estudios de un grupo de científicos de la Universidad de Oxford.

Demuestra tu ingenio

Por muy alejado que creas estar de un personaje popular o famoso, hay una teoría que indica lo contrario.

La teoría de los *Seis grados de separación,* inicialmente propuesta en 1929 por el escritor húngaro Frigyes Karinthy, señala que una persona puede estar conectada a cualquier otra a través de una cadena de conocidos que no tiene más de cuatro eslabones.

Compruébalo por ti mismo.

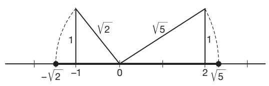
Solucionario

Módulo 1 Números reales. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Ejercicios y problemas

67. a)Falsa. b) Cierta. c) Falsa. d) Cierta.

69.El intervalo común es: $-\sqrt{2}\,,\ \sqrt{5}\,]$.



71.a) 1,732; b) 0,2; c) 4,22.

73.a) $(+5)^5$; b) $(-9)^{10}$

75.a) $3\sqrt{3}$; b) $27\sqrt{2}$; c) $15\sqrt{2}$; d) $2\sqrt{2}$.

Son semejantes b, c, d

77. a) $3a^3 b\sqrt{3b}$; b) $3^8 \cdot 5^2 a^5 b^7 \sqrt{3b}$

79. a) $\sqrt{7^2 a^4 b}$; b) $\sqrt{11^7 a^6 b^3}$; c) $\sqrt{2^3 \cdot 3^5 a^2 b}$; d $\sqrt{\dfrac{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 a^6 b^{10}}{7^2 c^5}}$

81. a) 5 ; b) 16 ; c) $\sqrt[4]{3^3}$

83. a) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$; b) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{10}$; c) $2-\sqrt{3}$; d) $\dfrac{\sqrt{42}+\sqrt{7}-\sqrt{6}-1}{5}$; e) $4+\sqrt{15}$;

f) $\dfrac{\sqrt{70}+\sqrt{42}+\sqrt{110}+\sqrt{66}}{4}$

85. Los segmentos de longitudes $3-\sqrt{2}$ cm y $2+\sqrt{8}$ cm son proporcionales a los segmentos de longitudes $4+\sqrt{2}$ cm y $8+6\sqrt{2}$ cm.

87. $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$ $\qquad (a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$

$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$ (con $a \neq 0$) $\qquad$ Relación: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$

89. $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[7]{7}$; $\sqrt[3]{9^2}$; $\sqrt[4]{25^3}$

91.a) No es cierta. Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas.

b) No. Todas las ecuaciones tienen dos miembros.

c) Cierta.

93. a) $x = \dfrac{51}{158}$; b) $x = -\dfrac{73}{4}$; c) $x = \dfrac{188}{99}$

d) $0x = -7$ → No tiene solución. e) $x = \dfrac{22}{49}$

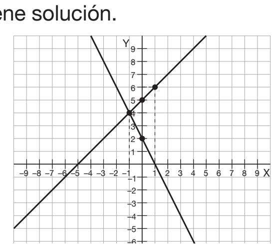
95. x = 28

97.Una ecuación de primer grado con dos incógnitas tiene infinitas soluciones. Una línea recta.

99.Es un sistema incompatible. No tiene solución.

101.

Primera ecuación		Segunda ecuación	
x	y = x + 5	x	y = −2x + 2
−1	4	−1	4
0	5	0	2
1	6	1	0



La solución es $x = -1$, $y = 4$. Se trata de un sistema compatible determinado.

103. — Método de sustitución

$0x = 0$

Esta ecuación tiene infinitas soluciones.

— Método de igualación

$0x = 0$

Esta ecuación tiene infinitas soluciones.

— Método de reducción

$0x + 0y = 0$

Esta ecuación tiene infinitas soluciones.

105. y = 4 – x

El sistema es incompatible.

107. a) La solución del sistema es $x = 1$, $y = 0$

b) La solución del sistema es $x = -3$, $y = 5$

109. La solución es $x = \dfrac{8}{9}, y = -\dfrac{4}{9}$.

111. La longitud de los lados del triángulo es 3 cm, 5 cm y 7 cm.

113. Mi edad actual es 18 años.

115. Los dos números son 10 y 11.

117. Las longitudes del lado menor y del lado mayor del rectángulo son 14 m y 28 m, respectivamente.

119. Los números buscados son 24 y 8.

121. El hijo tiene 12 años y su padre, 48 años.

123. La base del rectángulo es $4\sqrt{7}$ y la diagonal $5\sqrt{5}$.

125. La distancia recorrida por el excursionista es:

$$2 \cdot 50\sqrt{3} + 2 \cdot 25\sqrt{3} = 150\sqrt{3} \text{ dam}$$

127. a) $\dfrac{100}{3}\pi$ cm³ ; b) 3 cm

129. $x = \pm 8$ $\quad 8 \cdot 8 = 64$ $\quad (-8) \cdot (-8) = 64$ — Radicación.

131. Cristina tiene 5 años; su madre, 25 años, y su tía, 20 años.

133. Tendrá que mezclar 1,5 kg de las golosinas que cuestan \$ 4 /kg con 3,5 kg de las que cuestan \$ 6 /kg.

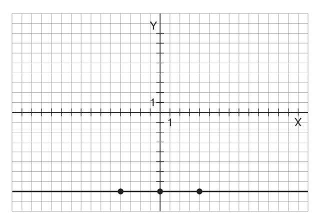
Módulo 2 Notación científica. Función lineal. Función exponencial

Ejercicios y problemas

49. Sólo hace falta un punto. Por ejemplo, si conocemos el punto *P (t, s),* la expresión algebraica de la función es *y = s*.

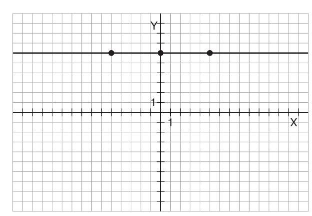
51. a)

x	−4	0	4
y	−8	−8	−8



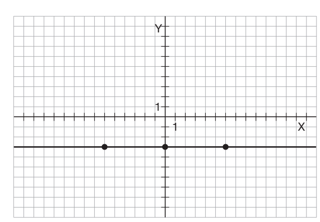
b)

x	−5	0	5
y	6	6	6



c)

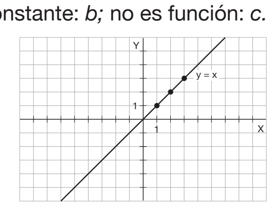
x	−6	0	6
y	−3	−3	−3



53. Lineal: *d;* Afín no lineal: *a;* constante: *b;* no es función: *c.*

55. a)

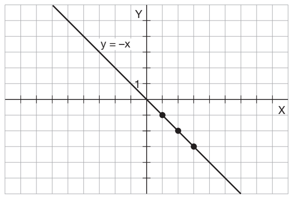
x	1	2	3
y	1	2	3



Pendiente: 1

b)

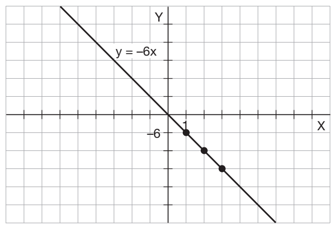
x	1	2	3
y	–1	–2	–3



Pendiente: –1

c)

x	1	2	3
y	–6	–12	–18

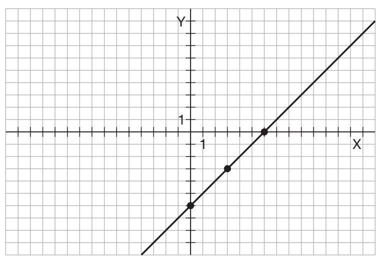


Pendiente: –6

57. Compañía A: $y = 15$, función constante.
    Compañía B: $y = 0{,}10x$, función lineal.
    Compañía C: $y = 0{,}05x + 5$, función afín.

59. a)

x	0	3	6
y	–6	–3	0

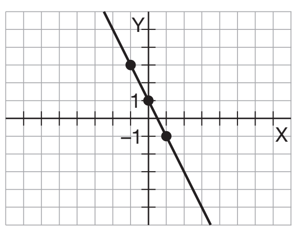


Pendiente: 1

Ordenada en el origen: –6

b)

x	–1	0	1
y	3	1	–1

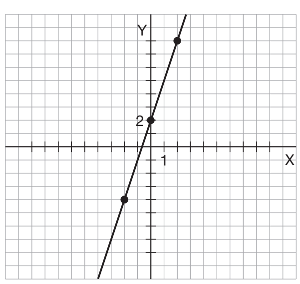


Pendiente: –2

Ordenada en el origen: 1

c)

x	–2	0	2
y	–4	2	8



Pendiente: 3

Ordenada en el origen: 2

61. a) La expresión algebraica de la función es: $y = 4x - 1$.
    b) La expresión algebraica de la función es: $y = \frac{1}{5}x - 3$.

63. a) $y = 5$ c) $y = -3x$
    b) $y = 4$ d) $y = \frac{2}{3}x$

65. La expresión algebraica es: $f(x) = 3x - 2$.

67. a) $y = x + 5$; b) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1 - \sqrt{3}$

69. $y = \frac{4}{3}x + \frac{11}{3}$

71. Una, ya que a partir de las coordenadas de dos puntos de la recta obtenemos su ecuación.

    Infinitas, ya que no está determinada la pendiente de la recta.

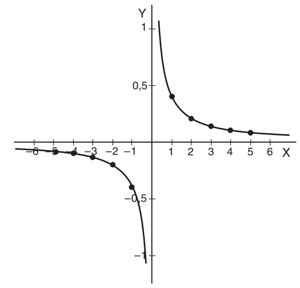
    Una, ya que a partir de las coordenadas de un punto de la recta y el valor de la pendiente obtenemos su ecuación.

73. a) La expresión algebraica de la función es: $y = 6x + 3$.
    b) La expresión algebraica de la función es: $y = -\frac{3}{2}x$.

75. La expresión algebraica de la función es $y = \frac{12}{x}$.

77. a) $y = \frac{2}{5 \cdot x}$ b)

x	y
–5	–2/25
–4	–1/10
–3	–2/15
–2	–1/5
–1	–2/5
1	2/5
2	1/5
3	2/15
4	1/10
5	2/25



79. a)

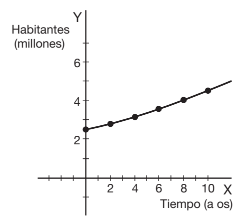
n	0	1	2	3	4
A(n)	5	8,45	14,28	24,13	40,79
B(n)	2	4,8	11,52	27,65	66,36

b) Entre las 2 y las 3 horas.

81. a) La expresión algebraica de la función es: $P_n = 2{,}5(1 + 0{,}06)^n$, $n \geq 0$ donde P_n es el número de habitantes en millones y n es el tiempo transcurrido en años.

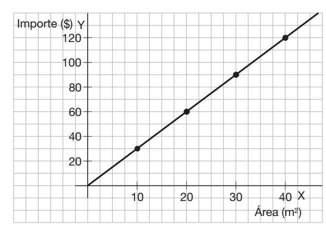
x	0	2	4	6	8	10
y	2,5	2,81	3,16	3,55	3,98	4,48

b)



83. a)

Área pared en m² *(x)*	10	20	30	40
Importe del papel en dólares *(y)*	30	60	90	120



b) El papel necesario para empapelar toda la habitación cuesta $ 120.

85. a) Representemos a la solución del gimnasio “Cuerpo sano” con f, y al “Salud y deporte” con g:

Gimnasio\Semana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cuerpo sano f(x)	28	28	28	28	28	35	42	49	56	63
Salud y deporte g(x)	12	12	18	24	30	36	42	48	54	60

b) Gimnasio cuerpo sano: al aumentar el tiempo de inscripción a partir de la semana 5: f(x) = 28+(x-5)·7 = 7x-7

Gimnasio salud y deporte: al aumentar el tiempo de inscripción a partir de la semana 2: f(x)= 12+(x-2)·6 = 6x

d) En el “Cuerpo sano” pagará $ 28 y en el Salud y deporte $ 30

e) A partir de la octava semana

f) En el gimnasio salud y deporte

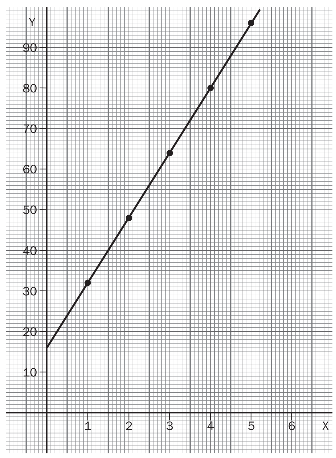
89. a) $d_1 = 40t$
    b) $d_2 = 100 - 60t$
    c) $d = 100 - 40t - 60t$

91. a) $V_{sólido} = 16x + 16$

b) x → altura del prisma cuadrangular en cm.

y → volumen del sólido en cm³.

x	1	2	3	4	5
y	32	48	64	80	96



c) $y = 48 \text{ cm}^3$

Módulo 3 Expresiones algebraicas y numéricas. Polinomios y fracciones algebraicas

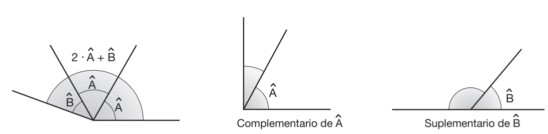
Ejercicios y problemas

33. a) P(1) = 0; b) P(2) = 40; c) P(3) = 120
35. Resto= –5
37. No es posible, pues el término de tercer grado del polinomio de tercer grado no puede anularse.
39. No es posible, el polinomio cociente es de grado cero, es un número.
41. a) $P(3) = 12$ b) $R(-3) = -22$ c) $P(4) - Q(1) = 42 - 7 = 35$
43. a) $P(x) + Q(x) = 3x^3 - x^2 - x + 6$
    b) $R(x) - Q(x) = -2x^3 - 2x - 1$
    c) $P(x) - Q(x) + R(x) = -x^3 - 9x + 5$
45. a) x^3
    b) $(x + 1)^2$
    c) $x \cdot (x + 1)$
    d) $x^2 \cdot (x - 1)^2$
    e) $x^3 - (x + 1)^3$
47. $x^2 - 2x + 1$
49. $$P(1) = 2 \Rightarrow a \cdot 1 + b = 2 \Rightarrow a + b = 2$$
    $$P(2) = 5 \Rightarrow a \cdot 2 + b = 5 \Rightarrow 2a + b = 5$$
    $$\left.\begin{array}{l} a + b = 2 \\ 2a + b = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -a - b = -2 \\ 2a + b = 5 \\ \hline a \quad = 3 \end{array}\right\}$$
    $$a + b = 2 \Rightarrow 3 + b = 2 \Rightarrow b = 2 - 3 = -1$$
    El polinomio P(x) es: P(x) = 3x – 1
51. a) $(3x^3 + 18x^2 + 33x + 18) : (x - 3)$
    Cociente: $3x^2 + 27x + 114$
    Resto: 360
    No es divisor.
    b) $(3x^3 + 18x^2 + 33x + 18) \div (x + 1)$
    Cociente: $3x^2 + 15x + 18$
    Resto: 0
    Sí que es divisor.
    c) $(3x^3 + 18x^2 + 33x + 18) \div (3x^2 + 3x + 6)$
    Cociente: $x + 5$
    Resto: $12x - 12$
    No es divisor.
    d) $(3x^3 + 18x^2 + 33x + 18) \div (x^2 - 4x - 1)$
    Cociente: $3x + 30$
    Resto: $156x + 48$
    No es divisor.
53. a) $2(x - 3)$
    b) $x(x - 2)$
    c) $2(x^2 - 3x + 4)$
    d) $3x^2 (x^2 - 2x + 4)$
55. a) $(x + 2)^2$
    b) $(3x- 1)^2$
    c) $x^5 (5x + 7)$
    d) $(6x - 5y)^2$
57. a) $(5x + 1) (x + 7)$
    b) $(x + 2) (2x - 1)$
    c) $(x - 4y) (2x + 7y)$
    d) $(10x - 9) (6x - 7)$
59. a) $\dfrac{3x^3 - 2x^2 - 12x + 8}{2x^3 - 11x^2 - 18x + 9}$
    b) $\dfrac{2x^3 + 3x^2 + 2x + 3}{3x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 11x - 6}$
61. $\dfrac{x - 2}{x - 3}$
63. El polinomio es P(x) = 3x – 2.
65. $P(x) = (x - 3) (x + 1) (x - 2) = x^3 - 4x^2 + x + 6$
67. Podrán reunir $ 85.
69. Respuesta abierta.

Módulo 4 Ángulos notables. Razones trigonométricas

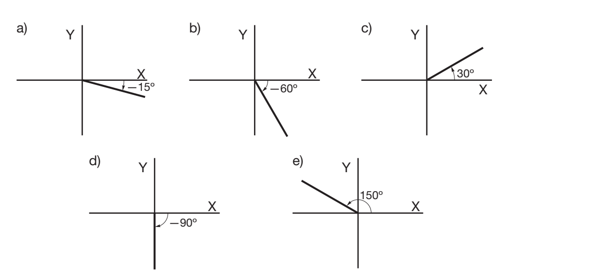
Ejercicios y problemas

29. 4 vértices y 4 lados, ya que tiene 4 ángulos. Es convexo, pues todos sus ángulos son menores de 180°.
31. $\widehat{A} = 90°$; $\widehat{B} = 45°$; $\widehat{C} = 120°$; $\widehat{D} = 60°$; $\widehat{E} = 270°$; $\widehat{F} = 30°$.
33. No Sí Sí Sí No Sí
35.



Los ángulos $\widehat{A}$, complementario de $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ son agudos. El ángulo suplementario de $\widehat{B}$ es obtuso.

37. Al considerar los ángulos como giros, el signo del ángulo indica si el sentido de giro es el de las agujas del reloj o si es el contrario.



39. a) 3.^{er} cuadrante; b) 2.^{do} cuadrante; c) 1.^{er} cuadrante; d) 2.^{do} cuadrante

e) 3.^{er} y 4.^{to} cuadrante; f) 1.^{er} y 4.^{to} cuadrante; g) 1.^{er} y 2.^{do} cuadrante

h) 3.^{er} cuadrante

41. Si α y β son dos ángulos complementarios, se cumplirá: sen α = cos β

Por lo tanto: $\dfrac{1}{\text{sen } \alpha} = \dfrac{1}{\cos \beta}$

$\text{cosec } \alpha = \sec \beta$

43. — La longitud del cateto opuesto es: $\dfrac{48}{5}$

Por lo tanto: $\text{sen } \alpha = \dfrac{4}{5}$

$\tan \alpha = \dfrac{4}{3}$

45. Las razones del ángulo agudo mayor son:

$\text{sen } \alpha = 0{,}85$; $\cos = 0{,}53$; $\tan \alpha = 1{,}60$

Y las del menor:

$\text{sen } \beta = 0{,}53$; $\cos \beta = 0{,}85$; $\tan \beta = 0{,}63$

47. El ángulo formado por las aristas básicas de los dos prismas es 83,62°.

49. Los resultados obtenidos deben aproximarse a

a) $\text{sen } \dfrac{31\pi}{90} = 0{,}88$; $\cos \dfrac{31\pi}{90} = 0{,}47$; $\tan \dfrac{31\pi}{90} = 1{,}88$

b) $\text{sen } \dfrac{14\pi}{15} = 0{,}21$; $\cos \dfrac{14\pi}{15} = -0{,}98$; $\tan \dfrac{14\pi}{15} = -0{,}21$

c) $\text{sen } \dfrac{13\pi}{9} = -0{,}97$; $\cos \dfrac{13\pi}{9} = -0{,}22$; $\tan \dfrac{13\pi}{9} = 4{,}33$

d) $\text{sen } \dfrac{71\pi}{36} = -0{,}9$; $\cos \dfrac{71\pi}{36} = 1{,}00$; $\tan \dfrac{71\pi}{36} = -0{,}09$

51. a) $\pi - \dfrac{7\pi}{10} = \dfrac{3\pi}{10}$

$\text{sen } \dfrac{7\pi}{10} = \text{sen } \dfrac{3\pi}{10}$

$\cos \dfrac{7\pi}{10} = \cos \dfrac{3\pi}{10}$

$\tan \dfrac{7\pi}{10} = \tan \dfrac{3\pi}{10}$

b) $\dfrac{62\pi}{45} - \pi = \dfrac{17\pi}{45}$

$\text{sen } \dfrac{62\pi}{45} = \text{sen } \dfrac{17\pi}{45}$

$\cos \dfrac{62\pi}{45} = \cos \dfrac{17\pi}{45}$

$\tan \dfrac{62\pi}{45} = \tan \dfrac{17\pi}{45}$

c) $2\pi - \dfrac{35\pi}{18} = \dfrac{\pi}{18}$

$\text{sen } \dfrac{35\pi}{18} = \text{sen } \dfrac{\pi}{18}$

$\cos \dfrac{35\pi}{18} = \cos \dfrac{\pi}{18}$

$\tan \dfrac{35\pi}{18} = \tan \dfrac{\pi}{18}$

d) $-\dfrac{11\pi}{18} + \pi = \dfrac{7\pi}{18}$

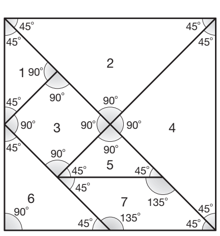
$\text{sen } -\dfrac{11\pi}{18} = \text{sen } \dfrac{7\pi}{18}$

$\cos -\dfrac{11\pi}{18} = \cos \dfrac{7\pi}{18}$

$\tan -\dfrac{11\pi}{18} = \tan \dfrac{7\pi}{18}$

53. $\dfrac{19}{2}\sqrt{3} - 1$

55.



57. a) $87{,}5$ m ; b) $\alpha = 51{,}34°$

59. El ángulo que forma con el suelo es $41{,}81°$

El ángulo que forma con la pared es: $48{,}19°$

61. La distancia es de 170,7 m y la altura del faro, 469,5 m.

65. $F_h = 8\,660{,}3$ N

La componente horizontal de la fuerza es de 8660,3 N.

67. $F_T = 20{,}80$ N

$F_N = 77{,}60$ N

Módulo 5 Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos. Media aritmética

Ejercicios y problemas

37. Puntos situados en el meridiano de Greenwich:

— Longitud: 0°

— Latitud: varía de 0° a 90° en dirección Norte y Sur desde el Ecuador.

Puntos situados en el ecuador:

— Longitud: varía de 0° a 180° en dirección Este y Oeste desde el meridiano de Greenwich.

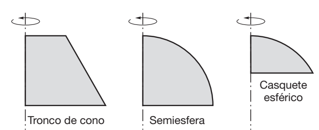
— Latitud: 0°

Polos:

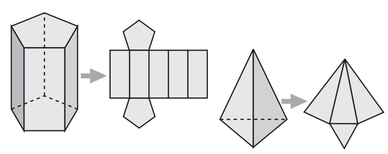
— Longitud: 0°

— Latitud: el polo norte 90° en dirección Norte y el polo sur 90° en dirección Sur desde el ecuador.

39.



41.



$A = 6\,a^2$

43. El área de la esfera es cuatro veces la de un círculo máximo.

45. a) El área del tetraedro es de 27,71 cm^2.

b) El área del octaedro es de 86,60 cm^2.

c) El área del icosaedro es de 311,77 cm^2.

d) El área del cubo es de 294 cm^2.

e) El área del dodecaedro es de 66,96 cm^2.

47. Tetraedro: Las aristas del tetraedro miden 11,77 cm.

Octaedro: Las aristas del octaedro miden 8,32 cm.

49. El área lateral de la pirámide es de 377,93 cm^2 y el área total, de 490,43 cm^2.

51. a) El área lateral del cilindro es de 87,96 cm^2 y el área total, de 113,10 cm^2.

b) El área lateral del cono es de 47,12 cm^2 y el área total, de 75,40 cm^2.

c) El área lateral del tronco de cono es de 35,34 cm^2 y el área total, de 70,69 cm^2.

53. El cociente entre el área de la esfera y su volumen es igual al radio partido por tres.

55. Resultan dos conos.

Primer cono (r = 5; h = 12):

$V_{cono} = 314{,}16$

Segundo cono (r′ = 12; h′ = 5):

$V'_{cono} = 753{,}98$

El volumen de uno de los conos es de 314,16 cm^3 y el del otro cono, de 753,98 cm^3.

57. El área lateral del cono mide 37, 07 cm^2; el área total, 56,71 cm^2, y el volumen, 26,18 cm^3.

59. Se emplearán 568 horas en restaurar toda la fachada.

61. Son necesarios 37,70 litros.

63. La masa del tetraedro es de 144,89 g.

65. La altura a la que llegará el refresco dentro de cada uno de los vasos es de 7,18 cm.

67. La capacidad del vaso es de 464,96 cm^3, o bien 0,465 l.

69. a) Respuesta abierta
    b) Sidney (151° 13′ E, 33° 52′ S)
    c) Lima (77° 3′ O, 12° 3′ S)
    d) Los Angeles (118° 15′ O, 34° 4′ N)

71. a) Pelota de ping-pong
    Área: $A = 4\pi \cdot 2^2 = 50{,}3\ cm^2$
    Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 2^3 = 33{,}5\,cm^3$
    b) Pelota de tenis
    Área: $A = 4\pi \cdot 3{,}25^2 = 132{,}7\ cm^2$
    Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 3{,}25^3 = 143{,}8\,cm^3$
    c) Pelota de fútbol
    Área: $A = 4\pi \cdot 11^2 = 1\,520{,}5\ cm^2$
    Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 11^3 = 5575{,}3\,cm^3$
    d) Pelota de baloncesto
    Área: $A = 4\pi \cdot 12.5^2 = 1\,963.5\ cm^2$
    Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 12{,}5^3 = 8181{,}2\,cm^3$

73. La base del cono se encuentra a 4,8 cm del plano que lo secciona.

Módulo 6 Probabilidad. Conversiones entre unidades del S.I.

Ejercicios y problemas

31. a) $\Omega = \{c, x\}$
    b) $\Omega = \{cc, cx, xc, xx\}$
    c) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
    d) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

33. Sí, puesto que no pueden verificarse de manera simultánea. Por ejemplo, obtener cara y obtener cruz al lanzar una moneda al aire.

35. Respuesta sugerida:
    Sucesos compatibles: *Sacar un número par* y *sacar un número mayor que 5.*
    Sucesos incompatibles: *Sacar un número par* y *sacar el número 7.*

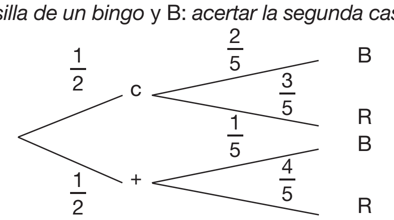
37. Aunque el resultado depende del experimento realizado, las frecuencias relativas han de aproximarse a $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$

39. $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$

41. A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
    B = {2, 4, 6, 8, 10}
    C = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
    D = {10}
    E = ∅
    F = {1, 2}
    G = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Imposible	E
Muy improbable	D
Improbable	F
Tan probable como improbable	B
Probable	G
Muy probable	C
Seguro	A

43. Los sucesos A y B son dependientes.
    Un ejemplo de sucesos independientes son A: *acertar la primera casilla de un bingo* y B: *acertar la segunda casilla de un bingo*.

45.


a) $P(R) = \frac{7}{10}$ b) $P(R/C) = \frac{3}{5}$ c) $P(R/+) = \frac{4}{5}$

47. 36 000 kg; 47 530 kg; 6 700 kg; 80 kg; 12 340 kg.

49. 0,036 kg < 7 800 cg < 0,89 hg < 6,9 hg < 3 800 dag

51. b) 6 l = 600 cl
    9 ml = 0,9 cl
    600 cl + 0,9 cl = 600,09 cl

53. *A: obtener bola roja.*
    En el primer saco (saco *A*) tenemos: $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
    En el segundo saco (saco *B*) tenemos: $P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

55. Este problema se resuelve como el ejemplo 9. Respuesta abierta.

57. a) (0, 2)
    b)

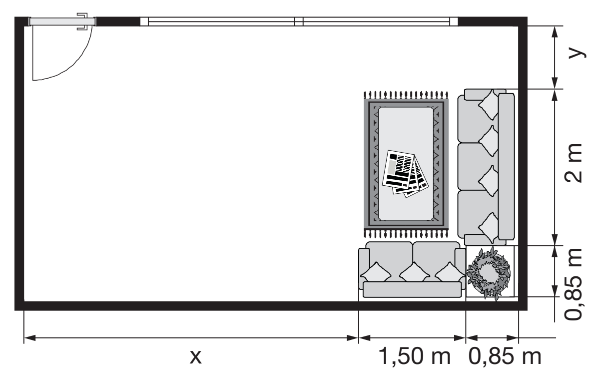
Suceso	Frecuencia relativa
6	0,27
7	0,25
8	0,23
9	0,25

c) Las frecuencias relativas de los sucesos {6}, {7}, {8} y {9} se aproximan al valor 0,25. Atribuimos a cada uno una probabilidad de 0,25.

59. a) Ha comprado 7,25 m de cinta en total.
    b) El importe de la compra es de $ 5,44.

61. 33 600 ca

63. 6 m 85 cm = 6 m + 0,85 m = 6,85 m
    4 m 43 cm = 4 m + 0,43 m = 4,43 m
    A partir de la figura deducimos los valores de *x* e *y*.



6,85 m = x + 1,5 m + 0,85 m
$\Rightarrow$ x = 6,85 − 1,5 + 0,85 = 4,50 m
4,43 m = y + 2 m + 0,85 m
$\Rightarrow$ y = 4,43 − 2 − 0,85 = 1,58 m

65. a) La probabilidad de que un habitante de la provincia tenga teléfono es 0,96, de que tenga móvil es 0,16 y de que no tenga es 0,04.
    c) El número previsible de habitantes con teléfono es 1 440; con teléfono móvil, 240, y sin teléfono, 60.

67. Como un cubo de 1 m de arista se divide en 8 cubos de 50 cm de arista, la masa del cubo menor será:
    80 hg : 8 = 10 hg
    — La densidad es el cociente entre la masa y el volumen.

$$d = \frac{80\ \cancel{hg}}{1 m^3} \cdot \frac{1 kg}{10\ \cancel{hg}} = 8\ kg/m^3$$

Simbología

$\lvert x \rvert$	el módulo o el valor absoluto de x, $\begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$
$\equiv$	Idéntico
$\approx$	es aproximadamente igual a
$\neq$	No es igual a. Diferente a
$\leq$	Menor o igual que
$\geq$	Mayor o igual que
$P(x)$	Polinomio en la variable x
$\Rightarrow$	Implica
$\Leftrightarrow$	Equivale
$\measuredangle A$	Ángulo A
$m\measuredangle A$	Medida del ángulo A
$\forall$	Cuantificador universal: "Para todo …"
$\exists$	Cuantificador existencial: "Existe al menos un … "
$\therefore$	Por lo tanto, en consecuencia
$\{x_1, x_2, ...\}$	conjunto con elementos, $x_1, x_2, ...$
$n(A)$	número de elementos en el conjunto finito A.
$\{x : \}$ o $\{x / \}$	el conjunto de todas las x tal que … .
$\in$	… es un elemento de …; pertenece a... .
$\notin$	… no es elemento de …; no pertenece a... .
$\varnothing$	conjunto vacío
U	conjunto universal o universo
$\mathbb{N}$	números Naturales, {0, 1, 2, 3, …}
$\mathbb{Z}$	números Enteros, {…, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, …}
$\mathbb{Z}^+$	números Enteros positivos, {+1, +2, +3, …}
$\mathbb{Z}^-$	números Enteros negativos, {…, –3, –2, –1}
$\mathbb{Q}$	números Racionales, $\{x: x = \frac{a}{b}, b \neq 0, a, b \in \mathbb{Z}\}$
$\mathbb{Q}'$ o $\mathbb{I}$	números Irracionales, $\{\pi\}$
$\mathbb{R}$	números Reales
$\mathbb{R}^+$	números Reales positivos $\{x: x \in \mathbb{R}, x > 0\}$
$\cup$	unión de conjuntos
$\cap$	intersección de conjuntos
$\subset$	… es subconjunto de … .
$\subseteq$	… es subconjunto de o es igual a … .
A'	el complemento del conjunto A
$A \times B$	el producto cartesiano de los conjuntos A y B, $A \times B = \{(a, b) / a \in A, b \in B\}$
$a^{1/n}$, $\sqrt[n]{a}$	potencia $\frac{1}{n}$ de a o raíz enésima de a $\quad n \neq 0$ y $n \neq 1$
$a^{½}$, $\sqrt{a}$	potencia $\frac{1}{2}$ de a o raíz cuadrada de $a \geq 0$

Glosario

Absurdo: opuesto a la razón. En matemática reducir al absurdo es un método de demostración que parte de una hipótesis verdadera que se quiere demostrar y para ello suponemos que es válida una hipótesis opuesta a la verdadera.

Aleatorio: depende de algún suceso fortuito, casual.

Aproximación: ajuste en las cifras de un número después de separar las que sobran.

Biunívoco: correspondencia entre elementos de un conjunto, de tal forma que, a cada elemento del primer conjunto se corresponde con solo un elemento del segundo conjunto, y cada elemento del segundo conjunto se corresponde con solo un elemento del primer conjunto

Constante: cantidad que no cambia de valor en una relación general entre variables.

Cuadrante: una de las cuatro divisiones de un plano.

Determinista: suceso que no depende del azar; que está completamente determinado por la condición inicial.

Error: incertidumbre en una medida o estimación de una cantidad.

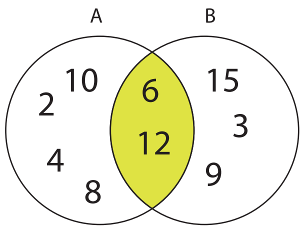
Experimento: hecho inducido o natural que provoca un resultado.

Fracción algebraica: expresión algebraica escrita como el cociente de dos polinomios.

Generatriz: en geometría son líneas y superficies que al moverse generan una superficie o un cuerpo. En aritmética son las fracciones ordinarias que dan origen a un decimal periódico.

Homólogos: correspondencia entre los lados de dos figuras geométricas semejantes.

Intersección: cruce, punto común de dos o más rectas o planos. Intersección de conjuntos: conjunto de los elementos comunes a dos o más conjuntos.



$A \cap B = \{6, 12\}$

Intervalo: conjunto de números reales, definidos como todos los valores entre dos números fijos, estos reales fijos pueden o no estar incluidos en el intervalo.

Si $a < b$, éstos se llaman extremos inferior y superior, el intervalo se representa:

$$a < x < b$$

Monotonía: referente a la uniformidad.

Probabilidad: posibilidad de que ocurra un suceso especial de un conjunto de sucesos posibles.

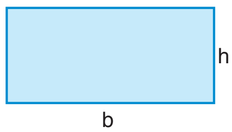
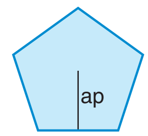
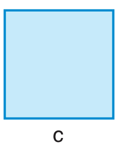
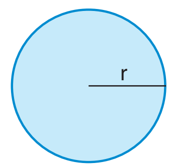
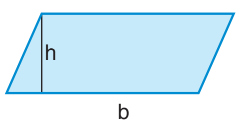
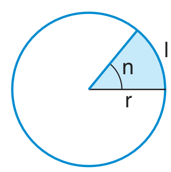
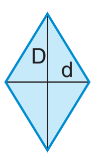
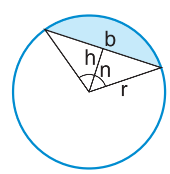
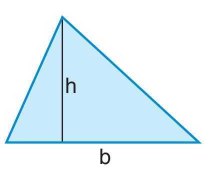
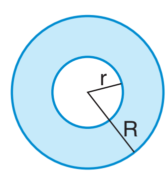
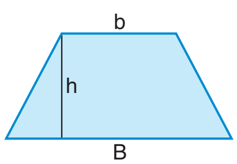
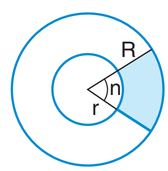
Razón: es la relación entre 2 números o cantidades de la misma especie e indica el número de veces que la una contiene a la otra.

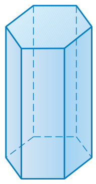
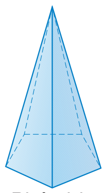
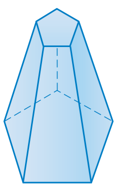
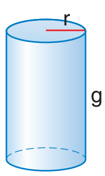
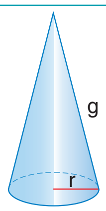
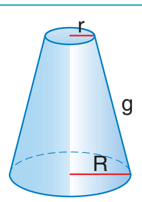
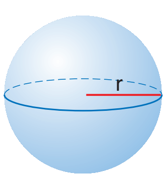
Sucesión: conjunto ordenado de números según cierta ley, dichos números son los términos de la sucesión.

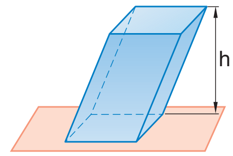
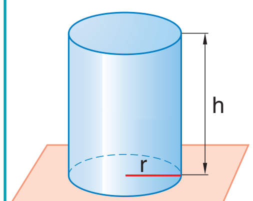
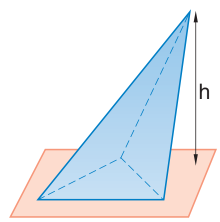
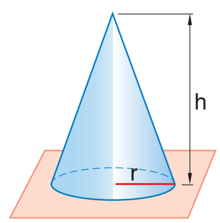
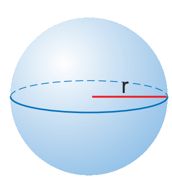
Suceso: resultado de un experimento.

Trigonometría: estudio de las relaciones entre lados y ángulos de un triángulo.

Área de figuras planas

Figura	*Área*	*Figura*	*Área*
 Rectángulo	$A = b \cdot h$	 Polígono regular	$A = \dfrac{P \cdot ap}{2}$
 Cuadrado	$A = a \cdot a = a^2$	 Círculo	$A = \pi \cdot r^2$
 Romboide	$A = b \cdot h$	 Sector circular	$A = \dfrac{\pi \cdot r^2}{360} \cdot n = l\dfrac{r}{2}$
 Rombo	$A = \dfrac{D \cdot d}{2}$	 Segmento circular	$A = \dfrac{\pi \cdot r^2}{360} \cdot n - \dfrac{b \cdot h}{2}$
 Triángulo	$A = \dfrac{b \cdot h}{2}$	 Corona circular	$A = \pi \, (R^2 - r^2)$
 Trapecio	$A = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$	 Trapecio circular	$A = \dfrac{\pi \cdot (R^2 - r^2)}{360} \cdot n$

Área de cuerpos geométricos	
Figura	*Área*
 Prisma	$A_{lateral} =$ Área de sus caras laterales $A_{total} = A_{lateral} + 2\,A_{base}$
 Pirámide	$A_{lateral} =$ Área de sus caras laterales $A_{total} = A_{lateral} + A_{base}$
 Tronco de pirámide	$A_{lateral} =$ Área de sus caras laterales $A_{total} = A_{lateral} + A_{b_1} + A_{b_2}$
 Cilindro	$A_{lateral} = 2\pi\, r \cdot g$ $A_{total} = 2\pi\, r \cdot (g + r)$
 Cono	$A_{lateral} = \pi\, r \cdot g$ $A_{total} = \pi\, r \cdot (g + r)$
 Tronco de cono	$A_{lateral} = \pi\, g \cdot (R + r)$ $A_{total} = \pi\, g \cdot (R + r) + \pi\, R^2 + \pi\, r^2$
 Esfera	$A = 4\pi r^2$

Volumen de cuerpos geométricos	
Figura	*Volumen*
 Prisma	$V = A_{base} \cdot h$
 Cilindro	$V = A_{base} \cdot h = \pi\, r^2 \cdot h$
 Pirámide	$V = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h$
 Cono	$V = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \pi\, r^2 \cdot h$
 Esfera	$V = \frac{4}{3} \pi\, r^3$

Himno Nacional del Ecuador

Ecuadorpak Llakta taki

Coro

Sumak llakta, kanta mirarkanchik
kuyaywan, kuyaywan.

Kanpak uku[p]i shunkuwan kushikuy,
ñuka kuyay intita yallinmi,
waranka, warankata kushikuy
kanka sumak allpami kanki.

Estrofa

Kay allpapi llakta yayakuna
Pichincha urkupi makanakushka,
kantaka wiñaypak alli nishka,
kanmanta yawarta jichashka.

Pachakamak rikushpa chaskishka,
chay yawar muyushina mirarik.

Chay runakunaka mancharishka
chasna sinchi runakunami.

Mirarishkamari. Mirarishkamari.

Himno Nacional del Ecuador

Coro

¡Salve, oh Patria, mil veces! ¡Oh Patria,
gloria a ti! Ya tu pecho rebosa
gozo y paz, y tu frente radiosa
más que el sol contemplamos lucir.

Estrofa

Los primeros los hijos del suelo
que, soberbio, el Pichincha decora
te aclamaron por siempre señora
y vertieron su sangre por ti.

Dios miró y aceptó el holocausto,
y esa sangre fue germen fecundo
de otros héroes que, atónito, el mundo
vio en tu torno a millares surgir.