

# MATEMÁTICA

8

De acuerdo al nuevo currículo de la Educación General Básica



TEXTO PARA  
ESTUDIANTES

DISTRIBUCIÓN GRATUITA - PROHIBIDA LA VENTA

**PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA**  
Rafael Correa Delgado

**MINISTRO DE EDUCACIÓN**  
Augusto Espinosa Andrade

**VICEMINISTRO DE EDUCACIÓN**  
Freddy Peñafiel Larrea

**VICEMINISTRO DE GESTIÓN EDUCATIVA**  
Jaime Roca Gutiérrez

**SUBSECRETARIA DE FUNDAMENTOS EDUCATIVOS**  
Paulina Dueñas Montero

**DIRECTORA NACIONAL DE CURRÍCULO (E)**  
Isabel Ramos Castañeda

**GRUPO EDEBÉ**  
Proyecto: Matemáticas 1,2,3 y 4  
Educación Secundaria Obligatoria

**DIRECCIÓN GENERAL**  
Antonio Garrido González

**DIRECCIÓN EDITORIAL**  
José Luis Gómez Cutillas

**DIRECCIÓN DE EDICIÓN  
DE EDUCACIÓN SECUNDARIA**  
José Francisco Vilchez Román

**DIRECCIÓN PEDAGÓGICA**  
Santiago Centelles Cervera

**DIRECCIÓN DE PRODUCCIÓN**  
Juan López Navarro

**EQUIPO DE EDICIÓN GRUPO EDEBÉ**  
© Grupo edebé, 2008  
Paseo San Juan Bosco, 62  
08017 Barcelona  
www.edebe.com

En alianza con  
**EDITORIAL DON BOSCO**

**OBRAS SALESIANAS DE COMUNICACIÓN**

**GERENTE GENERAL**  
Marcelo Mejía Morales

**DIRECCIÓN EDITORIAL**  
María Alexandra Prócel Alarcón

**ADAPTACIÓN Y EDICIÓN DE CONTENIDOS**

Equipo Editorial Don Bosco  
Humberto Buitrón A.

**CREACIÓN DE CONTENIDOS NUEVOS**

Marcia Peña Andrade  
Saúl Serrano Aguirre  
Lorena Valladares Perugachi

**REVISIÓN DE ESTILO**  
Hernán Hermosa Mantilla  
Isabel Luna Riofrío  
Pablo Larreátegui Plaza

**COORDINACIÓN GRÁFICA  
Y REDIAGRAMACIÓN EDITORIAL**  
Pamela Cueva Villavicencio

**DIAGRAMACIÓN DE PÁGINAS NUEVAS**

Susana Zurita Becerra  
Franklin Ramírez Torres  
Patricio Llívica Piedra  
Freddy López Canelos  
Erika Delgado Chávez  
Sofía Vergara Anda

**ILUSTRACIÓN DE PORTADA**  
Eduardo Delgado Padilla  
Darwin Parra Ojeda



© Editorial Don Bosco, 2011

#### **MINISTERIO DE EDUCACIÓN DEL ECUADOR**

Primera edición, febrero 2011

Séptima reimpresión febrero 2014

Quito – Ecuador

**Impreso por:** EL TELÉGRAFO.

La reproducción parcial o total de esta publicación, en cualquier forma que sea, por cualquier medio mecánico o electrónico, no autorizada por los editores, viola los derechos reservados. Cualquier utilización debe ser previamente solicitada.

#### **DISTRIBUCIÓN GRATUITA**

#### **IMPORTANTE**

El uso de un lenguaje que no discrimine ni reproduzca esquemas discriminatorios entre hombres y mujeres es una de las preocupaciones de nuestra Organización. Sin embargo, no hay acuerdo entre los lingüistas acerca de la manera de hacerlo en español.

En tal sentido y para evitar la sobre carga gráfica que supondría utilizar en español o/a; los/las y otras formas sensibles al género con el fin de marcar la presencia de ambos sexos, hemos optado por usar la forma masculina en su tradicional acepción genérica, en el entendido que es de utilidad para hacer referencia tanto hombres y mujeres sin evitar la potencial ambigüedad que se derivaría de la opción de usar cualesquiera de las formas de modo genérico.

*Tomado de UNESCO, Situación educativa de América Latina y El Caribe: Garantizando la educación de calidad para todos. UNESCO. Santiago de Chile, agosto 2008.*



## **Vamos a compartir el conocimiento, los colores, las palabras.**

El Ecuador ha sido, según el poeta Jorge Enrique Adoum, “un país irreal limitado por sí mismo, partido por una línea imaginaria”, y es tarea de todos convertirlo en un país real que no tenga límites.

Con este horizonte, el Ministerio de Educación realizó la Actualización y Fortalecimiento del Currículo de la Educación General Básica que busca que las generaciones venideras aprendan de mejor manera a relacionarse con los demás seres humanos y con su entorno y, sobre todo, a soñar con la patria que vive dentro de nuestros sueños y de nuestros corazones.

Los jóvenes de octavo a décimo años van a recibir un libro de texto que les permitirá desarrollar sus habilidades.

Estos libros tienen un acompañante para los docentes. Es una guía didáctica que presenta alternativas y herramientas didácticas que enriquecen el proceso de enseñanza-aprendizaje.

El Ecuador debe convertirse en un país que mire de pie hacia el futuro y eso solo será posible si la educación nos permite ser mejores ciudadanos. Es una inmensa tarea en la que todos debemos estar comprometidos, para que el “Buen Vivir” sea una práctica cotidiana.

Ministerio de Educación  
2014

# Conoce tu libro

Los conocimientos que vas a aprender se organizan en seis módulos que están trabajados de manera integrada a partir de los siguientes bloques:

## Numérico



## Geométrico



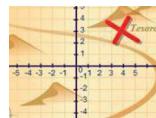
## Medida



## Estadística y probabilidad



## Relaciones y funciones



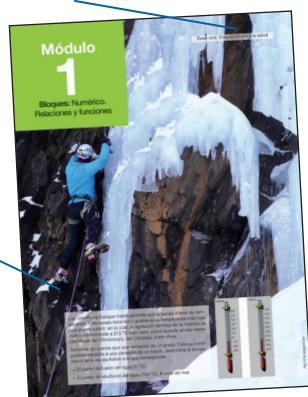
## Estructura de los módulos

### Páginas iniciales

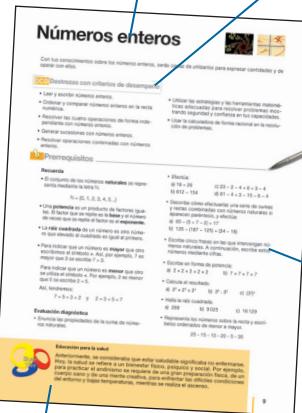
#### Buen Vivir

Eje transversal valorativo que acompaña a los contenidos y permite una formación integral.

Una imagen y una **actividad inicial** nos muestran la presencia de las matemáticas en nuestro entorno y la relación entre los bloques matemáticos.



Conocimientos que se trabajarán dentro del módulo.



#### Buen Vivir

Enunciación del artículo de la Constitución de la República del Ecuador, relacionado con el proyecto del Buen Vivir.

### Destrezas con criterios de desempeño

Se muestra un listado de las destrezas con criterios de desempeño que se desarrollarán en el módulo.

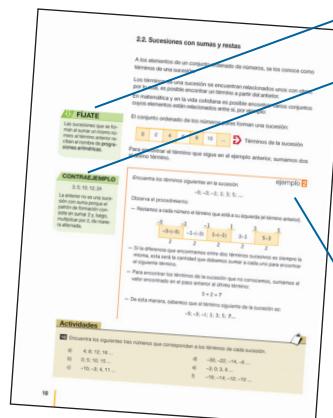
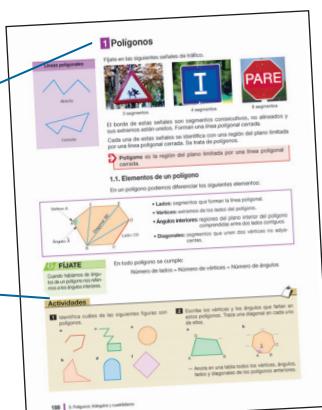
### Prerrequisitos

Definiciones, ejemplos y actividades para recordar los conocimientos previos necesarios para el aprendizaje.

En los márgenes se incluyen explicaciones complementarias.

### Desarrollo

Los conocimientos se organizan en apartados y subapartados.



### Actividades

Al finalizar el desarrollo de un conocimiento, se proponen ejercicios a pie de página para afianzarlo.

### Contraejemplo

Ejemplos que no cumplen con los conocimientos estudiados.

### Ejemplos

En muchos casos, el desarrollo de los conocimientos finaliza con uno o varios ejemplos para facilitar el aprendizaje.

Algunas actividades llevan un ícono cuyo significado es el siguiente:

### Macrodestrezas matemáticas



Comprendión de conceptos y conocimiento de procesos



Aplicación en la práctica



Refuerzo de macrodestrezas

### Herramientas y ejes transversales



Cálculo mental



Uso de la calculadora



Uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación



Trabajo en grupo



Buen Vivir

## Páginas finales

### Cómo resolver problemas

En cada módulo se trabaja una estrategia de resolución de problemas distinta.

### Ejercicios y problemas

Cuestiones, ejercicios y problemas para consolidar la comprensión de conceptos, conocimiento de procesos y aplicación en la práctica de lo que has aprendido.

En la sección **Más a fondo** proponemos actividades de mayor dificultad para profundizar las macrodestrezas.

### Autoevaluación y coevaluación

Permite comprobar los conocimientos, a través de actividades con indicadores esenciales de evaluación.

### Sección de historia

Para conocer la evolución histórica de algunos conceptos matemáticos.

### En resumen

Síntesis de las ideas clave del módulo y esquema que muestra la relación de los conocimientos en los bloques matemáticos.

### Demuestra tu ingenio

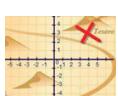
Resolución de problemas a través de diversas estrategias del pensamiento y creativas.

### Buen Vivir

Profundización de los ejes transversales para una formación integral.

# Índice

## Módulo 1: Números enteros



<b>1. El conjunto de los números enteros</b> . . . . .	10
1.1. Representación sobre la recta . . . . .	11
1.2. Valor absoluto de un número entero . . . . .	11
1.3. Ordenación de los números enteros. . . . .	12
<b>2. Operaciones</b> . . . . .	13
2.1. Adición y sustracción . . . . .	13
2.2. Sucesiones con adiciones y sustracciones . . . . .	18
2.3. Multiplicación y división exacta . . . . .	20
2.4. Potenciación y radicación . . . . .	24

## Módulo 2: Números fraccionarios



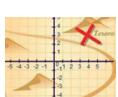
<b>1. Fracciones</b> . . . . .	38
1.1. Concepto de fracción . . . . .	34
1.2. Comparación de fracciones con la unidad . . . . .	40
1.3. Fracción de un número . . . . .	41
<b>2. Fracciones equivalentes</b> . . . . .	42
2.1. Equivalencia de fracciones . . . . .	42
2.2. Reducción de fracciones a común denominador . . . . .	45
2.3. Comparación de fracciones . . . . .	46
<b>3. Operaciones con fracciones</b> . . . . .	47
3.1. Adición y sustracción . . . . .	47
3.2. Multiplicación . . . . .	48
3.3. Fracción de una fracción . . . . .	49
3.4. División . . . . .	50
3.5. Operaciones combinadas . . . . .	51
3.6. Sucesiones con multiplicación y división . . . . .	52
3.7. Potenciación y radicación . . . . .	54

## Módulo 3: Números decimales. Volúmenes de prismas y cilindros



<b>1. Números decimales y fracciones decimales</b> . . . . .	68
1.1. Lectura de números decimales . . . . .	69
1.2. Representación sobre la recta . . . . .	69
1.3. Orden de los números decimales . . . . .	70
<b>2. Operaciones con números decimales</b> . . . . .	71
2.1. Adición y sustracción . . . . .	71
2.2. Multiplicación . . . . .	72
2.3. División . . . . .	73
2.4. Operaciones combinadas . . . . .	76
2.5. Potenciación de números decimales . . . . .	77
2.6. Radicación de números decimales . . . . .	78
2.7. Aproximación por redondeo . . . . .	79
2.8. Sucesiones con operaciones combinadas . . . . .	80
<b>3. Porcentajes</b> . . . . .	82
<b>4. Volúmenes de poliedros y cuerpos de revolución</b> . . . . .	84
4.1. Volúmenes de poliedros . . . . .	84
4.2. Volúmenes de cuerpos de revolución . . . . .	86
4.3. Estimación de volúmenes . . . . .	87

## Módulo 4: Polígonos: triángulos y cuadriláteros. Iniciación al álgebra



<b>1. Polígonos</b> . . . . .	100
1.1. Elementos de un polígono . . . . .	100
1.2. Clasificación de los polígonos . . . . .	101
1.3. Propiedades . . . . .	102
1.4. Congruencia de polígonos . . . . .	105

<b>2. Triángulos</b> .....	106
2.1. Elementos de un triángulo .....	106
2.2. Clasificación de los triángulos .....	107
2.3. Congruencia de triángulos .....	108
2.4. Rectas notables .....	109
<b>3. Cuadriláteros</b> .....	110
3.1. Elementos de un cuadrilátero .....	110
3.2. Clasificación de los cuadriláteros .....	110
3.3. Construcción .....	111
<b>4. Hexágono</b> .....	112
<b>5. Octágono</b> .....	113
<b>6. Polígonos estrellados</b> .....	114
<b>7. Iniciación al álgebra. Expresiones algebraicas</b> .....	117
7.1. Valor numérico .....	119
7.2. Términos y coeficientes .....	120
<b>8. Operaciones con expresiones algebraicas</b> .....	121
8.1. Adición y sustracción .....	121
8.2. Multiplicación .....	121
8.3. Propiedad distributiva .....	122
8.4. Factor común .....	122
8.5. Representación concreta de monomios hasta grado 2 .....	123
8.6. Agrupación de monomios semejantes con material concreto .....	125



## Módulo 5: Proporcionalidad geométrica

<b>1. Razón y proporcionalidad de segmentos</b> .....	140
<b>2. Rectas secantes cortadas por paralelas</b> .....	141
2.1. Secantes cortadas en segmentos iguales .....	141
2.2. Teorema de Tales .....	142
2.3. Aplicaciones del teorema de Tales .....	144
<b>3. Triángulos en posición de Tales</b> .....	147
<b>4. Triángulos semejantes</b> .....	150
4.1. Semejanza de triángulos en posición de Tales .....	151
4.2. Criterios de semejanza de triángulos .....	152
<b>5. Polígonos semejantes</b> .....	154
5.1. Construcción de polígonos semejantes .....	154
5.2. Perímetros y áreas de polígonos semejantes .....	156
<b>6. Figuras semejantes</b> .....	158
6.1. Construcción de figuras semejantes .....	158
6.2. Escalas .....	159



## Módulo 6: Tablas y gráficos

<b>1. Tablas de datos y gráficas cartesianas</b> .....	176
1.1. Tablas de datos .....	176
1.2. Coordenadas cartesianas .....	178
1.3. Gráficas cartesianas .....	180
<b>2. Estudios estadísticos</b> .....	182
2.1. Variables estadísticas. Frecuencias .....	182
2.2. Frecuencia absoluta y relativa .....	183
<b>3. Tablas y gráficos estadísticos</b> .....	184
3.1. Tablas estadísticas .....	184
3.2. Gráficos estadísticos .....	186
3.3. Descripción de experimentos aleatorios .....	187



- **Solucionario** .....
- **Glosario** .....
- **Simbología** .....
- **Fórmulas de geometría** .....

# Módulo 1

**Bloques:** Numérico.  
Relaciones y funciones

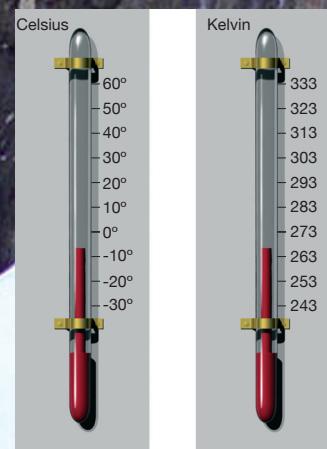
Buen vivir: Educación para la salud



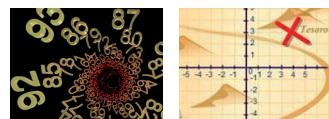
Los científicos trabajan habitualmente con la escala Kelvin de temperatura. Esta escala tiene los 0 grados en la temperatura más baja que puede existir, en la cual, la agitación térmica de la materia es nula y corresponde a  $273^{\circ}\text{C}$  bajo cero.

Teniendo en cuenta que una variación de un grado Celsius (centígrados) equivale a una variación de un kelvin, determina la temperatura de la escala Kelvin a la que corresponde:

- El punto de fusión del agua ( $0^{\circ}\text{C}$ ).
- El punto de ebullición del agua ( $100^{\circ}\text{C}$ ). A nivel del mar.



# Números enteros



Con tus conocimientos sobre los números enteros, serás capaz de expresar *cantidades y operar* con ellos.

## DCD Destrezas con criterios de desempeño

- Leer y escribir números enteros.
- Ordenar y comparar números enteros en la recta numérica.
- Resolver las cuatro operaciones de forma independiente con números enteros.
- Generar sucesiones con números enteros.

- Resolver operaciones combinadas con números enteros.
- Utilizar las estrategias y las herramientas matemáticas adecuadas para resolver problemas mostrando seguridad y confianza en tus capacidades.
- Usar la calculadora de forma racional en la resolución de problemas.



## Prerrequisitos

### Recuerda

- El conjunto de los números **naturales** se representa mediante la letra  $\mathbb{N}$ .

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

- Una **potencia** es un producto de factores iguales. El factor que se repite es la **base** y el número de veces que se repite el factor es el **exponente**.

$$7^2 = 49$$

- La **raíz cuadrada** de un número es otro número que elevado al cuadrado es igual al primero.

$$49 = 7^2$$

- Para indicar que un número es **mayor** que otro escribimos el símbolo  $>$ . Así, por ejemplo, 7 es mayor que 3 se escribe  $7 > 3$ .

Para indicar que un número es **menor** que otro se utiliza el símbolo  $<$ . Por ejemplo, 2 es menor que 5 se escribe  $2 < 5$ .

Así, tendremos:

$$7 > 5 > 3 > 2 \quad y \quad 2 < 3 < 5 < 7$$

### Evaluación diagnóstica

- Enuncia las propiedades de la suma de números naturales.

- Efectúa:

- a)  $18 + 26$       c)  $23 - 2 - 4 + 6 + 3 - 4$   
b)  $612 - 154$       d)  $61 - 4 + 3 - 15 - 6 - 4$

- Describe cómo efectuarías una serie de sumas y restas combinadas con números naturales si aparecen paréntesis, y efectúa:

- a)  $65 - (5 + 7 - 2) + 17$   
b)  $135 - (187 - 125) + (34 - 18)$

- Escribe cinco frases en las que intervengan números naturales. A continuación, escribe estos números mediante cifras.

- Escribe en forma de potencia:

- a)  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$       b)  $7 \times 7 \times 7 \times 7$

- Calcula el resultado.

- a)  $2^2 \times 2^5 \times 2^3$       b)  $3^5 \div 3^2$       c)  $(3^2)^3$

- Halla la raíz cuadrada.

- a) 289      b) 9025      c) 16129

- Representa los números sobre la recta y escríbelos ordenados de menor a mayor.

$$25 - 15 - 10 - 20 - 5 - 35$$



### Educación para la salud

Art. 32. La salud es un derecho que garantiza el Estado, cuya organización se vincula al ejercicio de otros derechos, entre ellos el derecho al agua, la alimentación, la educación, la cultura física, el trabajo, la seguridad social, los ambientes sanos y otros que sustentan el Buen Vivir.

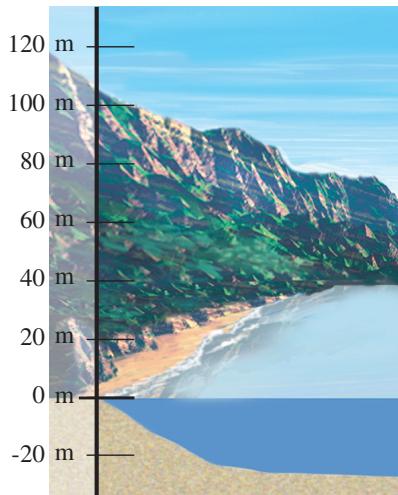
Constitución de la República del Ecuador, 2008.

# 1 El conjunto de los números enteros

En muchos momentos de la vida diaria utilizamos números naturales precedidos de un signo *menos*. Algunas de estas situaciones son las siguientes:



■ Las temperaturas por debajo de los 0 °C.



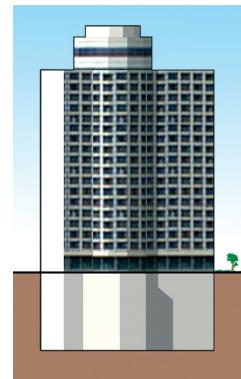
Las altitudes por debajo del nivel del mar.



El saldo de una cuenta bancaria.

puntos conseguidos	puntos recibidos	balance
320	480	-160
433	404	29
512	513	-1
424	404	20

El balance de puntos de un equipo de baloncesto.



Las plantas subterráneas de un edificio.

Observa que en las situaciones anteriores hemos utilizado el conjunto de números conocidos como *números enteros*.



El **conjunto de los números enteros** se forma de:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$$

El conjunto de los números enteros se representa con el símbolo  $\mathbb{Z}$ .

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -365, \dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots, +365, \dots\}$$

- Los números naturales precedidos del signo + son los **números enteros positivos**.
- Los números naturales precedidos del signo – son los **números enteros negativos**.

## Actividades



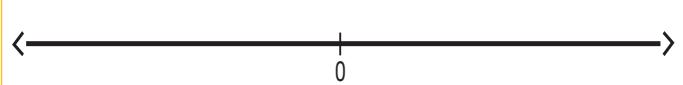
- 1 ¿Cómo representarías cuatro grados centígrados bajo cero? ¿Y dos grados sobre cero?
- 2 Expresa las siguientes situaciones mediante números enteros.
  - He ganado \$ 3.
  - He retrocedido 5 m.
  - Dentro de 15 años.
  - Hace 30 años.
- 3 Expresa mediante una frase el significado de cada uno de los siguientes números enteros.
  - 5, si +5 significa 5 grados sobre cero.
  - +2, si -2 significa que bajó dos pisos.
  - 623, si +100 significa que he ganado \$ 100.

## 1.1. Representación sobre la recta

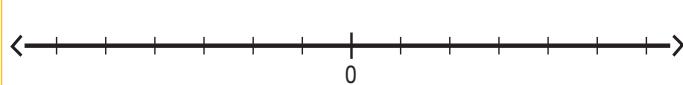
Si observamos un termómetro, podemos ver que para indicar las diferentes temperaturas dispone de una escala graduada en la que se sitúan los números enteros.

Del mismo modo, podemos representar los números enteros sobre una recta numérica.

Dibujamos una recta y señalamos en ella un **punto** que tomaremos como **0**.



Dividimos la recta en **segmentos de igual longitud** hacia la derecha y hacia la izquierda del 0.



A partir del 0 y hacia la derecha, situamos los sucesivos números **enteros positivos**; hacia la izquierda del 0, ubicamos los sucesivos números **enteros negativos**.



## 1.2. Valor absoluto de un número entero

Todos los números enteros, excepto el 0, se escriben con un signo y un número natural. Si prescindimos del signo, podemos establecer una correspondencia entre números enteros y números naturales (tabla 1).

Diremos que el número natural correspondiente a cada número entero es su *valor absoluto*. Así, el valor absoluto de  $-1$  es  $1$  y el de  $-5$  es  $5$ .

El **valor absoluto** de un número entero positivo o negativo es el número natural que se obtiene si suprimimos su signo.

Número entero	Número natural
-1	1
+1	1
-5	5
+5	5

Tabla 1.

Indicamos el valor absoluto de un número entero poniendo éste entre dos barras verticales.  $-8$  se lee *valor absoluto de  $-8$* .

Así, por ejemplo, tenemos:

$$|+15| = 15 \quad |-15| = 15 \quad |+2| = 2 \quad |-2| = 2$$

En el caso del 0, su valor absoluto es 0:

$$|0| = 0$$

### Notación

Valor absoluto

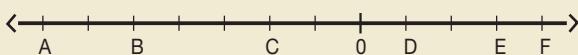
$$|-4| = 4$$

## Actividades



- 4 Representa sobre una recta los siguientes números enteros:  $+3, -8, -12, 0, +7, -4$ .

- 5 Relaciona cada letra con un número entero.



- 6 Determina los valores absolutos de los siguientes números:  $-3, +34, -34, -123, +230, +1\,300, -1\,568, +8\,835$  y  $-13\,457$ .

- 7 ¿Es posible hallar un número entero tal que su valor absoluto sea  $-10$ ? Justifica tu respuesta.

### 1.3. Ordenación de números enteros



Si ordenamos los números que representan las diferentes plantas del ascensor de un edificio, desde la inferior a la superior, tenemos:

$$-3 < -2 < -1 < 0 < +1 < +2 < +3 < +4$$

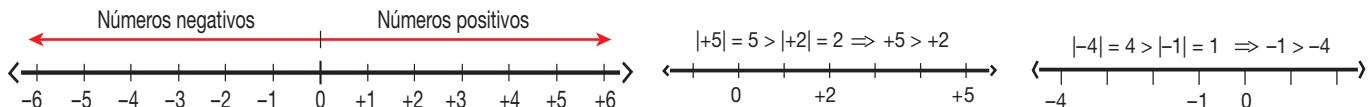
Podemos representar estos valores sobre la recta de los números enteros.



Observa que  $+1 < +4$ , pues al representarlos sobre la recta el  $+4$  queda a la derecha del  $+1$ . De la misma manera, diremos que  $-3 < -1$ , ya que el  $-1$  queda a la derecha del  $-3$ .



Dados dos números enteros cualesquiera, es **mayor** el que está **representado más a la derecha** sobre la recta.



Cualquier número entero **positivo** es **mayor** que cualquier número entero **negativo**.

El **0** es **menor** que cualquier número entero **positivo** y **mayor** que cualquier número entero **negativo**.

El **mayor** de dos números enteros **positivos** es el que tiene **mayor valor absoluto**.

El **mayor** de dos números enteros **negativos** es el que tiene **menor valor absoluto**.

#### ejemplo 1

Señala en cada uno de los siguientes pares de números enteros cuál es el mayor. Represéntalos sobre la recta.

a)  $-11$  y  $8$       b)  $0$  y  $-9$       c)  $0$  y  $4$       d)  $8$  y  $6$       e)  $-7$  y  $-6$

- a) Un número entero positivo es mayor que cualquier número entero negativo.  $\rightarrow 8 > -11$   
b) El **0** es mayor que cualquier número entero negativo.  $\rightarrow 0 > -9$   
c) El **0** es menor que cualquier número entero positivo.  $\rightarrow 0 < 4 \Rightarrow 4 > 0$   
d)  $8 = 8 > 6 = 6$ . El mayor de dos números enteros positivos es el que tiene mayor valor absoluto.  $\rightarrow 8 > 6$   
e)  $-7 = 7 > -6 = 6$ . El mayor de dos números enteros negativos es el de menor valor absoluto.  $\rightarrow -6 > -7$



#### Actividades



- 8 Copia en tu cuaderno los siguientes pares de números y escribe el signo  $>$  o  $<$  según corresponda.

$$-3 \dots +8$$

$$-5 \dots -8$$

$$0 \dots +13$$

$$0 \dots -2$$

$$+4 \dots +9$$

$$+4 \dots -10$$

- 9 Ordena de menor a mayor la siguiente serie de números.

$$-7, +12, -12, 0, +4, -1002, +7, -20$$

- 10 Escribe cuatro números enteros menores que  $+2$  y otros cuatro mayores que  $-10$ .

## 2 Operaciones

Con los números enteros podemos efectuar las mismas operaciones que realizamos con los números naturales: *suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces*.

### 2.1. Adición y sustracción

Veamos, primero, cómo se suman dos números enteros. Distinguiremos los casos en que tengan el mismo signo o signos diferentes.

#### Adición de dos números enteros del mismo signo

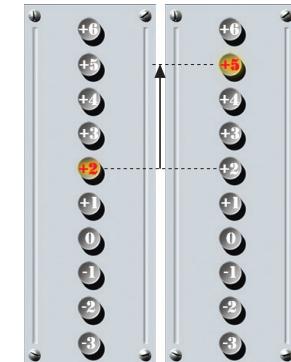
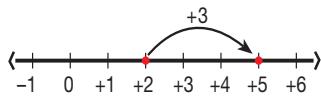
Un ascensor se encuentra en el piso 2 de un edificio cuando es llamado desde 3 pisos más arriba. ¿Desde qué piso se le llamó?

El piso será el 5.

Podemos escribir:

$$(+2) + (+3) = +5$$

Sobre la recta numérica:



Fíjate que estamos en +2 y hemos avanzado 3 unidades hacia la **derecha**.

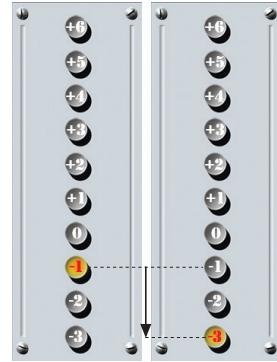
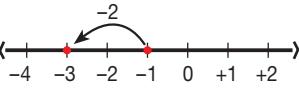
Un ascensor que se encuentra en el primer subsuelo baja dos pisos. ¿En qué planta se encontrará?

Se encontrará en el piso -3, tercer subsuelo.

Podemos escribir:

$$(-1) + (-2) = -3$$

Sobre la recta numérica:



Observa que nos hemos situado en -1 y hemos avanzado 2 unidades hacia la **izquierda**.



Para **sumar** dos números enteros del **mismo signo**:

- Se escribe el mismo signo de los sumandos.
- Se suman los valores absolutos de los sumandos.

#### Adición de dos números enteros de distinto signo

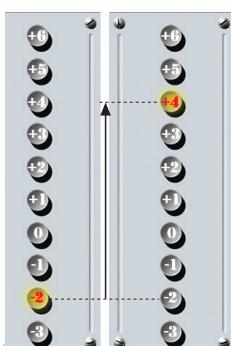
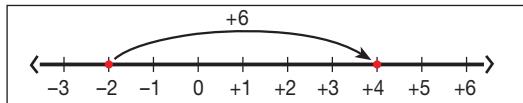
Un ascensor que está en el segundo subsuelo sube 6 pisos. ¿En qué planta se encontrará?

Como ves, se trata del piso 4.

Podemos escribir:

$$(-2) + (+6) = +4$$

Sobre la recta numérica:



Para **sumar** dos números enteros de **distinto signo**:

- Se escribe el signo del sumando de mayor valor absoluto.
- Se restan los valores absolutos de los sumandos.

## Adición de varios números enteros

Para sumar varios números enteros podemos proceder de dos maneras. Veamos, por ejemplo, cómo calcular la expresión:

$$(-3) + (+7) + (+4) + (-2)$$

Primer procedimiento	Segundo procedimiento
<ul style="list-style-type: none"> <li>Efectuamos las adiciones en el orden en que aparecen.</li> </ul> $  \begin{array}{r}  (-3) + (+7) + (+4) + (-2) = \\  \hline  = (+4) \quad + (+4) + (-2) = \\  \hline  = (+8) \quad + (-2) = +6  \end{array}  $	<ul style="list-style-type: none"> <li>Reordenamos los sumandos. Primero escribimos los números enteros positivos y después los enteros negativos.</li> </ul> $  \begin{array}{r}  (+7) + (+4) + (-3) + (-2) = \\  \hline  (+11) + (-5) = +6  \end{array}  $ <ul style="list-style-type: none"> <li>Efectuamos las adiciones en cada grupo por separado. Después, sumamos los dos resultados obtenidos.</li> </ul>

## Propiedades de la adición

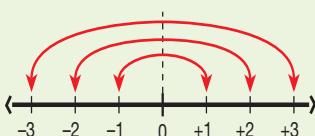
La adición de números enteros tiene las siguientes propiedades:

Propiedad	Enunciado	Ejemplo
<b>Comutativa</b>	Si cambiamos el orden de los sumandos, el resultado no varía: $a + b = b + a$	$(+4) + (-2) = (-2) + (+4)$ $+2 = +2$
<b>Asociativa</b>	En una adición de varios sumandos, el resultado no depende de cómo agrupemos sus términos:	$[(+5) + (-3)] + (-4) = (+5) + [(-3) + (-4)]$ $(+2) + (-4) = (+5) + (-7)$ $-2 = -2$
<b>Elemento neutro</b>	El 0 es el elemento neutro de la adición, pues al sumar 0 a cualquier número entero se obtiene dicho número: $a + 0 = a$	$(+5) + 0 = +5$
<b>Elemento opuesto</b>	<p>Todo número entero tiene su opuesto, el número entero que sumado a él da 0:</p> $a + \text{op}(a) = 0$ <p>El opuesto es el propio número cambiado de signo.</p>	$(+3) + (-3) = 0$ <p>Diremos que +3 y -3 son números enteros <b>opuestos</b>, y escribiremos:</p> $\text{op}(+3) = -3 \quad \text{op}(-3) = +3$

## Actividades

### FÍJATE

Dos números enteros opuestos se encuentran a la misma distancia del 0.



**11** Efectúa las siguientes adiciones.

a)  $(+5) + (-4)$     b)  $(-3) + (-5)$     c)  $(-12) + (-34) + (+64) + (-37)$

**12** Efectúa de dos maneras diferentes estas adiciones y comprueba que se cumple la propiedad asociativa.

a)  $(-4) + (-2) + (+5)$     b)  $(-2) + (+5) + (-3)$

**13** Escribe el opuesto de cada uno de los siguientes números.

-5, +7, +18, -32, +6, -8, -25, +350, -88, 0

## Sustracción

Fíjate en la siguiente adición de números enteros:

$$(+7) + (-2) = +5$$

Si no conociésemos uno de los sumandos, para hallarlo deberíamos efectuar una sustracción:

$$(+7) + \boxed{?} = +5 \rightarrow \boxed{?} = (+5) - (+7)$$

El resultado de esta sustracción es  $-2$ .

Observa que este resultado es el mismo que el obtenido al sumar a  $+5$  el opuesto de  $+7$ ; es decir,  $-7$ .

$$(+5) + (-7) = -2$$

Por lo tanto, podemos escribir:

$$(+5) - (+7) = (+5) + \underset{\substack{\text{opuesto} \\ \text{de } +7}}{\underline{(+7)}} = (+5) + (-7) = -2$$

Para restar dos números enteros se suma al primero el opuesto del segundo.

### Simplificación en la escritura

- Podemos identificar un número entero positivo como un número natural y escribirlo prescindiendo del signo y del paréntesis si no es necesario.

$$(+3) = +3 = 3$$

- Teniendo en cuenta la definición de sustracción, podemos simplificar la escritura de las operaciones con números enteros.

$$(+6) + (-3) = (+6) - \underset{\substack{\text{opuesto} \\ \text{de } -3}}{\underline{(+3)}} = 6 - 3$$

Observa en el margen cómo se simplifican los diferentes casos.

## Actividades

14 Calcula:

a)  $(-12) - (+15)$

c)  $(-16) - (+16)$

e)  $(+11) - (-7)$

b)  $(-16) - (-12)$

d)  $(-37) - (-28)$

f)  $(-9) - (-7)$

- 15 Averigua con un ejemplo si la sustracción de números enteros cumple la propiedad conmutativa.



### FÍJATE

Al trabajar con los números enteros, el signo  $-$  puede tener dos significados diferentes:

$$(+3) - (-8)$$

Indica la operación sustracción.

Indica un número entero negativo.



### FÍJATE

$$(+3) + (+5) = 3 + 5$$

$$(+3) + (-5) = 3 - 5$$

$$(-3) + (+5) = -3 + 5$$

$$(-3) + (-5) = -3 - 5$$

$$(+3) - (+5) = 3 - 5$$

$$(+3) - (-5) = 3 + 5$$

$$(-3) - (+5) = -3 - 5$$

$$(-3) - (-5) = -3 + 5$$

## Adiciones y sustracciones combinadas

Antes de efectuar adiciones y sustracciones combinadas de números enteros, simplificaremos la escritura, eliminando los paréntesis y los signos innecesarios. Por ejemplo:

$$(+6) + (-3) + (-5) - (-4) = 6 - 3 - 5 + 4$$

A continuación, podemos proceder de dos maneras:

Primer procedimiento	Segundo procedimiento
<ul style="list-style-type: none"><li>Efectuamos las operaciones en el orden en que aparecen.</li></ul> $\begin{aligned} 6 - 3 - 5 + 4 &= \\ &= 3 \quad - 5 + 4 = \\ &= -2 \quad + 4 = 2 \end{aligned}$	<ul style="list-style-type: none"><li>Escribimos, en primer lugar, los números precedidos del signo + y después los precedidos del signo -.</li></ul> $6 + 4 - 3 - 5$ <ul style="list-style-type: none"><li>Efectuamos la suma de ambos grupos por separado. Despues, restamos el segundo resultado del primero.</li></ul> $10 - 8 = 2$

## Uso del paréntesis

Al igual que en el caso de los números naturales, si en una serie de operaciones combinadas aparecen paréntesis, debemos efectuar primero las operaciones indicadas en su interior. Así:

### FÍJATE

En la práctica, los paréntesis se usan con dos finalidades diferentes:

- Para evitar que haya dos signos seguidos. Es el caso, por ejemplo, de:

$$3 - (-2)$$

- Para indicar la *prioridad* en las operaciones que deben efectuarse. Por ejemplo:

$$5 - (4 + 2)$$

$$12 + (3 - 10) = 12 + (-7) = 12 - 7 = 5$$

$$8 - (16 - 9) = 8 - 7 = 1$$

Sin embargo, podemos también proceder **eliminando** previamente los paréntesis:

$$12 + (3 - 10) = 12 + (3 + \text{op} (10)) = 12 + 3 + \text{op} (10) = \mathbf{12 + 3 - 10 = 5}$$

$$8 - (16 - 9) = 8 + \text{op} (16 - 9) = 8 + \text{op} (16) + \text{op} (-9) = \mathbf{8 - 16 + 9 = 1}$$

Fíjate en que al suprimir el paréntesis precedido del signo +, los signos de los números que contiene no han variado. En cambio, al suprimir el paréntesis precedido del signo -, los signos de los números que contiene sí que han cambiado.

 Si en una serie de **adiciones y sustracciones combinadas** aparecen **paréntesis**, podemos proceder de dos maneras:

- Se efectúan primero las operaciones indicadas en su interior.
- Se eliminan previamente los paréntesis. En este caso:
  - Si el paréntesis está precedido del signo +, dejamos los números con sus signos.
  - Si el paréntesis está precedido del signo -, cambiamos los signos de los números que contiene.

Si procedemos de una de estas dos formas, podremos efectuar operaciones combinadas en las que aparezcan paréntesis que indiquen prioridad. Observa el ejemplo siguiente:

$$18 + (-2 + 6) + (-3 + 15) - (3 + 7 - 5)$$

Se efectúan primero las operaciones

Efectuamos las operaciones de los paréntesis.

$$18 + \underline{-2 + 6} + \underline{-3 + 15} - \underline{(3 + 7 - 5)} = \\ = 18 + \underline{4} + \underline{12} - \underline{5}$$

A continuación, resolvemos las operaciones.

$$34 - 5 = 29$$

Se eliminan previamente los paréntesis

Eliminamos previamente los paréntesis.

$$18 + (-2 + 6) + (-3 + 15) - (3 + 7 - 5) = \\ = 18 - 2 + 6 - 3 + 15 - 3 - 7 + 5$$

Después, efectuamos las operaciones.

$$18 + 6 + 15 + 5 - 2 - 3 - 3 - 7 = 44 - 15 = 29$$

## Uso del corchete

En ocasiones, nos podemos encontrar con expresiones que contienen paréntesis dentro de otros paréntesis. Para distinguir qué paréntesis se encuentran dentro de los otros, se acostumbra sustituir los externos por **corchetes** [ ], y otros más externos por **llaves** { }. Por ejemplo:

$$16 + (5 - 12) - [11 + (-3 - 9) + 5] - 3$$

Corchetes  
Paréntesis

En estos casos, podemos comenzar efectuando las operaciones indicadas dentro de los paréntesis, o bien, eliminando estos paréntesis. Así, para resolver el ejemplo anterior, podemos proceder de dos maneras:

Se efectúan primero las operaciones

- Efectuamos las operaciones de los paréntesis y sustituimos los corchetes por paréntesis.

$$16 - 7 - (11 - 12 + 5) - 3$$

- Efectuamos las operaciones de los nuevos paréntesis y operamos.

$$16 - 7 - 4 - 3 = 16 - 14 = 2$$

Se eliminan previamente los paréntesis

- Eliminamos los paréntesis y sustituimos los corchetes por paréntesis.

$$16 + 5 - 12 - (11 - 3 - 9 + 5) - 3$$

- Eliminamos los nuevos paréntesis y operamos.

$$16 + 5 - 12 - 11 + 3 + 9 - 5 - 3 =$$

$$= 16 + 5 + 3 + 9 - 12 - 11 - 5 - 3 = 33 - 31 = 2$$

## Actividades



- 16** Elimina los paréntesis y calcula en tu cuaderno:

- $-6 + 5 - (7 - 4) + 3$
- $-2 - 5 - (2 - 7) - (5 + 6)$
- $3 - 7 + (-9 - 3) - (1 - 2)$
- $-(5 - 2) + (4 - 6) - (8 + 2)$

- 17** Efectúa en tu cuaderno:

- $-(6 - 3) - [2 - (5 - 7) - 3]$
- $2 + \{ - [-(7 + 8) + (4 - 3)] - 2 \}$
- $-[5 - (4 - 7) - (2 - 3)]$
- $-(7 - 3) - (5 - 2) - [(12 - 6) - (9 - 5)]$

## 2.2. Sucesiones con adiciones y sustracciones

A los elementos de un conjunto ordenado de números, se los conoce como términos de una sucesión.

Los términos de una sucesión se encuentran relacionados unos con otros, por lo cual, es posible encontrar un término a partir del anterior.

En matemática y en la vida cotidiana es posible encontrar varios conjuntos cuyos elementos están relacionados entre sí, por ejemplo:

El conjunto ordenado de los números pares forman una sucesión:



Para encontrar el término que sigue en el ejemplo anterior, sumamos dos al último término.

### CONTRAEJEMPLO

3; 5; 10; 12; 24

La anterior no es una sucesión con adición porque el patrón de formación consiste en sumar 2 y, luego, multiplicar por 2, de manera alternada.

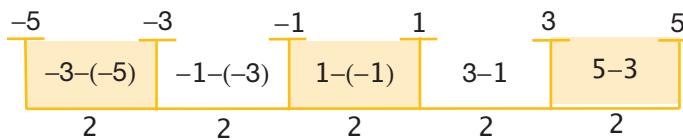
### ejemplo 2

Encuentra los tres términos siguientes en la sucesión.

-5; -3; -1; 1; 3; 5; ...

Observa el procedimiento:

— Restamos a cada número el término que está a su izquierda (el término anterior).



— Si la diferencia que encontramos entre dos términos sucesivos es siempre la misma, esta será la cantidad que debemos sumar a cada uno para encontrar el siguiente término.

— Para encontrar los términos de la sucesión que no conocemos, sumamos el valor encontrado en el paso anterior al último término:

$$5 + 2 = 7$$

— De esta manera, sabemos que el término siguiente de la sucesión es:

-5; -3; -1; 1; 3; 5; 7...



Las sucesiones que se forman al sumar un mismo número al término anterior reciben el nombre de progresiones aritméticas.

### Actividades



18 Encuentra los siguientes tres números que corresponden a los términos de cada sucesión.

- |                       |                           |
|-----------------------|---------------------------|
| a) 4; 8; 12; 16 ...   | d) -30; -22; -14; -6 ...  |
| b) 0; 5; 10; 15 ...   | e) -3; 0; 3; 6 ...        |
| c) -10; -3; 4, 11 ... | f) -16; -14; -12; -10 ... |

Los términos de una sucesión pueden estar relacionados entre sí por un número entero positivo, como en los ejemplos anteriores, o también por un número entero negativo.

### ejemplo 3

Juana recibe \$ 25 a la semana. Si gasta \$ 5 cada día, ¿para cuántos días le alcanzará el dinero?



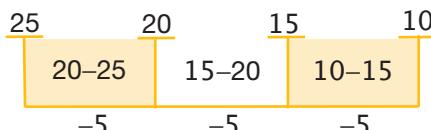
Juana gasta \$ 5 cada día.

Para encontrar los términos de la sucesión debemos realizar el procedimiento aprendido en la página anterior:



Observa el procedimiento:

— Restamos a cada número el término que está a su izquierda (el término anterior).



- Si la diferencia que encontramos entre dos términos sucesivos es siempre la misma, esta será la cantidad que debemos sumar a un término para encontrar el próximo.
- Como el término es negativo, debemos conservar el signo en la suma:

$$10 + (-5) = 10 - 5$$

$$= 5$$

$$25; 20; 15; 10; 5; 0$$

- Si se sigue el procedimiento, se encontrará un término más de la sucesión.

## Actividades

- 19** Encuentra los siguientes tres números que corresponden a los términos de cada sucesión.

- 12; 3; -6; -15; ...
- 8; 5; 2; -1; ...
- 38; 32; 26; 20; ...

- 20** En una granja agrícola de la Costa ecuatoriana cada semana de enero y febrero se cosechan 80 kilogramos menos que en la semana anterior, si en la primera semana de enero se cosecharon 600 kg, ¿en la semana de qué mes se cosecharon 200 kg?

## 2.3. Multiplicación y división exacta

Veamos a continuación la multiplicación, la división exacta y las respectivas operaciones combinadas.

### Multiplicación

Imagina un experimento en el laboratorio en el que se tenga que variar la temperatura  $2\text{ }^{\circ}\text{C}$  cada hora. La siguiente tabla refleja la temperatura en diferentes instantes.

Temperatura	Ascenso ( $+2\text{ }^{\circ}\text{C}$ por hora)	Descenso ( $-2\text{ }^{\circ}\text{C}$ por hora)
Tiempo Dentro de 4 h $\rightarrow (+4)$	La temperatura será $8\text{ }^{\circ}\text{C}$ más alta ( $+8$ ). $(+4) \times (+2) = +8$	La temperatura será $8\text{ }^{\circ}\text{C}$ más baja ( $-8$ ). $(+4) \times (-2) = -8$
Hace 3 h $\rightarrow (-3)$	La temperatura era $6\text{ }^{\circ}\text{C}$ más baja ( $-6$ ). $(-3) \times (+2) = -6$	La temperatura era $6\text{ }^{\circ}\text{C}$ más alta ( $+6$ ). $(-3) \times (-2) = +6$

#### Ley de signos

Si se multiplican o dividen dos números enteros, el resultado es positivo mientras los dos posean el mismo signo. En cambio, si tienen signos diferentes entre sí, el resultado será negativo.

#### Regla práctica para la multiplicación

$\times$	$+$	$-$
$+$	$+$	$-$
$-$	$-$	$+$

Fíjate en los productos anteriores: el valor absoluto del producto es el producto de los valores absolutos de los factores.

Observa también que el **signo es positivo** si los dos factores tienen el **mismo signo**; y **negativo**, si tienen **distinto signo**. Este resultado se conoce como *ley de signos*.

Para multiplicar dos números enteros:

- Se escribe el signo dado por la ley de signos.
- Se multiplican los valores absolutos de los factores.

Propiedad	Enunciado	Ejemplo
<b>Comutativa</b>	Si cambiamos el orden de los factores, el producto no varía: $a \times b = b \times a$	$(+4) \times (-2) = (-2) \times (+4)$ $(-8) = (-8)$
<b>Asociativa</b>	En una multiplicación de varios factores, el producto no depende de cómo los agrupemos. $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c = a \times b \times c$	$(+4) \times [(-3) \times (-5)] = [(+4) \times (-3)] \times (-5)$ $(+4) \times [+15] = [-12] \times (-5)$ $+ 60 = + 60$
<b>Modulativa</b>	Todo número entero multiplicado por 1 da como resultado el mismo número entero. $a \times 1 = a$	$(+ 6) \times 1 = + 6$
<b>Distributiva con respecto a la adición y sustracción</b>	El producto de un número entero por una suma indicada de números enteros es igual a la suma de los productos del número entero por cada uno de los sumandos. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$	$(+4) \times [(+2) + (-5)] = (+4) \times (+2) + (+4) \times (-5)$ $(+4) \times [-3] = (+8) + (-20)$ $- 12 = - 12$
<b>El cero en la multiplicación</b>	Cero multiplicado por cualquier número es cero	$0 \times (4) = 0$ $0 \times (-4) = 0$

<p>Aplica la propiedad distributiva:</p> $(-4) \times [(-4) + (+9)] =$ $(-4) \times (-4) + (-4) \times (+9) =$ $(+16) + (-36) = -20$	<p><b>ejemplo 4</b></p> <p><i>Multiplicamos los valores absolutos del primer factor por los valores absolutos de cada sumando del segundo factor.</i></p> <p><i>Sumamos los resultados obtenidos.</i></p>	<p><b>FÍJATE</b></p> <p>En una expresión que resultó de aplicar la propiedad distributiva podemos encontrar un <b>factor común</b> que permita expresar nuevamente el producto de dos factores.</p> $a \times b + a \times c = a \times (b + c)$
<p>Encuentra el resultado:</p> $(+12) + [(-14) + (-7) - (+9)] \times 0$ $(+12) + 0 = +12$	<p><b>ejemplo 5</b></p> <p><i>Resolvemos primero las multiplicaciones.</i></p> <p><i>En este caso el producto de lo que está dentro de los corchetes y el 0 es cero.</i></p> <p><i>La suma de un número entero y el cero siempre es el mismo número entero.</i></p>	<p><b>FÍJATE</b></p> <p>0 multiplicado por cualquier otro número es 0.</p> $0 \times (+4) = 0$ $0 \times (-5) = 0$
<p>Resuelve sacando factor común:</p> $(-3) \times (+4) + (+6) \times (+4) + (-5) \times (+4) =$ $(+4) \times [(-3) + (+6) + (-5)] =$ $(+4) \times (+8) = +32$	<p><b>ejemplo 6</b></p> <p><i>Debemos expresar el ejercicio como el producto de dos factores.</i></p> <p><i>Sacamos el factor común, ese es el primer factor.</i></p> <p><i>El segundo factor es la suma de los factores que no son comunes.</i></p> <p><i>Operamos la suma que está dentro de los paréntesis.</i></p> <p><i>Multiplicamos.</i></p>	

## Actividades



**21** En una multiplicación de números enteros de tres factores, ¿cómo han de ser los signos de los factores para que el producto sea negativo? ¿Y para que sea positivo?

**22** Calcula:

- |                       |                        |                        |
|-----------------------|------------------------|------------------------|
| a) $(+7) \times (-2)$ | d) $(+6) \times (-15)$ | g) $(-9) \times (+5)$  |
| b) $(+4) \times (+7)$ | e) $(+3) \times (-7)$  | h) $(-5) \times (-4)$  |
| c) $(-2) \times (+2)$ | f) $(+5) \times (+8)$  | i) $(+12) \times (+3)$ |

**23** Calcula:

- |                                   |                                   |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| a) $(+4) \times (+2) \times (-9)$ | c) $(-3) \times (+4) \times (-7)$ |
| b) $(-4) \times (+1) \times 0$    | d) $(+3) \times (-5) \times (+2)$ |

## División exacta

Para hallar uno de los factores de una multiplicación, conocido el producto, debemos efectuar una división.

$$(-3) \times \boxed{?} = -24 \rightarrow \boxed{?} = (-24) \div (-3)$$

Así, el número que multiplicado por  $-3$  nos da  $-24$  es  $+8$ . Por tanto, el resultado de dividir  $-24$  entre  $-3$  es  $+8$ .

$$(-24) \div (-3) = +8$$

Fíjate en que el valor absoluto del cociente coincide con el cociente de los valores absolutos de los números dados:

$$|-24| \div |-3| = |+8|$$

Observa también que se cumple la **ley de signos**:

- Si el dividendo y el divisor tienen el **mismo signo**, el cociente es **positivo**.
- Si el dividendo y el divisor tienen **distinto signo**, el cociente es **negativo**.

### Regla práctica para la división

$\div$	+	-
+	+	-
-	-	+

### FÍJATE

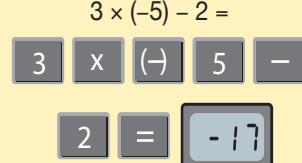
La división exacta no se puede aplicar a cualquier pareja de números enteros por ejemplo:

$$18 \div 7$$

### Las TIC y la Matemática

Algunas calculadoras poseen una tecla que permite **cambiar el signo** a los números. Acostumbra a llevar el símbolo  $+\/-$  o  $(-)$ .

Observa cómo efectuamos esta operación:

$3 \times (-5) - 2 =$   


Fíjate en que hemos utilizado teclas diferentes para introducir los dos signos – de la secuencia anterior.



**C1** Si tu calculadora posee la tecla de cambio de signo, efectúa las siguientes operaciones.

$$3 \times (-4) + 5 \times 2$$

$$4 - 2 \times (-5) + 7$$

$$6 \times 3 - 4 \times (-6)$$

Para efectuar la **división exacta** de dos números enteros:

- Se escribe el signo dado por la ley de los signos.
- Se dividen sus valores absolutos.

### Actividades



**24** Calcula mentalmente:



- a)  $(+35) \div (-5)$       d)  $(+28) \div (-7)$   
b)  $(-18) \div (-3)$       e)  $(+40) \div (-4)$   
c)  $(-70) \div (+10)$       f)  $(-14) \div (+2)$

**25** Completa en tu cuaderno:

- a)  $(-476) \div \square = 14$       c)  $(+242) \div \square = 11$   
b)  $(+140) \div \square = -4$       d)  $(-512) \div \square = 16$

**26** Ordena de menor a mayor los resultados de las siguientes divisiones.

- a)  $(-1125) \div (-15)$       c)  $-25 \div \text{op} (-5)$   
b)  $|+1725| \div |-75|$       d)  $\text{op} (-25) \div \text{op} (-5)$

**27** Compara el resultado de dividir dos números enteros con el resultado de dividir sus opuestos. ¿Se cumple que el opuesto de la división entre dos números enteros es la división de los opuestos de dichos números?

## Operaciones combinadas

Ahora vamos a efectuar operaciones combinadas en las que haya adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones.

Por convenio, el orden que se ha de seguir en las operaciones combinadas en que no aparecen paréntesis de prioridad es el siguiente:

Orden de operaciones	Ejemplo: $5 \times (-3) - 2 - 4 \times (-7) + 8$
<ul style="list-style-type: none"><li>En primer lugar, se efectúan las <b>multiplicaciones</b> y las <b>divisiones</b> en el orden en que aparecen.</li><li>A continuación, las <b>adiciones</b> y las <b>sustracciones</b>.</li></ul>	$\begin{aligned} & - 15 - 2 + 28 + 8 = \\ & = - 17 + 36 = 19 \end{aligned}$

Si tuviéramos que efectuar primero una adición o una sustracción, debemos hacer uso del paréntesis para indicar esta prioridad. Así, en el ejemplo anterior, según dónde se pongan los paréntesis, se obtendrían distintos resultados:

$$\begin{aligned} 5 \times (-3 - 2) - 4 \times (-7 + 8) &= 5 \times (-3 - 2 - 4) \times (-7 + 8) = \\ &= 5 \times (-5) - 4 \times 1 = \quad 5 \times (-9) \times 1 = \\ &= - 25 - 4 = \quad - 45 \times 1 = \\ &= - 29 \quad = - 45 \end{aligned}$$

### ejemplo 7

a) Calcula:  $4 \times (-6 + 4) + 7 - 4 : (9 - 7) + 3 \times (-6 - 2)$

— En primer lugar, realizamos las operaciones de los paréntesis.

$$4 \times (-2) + 7 - 4 : 2 + 3 \times (-8)$$

— A continuación, efectuamos las multiplicaciones y las divisiones.

$$-8 + 7 - 2 - 24$$

— Finalmente, realizamos las adiciones y las sustracciones.

$$-8 + 7 - 2 - 24 = -8 - 2 - 24 + 7 = -34 + 7 = -27$$

b) Observa cómo se extrae el factor común:

$$6 \times 2 - 6 \times (4)$$

$$6 \times (2 - 4)$$

$$6 \times (-2) = -12$$

### FÍJATE

Recuerda que no pueden escribirse dos signos seguidos.

Por ejemplo, para indicar que hemos de multiplicar 2 por -5, escribiremos:

$$2 \times (-5)$$

## Actividades



28 Efectúa las siguientes operaciones.

- $12 + 6 \times (-3)$
- $(-5) \times 3 + (-2) \times (-6)$
- $-9 - 6 \times (-5) - 15 \div 3 - 4$
- $-3 \times (-3) - 3 \div (-3) + 3$
- $6 \div (-3) - 16 \div (-4)$
- $-6 \div 3 + (-16) \div 4$

29 Calcula:

- $-[5 + 7 \times (-3)] + 21 \div 7 - 4$
- $18 \div (6 \times 2 - 3) - [16 - (-4) \times 2]$
- $-[5 \div (-5) + 2 \div (-2)] - 10 \div (3 \times 5 - 5)$

30 Resuelve sacando el factor común:

- $5 \times (-3) + 5 \times (-2)$
- $6 \times (-5) - (-4) \times (-5)$
- $(-6) + 6 \times b$

## 2.4. Potenciación y radicación

### Potencias

Veamos cómo calcular las potencias de base un número entero y exponente un número natural según el signo de la base.

### FÍJATE

No es lo mismo  $-2^2$  que  $(-2)^2$ .  
 $-2^2 = -(2 \times 2) = -4$   
 $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$

	Exponente impar	Exponente par
Base entera positiva	La base es un número natural y, por tanto, la potencia es siempre positiva. $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$	$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$
Base entera negativa	Hemos de tener en cuenta la ley de signos de la multiplicación. $(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = -27$	$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$

Podemos determinar el signo de una potencia observando su base y su exponente (tabla 2):

- Si el **exponente** es **par**, la potencia es siempre **positiva**.
- Si el **exponente** es **impar**, la potencia tiene el **mismo signo** que la base.

El número 0 elevado a cualquier número natural (excepto el cero) es igual a 0.

		Exponente	
		Par	Impar
Base	+	+	+
	–	+	–

■ Tabla 2.

Para operar con potencias de base entera y exponente natural, procedemos igual que en el caso de potencias de base natural.

Propiedad	Enunciado	Ejemplo
Multiplicación de potencias de igual base	Se conserva la base y se suman los exponentes. $a^m \times a^n = a^{m+n}$	$(-10)^2 \times (-10)^3 = (-10)^{2+3}$ $(100) \times (-1000) = (-10)^5$ $-100000 = -100000$
División de potencias de igual base	Se conserva la base y se restan los exponentes. $a^m \div a^n = a^{m-n}$ $Si m > n$	$(-10)^5 \div (-10)^2 = (-10)^{5-2}$ $(-100000) \div (100) = (-10)^3$ $-1000 = -1000$
Potencia de potencia	Se conserva la base y se multiplican los exponentes. $(a^m)^n = a^{m \times n}$	$((-10)^2)^3 = (-10)^{2 \times 3}$ $(100)^3 = (-10)^6$ $1000000 = 1000000$
Potencia de un producto	Se eleva cada factor al exponente indicado. $(a \times b)^m = a^m \times b^m$	$(4 \times 5)^2 = 4^2 \times 5^2$ $(20)^2 = 16 \times 25$ $400 = 400$
Potencia de una división	Se eleva al dividendo y al divisor al exponente indicado. $(a \div b)^m = a^m \div b^m$	$(25 \div 5)^2 = 25^2 \div 5^2$ $5^2 = 625 \div 25$ $25 = 25$
Potencia de exponente 1	Toda base elevada al exponente 1 es igual a la misma base. $a^1 = a$	$(20)^1 = 20$
Potencia de exponente 0	Toda base diferente de cero elevada al exponente 0 es igual 1. $a^0 = 1 ; a \neq 0$	$(-4)^0 = 1$

## Raíz cuadrada

La raíz cuadrada de un número entero positivo **b** o **cero**, es el número entero positivo **a** o **cero**, tal que:  $a^2 = b$ . Se expresa:

$$\sqrt{b} = a$$

En efecto, si tenemos el número entero **a** tal que  $a^2 = b$  entonces:

$$\sqrt{b} = \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a; & a \geq 0 \\ -a; & a < 0 \end{cases}$$

Por tanto debemos concluir que:  $\sqrt{25} = 5$

$$-\sqrt{25} = -5$$

Si el radicando es negativo, no existe raíz cuadrada, puesto que ningún número entero elevado a la segunda potencia puede ser un número entero negativo. Por ejemplo:  $\sqrt{-25} \notin \mathbb{Z}$ .

Sabemos que  $\sqrt{16} = 4$ , ya que  $4^2 = 16$ . En general, decimos:

» Sean **a, b** enteros positivos o cero, entonces  $\sqrt{b} = a$  si y solo si  $a^2 = b$ .

Observa los ejemplos:

$$\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$(\sqrt{-2})^2 \notin \mathbb{Z}$  ; porque  $\sqrt{-2} \notin \mathbb{Z}$  al no poder resolver la raíz no se puede resolver la potencia. En general si  $b < 0$  (**b** negativo)  $\sqrt{b^2} \neq (\sqrt{b})^2$

Según hemos visto, una potencia de exponente par siempre es positiva. Por tanto, no existe número entero cuyo cuadrado sea un entero negativo.

» Los números enteros negativos no tienen **raíz cuadrada** en los enteros.

## Otras raíces

Las raíces de índice par se definen de forma parecida a las raíces cuadradas. Se concluye que no existe raíz real de índice par si el radicando es negativo.

Por ejemplo, el número 81 es el resultado de elevar a la cuarta potencia el número 3. Así el número 3 es la raíz cuarta de  $81, \sqrt[4]{81} = 3$ .

Las raíces de índice impar se definen de forma parecida a las raíces de índice par, con la consideración de que el radicando sí puede ser negativo, en ese caso la raíz también es negativa.

Por ejemplo, el número 125 es el resultado de elevar al cubo el número 5. Así el número 5 es la raíz cúbica de 125,  $\sqrt[3]{125} = 5$ . Y el número -125 es el resultado de elevar al cubo el número -5. Así el -5 es la raíz cúbica de -125,  $\sqrt[3]{-125} = -5$ .

## Actividades

31 Indica el signo de las siguientes potencias.

a)  $(-7)^3$

c)  $(-2)^{32}$

b)  $6^9$

d)  $(-4)^{17}$

32 Escribe dos números que elevados al cuadrado den 121.

33 Calcula: a)  $\sqrt{625}$

b)  $\sqrt{-961}$

## FÍJATE

Si  $X \in \mathbb{Z}$  se tiene que

$$|X| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

## MUCHO OJO

$$|X| = |-X|$$

# Cómo resolver problemas

## Método general de resolución de problemas

A continuación, te presentamos un *método* de resolución de problemas que te servirá de pauta en este curso. Este método propone cuatro pasos.

En las próximas páginas dedicadas a la *resolución de problemas* encontrarás una serie de técnicas y estrategias que te ayudarán en esta tarea, a veces ardua, pero siempre gratificante.

*Cuatro colegios participan en un torneo de ajedrez. Por cada colegio toman parte cuatro cursos y por cada curso hay cuatro alumnos o alumnas. ¿Cuántos estudiantes participan en el torneo de ajedrez?*

### Consejos útiles

- No te desanimes si el camino escogido no te lleva a la solución o surge alguna dificultad: revisa cada uno de los pasos u opta por un nuevo procedimiento.
- Debes confiar en tus capacidades y ser perseverante en la búsqueda de la solución.
- Mantén siempre una actitud favorable a la revisión y mejora del resultado o del proceso seguido.

### Pasos del método de solución de problemas

#### ► Comprensión del enunciado

Antes de abordar la resolución de un problema es muy importante entender su enunciado. Para ello:

- Leemos atentamente el problema para entender el significado de todas las palabras y de los símbolos matemáticos, si los hay.
- Interpretamos **qué es lo que nos piden** y localizamos los **datos**.

#### ► Planificación de la resolución

En esta fase planificamos la forma de resolver el problema:

- Pensamos si podemos emplear una estrategia determinada.
- Si conviene, confeccionamos esquemas, dibujos o construcciones.
- Planteamos las operaciones que debemos efectuar, el orden de éstas...

#### ► Ejecución del plan de resolución

Ejecutamos el plan que nos habíamos trazado:

- Aplicamos las estrategias escogidas en la fase anterior.
- Efectuamos las operaciones. Debemos tener en cuenta la jerarquía al resolver una operación combinada.

#### ► Revisión del resultado y del proceso seguido

Finalmente, debemos comprobar si la **solución** obtenida está en concordancia con lo que pide el enunciado.

- Revisamos cada uno de los pasos y nos aseguramos de que las operaciones son correctas.
- Comprobamos si la solución cumple las condiciones del enunciado.

### Aplicación

Leemos de nuevo el enunciado del problema y anotamos los datos y lo que nos piden.

**Datos:** Número de colegios: 4

Número de cursos de cada colegio: 4

Número de alumnos/as de cada curso: 4

**Nos piden:** Número total de alumnos.

Para conocer el número total de alumnos debemos efectuar un producto. Se trata de un producto de factores iguales; es decir, una potencia.

$$4 \times 4 \times 4 = 4^3$$

Calculamos el resultado de la potencia:  $4^3 = 64$ .

Comprobamos con la calculadora si el resultado obtenido es correcto.



## Actividades



**34** Aplica el método de resolución de problemas para resolver las actividades 64 a 82 de las páginas 31 y 32.



## En resumen

- El **conjunto de los números enteros** está formado por los números naturales precedidos del signo +, los números naturales precedidos del signo - y el 0.
 
$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -365, \dots, -1, 0, +1, \dots, +365, \dots \}$$
- El **valor absoluto** de un número entero es el número natural que se obtiene si suprimimos su signo.
- Dados dos números enteros cualesquiera, es **mayor** el que está **representado más a la derecha** sobre la recta.
- Con los números enteros efectuamos las operaciones: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.
- En las **operaciones combinadas** en que no aparecen paréntesis de prioridad, el orden que se debe seguir es el siguiente:
  - En primer lugar, se efectúan las **multiplicaciones** y las **divisiones**, en el orden en que aparecen.

- A continuación, las **adiciones** y las **sustracciones**.

$$5 + (-2) \times (-1) - 6 \div 2 + (-8) =$$

$$5 + 2 - 3 - 8 =$$

$$7 - 11 = -4$$

- Para determinar el **signo de una potencia** de un número entero vemos en la potenciación, su base y su exponente:

- Si el **exponente** es **par**, la potencia es **positiva**.

$$(-7)^2 = +49$$

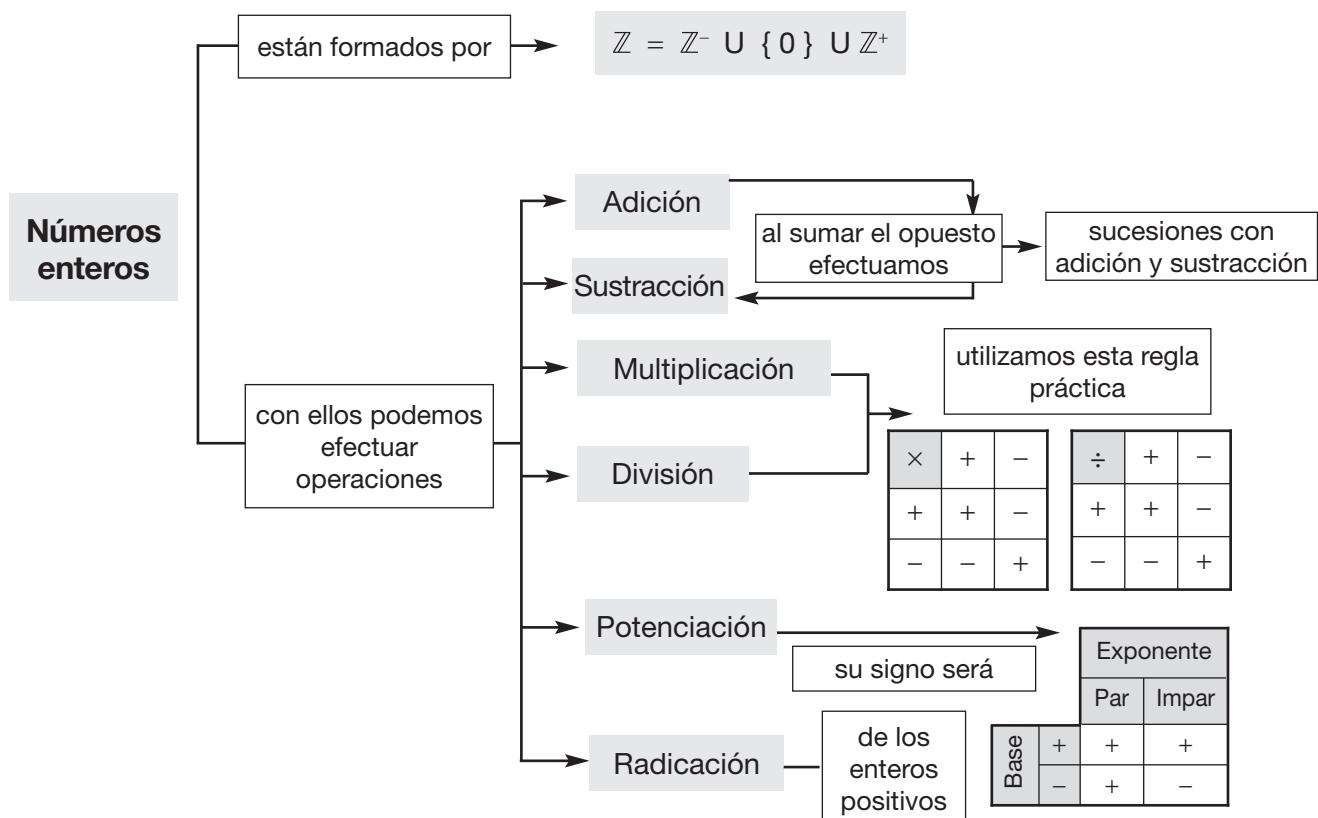
- Si el **exponente** es **impar**, la potencia tiene el **mismo signo** que la base.

$$(-7)^3 = -343$$

- Un **cuadrado perfecto** tiene **dos raíces cuadradas**, una positiva y otra negativa, que son dos números enteros opuestos.

$$\sqrt{81} = \pm 9$$

Los números **enteros negativos** no tienen **raíz cuadrada**.



# Ejercicios y problemas integradores

- Rafael encontró en uno de los libros de su abuelo retazos de una hoja que contenía un ejercicio de matemática cuya respuesta era  $-65$ , el joven entusiasmado juntó los retazos y halló el resultado. Observa cómo lo hizo:

$$[(-4 + 2 - 6 + 10)^2]^3 + \sqrt[5]{(-2)^5} \times \sqrt{(-5)^2} - [\sqrt[3]{(36 \div 4)(-12 + 7 + 2)}]^2$$

- Resuelve primero lo que está dentro del paréntesis de la primera parte, **asocia** sumandos para facilitar la suma. La suma de los enteros negativos es **opuesto** a uno de los sumandos, entonces la suma de estos es cero.
- En el primer radical si la base es negativa y el exponente impar, entonces la potencia es negativa, en el segundo, la base negativa y exponente par, resulta una potencia positiva.
- En la tercera parte resuelve las operaciones de los paréntesis, multiplica los resultados aplicando la ley de los signos.

$$[(+2)^2]^3 + \sqrt[5]{-32} \times \sqrt{25} - [\sqrt[3]{9(-3)}]^2 = [(+2)^2]^3 + \sqrt[5]{-32} \times \sqrt{25} - [\sqrt[3]{-27}]^2$$

- Ahora, se observa una potencia elevada a otra potencia, entonces, conserva la base y multiplica los exponentes.
- Calcula las raíces, la primera es una raíz impar de un número negativo, entonces, la raíz es negativa.
- Halla la raíz que está dentro de los corchetes en la última parte.
- Resuelve considerando la prioridad de las operaciones, las reglas de la potenciación y la ley de los signos.

$$(+2)^8 + (-2) \times 5 - [-3]^2 = 64 - 10 - 9 = 45$$

Como la respuesta no coincide, prueba con otra opción, no realiza todo el proceso, utiliza únicamente las respuestas de cada ejercicio parcial y alterna los signos:

$$(+2)^6 + (-2) \times 5 - [-3]^2 =$$

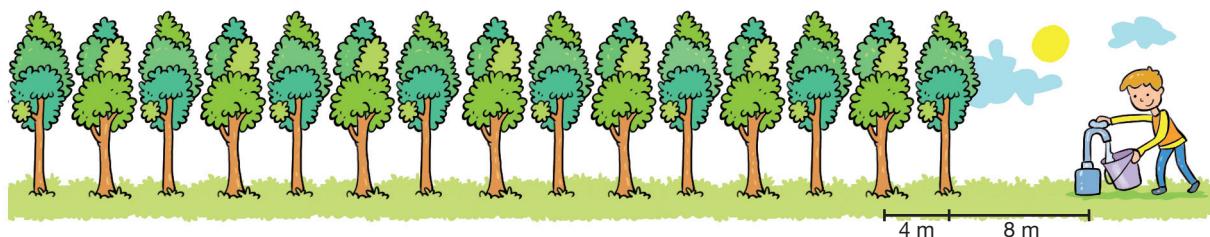
$$[-3]^2 - (+2)^6 + (-2) \times 5 = 9 - 64 + (-10) = 9 - 64 - 10 = -65$$

## Practica

- Busca la forma de armar el siguiente ejercicio, para que la respuesta sea  $-1$

$$\sqrt[3]{(28 \div 4)(-8 + 4 + 3)^2} + \sqrt[5]{(-27)(-3)(5 - 2)}^2 - [(12 \div (-4) - 6 + 10)^2]^3$$

- Ernesto debe echar un balde de agua a cada uno de los quince árboles que tiene. Estos están colocados a una distancia de 4 metros entre sí a lo largo de un camino, y la distancia del primer árbol al grifo de agua es de 8 metros. Si cada vez lleva un balde de agua, ¿qué distancia habrá recorrido hasta regar los quince árboles, considerando que deja el balde junto al grifo?



- Este problema lo podemos resolver aplicando los conocimientos de sucesiones y números enteros, observa:

- Ernesto para regar el primer árbol y dejar el balde en su lugar debe recorrer 8 m de ida y 8 m de regreso.

Primer viaje de ida y vuelta:  $a_1 = 16$  m

- Para regar el segundo árbol debe recorrer 12 m de ida y 12 m de regreso.

Segundo viaje de ida y vuelta:  $a_2 = 24$  m

- Para regar el tercer árbol debe recorrer 16 m de ida y 16 m de regreso.

Tercer viaje de ida y vuelta:  $a_3 = 32$  m

- Formamos la sucesión cuya diferencia entre un término y el anterior es ocho: 16, 24, 32...

- Ernesto siempre recorre 8m entre árbol y árbol al ir y volver.

- Sumamos 8, 12 veces más para obtener la distancia recorrida del grifo al último

árbol de ida y vuelta.  $16, 24, 32, 40, 48, \dots 128$

- Otra forma de hallar la distancia entre el primer y último árbol es:

- Entre el primer y último árbol hay 14 espacios, lo expresamos:  $15 - 1$

- Ernesto recorre 12 veces 8m entre el primer y último árbol:  $(15 - 1) \times 8$  m.

- A la distancia recorrida entre el primer y último árbol debemos añadir la distancia que hay entre el grifo y el primer árbol:  $16 \text{ m} + (15 - 1) \times 8 \text{ m} = 16 \text{ m} + 14 \times 8 \text{ m} = 128 \text{ m}$

- Si utilizamos letras para los elementos de este problema, obtenemos una fórmula que nos ayudará a encontrar cualquier término de una **progresión aritmética**.

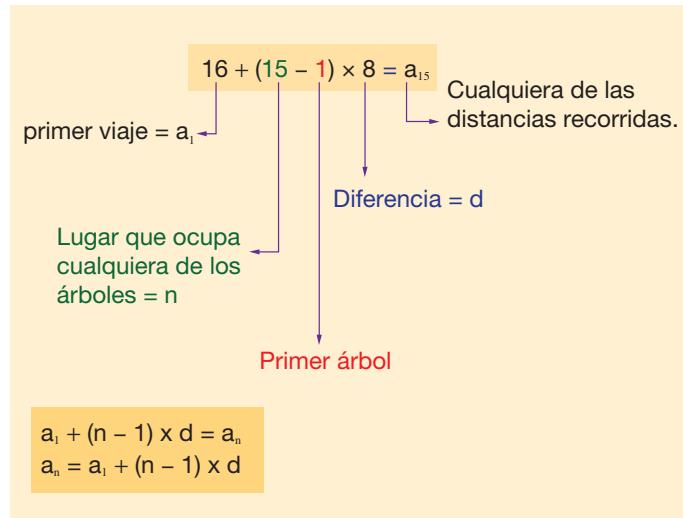
- Ahora debemos determinar la distancia total que recorrió Ernesto al regar todos sus árboles. Para ello deberíamos sumar todos los términos de la sucesión que formamos:  $16 + 24 + 32 + 40 + 48, \dots + 128 = 1080 \text{ m}$

**R: Ernesto recorre aproximadamente 1 km.**

## Práctica

Un estudiante se propone el día 1 de marzo repasar matemáticas durante una quincena, haciendo cada día 2 ejercicios más que el día anterior. Si el primer día empezó haciendo un ejercicio:

¿Cuántos ejercicios le tocará hacer el día 15 de marzo?



# Ejercicios y problemas



## Comprensión de conceptos y conocimiento de procesos

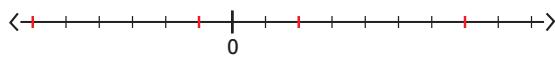
### Números enteros

**35** Expresa las siguientes situaciones mediante números enteros.

- El club de fútbol perdió 1500 socios.
- El globo aerostático ascendió 114 m.
- El auto está estacionado en el segundo subsuelo.
- Hemos subido tres pisos.

**36** Representa los siguientes números enteros sobre una recta numérica.

$$-2, 7, -5, 3, 0, 11$$



**38** Determina los valores absolutos de estos números enteros.

$$23, -12, 55, 0, 320, 814, -1955$$

**39** Completa con todas las posibles opciones.

$$| \dots | = 12 \quad | \dots | = 170 \quad | \dots | = 55$$

**40** Representa en una recta numérica los posibles valores de  $m$ ,  $n$  y  $p$ .

$$|m| = 3 \quad |n| = 10 \quad |p| = 5$$

**41** Escribe el signo  $>$  o  $<$  entre los números enteros de cada uno de los siguientes pares.

$$-6 \text{ y } +4; \quad +3 \text{ y } 0; \quad -2 \text{ y } 2; \quad -5 \text{ y } -8$$

**42** Ordena de menor a mayor esta serie de números enteros.

$$-12, +14, 0, +12, -14$$

**43** Indica si estas frases son ciertas o falsas.

- Entre  $-3$  y  $3$  hay seis números enteros.
- El número entero  $-6$  es mayor que el número entero  $-5$ .
- Existen cinco números enteros cuyo valor absoluto es menor que  $3$ .

### Operaciones

**44** Efectúa las siguientes adiciones.

- |                    |                            |
|--------------------|----------------------------|
| a) $(+3) + (+12)$  | c) $(-6) + (-19) + (-7)$   |
| b) $(-15) + (+28)$ | d) $(+16) + (-35) + (+12)$ |

**45** Comprueba que se cumple la propiedad commutativa en cada uno de los apartados del ejercicio anterior.

**46** Representa las siguientes adiciones de números enteros sobre una recta y calcula el resultado.

- |                  |                    |
|------------------|--------------------|
| a) $(-8) + (+2)$ | c) $(-18) + (+5)$  |
| b) $(+5) + (-6)$ | d) $(+15) + (-16)$ |

**47** Di qué nombre recibe la siguiente propiedad de la adición de números enteros.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

— Comprueba que se cumple sustituyendo  $a$ ,  $b$  y  $c$  por tres números enteros.

**48** Expresa en forma de adición y efectúa:

- |                   |                    |
|-------------------|--------------------|
| a) $(+15) - (-4)$ | c) $(-5) - (+8)$   |
| b) $(-9) - (-7)$  | d) $(+13) - (+18)$ |

**49** Indica si es cierta esta frase: «El opuesto del opuesto de  $-3$  es  $-3$ ».

Debemos comprobar si  $\text{op}[\text{op}(-3)] = -3$ .

Primero, calculamos el valor del interior del corchete y, a continuación, su opuesto.

$$\text{op}(-3) = +3$$

$$\text{op}(+3) = -3$$

Por tanto, la frase es cierta.

**50** ¿Cuál es el opuesto del opuesto de  $7$ ?

**51** Encuentra algún número entero que cumpla la igualdad  $| \dots + 3 | = 5$ .

**52** Determina los números enteros que cumplen la igualdad  $| \dots + 3 | = 5$ .

**53** Calcula:

- |                  |                             |
|------------------|-----------------------------|
| a) $ +6  +  -7 $ | c) $ (-12) + (+18) + (-6) $ |
| b) $ +5  +  -5 $ | d) $ (-3) + (+17) + (-18) $ |

**54** Efectúa, eliminando los paréntesis.

- a)  $(-17) - (+13) - (+5) + (+14) - (+45)$   
 b)  $(+17) + (-13) + (-5) - (-14) + (-45)$

**55** Efectúa:

- a)  $-[(6 - 3) - (12 + 4)] - (8 + 3)$   
 b)  $-[(+4) - (-3) - (+6) + (-4)]$   
 c)  $-[(-5) - (7 - 12 + 9) + 2] - 2$

**56** Encuentra los dos siguientes términos de cada sucesión.

- a) 0, 4, 8, 12, ...  
 b) -5, -3, -1, 1, ...  
 c) 7, 5, 3, 1, ...  
 d) 25, 15, 5, -5, ...

**57** Calcula:

-  a)  $(-4) \times (+3)$       d)  $(-14) \times (+2)$   
 b)  $(+2) \times (-9)$       e)  $(-5) \times (-7)$   
 c)  $(-6) \times (-12)$       f)  $(-20) \times (+4)$

**58** Efectúa:

-  a)  $(+24) \div (+6)$       d)  $(+225) \div (-5)$   
 b)  $(-81) \div (+9)$       e)  $(-369) \div (-3)$   
 c)  $(-15) \div (-5)$       f)  $(-921) \div (+3)$

**59** Calcula:

-  a)  $(+8) \times (-17) \times (+5) \div (-2)$   
 b)  $(-4) \times (-35) \times (-18) \div (-9) \div (+7)$

**60** Calcula:

- a)  $-8 - [21 \div (-3)] + [6 \times (-2) - 7]$   
 b)  $-[-6 \div 2 - 4 \times (-5)] \times (-2) - 2$

**61** Escribe las siguientes potencias como productos de factores iguales y luego calcula.

- a)  $(-7)^3$       c)  $2^8$       e)  $-2^4$   
 b)  $-4^3$       d)  $(-4)^2$       f)  $(-3)^4$

**62** Escribe cada número en forma de una potencia de base negativa:

- a) 81      b) -8      c) 49

**63** Calcula:

- a)  $\sqrt{289}$       b)  $\sqrt{14\,884}$       c)  $\sqrt{123\,904}$   
 d)  $\sqrt[3]{8}$       e)  $\sqrt[5]{32}$       f)  $\sqrt[4]{81}$



## Aplicación en la práctica

**64** Calcula el cambio de temperatura sufrido en la región de la Sierra Ecuatoriana que pasó de  $+20^{\circ}\text{C}$  a  $-2^{\circ}\text{C}$ .

**65** Pitágoras nació en el año 572 a. C. y murió en el 497 a. C. y Aristóteles murió en el año 322 a. C. ¿Cuándo nació Aristóteles si vivió 13 años menos que Pitágoras?

**66** Calcula la distancia que separa un avión que vuela a 1 800 m de altitud de un submarino situado a 170 m por debajo del nivel del mar.

**67** Una araña que se encuentra a 100 cm del suelo sube 10 cm, después desciende 30 cm y, a continuación, baja otros 20 cm. ¿A qué distancia se halla del suelo?



**68** Determina los años transcurridos entre la fundación de Roma el 753 a. C. y la caída del Imperio romano de Occidente el año 476.

**69** Un ascensor se encuentra en una determinada planta. Sube 3 pisos, hace una parada y sigue subiendo otros 7. A continuación, baja 6 pisos y se encuentra en la séptima planta. ¿En qué planta se hallaba inicialmente el ascensor?

**70** Un padre da 10 dólares a cada uno de sus tres hijos. Si éstos gastan, en conjunto, 22 dólares, determina el dinero que les queda.

**71** Un conductor se encuentra en el kilómetro 100 de la carretera hacia Lago Agrio, regresa 30 km y a continuación avanza de nuevo por la misma carretera recorriendo dos trayectos del mismo número de kilómetros, encontrándose al final en el kilómetro 190. ¿Cuántos kilómetros ha recorrido en cada uno de los dos trayectos?

**72** Un globo asciende a una velocidad de 3 m cada minuto. En este momento se encuentra a 15 m sobre el nivel del mar.

a) ¿A cuántos metros sobre el nivel del mar se encontraba hace 3 minutos?

b) ¿A cuántos metros sobre el nivel del mar se encontrará dentro de 2 minutos?

**73** El día de Navidad, al mediodía, la temperatura en la parte nevada del Chimborazo era de  $4^{\circ}\text{C}$ . Cada tres horas la temperatura bajó  $2^{\circ}\text{C}$  y a partir de las 9 de la noche la temperatura bajó  $1^{\circ}\text{C}$  cada hora. ¿Qué temperatura marcó el termómetro a media noche?

- 74** Material concreto: Elabora fichas con los números enteros del -8 al 7. Luego, construye un cuadrado mágico de manera que al colocar las fichas, cada fila, cada columna y cada diagonal sumen -2.

-8	5	6	
	-2	-3	0
	2		
			7

- 75** Una familia de El Oro, de seis miembros, dispone de 1 047 dólares cada mes. Los gastos medios fijos son: \$ 200 de arriendo; \$ 38 de agua potable y luz eléctrica; \$ 584 de otros gastos, como alimentación, vestido, transporte...

- Expresa mediante operaciones combinadas la cantidad de dinero que pueden ahorrar en un mes.
- ¿Podrían comprar con lo que ahorren en 4 meses un computador que cuesta \$ 1 200?

- 76** Un cuestionario consta de 15 preguntas de las cuales cinco puntúan 2 puntos; cinco puntúan 4 puntos, y otras cinco puntúan 6 puntos si se aciertan. En caso de fallar, se resta la mitad de la puntuación.

- a) ¿Cuál es la máxima puntuación que puede obtenerse? ¿Y la mínima? ¿Qué diferencia hay entre las dos puntuaciones?
- b) ¿Cuál es la puntuación obtenida por un compañero que solamente se ha equivocado en una pregunta de 2 puntos y en dos de 6 puntos?

- 77** Beatriz estaciona su automóvil en el subsuelo del edificio donde trabaja, y su oficina se encuentra en la última planta. Para hacer ejercicio, cada mañana sube por las escaleras los doce tramos de escaleras que separan el auto de la oficina.

Si sabemos que entre dos pisos consecutivos hay tres tramos de escalera, ¿en qué planta se encuentra su despacho?

- 78** Un ciclista acaba la cuarta etapa de la vuelta ciclista al Ecuador en la tercera posición de la clasificación general. No recuerda sus posiciones anteriores pero sabe que en la segunda jornada ganó 7 puestos, que en la tercera perdió 3 y que en esta cuarta ha ganado 11. Calcula la posición en que acabó el primer día.

- 79** Formen grupos de trabajo y efectúen las siguientes operaciones:

- Escriban individualmente el día y el mes de su nacimiento. Resten el día al mes.
  - Sumen todos los resultados obtenidos.
  - Resten cada uno el mes de nacimiento del día de nacimiento y sumen los resultados.
- ¿Cómo son los dos resultados obtenidos?

- 80** Formen grupos de trabajo y, en los periódicos o en Internet, busquen información relativa a las temperaturas de los últimos 3 días.

- Elijan en el grupo una provincia distinta y busquen las temperaturas máxima y mínima de cada uno de los tres días.
- Elaboren para cada provincia una tabla en la que aparezcan las temperaturas máxima y mínima, y la diferencia entre ambas de cada día. Remarquen la máxima y la mínima absolutas.
- Comparen los resultados obtenidos.

- 81** Entra en esta dirección de Internet: <http://www.amejor.com/mates/matematicos/braha.htm>, y busca la fecha de nacimiento de Brahmagupta y su principal obra.

- 82** Accede en la página de Internet: <http://www.egiptologia.com/historia/tresmil/tresmil.htm>, y busca qué faraón mandó construir la pirámide de Gizeh y hace cuántos años comenzó su dinastía.

### ► Más a fondo

- 83** Calcula y escribe el signo  $>$ ,  $<$  o  $=$  entre cada uno de los siguientes pares de números.

- a)  $|(+2) + (-6)|$  y  $|(+2)| + |(-6)|$
- b)  $|(-7) + (+7)|$  y  $|(-7)| + |(+7)|$
- c)  $|(+4) + (+4)|$  y  $|(+4)| + |(+4)|$

- Deduce la regla que cumple el valor absoluto de la suma de números enteros.

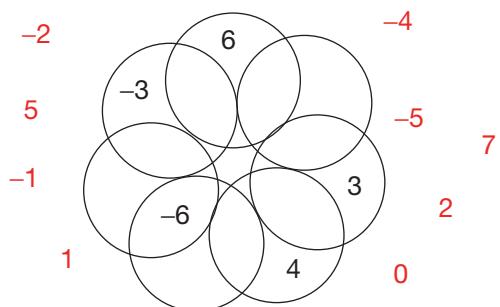
- 84** Completa en tu cuaderno con los números 4 o 5.

- a)  $\dots + \text{op}(\dots) + \dots + \text{op}(\dots) + \dots + \text{op}(\dots) = -3$
- b)  $\dots \times \dots + \text{op}(\dots \times \dots) + \dots + \text{op}(\dots) = -3$



## ▶ Consigue el 0

Copia esta figura en tu cuaderno y complétala con los números propuestos para que cada círculo sume 0.



Una vez que lo hayas resuelto, te será fácil construir tú mismo un juego similar.

## Buen Vivir

Educación para la salud



¿Sabes que el Ecuador posee una gran variedad climática a lo largo de su territorio? Debido a ello, se observan distintas vestimentas según las diferentes culturas y condiciones geográficas. En la Costa, las islas Galápagos y Amazonía, las temperaturas oscilan entre los 20 °C y 35 °C; la ropa es ligera, por lo general de colores claros para impedir que los rayos del sol y el calor se concentren en los tejidos. En la Sierra, las temperaturas se ubican entre los 8 °C y 26 °C, y los nevados pueden llegar a temperaturas bajo 0 °C. Por esto, se necesitan vestimentas que protejan el cuerpo. Aquí, tradicionalmente, los pueblos y nacionalidades han recurrido a materiales como la lana de ovejas o de llamas. Cuando se realizan actividades como el andinismo, es fundamental que sepamos proteger nuestro cuerpo del frío y mantenerlo en buen estado para enfrentar las condiciones del entorno.

### Actividades



- 1 ¿Cómo es y de qué prendas se compone la vestimenta que utilizan las personas de su localidad?
- 2 ¿Qué pasaría si una persona que vive en la Sierra alta utilizara la vestimenta propia de la Costa?
- 3 Investiguen cómo es la forma de vestir en dos localidades de la Costa, dos de la Sierra, dos de la Amazonía y las Islas Galápagos. Escriban fichas con los siguientes datos:
  - Nombre de la localidad:
  - Ubicación geográfica:
  - Altitud de la región:
  - Tipo de vestimenta:
 Luego, realicen una exposición en la clase. Pueden ayudarse de fotografías, diapositivas o dibujos.
- 4 ¿Qué revelan las diferentes temperaturas que hay en nuestro país? ¿Pueden decir que somos diversos en este aspecto? ¿Por qué?
- 5 ¿Qué pueden hacer para mostrar al mundo nuestra riqueza, diversidad climática y regional?
- 6 ¿Cómo podemos aprovechar la diversidad y riqueza climática?
- 7 ¿Qué podemos hacer para preservar el clima de las regiones naturales de nuestro país?

## ▶ Tres doses

Con tres doses y las operaciones necesarias pueden obtenerse muchos números. Así, por ejemplo, tenemos:

$$222 \quad 2 \times 2 \times 2 = 8 \quad 22 - 2 = 20$$

$$-2 - 2 - 2 = -6 \quad -(-2) - 2^2 = -2$$

¿Cómo conseguirías obtener 16? ¿Y -16?

## ▶ Adivinanza

Dime qué es, que cuánto más le quito, más grande es.



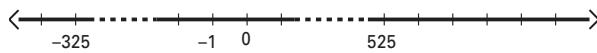
# Autoevaluación

# Coevaluación

Si logras resolver el 70 % de estas actividades individuales y grupales, puedes avanzar.

1. Escribe tres frases, referidas a situaciones cotidianas, en las que utilices números enteros.

2. Determina cuáles son los números enteros señalados en la siguiente recta numérica.



3. ¿Es cierto que si el valor absoluto de un número entero es mayor que el de otro, el primer número entero es mayor que el segundo?

— Indica cuál es el número entero mayor de cada uno de los siguientes pares.

—4 y 6; -2 y -3; 0 y -6; 5 y -9

4. Resuelve:

a)  $3 \times (-6) \div 9$       b)  $(-22) \div 11 \times (-3)$

5. Calcula:

a)  $-2^7$       b)  $(-2)^5$       c)  $(-3)^4$

1. Representen sobre una recta numérica los siguientes números enteros y escríbanlos ordenados de menor a mayor.

+2, -3, -1, +5, -4, +6, 0

2. Calculen de dos maneras la siguiente operación:

$$3 - (-6 + 4) - 3 - (-3 - 17)$$

3. Realicen las operaciones:

a)  $-2 \times 6 + 9 \div 3$       b)  $-[-8 \div 2 + 3 \times (-2) + 5]$

4. Escriban dos números que elevados al cuadrado den 169.

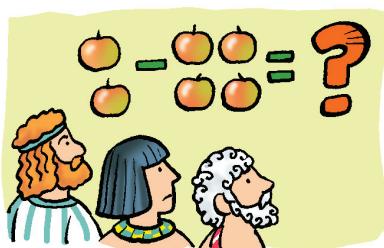
5. Eva tiene 4 años más que su hermana Ana. Ana tiene 2 años menos que su amigo Juan. Éste tiene 7 años menos que su hermano Andrés, quien, a su vez, tiene 22 años menos que su padre, que ahora tiene 51 años. Calculen la edad de Eva.



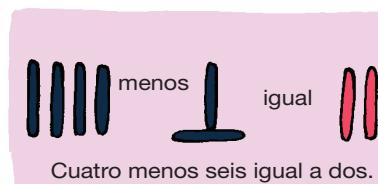
# Historia

## Sección de historia

Los babilonios, los egipcios y los griegos no consideraban los números enteros negativos.



Los chinos representaban los números positivos con varillas negras. Los números negativos, que eran considerados un mero instrumento de cálculo, se representaban con varillas rojas.



El hindú Brahmagupta introdujo en el año 628 los números negativos para indicar deudas, así como algunas de sus reglas de cálculo.



Los árabes rechazaban los números negativos pese a conocer los trabajos hindúes.



Durante el Renacimiento, algunos matemáticos empezaron a utilizar números negativos como instrumento de cálculo. Otros se negaron tan siquiera a considerarlos.



En el siglo XIX, los números negativos se aceptaron definitivamente como números y dejaron de ser un mero instrumento de cálculo.





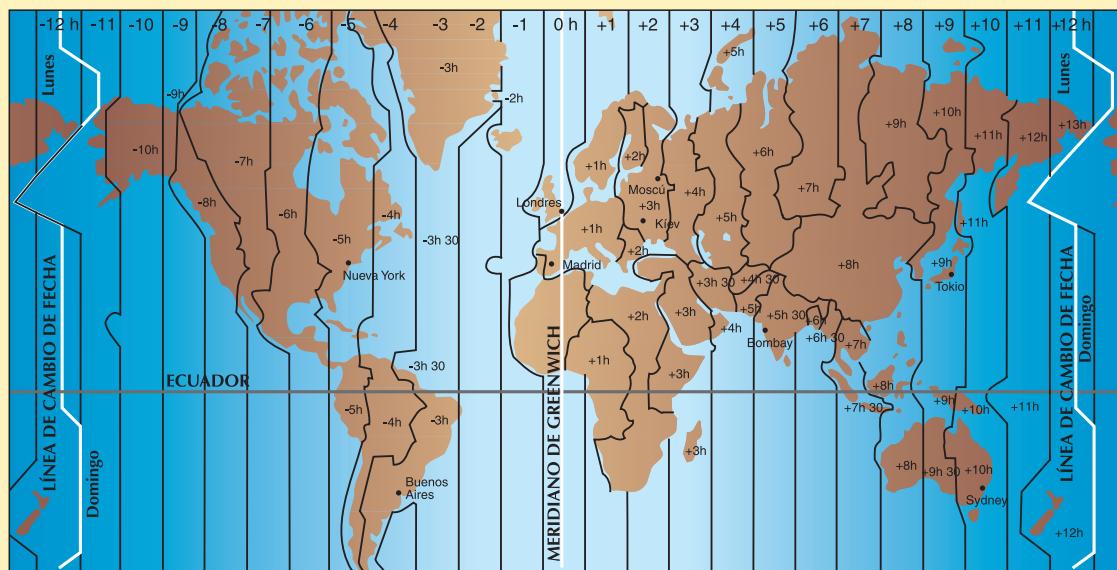
## Crónica matemática

### ¿Qué hora es en...?

Estamos habituados a ver en televisión imágenes en directo de situaciones que están ocurriendo a miles de kilómetros. En ocasiones, aparecen simultáneamente imágenes de día y de noche, de ayer y de hoy. ¿Es posible?

En el siguiente mapa podemos observar las diferencias horarias entre las distintas zonas del planeta. De igual forma, existen páginas en Internet que nos indican la hora exacta en cualquier ciudad del mundo.

Observa cómo hay países muy extensos geográficamente como Estados Unidos y Rusia en los que la diferencia horaria entre dos puntos del mismo país llega a ser de varias horas.



### Hoy es...

La respuesta no es única.

Habitualmente, utilizamos el calendario **gregoriano** que nos indica el tiempo transcurrido desde el nacimiento de Jesucristo. Pero en otras zonas o culturas los puntos de partida son otros hechos significativos.

En **China**, aunque desde 1911 se utiliza oficialmente el calendario gregoriano, también hay quien cuenta los años desde el nacimiento del Emperador Amari-illo, Huangdi, el primer emperador de China el 2697 a. C.

El calendario **musulmán** comienza a contar desde la Hégira, la huida de Mahoma a Medina, en el año 622 de nuestra era.

El calendario **judío** empieza con la creación del mundo según Samuel, que corresponde al año 3761 antes de Jesucristo.

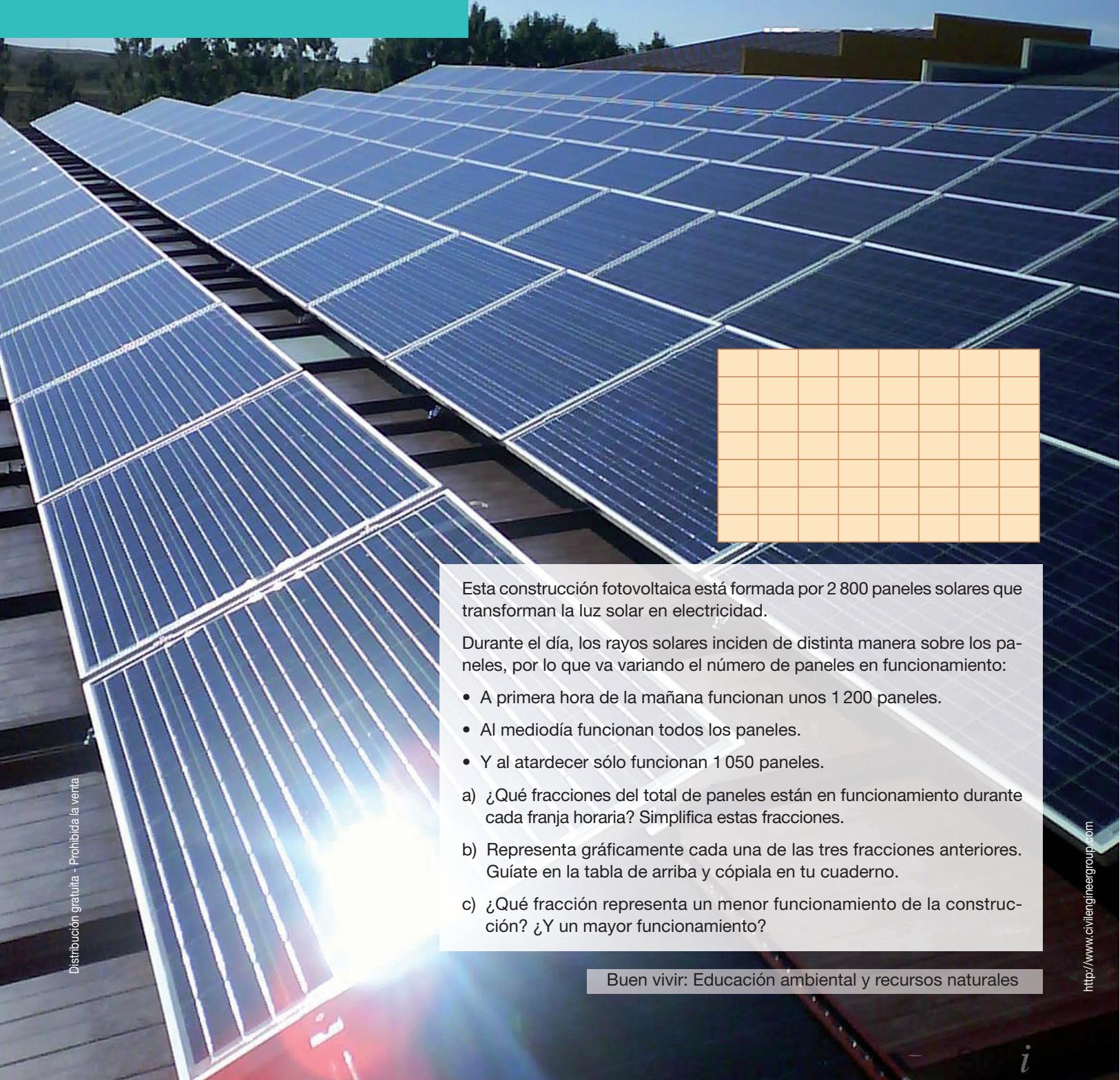
Los **hindúes** cuentan los años en eras. La era oficial, Saka, comenzó el año 78.

El calendario **japonés** comienza el 660 a. C., año en que se coronó al primer emperador del Japón, Jinmu.

Calendario	Año
Gregoriano	2011
Chino	4708
Musulmán	1389
Judío	5772
Hindú	1933
Japonés	2671

# Módulo 2

**Bloques:** Numérico.  
Relaciones y funciones

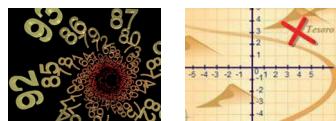


Esta construcción fotovoltaica está formada por 2 800 paneles solares que transforman la luz solar en electricidad.

Durante el día, los rayos solares inciden de distinta manera sobre los paneles, por lo que va variando el número de paneles en funcionamiento:

- A primera hora de la mañana funcionan unos 1 200 paneles.
  - Al mediodía funcionan todos los paneles.
  - Y al atardecer sólo funcionan 1 050 paneles.
- a) ¿Qué fracciones del total de paneles están en funcionamiento durante cada franja horaria? Simplifica estas fracciones.
  - b) Representa gráficamente cada una de las tres fracciones anteriores. Guiate en la tabla de arriba y cópiala en tu cuaderno.
  - c) ¿Qué fracción representa un menor funcionamiento de la construcción? ¿Y un mayor funcionamiento?

# Números fraccionarios



Con tus conocimientos sobre fracciones, serás capaz de expresar *cantidades* y de *operar con ellas*.

## DCD Destrezas con criterios de desempeño

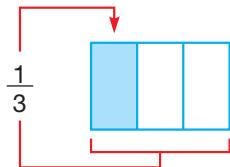
- Leer y escribir números racionales fraccionarios.
- Ordenar y comparar números racionales fraccionarios.
- Simplificar expresiones con números racionales fraccionarios, con la aplicación de las operaciones básicas y con las reglas de potenciación y radicación.

- Resolver operaciones combinadas de adición, sustracción, multiplicación y división exacta con números racionales exactos.
- Valorar y respetar las estrategias y soluciones a problemas numéricos distintas de las tuyas propias.
- Generar Sucesiones con multiplicación y división.

## Prerrequisitos

### Recuerda

- Los números naturales sirven para contar, ordenar o codificar. Se representan mediante la letra  $\mathbb{N}$ .  
 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\}$
- Los números enteros son los números naturales precedidos de signo y el 0, que no tiene signo. Se representan por la letra  $\mathbb{Z}$  y corresponden a:  
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$
- Las fracciones se utilizan en la repartición de un total, o unidad, dividido en partes iguales.



- Para calcular el M.C.D. de dos o más números se multiplican los factores primos comunes a dichos números elevados al menor exponente.
- Para calcular el m.c.m. de dos o más números se multiplican los factores primos comunes y no comunes a dichos números elevados al mayor exponente.

### Evaluación diagnóstica

- En una fiesta de cumpleaños se ha dividido el pastel en seis partes iguales y Jorge se ha comido una. ¿Cómo expresarías que se ha comido una parte de las seis partes?
- Copia en tu cuaderno este segmento dividido en cinco partes iguales.



— Colorea tres partes e indica la fracción que representa la parte coloreada y la no coloreada.

- Calcula:
  - a) m.c.d. (35, 42)
  - b) m.c.d. (120, 150)
  - c) m.c.m. (35, 60)
  - d) m.c.m. (15, 72)
- Dos amigos se reparten la naranjada de una botella. Si uno bebe la mitad y el otro las dos cuartas partes, ¿quedará naranjada en la botella?
- Calcula:
  - a)  $2 \times (4 + 3)$
  - b)  $28 \div 7 + 2 \times 13$
  - c)  $15 \times 3 - (2 + 7)$
  - d)  $-9 + (2 + 7) \times 2$



### Educación ambiental y recursos naturales

Art. 71. La naturaleza o Pacha Mama, donde se reproduce y realiza la vida, tiene derecho a que se respete integralmente su existencia y el mantenimiento y regeneración de sus ciclos vitales, estructura, funciones y procesos evolutivos.

Constitución de la República del Ecuador, 2008.

# 1 Fracciones

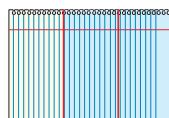
## 1.1. Concepto de fracción

Cuando decimos que se reciclan las *dos tercias partes* de una hoja de papel, queremos indicar que si dividiéramos la hoja en **tres partes iguales**, se reciclan **dos de estas partes**.

El 3 nos indica el número de partes iguales en que hemos dividido la *unidad o el todo*.

Es el *denominador*.

$$\frac{2}{3}$$



El 2 nos indica el número de partes que hemos tomado.

Es el *numerador*.

Para expresar cantidades como ésta no nos sirven los números naturales. Utilizamos los **números fraccionarios o fracciones**.



### FÍJATE

**Número fraccionario o fracción** es la expresión que indica que de una unidad o total dividido en **partes iguales** escogemos sólo algunas de esas partes.



Toda fracción consta de dos **términos**:

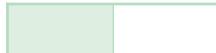
$\frac{a}{b}$  → **Numerador**  
→ **Denominador**

- El **denominador** indica el número de partes iguales en que se ha dividido la unidad y debe ser diferente de cero:  $b \neq 0$ , porque la división para cero no existe.
- El **numerador** expresa las partes que hemos tomado.

### Lectura y representación gráfica de fracciones

Observa cómo se leen y representan las siguientes fracciones.

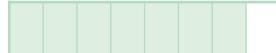
$\frac{1}{2}$  un medio



$\frac{2}{3}$  dos tercios



$\frac{7}{8}$  siete octavos



$\frac{4}{11}$  cuatro onceavos



Para designar el numerador se utiliza el nombre del número que lo representa (uno, dos, tres...).

Para designar el denominador se emplea la siguiente regla:

2 y 3	Entre 4 y 10	> 10
Nombre propio: <b>medio</b> y <b>tercio</b>	<b>Ordinal:</b> cuarto, quinto, sexto...	Terminación <b>-avo</b> : <b>onceavo</b> , <b>doceavo</b> ...

### Actividades

1 Escribe estas fracciones.

- a) cuatro décimos      c) tres tercios  
b) un sexto      d) trece veinteavos

2 Escribe y nombra las siguientes fracciones.

- a  b  c  d 

Una fracción representa una parte de la unidad, pero también puede interpretarse como la división entre dos números naturales o como una razón de medida.

## La fracción como división entre dos números naturales

Para repartir 1 l de jugo entre 5 amigos con 5 vasos iguales, efectuamos la división  $1 \div 5$ .

Esta división también podemos expresarla mediante la fracción  $\frac{1}{5}$ .



$$1 \div 5 = \frac{1}{5} = 0,2$$

Para repartir 2 l de jugo entre 5 amigos con 5 vasos iguales, efectuamos la división  $2 \div 5$ .

En este caso, si dividimos cada jarra en cinco partes iguales, a cada uno le corresponden  $\frac{2}{5}$ .

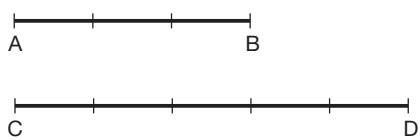


$$2 \div 5 = \frac{2}{5} = 0,4$$

→ Una fracción representa el **cociente** entre el numerador y el denominador de ésta.

## La fracción como razón de medida

La longitud de  $AB$  es  $\frac{3}{5}$  de la longitud de  $CD$ .



La relación o **razón** entre el número de lápices y el número de bolígrafos es  $\frac{3}{4}$ .

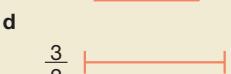
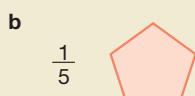


→ Una fracción representa una relación entre dos medidas llamada **razón** de medida.

## Actividades



3 Copia en tu cuaderno y representa estas fracciones en los dibujos.



— Expresa en forma de división estas fracciones.

4 Expresa en forma de división estas fracciones.

a)  $\frac{3}{6}$    b)  $\frac{1}{10}$    c)  $\frac{2}{5}$    d)  $\frac{9}{9}$    e)  $\frac{48}{16}$

— Efectúa la división y escribe a qué número son iguales estas fracciones.

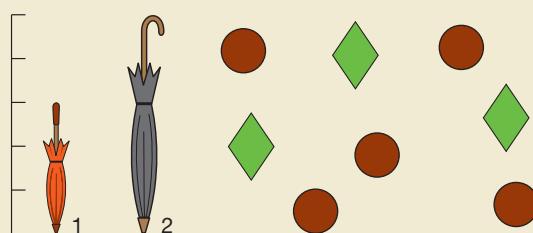
5 Expresa en forma de fracción estas divisiones.

a)  $3 \div 5$    b)  $4 \div 7$    c)  $1 \div 8$    d)  $20 \div 3$    e)  $9 \div 100$

6 Observa la figura y completa en tu cuaderno:

La altura del paraguas 1 es ..... de la del paraguas 2.

La razón entre el número de rombos y el número de círculos es .....



## 1.2. Comparación de fracciones con la unidad

Fíjate en qué parte de la unidad representa cada una de las siguientes fracciones.

$$\frac{2}{5} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \textcolor{brown}{\square} & \textcolor{brown}{\square} & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$$

Esta fracción indica que hemos tomado dos partes de las cinco iguales en que hemos dividido la unidad.

$$\frac{2}{5} < 1$$

Las fracciones que tienen el numerador más pequeño que el denominador son **menores que la unidad**.

Se denominan **fracciones propias**.

$$\frac{5}{5} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \textcolor{brown}{\square} & \textcolor{brown}{\square} & \textcolor{brown}{\square} & \textcolor{brown}{\square} & \textcolor{brown}{\square} \\ \hline \end{array}$$

Esta fracción indica que hemos tomado las cinco partes iguales en que hemos dividido la unidad.

$$\frac{5}{5} = 1$$

Las fracciones que tienen el numerador igual que el denominador son iguales a la **unidad**.

$$\frac{7}{5} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \textcolor{brown}{\square} & \textcolor{brown}{\square} & \textcolor{brown}{\square} & \textcolor{brown}{\square} & \textcolor{brown}{\square} \\ \hline \end{array}$$

Esta fracción indica que hemos dividido la unidad en cinco partes y que debemos tomar siete.

Esto significa que necesitamos más de una unidad.

$$\frac{7}{5} > 1$$

Las fracciones que tienen el numerador mayor que el denominador son **mayores que la unidad**.

Se denominan **fracciones impropias**.

$$\frac{7}{5} \rightarrow 1 \text{ unidad} + \frac{2}{5} \rightarrow 1\frac{2}{5}$$

La expresión  $1\frac{2}{5}$  recibe el nombre de **número mixto** y se lee *un entero y dos quintos*.

Observa cómo podemos pasar de fracción impropia a número mixto y al revés.

### De fracción impropia a número mixto

$$\frac{11}{2} = 11 \div 2 \rightarrow \begin{array}{r} 11 \\ 1 \quad \overline{)5} \\ \hline 2 \end{array} \rightarrow \frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$$

### De número mixto a fracción impropia

$$1\frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4} = \frac{1 \times 4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4 + 3}{4} = \frac{7}{4}$$

Si el numerador de una fracción impropia es múltiplo del denominador, la fracción es un número **natural**. Para calcular este número debemos dividir el numerador entre el denominador. Por ejemplo:

27 es múltiplo de 9

$$\frac{27}{9} \downarrow = 3$$

5 es múltiplo de 1

$$\frac{5}{1} \downarrow = 5$$



### Actividades

7 Pon un ejemplo de fracción propia, otro de fracción igual a la unidad y un tercero de fracción impropia. Transforma la fracción impropia en un número mixto.

8 Lee, transforma en fracciones impropias y representa gráficamente estos números mixtos.

a)  $1\frac{1}{4}$       b)  $2\frac{3}{5}$       c)  $3\frac{1}{2}$       d)  $1\frac{1}{10}$

9 Cada uno de los cuatro libros de una colección está dividido en 12 capítulos. Si consideramos cada libro como una unidad, ¿qué fracción de la unidad representan 4 capítulos de un libro?

- Determina la fracción que representan: 24 capítulos; 8 capítulos; 18 capítulos; 27 capítulos.
- Di si las fracciones que has obtenido son propias o impropias. Si alguna de ellas puede expresarse mediante un número natural o mixto, transfórmala.

### 1.3. Fracción de un número

Analiza estos dos ejemplos.

## ejemplo 1

La materia orgánica (restos de comida...) constituye  $\frac{9}{20}$  partes de la basura doméstica.

Si en total se producen 15 millones de toneladas de basura, ¿cuántas toneladas representa la materia orgánica?

$$\frac{9}{20} \text{ de } 15\ 000\ 000 = x$$

$$15\ 000\ 000 \div 20 \equiv 750\ 000$$

$$750\,000 \times 9 = 6\,750\,000$$

Así, las toneladas de materia orgánica son 6 750 000, es decir, 6.75 millones de toneladas.

## ejemplo 2

Un determinado año se reciclaron 2 millones de toneladas de papel, pero esto supuso sólo los  $\frac{2}{5}$  del total de papel de desecho. Determina las toneladas de papel botadas a la basura ese año.

$$\frac{2}{5} \text{ de } x = 2\,000\,000$$

$$2\,000\,000 \div 2 = 1\,000\,000$$

$$100\,000 \times 5 = 5\,000\,000$$

Así, en total se botaron 5 millones de toneladas.

Es necesario que empecemos a reciclar.

Para **calcular la fracción** de una **cantidad**, dividimos ésta última por el denominador y multiplicamos el resultado por el numerador. O podemos primero multiplicar y el producto dividir.

Para calcular una cantidad cuya fracción conocemos, dividimos la cantidad correspondiente a dicha fracción por el numerador y multiplicamos el resultado por el denominador.

## Actividades



- 10** ¿Qué fracción de mes es un día? ¿Qué fracción de hora son 20 min? ¿Cuántos días son los tres séptimos de una semana?

**11** Calcula:

a)  $\frac{2}{5}$  de 200      b)  $\frac{1}{8}$  de 400      c)  $\frac{7}{25}$  de 225      d)  $\frac{5}{3}$  de 240

**12** Calcula en tu cuaderno:

a)  $\frac{1}{2}$  de ..... = 15      c)  $\frac{2}{3}$  de ..... = 600

b)  $\frac{2}{7}$  de ..... = 4      d)  $\frac{4}{9}$  de ..... = 156

**13** Encuentra el término que falta.

a)  $\frac{\dots}{3}$  de 33 = 22      c)  $\frac{4}{\dots}$  de 100 = 80

b)  $\frac{2}{\dots}$  de 75 = 30      d)  $\frac{\dots}{7}$  de 140 = 100

**14** Akira ha recorrido las cuatro quintas partes del camino entre su casa y el colegio. Si el camino mide 650 m, ¿qué distancia ha recorrido?

**15** Hemos retirado 300 dólares que corresponden a  $\frac{4}{15}$  de una cantidad de dinero que teníamos ahorrado en el banco. ¿Cuánto dinero teníamos?

## 2 Fracciones equivalentes

### 2.1. Equivalencia de fracciones

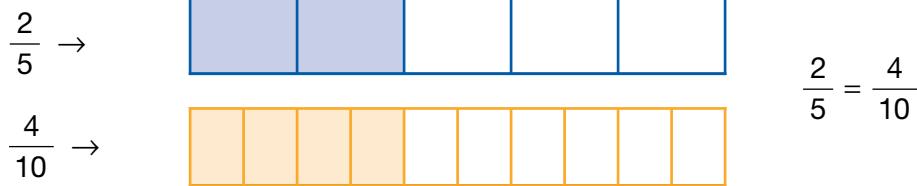
Para ver si dos fracciones distintas, como por ejemplo,  $\frac{2}{5}$  y  $\frac{4}{10}$ , representan la misma parte de la unidad, podemos compararlas gráficamente.

#### FÍJATE

Dos fracciones equivalentes representan el mismo número.

$$\frac{2}{5} = 0,4$$

$$\frac{4}{10} = 0,4$$



 Las fracciones que representan la misma parte de la unidad se denominan **fracciones equivalentes**.

Observa qué sucede al multiplicar en cruz los términos de dos fracciones equivalentes.

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} \rightarrow 2 \times 10 = 5 \times 4 = 20$$

Esta propiedad permite comprobar si dos fracciones son equivalentes sin necesidad de realizar su representación gráfica y se conoce como **propiedad fundamental de las fracciones equivalentes**.

#### FÍJATE

Dos fracciones  $\frac{a}{b}$  y  $\frac{c}{d}$  son equivalentes si se cumple:

$$a \times d = b \times c$$

 Dos fracciones son **equivalentes** si se verifica que el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda es igual al producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda.

$$\frac{a}{b} \text{ y } \frac{c}{d} \text{ son equivalentes si se cumple que } a \times d = b \times c.$$

### Actividades



**16** Representa gráficamente los siguientes pares de fracciones e indica si son equivalentes.

a)  $\frac{2}{7}$  y  $\frac{4}{14}$     b)  $\frac{1}{3}$  y  $\frac{4}{9}$     c)  $\frac{4}{5}$  y  $\frac{16}{20}$     d)  $\frac{5}{6}$  y  $\frac{10}{12}$

— Comprueba con la propiedad fundamental si son fracciones equivalentes.

**17** Indica cuáles de estas fracciones son equivalentes a  $\frac{4}{12}$ .

a)  $\frac{1}{4}$     b)  $\frac{2}{6}$     c)  $\frac{1}{3}$     d)  $\frac{8}{36}$     e)  $\frac{12}{36}$     f)  $\frac{2}{8}$

**18** Un atleta salta ocho de las diez vallas de las que constaba una carrera. En la siguiente prueba tira una de las cinco vallas que había. ¿Consigue el atleta mejorar la relación de vallas en pie respecto de las vallas totales en la segunda carrera o es la misma?

## Obtención de fracciones equivalentes

Veamos ahora dos procedimientos para obtener fracciones equivalentes a

la fracción  $\frac{8}{12}$ .

### Amplificación de fracciones

Multiplicamos el numerador y el denominador por un mismo número.

$$\begin{array}{r} 8 \\ 12 \\ \hline \end{array} \begin{array}{r} \times 3 \\ = \\ \times 3 \end{array} \begin{array}{r} 24 \\ \hline 36 \end{array}$$

Al comparar la fracción obtenida con la primera, comprobamos que se cumple la propiedad fundamental de las fracciones equivalentes.

$$8 \times 36 = 12 \times 24$$

 Si multiplicamos el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número, obtenemos una **fracción equivalente** a la primera.

### Simplificación de fracciones

Dividimos el numerador y el denominador por un mismo número.

$$\begin{array}{r} 8 \\ 12 \\ \hline \end{array} \begin{array}{r} \div 2 \\ = \\ \div 2 \end{array} \begin{array}{r} 4 \\ \hline 6 \end{array}$$

Al comparar la fracción obtenida con la primera, comprobamos que se cumple la propiedad fundamental de las fracciones equivalentes.

$$8 \times 6 = 12 \times 4$$

 Si dividimos el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número, obtenemos una **fracción equivalente** a la primera.

El segundo procedimiento nos permite obtener una fracción equivalente a la primera cuyos términos son menores.

Antes de efectuar cualquier operación con fracciones, debemos averiguar si pueden simplificarse. De este modo, trabajaremos siempre con los números más pequeños.

## Actividades



19 ¿Cuál es la fracción equivalente a  $\frac{2}{5}$  que tiene por denominador 15?

20 ¿Cuál es la fracción equivalente a  $\frac{6}{18}$  que tiene por numerador 3?

21 Completa el término que falta en cada uno de los siguientes pares de fracciones para que sean equivalentes.

a)  $\frac{23}{40} = \frac{161}{\dots}$    b)  $\frac{\dots}{70} = \frac{55}{350}$    c)  $\frac{9}{70} = \frac{\dots}{280}$    d)  $\frac{21}{\dots} = \frac{7}{35}$

22 Comprueba que al calcular fracciones equivalentes de un mismo número obtenemos siempre el mismo resultado.

a)  $\frac{3}{5}$  de 60   b)  $\frac{9}{15}$  de 60   c)  $\frac{12}{20}$  de 60   d)  $\frac{15}{25}$  de 60

23 Escribe tres fracciones equivalentes a  $\frac{8}{14}$ . ¿Has obtenido las fracciones equivalentes por amplificación o simplificación?

## Fracción irreducible

Podemos reducir o simplificar una fracción a partir de divisiones sucesivas.

$$\begin{array}{ccccccc} 30 & \xrightarrow{\div 2} & 15 & \xrightarrow{\div 3} & 5 & \xrightarrow{\div 5} & 1 \\ \hline 60 & \xrightarrow{=} & 30 & \xrightarrow{=} & 10 & \xrightarrow{=} & 2 \end{array}$$

Al obtener la fracción  $\frac{1}{2}$  no podemos continuar simplificando ya que 1 y 2 son **números primos entre sí** y sólo tienen un divisor común, el 1.

► Una **fracción irreducible** es aquella fracción que no puede simplificarse, es decir, aquélla en que el numerador y el denominador son números primos entre sí.

Para hallar la fracción irreducible equivalente a una fracción, podemos utilizar dos métodos: el que ya hemos presentado de las *divisiones sucesivas* y el del *máximo común divisor* m.c.d.

### MUCHO OJO

El **máximo común divisor (m.c.d.)** de dos o más números es el divisor común **más grande** de dichos números.

#### Divisiones sucesivas

Dividimos sucesivamente los dos términos hasta obtener la fracción irreducible.

$$\begin{array}{ccccccc} 30 & \xrightarrow{\div 2} & 15 & \xrightarrow{\div 3} & 5 & \xrightarrow{\div 5} & 1 \\ \hline 60 & \xrightarrow{=} & 30 & \xrightarrow{=} & 10 & \xrightarrow{=} & 2 \\ & \xrightarrow{\div 2} & & \xrightarrow{\div 3} & & \xrightarrow{\div 5} & \end{array}$$

#### Máximo común divisor

Dividimos los dos términos de la fracción por su m.c.d. De este modo, se obtiene directamente la fracción irreducible.

$$\text{m.c.d. (30, 60)} = 30$$

$$\begin{array}{ccccccc} 30 & \xrightarrow{\div 30} & 1 & & & & \\ \hline 60 & \xrightarrow{=} & 2 & & & & \\ & \xrightarrow{\div 30} & & & & & \end{array}$$

### Actividades



24 Indica cuáles de las siguientes fracciones son irreducibles.

a)  $\frac{6}{7}$       b)  $\frac{16}{20}$       c)  $\frac{13}{15}$       d)  $\frac{19}{100}$       e)  $\frac{26}{39}$       f)  $\frac{16}{27}$

25 Simplifica estas fracciones hasta obtener la fracción irreducible por el método de las divisiones sucesivas.

a)  $\frac{21}{35}$       b)  $\frac{13}{39}$       c)  $\frac{30}{40}$       d)  $\frac{22}{144}$       e)  $\frac{16}{24}$       f)  $\frac{25}{100}$

26 Simplifica las fracciones siguientes utilizando el método del máximo común divisor.

a)  $\frac{45}{81}$       b)  $\frac{100}{125}$       c)  $\frac{162}{300}$       d)  $\frac{22}{144}$       e)  $\frac{44}{52}$       f)  $\frac{175}{500}$

27 Simplifica, si es posible, las siguientes fracciones.

a)  $\frac{11}{220}$       b)  $\frac{98}{270}$       c)  $\frac{115}{123}$       d)  $\frac{20}{180}$       e)  $\frac{56}{24}$       f)  $\frac{20}{63}$

28 Escribe dos fracciones que sean equivalentes y halla la fracción irreducible de cada una de ellas. ¿Qué podemos decir de las fracciones irreducibles de dos fracciones equivalentes?

## 2.2. Reducción de fracciones a común denominador

Considera las fracciones  $\frac{7}{9}$  y  $\frac{4}{5}$ . Decidir a simple vista cuál de ellas es mayor no es fácil.

Ahora bien, si obtenemos las fracciones equivalentes a cada una de las anteriores que tengan el mismo denominador, la comparación será más sencilla.

$$\frac{7}{9} = \frac{35}{45} \quad \frac{4}{5} = \frac{36}{45}$$

Ahora, resulta evidente que  $\frac{36}{45}$  es mayor que  $\frac{35}{45}$  porque 36 partes de 45 es más que 35 partes de 45. Por lo tanto  $\frac{4}{5}$  es mayor que  $\frac{7}{9}$ .

Para comparar fracciones es muy útil *reducirlas a común denominador*.

El proceso por el cual transformamos dos o más fracciones en otras equivalentes con el mismo denominador se llama **reducción a común denominador**.

También necesitaremos reducir fracciones a común denominador para efectuar operaciones con ellas. En este caso, para que los números que manejemos sean lo más pequeños posible, deberemos *reducir las fracciones a mínimo común denominador*.

**Reducir fracciones a mínimo común denominador** significa hallar unas nuevas fracciones equivalentes a las primeras cuyo denominador es el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones dadas.

Veamos el método para hallar las fracciones equivalentes a  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{5}$  y  $\frac{4}{3}$ , con el mínimo común denominador.

### Reducción a mínimo común denominador

— Calculamos el m.c.m. de los denominadores.

$$\text{m.c.m. (2, 5, 3)} = 2 \times 5 \times 3 = 30$$

— Dividimos el m.c.m. entre cada denominador y multiplicamos el cociente obtenido por los dos términos de la fracción correspondiente.

$$\begin{array}{ccc} 30 \div 2 = 15 & 30 \div 5 = 6 & 30 \div 3 = 10 \\ \begin{array}{c} 1 \xrightarrow{\times 15} 15 \\ 2 \xrightarrow{\times 15} 30 \end{array} & \begin{array}{c} 3 \xrightarrow{\times 6} 18 \\ 5 \xrightarrow{\times 6} 30 \end{array} & \begin{array}{c} 4 \xrightarrow{\times 10} 40 \\ 3 \xrightarrow{\times 10} 30 \end{array} \end{array}$$

### Actividades



29 Reduce a común denominador los siguientes pares de fracciones. Halla dos soluciones en cada caso.

a)  $\frac{5}{8}$  y  $\frac{7}{12}$     b)  $\frac{12}{50}$  y  $\frac{7}{4}$

30 Reduce a mínimo común denominador estas fracciones.

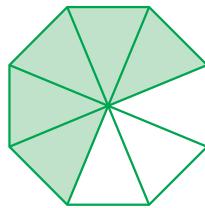
a)  $\frac{1}{5}$  y  $\frac{4}{15}$     b)  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{8}$  y  $\frac{7}{6}$

## 2.3. Comparación de fracciones

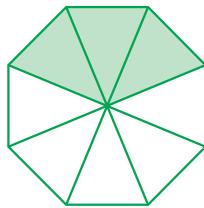
Dos fracciones equivalentes representan la misma parte de la unidad. Pero, si no son equivalentes, ¿cómo sabemos cuál es mayor?

### Fracciones con el mismo denominador

$$\frac{5}{8}$$



$$\frac{3}{8}$$



La fracción  $\frac{5}{8}$  es mayor que la fracción  $\frac{3}{8}$  porque representa una parte mayor de la unidad.

Esta relación se indica así:  $\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$

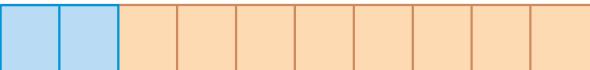
» Si dos fracciones tienen el **mismo denominador**, es **mayor** la que tiene **mayor numerador**.

### Fracciones con el mismo numerador

$$\frac{2}{5}$$



$$\frac{2}{10}$$



La fracción  $\frac{2}{5}$  es mayor que la fracción  $\frac{2}{10}$  porque representa una parte mayor de la unidad.

Esta relación se indica así:  $\frac{2}{5} > \frac{2}{10}$

» Si dos fracciones tienen el **mismo numerador**, es **mayor** la que tiene **menor denominador**.

### Fracciones con numerador y denominador distintos



Para comparar numéricamente las fracciones  $\frac{4}{5}$  y  $\frac{2}{3}$ , las reducimos a común denominador.

$$\text{m.c.m. (5, 3)} = 15$$



$$\begin{array}{rcl} 15 \div 5 = 3 & & 15 \div 3 = 5 \\ \frac{4}{5} \xrightarrow[\times 3]{=} \frac{12}{15} & & \frac{2}{3} \xrightarrow[\times 5]{=} \frac{10}{15} \end{array}$$

Puesto que  $\frac{12}{15} > \frac{10}{15}$ , resulta que  $\frac{4}{5} > \frac{2}{3}$ .

» Para **comparar fracciones** con distinto denominador se reducen a **común denominador** y se **comparan las fracciones obtenidas**.

## Actividades



31 Indica cuál es la fracción mayor de cada par.

a)  $\frac{17}{12}$  o  $\frac{11}{12}$     b)  $\frac{7}{18}$  o  $\frac{7}{24}$     c)  $\frac{1}{2}$  o  $\frac{2}{3}$

32 Ordena de mayor a menor la siguiente serie de fracciones.

$\frac{17}{12}, \frac{11}{15}, \frac{7}{18}, \frac{19}{24}, \frac{12}{20}, \frac{8}{30}$

### 3 Operaciones con fracciones

En este apartado estudiaremos la adición y la sustracción de fracciones con igual o distinto denominador, la multiplicación y la división con fracciones.

#### MUCHO OJO

Siempre que sea posible simplificaremos el resultado obtenido en las operaciones con fracciones.

#### 3.1. Adición y sustracción

##### Con igual denominador

Para **sumar** fracciones con el **mismo denominador**:

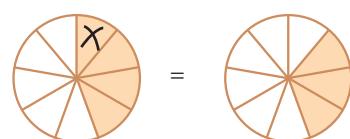
- Se deja el mismo denominador.
- Se suman los numeradores.



$$\frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4+1}{9} = \frac{5}{9}$$

Para **restar** fracciones con el **mismo denominador**:

- Se deja el mismo denominador.
- Se restan los numeradores.



$$\frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{4-1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

##### Con distinto denominador

Para **sumar** fracciones con **distinto denominador**:

- Se reducen a común denominador.
- Se suman las fracciones obtenidas.

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{10} = \frac{6}{10} + \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$$

$$\text{m.c.m. } (5, 10) = 10$$

$$10 \div 5 = 2$$

$$\frac{3}{5} \xrightarrow{\times 2} \frac{6}{10}$$

$$10 \div 10 = 1$$

$$\frac{1}{10} \xrightarrow{\times 1} \frac{1}{10}$$

Para **restar** fracciones con **distinto denominador**:

- Se reducen a común denominador.
- Se restan las fracciones obtenidas.

$$\frac{3}{7} - \frac{2}{5} = \frac{15}{35} - \frac{14}{35} = \frac{1}{35}$$

$$\text{m.c.m. } (7, 5) = 35$$

$$35 \div 7 = 5$$

$$\frac{3}{7} \xrightarrow{\times 5} \frac{15}{35}$$

$$35 \div 5 = 7$$

$$\frac{2}{5} \xrightarrow{\times 7} \frac{14}{35}$$

#### Actividades



33 Calcula las siguientes adiciones y, si es posible, simplifica su resultado.

a)  $\frac{2}{6} + \frac{1}{6}$

c)  $\frac{1}{5} + \frac{3}{10}$

b)  $\frac{3}{10} + \frac{7}{10}$

d)  $\frac{1}{5} + \frac{5}{12} + \frac{1}{3}$

- Representa gráficamente estas adiciones.

34 Efectúa las siguientes sustracciones y simplifica el resultado si es posible.

a)  $\frac{4}{7} - \frac{1}{7}$

c)  $\frac{3}{2} - \frac{4}{5}$

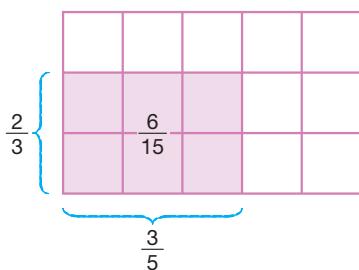
b)  $\frac{5}{8} - \frac{1}{8}$

d)  $\frac{7}{9} - \frac{4}{15}$

35 He repartido  $\frac{1}{4}$  de pastel a María y  $\frac{1}{5}$  a Inti. ¿Qué fracción de pastel me queda por repartir?

## 3.2. Multiplicación

### Multiplicación de fracciones



El área de un rectángulo es el producto de su base por su altura.

Así, el área del rectángulo coloreado de la izquierda es:

- El producto de su base por su altura:  $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3}$
- Si contamos los cuadrados, el área es  $\frac{6}{15}$  del área del rectángulo mayor.

Por tanto:  $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{15}$

Así, para multiplicar estas fracciones, procedemos de la siguiente forma:

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{3 \times 2}{5 \times 3} = \frac{6}{15}$$

#### Fracción de un número

La **fracción de un número** corresponde al producto de una fracción por un número natural.

$$\frac{3}{7} \text{ de } 28 = \frac{3}{7} \times 28 = \\ = \frac{3}{7} \times \frac{28}{1} = \frac{84}{7} = 12$$

Para calcular una **cantidad cuya fracción conocemos**, multiplicamos la cantidad correspondiente a dicha fracción por la inversa de la fracción.

$$\frac{3}{7} \text{ de } x = 12$$

$$x = 12 \times \frac{7}{3} = 28$$

► **El producto de dos fracciones** es otra fracción cuyo numerador es igual al producto de los numeradores y cuyo denominador es igual al producto de los denominadores.

Al multiplicar dos fracciones puede ocurrir que el resultado sea 1.

$$\frac{4}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{20}{20} = 1 \text{ Diremos que una fracción es la **inversa** de la otra.}$$

Para obtener la fracción inversa de una fracción dada, basta con intercambiar el numerador y el denominador.

Así, la fracción inversa de  $\frac{2}{5}$  es  $\frac{5}{2}$ , la de  $\frac{1}{6}$  es  $\frac{6}{1} = 6$ , la de 4 es  $\frac{1}{4} \dots$

### Multiplicación de un número natural por una fracción

Para multiplicar un número natural por una fracción hay que tener en cuenta que los números naturales son fracciones de denominador 1.

$$4 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{3 \times 1} = \frac{8}{3}$$

► **Para multiplicar un número por una fracción**, se multiplica ese número por el numerador de la fracción y se deja el mismo denominador.

## Actividades



36 Efectúa estas multiplicaciones y simplifica. ¿En qué casos has multiplicado fracciones inversas?

a)  $5 \times \frac{1}{5}$     b)  $\frac{3}{7} \times \frac{5}{7}$     c)  $\frac{11}{5} \times \frac{5}{11}$     d)  $\frac{2}{25} \times 25$     e)  $\frac{4}{9} \times \frac{8}{25} \times \frac{5}{12}$     f)  $\frac{5}{6} \times \frac{4}{3} \times 18$

37 Calcula la cantidad de aceite necesaria para llenar 15 botellas de  $\frac{3}{4}$  de litro y 8 de  $\frac{1}{2}$  litro.

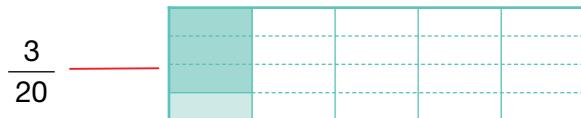
38 De una cartulina recortamos un rectángulo de base  $\frac{2}{3}$  de la base de la cartulina y de altura  $\frac{1}{4}$  de la altura de aquélla. ¿Qué fracción de cartulina hemos recortado?

### 3.3. Fracción de una fracción

Una quinta parte de la basura doméstica corresponde a desechos de papel y cartón. De éstos, tres cuartas partes se reciclan.

¿Qué fracción de basura doméstica acaba como papel reciclado?

$$\frac{3}{4} \text{ de } \frac{1}{5} \text{ de la basura doméstica} = x$$



$$\frac{3}{4} \text{ de } \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$$

Así, para calcular la fracción de una fracción debemos efectuar la multiplicación de ambas fracciones.

$$\frac{3}{4} \text{ de } \frac{1}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$$

Para calcular la **fracción de una fracción**, multiplicamos ambas fracciones.

#### Actividades



39 Representa gráficamente  $\frac{1}{5}$  de  $\frac{1}{2}$ . ¿Qué fracción es del total?

40 Calcula:

a)  $\frac{3}{4}$  de  $\frac{19}{15}$     b)  $\frac{1}{2}$  de  $\frac{7}{15}$     c)  $\frac{4}{9}$  de  $\frac{9}{21}$     d)  $\frac{4}{7}$  de  $\frac{11}{18}$     e)  $\frac{17}{19}$  de  $\frac{3}{17}$     f)  $\frac{8}{3}$  de  $\frac{1}{2}$

41 Alba se ha comido la mitad de la tercera parte de un pastel. ¿Qué fracción de pastel se ha comido?

42 Dos tercios de una clase de 27 estudiantes son chicos, y de éstos un tercio tiene el cabello castaño. ¿Qué fracción del total de alumnos representan los muchachos de cabello castaño? ¿Cuántos chicos hay en la clase?

#### FÍJATE

Recuerda que debes simplificar las fracciones siempre que sea posible.

En el siguiente ejemplo dividimos el numerador y el denominador entre 2 antes de efectuar las operaciones indicadas en cada uno de los términos de la fracción.

$$\begin{aligned} \frac{6}{5} \times \frac{7}{8} &= \frac{6 \times 7}{5 \times 8} = \\ &= \frac{3 \times 7}{5 \times 4} = \frac{21}{20} \end{aligned}$$

### 3.4. División

Fíjate en esta división de números naturales.

$$\begin{array}{r} 48 \\ \text{Dividendo} \end{array} \quad \div \quad \begin{array}{r} 8 \\ \text{Divisor} \end{array} \quad = \quad \begin{array}{r} 6 \\ \text{Cociente} \end{array}$$

Compárala con la siguiente multiplicación de fracciones.

$$48 \times \frac{1}{8} = \frac{48}{8} = 6$$

Observarás que dividir dos números es lo mismo que multiplicar el dividendo por la fracción inversa del divisor.

Para dividir dos fracciones procederemos del mismo modo.

Para dividir dos fracciones, multiplicamos la fracción dividendo por la fracción inversa de la fracción divisor.

Por ejemplo, para dividir  $\frac{1}{9}$  entre  $\frac{2}{3}$  multiplicaremos  $\frac{1}{9}$  por  $\frac{3}{2}$ .

$$\frac{1}{9} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{1 \times 3}{9 \times 2} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

En las divisiones de fracciones se cumple:

$$\text{Divisor} \times \text{Cociente} = \text{Dividendo}$$

Así, en la división de fracciones anterior:

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{2 \times 1}{3 \times 6} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

### FÍJATE

Para dividir fracciones, podemos utilizar una manera práctica que consiste en multiplicar en forma de cruz.

$$\frac{1}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

### Actividades



43 Calcula y simplifica el resultado si es posible.

- |                                   |                                   |                                    |                         |
|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|-------------------------|
| a) $\frac{8}{3} \div \frac{5}{6}$ | c) $\frac{4}{5} \div \frac{5}{3}$ | e) $\frac{1}{3} \div \frac{1}{2}$  | g) $\frac{1}{5} \div 7$ |
| b) $\frac{2}{9} \div \frac{3}{5}$ | d) $\frac{3}{2} \div \frac{3}{5}$ | f) $\frac{3}{2} \div \frac{1}{10}$ | h) $7 \div \frac{1}{5}$ |

44 ¿Cuántas bolsas de harina de  $\frac{3}{4}$  de kilogramo pueden llenarse con 30 kg de harina?

45 Pedro ha preparado  $\frac{2}{3}$  de litro de una mezcla para cocinar un pastel. Si utiliza moldes cuya capacidad es de  $\frac{1}{6}$  de litro. ¿Cuántos necesita?

### 3.5. Operaciones combinadas

Observa cómo efectuamos esta serie de operaciones combinadas.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} - \frac{2}{7} = \frac{2}{3} + \frac{1}{20} - \frac{2}{7} = \frac{280 + 21 - 120}{420} = \frac{181}{420}$$

En primer lugar, hemos calculado la multiplicación y, a continuación, la adición y la sustracción.

Fíjate en lo que sucede si tenemos un paréntesis en una serie de operaciones combinadas con fracciones.

$$\left( \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \right) \times \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \left( \frac{8}{12} + \frac{9}{12} \right) \times \frac{1}{3} - \frac{1}{5} =$$
$$= \frac{17}{12} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{17}{36} - \frac{1}{5} = \frac{85 - 36}{180} = \frac{49}{180}$$

Puesto que hay un paréntesis, hemos efectuado primero la operación indicada en su interior.

#### Operaciones con números mixtos

Para operar con números mixtos, podemos proceder de dos maneras diferentes:

- Transformarlos en fracción.

$$2 \frac{5}{12} = \frac{29}{12}$$

- Considerarlos como sumas de un número natural más una fracción.

$$2 \frac{5}{12} = 2 + \frac{5}{12}$$

En una serie de **operaciones combinadas** con fracciones, se efectúan primero las operaciones indicadas entre **paréntesis**, después las **multiplicaciones** y las **divisiones** en el orden en que aparecen y, finalmente, las **adiciones** y las **sustracciones**.

#### Actividades



46 Calcula:

a)  $5 \times \frac{1}{10} - \left( \frac{3}{5} - \frac{2}{5} \right) \times \frac{2}{3}$       b)  $\frac{2}{3} \times \frac{15}{4} - \left( \frac{1}{6} \div \frac{1}{12} + \frac{1}{8} \right)$

47 Transforma los números mixtos en fracciones y, a continuación, resuelve:

a)  $2 \frac{3}{5} + 3 \frac{1}{4}$       b)  $5 + \frac{2}{3} - 2 \frac{3}{5}$       c)  $7 - \frac{2}{3} + 2 \frac{5}{6}$

48 Efectúa las siguientes operaciones.

a)  $\frac{4}{5} + \frac{3}{4} \times 4 \frac{3}{5}$       c)  $\left( \frac{3}{5} + \frac{1}{2} + 2 \right) \div \left( 3 - 1 \frac{1}{5} \right)$

b)  $7 + \frac{2}{3} \div 2 \frac{5}{6}$       d)  $2 - \frac{2}{3} \div \left( 1 - \frac{1}{5} \right)$

49 He repartido  $\frac{1}{5}$  de mis canicas a Antonio y  $\frac{1}{3}$  a Toa. ¿Qué fracción del total me queda? Expresa las operaciones combinadas con paréntesis.

### 3.6. Sucesiones con multiplicación y división

Los términos contiguos de una sucesión pueden estar relacionados de distintas formas; por ejemplo, pueden hacerlo mediante el producto o la división para un número.

Para encontrar los términos siguientes en este tipo de sucesión, seguimos el procedimiento descrito:

#### CONTRAEJEMPLO

2; 14; 26; 38; 50

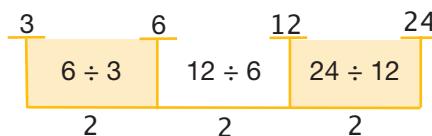
El ejemplo anterior no es una sucesión con multiplicación porque, a partir del segundo término, los valores se obtienen al sumar 12 al término anterior.



Observamos la sucesión.



Dividimos cada número de la sucesión para su término anterior.



Si el cociente que encontramos entre los términos sucesivos es el mismo, significa que todos los términos están relacionados por el producto de este número.



Para hallar un término de la sucesión, debemos multiplicar el cociente que obtuvimos en el primer paso por el término anterior de la sucesión.

$$\begin{array}{ccccc} 12 & \times & 2 & = & 24 \\ \text{Término anterior} & & \text{Cociente} & & \text{Nuevo término} \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} 24 & \times & 2 & = & 48 \\ \text{Nuevo término} & & \text{Cociente} & & \text{Nuevo término} \end{array}$$



Añadimos el nuevo número a los términos de la sucesión.



#### ejemplo 3

Para encontrar el siguiente término de la sucesión:  $-1; 5; -25; 125; \dots$

1. En primer lugar, dividimos cada término de la sucesión para el anterior.

$$125 \div -25 = -5$$

$$-25 \div 5 = -5$$

$$5 \div -1 = -5$$

2. Si todos los cocientes son iguales, ese número es el que relaciona a los términos de la sucesión.
3. A continuación, multiplicamos cada término por el cociente que obtuvimos en el paso anterior.

$$125 \times -5 = -625$$

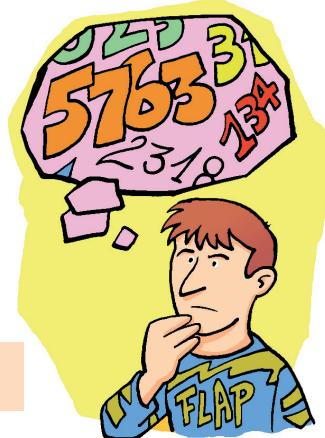
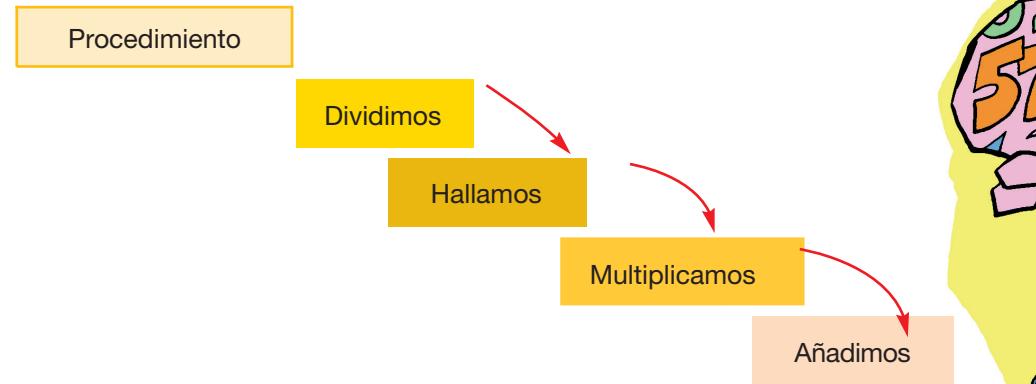
4. Finalmente, formamos el conjunto de los términos de la sucesión, añadiendo el término que acabamos de encontrar.

$$-1; 5; -25; 125; -625$$

Al dividir cada término para el anterior en la sucesión, el resultado puede ser un número entero o un número racional. Si el cociente es un número racional, debemos realizar el mismo procedimiento que usamos cuando los términos están relacionados por el producto de un número entero.

Así, para encontrar la relación entre los términos de la siguiente sucesión:

81; 27; 9; 3; ...



→ Dividimos cada número para su término anterior en la sucesión.

$$3 \div 9 = \frac{1}{3}$$

$$9 \div 27 = \frac{1}{3}$$

$$27 \div 81 = \frac{1}{3}$$

→ Como el cociente es el mismo, los términos de la sucesión están relacionados por el producto de este número:  $\frac{1}{3}$ .

Para hallar el nuevo término de la sucesión:

→ Multiplicamos el último término por el cociente encontrado:

$$3 \times \frac{1}{3} = 1$$

→ Añadimos el último número encontrado a los términos de la sucesión, en la posición que le corresponda.

81; 27; 9; 3; 1; ...

→ Las sucesiones que se forman al multiplicar un mismo número por el término anterior son conocidas como progresiones geométricas.

## Actividades



- 50 Completa en tu cuaderno los términos que faltan en las siguientes sucesiones.

- $-1; 1; -1; \dots; -1; \dots; \dots; 1; \dots$
- $\dots; \frac{4}{3}; 2; 3; \dots; \dots; \dots$
- $\frac{1}{8}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \dots; \dots; 4; \dots$
- $\dots; \dots; \dots; -\frac{9}{4}; \frac{27}{8}; -\frac{81}{16}; \dots$

- 51 Encuentra los tres siguientes términos de la sucesión y el número que los relaciona.

- $\frac{7}{4}; \frac{7}{2}; 7; 14; \dots; \dots; \dots$
- $-2; -1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; \dots; \dots; \dots$
- $-\frac{3}{8}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{6}; \frac{1}{9}; \dots; \dots; \dots$
- $\frac{1}{9}; \frac{1}{3}; 1; 3; \dots; \dots; \dots$

### 3.7. Potenciación y radicación

En algunas ocasiones, podemos encontrarnos con multiplicaciones de números racionales iguales, como la siguiente:

$$\overbrace{\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}}^{\text{cuatro veces}}$$

#### MUCHO OJO

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \overbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}^{n \text{ veces}} = \frac{a^n}{b^n} \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\ \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} &= \left(\frac{b}{a}\right)^n \end{aligned}$$

Este producto puede expresarse como  $\left(\frac{2}{5}\right)^4$ , y es la potencia de base el número racional  $\frac{2}{5}$  y exponente el número natural 4.

Para calcular la potencia de un número racional, calcularemos la potencia de uno de sus representantes, generalmente el canónico por sencillez.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Así, por ejemplo:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{2^4}{5^4} = \frac{16}{625}$$

Si el exponente de la potencia es un número entero negativo, podemos transformarla en otra de exponente positivo. Observa:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Las operaciones con un número racional como potencia de base y con un número entero como exponente se efectúan de manera similar a las operaciones que contienen una fracción como potencia de base y como exponente, un número entero.

#### Multiplicación de potencias de la misma base

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$$

#### División de potencias de la misma base

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \div \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$$

#### Potencia de un producto

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n$$

#### Potencia de una potencia

$$\left(\left(\frac{a}{b}\right)^m\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n}$$

#### Potencia de exponente 1

$$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$$

#### Potencia de exponente 0

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1; a \neq 0 \text{ y } b \neq 0$$

Sabemos que calcular la raíz cuadrada de un número es buscar otro número que elevado al cuadrado sea igual al primero.

$$\sqrt{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \text{ si y sólo si } \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{c}{d}$$

Así, por ejemplo:

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \text{ pues } \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

Podemos también calcular la raíz enésima de un número racional: es el número racional que elevado a la potencia enésima es igual al primero.

$$\sqrt[n]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \text{ si y sólo si } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{c}{d}$$

Una raíz de un número racional puede tener un resultado, dos o ninguno.

Raíz	$\sqrt[3]{\frac{343}{729}} = \frac{7}{9}$	$\sqrt[3]{\frac{-343}{729}} = \frac{-7}{9}$	$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$	$\sqrt[4]{\frac{-16}{81}} = ?$
Paridad del índice	Impar	Impar	Par	Par
Signo del radicando	+	-	+	-
Número de raíces	Una (positiva)	Una (negativa)	Dos (positiva y negativa)	No tiene.

### ejemplo 4

Ordena de menor a mayor estos números racionales.

$$\left(\frac{5}{16}\right)^0, \left(\frac{11}{32}\right)^1, \left(\frac{3}{4}\right)^4, \frac{40}{128}, +\sqrt{\frac{25}{256}}$$

Hallamos el representante canónico de cada uno de los números racionales.

$$1, \frac{11}{32}, \frac{81}{256}, \frac{5}{16}, \frac{5}{16}$$

Reducimos a mínimo común denominador los representantes canónicos.

$$\frac{256}{256}, \frac{88}{256}, \frac{81}{256}, \frac{80}{256}, \frac{80}{256}$$

Finalmente ordenamos de menor a mayor los números originales.

$$\frac{40}{128} = +\sqrt{\frac{25}{256}} < \left(\frac{3}{4}\right)^4 < \left(\frac{11}{32}\right)^1 < \left(\frac{5}{16}\right)^0$$

## Actividades



52 Efectúa:

a)  $\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^5$

c)  $\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4}\right)^4$

b)  $\left(\frac{1}{3}\right)^8 \div \left(\frac{1}{3}\right)^3$

d)  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$

53 Efectúa si es posible:

a)  $\sqrt[3]{\frac{-27}{64}}$

c)  $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$

b)  $\sqrt{\frac{-16}{25}}$

d)  $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$

# Cómo resolver problemas

## Estrategia: Confección de un esquema

En muchos problemas, la *confección de un esquema* y/o gráfico sobre el que vas traduciendo las condiciones y los datos del enunciado puede ayudarte a organizar tus ideas y abrirte el camino para abordar su resolución.

*La procedencia de la energía que ha consumido un país el año pasado es la siguiente: la mitad se ha obtenido del petróleo y una quinta parte del carbón. Del resto, dos quintas partes se extraen del gas natural, dos quintas partes de centrales nucleares y 6 660 ktep de fuentes renovables. (1 ktep = 1 000 toneladas equivalentes de petróleo)*

*¿Qué cantidad de energía fue consumida en ese país durante el año pasado?*

### ► Comprensión del enunciado

Leemos de nuevo el enunciado y anotamos qué es lo que se busca y de qué datos disponemos.

- Debemos calcular .....
- La energía del petróleo es ..... y la del carbón .....
- Del resto, la energía del gas natural es ..... y la de las centrales nucleares .....
- La energía procedente de fuentes renovables es .....

— Dividimos el resto del segmento en cinco partes. Dos de estas partes representan la energía procedente del gas natural y dos, la procedente de centrales nucleares. Calculamos la fracción correspondiente a la parte restante.

$$\frac{3}{10} \text{ en } \frac{1}{5} = \frac{3}{50}$$

— La parte restante,  $\frac{1}{5}$  de  $\frac{3}{10} = \frac{3}{50}$ , representa 6 660 ktep.

Hallaremos la cantidad cuyos  $\frac{3}{50}$  son 6 600 ktep.

### ► Planificación de la resolución

Vamos a elaborar un esquema del problema.

- Representamos la energía total mediante un segmento.



- La mitad de ese segmento representará la energía procedente del petróleo y la quinta parte, la procedente del carbón. Calculamos la fracción que representa el resto.



### ► Ejecución del plan de resolución

- Resolvemos:

$$\frac{3}{50} \text{ de } x = 6660 \Rightarrow x = 6660 \times \frac{50}{3} = 111000$$

La energía consumida fue de 111 000 ktep.

### ► Revisión del resultado y del proceso seguido

Comprobamos que la mitad del total más un quinto, más cuatro quintos del resto y más 6 660 coincide con 111 000 ktep.

## Actividades

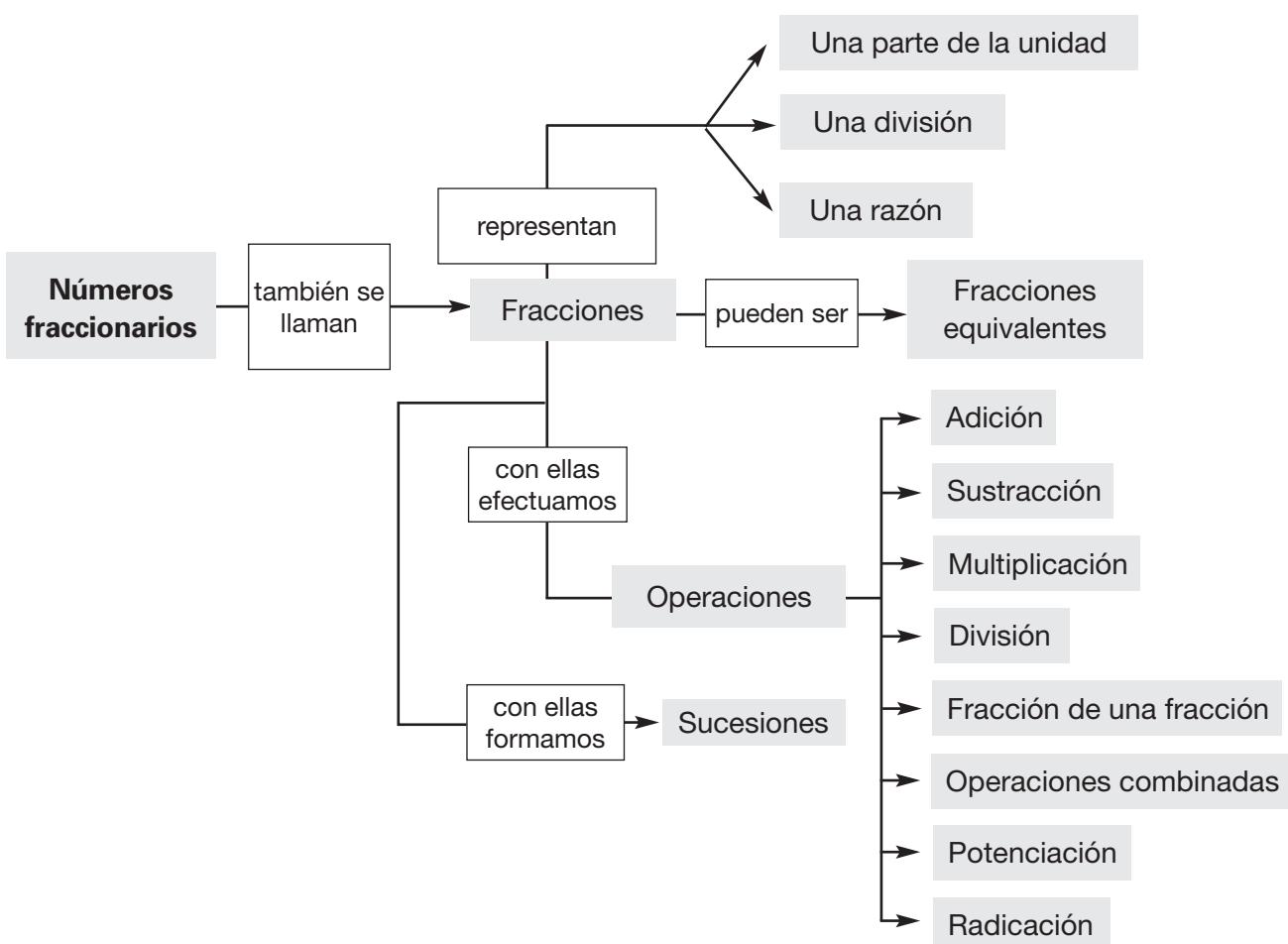
- 54** En una tienda de compraventa de automóviles hay 12 autos más nuevos que usados y estos últimos son los  $\frac{2}{5}$  del total. ¿Cuántos hay en total? ¿Cuántos son nuevos y cuántos usados?
- 55** En una excursión, un grupo de amigos recorre el primer día  $\frac{2}{3}$  del trayecto y el segundo, los  $\frac{2}{5}$  del resto, dejando para el tercer día los 35 km restantes. ¿Cuál es la longitud total del trayecto?
- 56** Irene recibe \$ 4 prestados de Alba. Pero ésta había pedido \$ 9 prestados a Ramón y \$ 19 a Toa. Además, Toa debe \$ 2 a Ramón y \$ 4 a Irene. Un día se reunieron todos en casa de Irene para arreglar las cuentas. ¿Quién se marchó con 11 dólares más de los que trajo? (Dibuja un diagrama con flechas para indicar quién tiene que devolver dinero a quién.)

## En resumen

- Los términos de una fracción son el **numerador** y el **denominador**.  
El denominador indica el número de partes iguales en que se ha dividido la unidad.  
El numerador expresa las partes que hemos tomado.
- Las fracciones que representan la misma parte de la unidad se denominan **fracciones equivalentes**.  
Dos **fracciones** son **equivalentes** si se verifica que el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda es igual al producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda.  
Podemos obtener fracciones equivalentes a una dada por **amplificación** o por **simplificación**.
- Una **fracción irreducible** es aquella fracción que no puede simplificarse. Su numerador y su denominador son números primos entre sí.
- El proceso por el cual transformamos dos o más fracciones en otras equivalentes con el mismo denominador se llama **reducción a común denominador**.

**Reducir fracciones a mínimo común denominador** significa hallar unas nuevas fracciones equivalentes a las primeras cuyo denominador es el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones dadas.

- Para **sumar** o **restar** fracciones con el **mismo denominador**, se deja el mismo denominador y se suman o restan los numeradores.  
Para **sumar** o **restar** fracciones con **distinto denominador**, primero se reducen a común denominador y, a continuación, se efectúa la suma o la resta de las fracciones obtenidas.
- El **producto** de dos fracciones es otra fracción cuyo numerador es igual al producto de los numeradores y cuyo denominador es igual al producto de los denominadores.
- Para **dividir** dos fracciones, multiplicamos la fracción dividiendo por la inversa de la fracción divisor.
- En una serie de **operaciones combinadas** con fracciones, primero se efectúan los paréntesis, después las multiplicaciones y las divisiones según el orden en que aparecen y, finalmente, las adiciones y las sustracciones.



# Ejercicios y problemas integradores



- Un carro costó inicialmente \$10 480. Al cabo de unos años se vendió a la mitad de su precio. Pasados unos años, volvió a venderse por la mitad y así, sucesivamente.

a) ¿Cuánto le costó el carro al quinto propietario?

b) ¿Cuál es la suma total pagada por ese auto?

Este problema lo podemos resolver aplicando los conocimientos de sucesiones y las operaciones con números fraccionarios positivos, observa:

- Primer propietario  $a_1$ : 10 480
- Segundo propietario  $a_2$ :  $10\ 480 \div 2 = 5\ 240$  o lo que es lo mismo

$$10\ 480 \times \frac{1}{2} = 5\ 240$$

- Tercer propietario  $a_3$ :  $5\ 240 \div 2 = 2\ 620$  o lo que es lo mismo

$$5\ 240 \times \frac{1}{2} = 2\ 620$$

- Cuarto propietario  $a_4$ :  $2\ 620 \div 2 = 1\ 310$  o lo que es lo mismo

$$2\ 620 \times \frac{1}{2} = 1\ 310$$

- Quinto propietario  $a_5$ :  $1\ 310 \div 2 = 655$  o lo que es lo mismo

$$1\ 310 \times \frac{1}{2} = 655$$

- Ahora sumamos:  $10\ 480 + 5\ 240 + 2\ 620 + 1\ 310 + 655 = 20\ 305$

**R: El quinto propietario pagó \$ 655 y por el auto se pagó un total de \$ 20 305**

Otra forma de conocer, cuánto pagó el quinto propietario es:

Llamaremos a la variación de precio  $\left(\frac{1}{2}\right)$ , razón.

Número de veces que se vendió el auto:  $n$

Cualquiera de los propietarios ( $a_2$   $a_3$   $a_4$   $a_5$ ) excepto el primero:  $a_n$

Número veces que se devaluó el auto:  $(n-1)$  es decir, las veces que se vendió menos la primera venta.

$$10\ 480, 5\ 240, 2\ 620, 1\ 310, 655$$

$\times \frac{1}{2}$        $\times \frac{1}{2}$        $\times \frac{1}{2}$        $\times \frac{1}{2}$

- Esta expresión es igual a:

$$10\ 480 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 655$$

- Observamos que existen cuatro de factores iguales, entonces lo expresamos como una potencia:

$$10\ 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 655$$

- Relacionemos cada uno de los valores con los datos del problema.

$$10\ 480 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 655$$

Costo inicial del auto:  $a_1$       Quinto propietario:  $a_5$   
 Variación de precio:  $r = 1/2$       Número de veces que se devaluó el auto:  $(n - 1)$

Al reemplazar los valores por los datos iniciales obtenemos una fórmula que nos ayudará a calcular cualquier término de una **progresión geométrica**.

$$a_1 \times r^{(n-1)} = a_n$$

- Un empresario obtuvo, el primer año de su negocio, unos beneficios de \$ 410 427. El segundo año, obtuvo la tercera parte de esos beneficios; el tercero año, la tercera parte del segundo, y así sucesivamente. Se mantuvo el negocio durante seis años, ¿cuáles fueron los beneficios obtenidos el último año?

Beneficios del primer año:  $a_1$

Beneficios del quinto año:  $a_6$

Variación del beneficio anual:  $r = 1/3$

Número de años que obtuvo beneficios con la misma variación:  $(n-1)$ , es decir el total de años menos el primer año.

$a_1 \times r^{(n-1)} = a_n$ $410\ 427 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{(6-1)} = a_6$ $410\ 427 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 = a_6$ $410\ 427 \times \frac{1}{243} = a_6$ $\frac{410\ 427}{243} = 1\ 689$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Reemplazamos los valores de los datos.</li> <li>Resolvemos primero lo que se encuentra dentro de paréntesis como exponente.</li> <li>Hallamos la potencia y después multiplicamos y dividimos.</li> </ul>
--	--

**R: El empresario, el quinto año ganó \$ 1 689.**

## Práctica

En un pozo hay 60 000 m<sup>3</sup> de agua. Esta semana se observó que había disminuido a la mitad, la siguiente semana la mitad de lo anterior y así sucesivamente. ¿Qué cantidad de agua contendrá el pozo la sexta semana?

# Ejercicios y problemas



## Comprensión de conceptos y conocimiento de procesos

### Fracciones

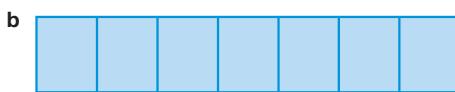
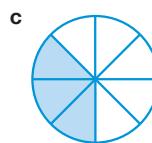
57 Explica qué es una fracción y en qué casos es conveniente el uso de fracciones. Ilustra tu explicación con ejemplos.

58 Nombra las siguientes fracciones y represéntalas gráficamente.

$$\frac{11}{12}, \frac{3}{5}, \frac{17}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{10}, \frac{7}{2}, \frac{4}{8}$$

59 Escribe estas fracciones: dos tercios, once quinceavos, trece décimos, dieciséis sesenta y cuatroavos.

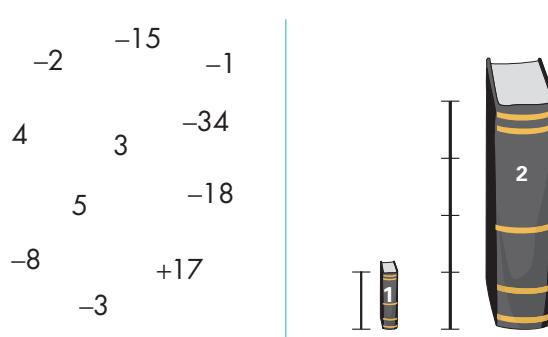
60 Escribe las fracciones representadas y exprésalas en forma de división.



61 Expresa las siguientes divisiones en forma de fracción y halla su resultado.

a)  $9 \div 5$    b)  $7 \div 5$    c)  $3 \div 8$    d)  $2 \div 4$

62 Observa la siguientes figuras y completa:



• La razón entre la cantidad de números enteros positivos y la de negativos es  $\dots$ .

• La altura del primer libro es  $\dots$  de la altura del segundo libro.

## En tu cuaderno

63 Di si estas fracciones son propias, impropias o iguales a la unidad.

$$\frac{11}{26}, \frac{27}{15}, \frac{17}{17}, \frac{10}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{14}, \frac{8}{5}$$

— Si alguna de estas fracciones puede expresarse mediante un número natural o mixto, transformala.

64 Calcula:

a)  $\frac{3}{5}$  de 1 000 dólares   c)  $\frac{4}{7}$  de 49 h  
b)  $\frac{2}{9}$  de 243 personas   d)  $\frac{4}{2}$  de 50 km

65 Calcula el valor que falta.

a)  $\frac{1}{5}$  de ..... = 200   c)  $\frac{3}{5}$  de ..... = 15  
b)  $\frac{4}{7}$  de ..... = 80   d)  $\frac{3}{4}$  de ..... = 48

### Fracciones equivalentes

66 Di si son equivalentes los siguientes pares de fracciones.

a)  $\frac{24}{35}$  y  $\frac{120}{175}$    b)  $\frac{17}{64}$  y  $\frac{85}{192}$    c)  $\frac{37}{50}$  y  $\frac{185}{250}$

67 Escribe tres fracciones equivalentes a cada una de las dadas.

$$\frac{15}{64}, \frac{36}{35}, \frac{81}{128}, \frac{77}{26}, \frac{22}{33}$$

68 Determina la fracción equivalente a  $\frac{2}{7}$  que tiene por denominador 21.

69 Completa los términos que faltan para que estas fracciones sean equivalentes.

a)  $\frac{2}{3} = \frac{8}{\dots}$    c)  $\frac{4}{\dots} = \frac{12}{15}$   
b)  $\frac{5}{7} = \frac{\dots}{21}$    d)  $\frac{16}{20} = \frac{\dots}{10}$

70 Halla la fracción con denominador 25 equivalente a la fracción representada por la división  $3 \div 15$ .

**71** Simplifica las siguientes fracciones.

a)  $\frac{18}{36}$     b)  $\frac{65}{143}$     c)  $\frac{24}{15}$     d)  $\frac{702}{1625}$

**72** Halla la fracción irreducible equivalente a cada una de estas fracciones.

a)  $\frac{24}{80}$     b)  $\frac{21}{27}$     c)  $\frac{14}{69}$     d)  $\frac{150}{900}$

**73** ¿Es posible que la fracción irreducible de otra fracción sea  $\frac{13}{221}$ ? ¿Por qué?

**74** Reduce a común denominador:

a)  $\frac{5}{7}$  y  $\frac{4}{14}$     b)  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{5}{8}$  y  $\frac{2}{3}$

**75** Ordena de menor a mayor las fracciones de cada uno de los siguientes apartados.

a)  $\frac{7}{11}, \frac{2}{11}, \frac{9}{11}$     c)  $\frac{6}{5}, \frac{14}{3}, \frac{7}{2}, \frac{25}{9}$   
 b)  $\frac{2}{5}, \frac{2}{3}, \frac{2}{17}$     d)  $\frac{2}{3}, \frac{7}{5}, \frac{19}{21}, \frac{15}{7}$

## Operaciones con fracciones

**76** Efectúa las siguientes operaciones y, si es posible, simplifica el resultado obtenido.

a)  $\frac{2}{7} + \frac{1}{5}$     d)  $7 \times \frac{1}{7}$   
 b)  $\frac{1}{5} - \frac{2}{18}$     e)  $\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}$   
 c)  $2 + \frac{1}{5}$     f)  $\frac{1}{6} : \frac{3}{4}$

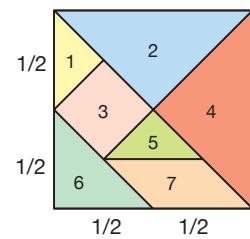
**77** Calcula:

a)  $\frac{1}{2}$  de  $\frac{3}{4}$     b)  $\frac{3}{11}$  de  $\frac{121}{240}$

**78** Resuelve:

a)  $\frac{7}{4} + \frac{7}{8} - \frac{5}{2}$     c)  $\frac{8}{5} - \left( \frac{17}{10} - \frac{3}{2} \right)$   
 b)  $\frac{5}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}$     d)  $\frac{3}{7} - \left( \frac{5}{21} + \frac{1}{14} \right)$

**79** **Material concreto:** En una cartulina A4, dibuja un cuadrado de 20 cm x 20 cm; traza líneas y escribe la fracción que relaciona el área de cada una de las piezas con el área total del tangram.



— Efectúa con las fracciones anteriores.

- a) Área (pieza 2) + Área (pieza 3)  
 b) Área (pieza 4) - Área (pieza 5)  
 c) Área (pieza 4) : Área (pieza 3)

Luego, recorta las piezas y arma un triángulo y luego un rectángulo con todas las piezas del rompecabezas.

**80** Resuelve:

a)  $\frac{2}{3} + \frac{4}{2} \times \left( \frac{5}{2} + \frac{1}{6} \right)$

b)  $\frac{4}{6} + \frac{3}{2} \times \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{6} \right)$

**81** Resta la suma de  $\frac{1}{5}$  y  $\frac{2}{7}$  de la fracción  $\frac{5}{6}$ .

**82** Calcula: 
$$\frac{\left( 3 - \frac{7}{4} \right) \times \left( \frac{1}{3} + \frac{7}{15} \right)}{2 \times \left( \frac{2}{5} - \frac{2}{7} \right)}$$

**83** Calcula mentalmente los números que faltan.

**?** a)  $\frac{1}{5}$  de 50 = ...    d)  $\frac{17}{6} = \dots \frac{6}{6}$   
 b)  $\frac{1}{2}$  de  $\dots$  =  $\frac{3}{10}$     e)  $\frac{4}{10} + \frac{1}{5} = \dots$   
 c)  $\frac{2}{7} = \frac{14}{\dots}$     f)  $\frac{4}{10} : \frac{1}{5} = \frac{\dots}{10} = \dots$

## Aplicación en la práctica

**84** Un depósito tiene sus  $\frac{5}{8}$  partes llenas de agua y se sacan  $\frac{2}{3}$  del agua que contiene.

- a) ¿Qué parte del depósito está llena?  
 b) ¿Qué parte queda vacía?



- 85 Para realizar un trabajo de Lengua se recomienda un libro de lectura que tiene 162 páginas. Juan ha leído  $\frac{40}{81}$  de las páginas del libro y a Óscar le quedan por leer  $\frac{13}{27}$  de las páginas del libro.

- a) ¿Cuántas páginas ha leído cada uno?  
b) ¿Cuál de los dos ha leído más páginas?

- 86 La distancia entre dos ciudades de la Costa es de 35 km. En un mismo instante, un auto sale de la ciudad A hacia la ciudad B y otro sale de la segunda hacia la primera. Transcurridos 15 min, han recorrido respectivamente  $\frac{3}{5}$  y  $\frac{3}{7}$  de la carretera que une los dos pueblos.

- a) ¿Cuántos kilómetros ha recorrido cada automóvil?  
b) ¿Se han cruzado los dos carros?



- 87 Un concurso musical consiste en adivinar los nombres de distintas canciones. El concursante de Guaranda ha adivinado 17 de las 30 canciones que ha escuchado y el de Machala ha adivinado 16 de las 25 canciones que ha escuchado. ¿Cuál de los dos concursantes ha conseguido un mejor resultado?

- 88 Un excursionista ha escalado  $\frac{1}{7}$  de una montaña y aún le quedan 40 m para llegar al tercer tramo. ¿Qué altura tiene la montaña?

- 89 La distancia que separa dos pisos consecutivos de un edificio nuevo es  $2\frac{1}{2}$  m. Un ascensor que se encuentra en el piso 5 desciende hasta la planta baja, sube hasta la planta 4 y desciende hasta el primer piso. Dibuja el trayecto del ascensor y halla la longitud del trayecto que ha recorrido.

- 90 Responde las siguientes preguntas:

- @ a) ¿Qué fracción de la masa del Sistema Solar está formada por el Sol?  
b) ¿Qué fracción del hielo de un iceberg está sobre el agua?  
— Investiga en una página de internet.

## Más a fondo

- 91 Una persona, que está realizando ejercicios, ha recorrido 3 km. Para recorrer el primer kilómetro ha tardado 10 minutos y en cada uno de los kilómetros siguientes tarda  $\frac{1}{20}$  menos del tiempo que ha

necesitado para recorrer el kilómetro anterior. Expresa mediante un número mixto el tiempo que tarda en recorrer los 3 km.

- 92 Observa en la figura de la derecha lo que marca la aguja del indicador de la gasolina del camión.



Añadimos 35 l y las  $\frac{5}{6}$  partes del depósito están llenas. ¿Qué capacidad tiene el depósito? ¿Cuántos litros de gasolina había inicialmente en el depósito?

- 93 Se tiene un rectángulo y un cuadrado. La altura del rectángulo mide 24 cm y su base, los  $\frac{5}{4}$  de la altura. El perímetro del cuadrado es  $\frac{1}{2}$  del perímetro del rectángulo. Calcula el área del cuadrado.

- 94 Manuel ha pintado los  $\frac{3}{4}$  de una pared en  $1\frac{1}{2}$  h. ¿Cuánto tiempo ha necesitado para pintar los  $\frac{2}{3}$  de la pared?

- 95 **Material concreto:** En grupos de 5, recorten 25 cartulinas iguales y repartan 5 a cada alumno/a.

Cada alumno/a escogerá una de estas fracciones:

- a)  $\frac{1}{2}$     b)  $\frac{2}{3}$     c)  $\frac{3}{7}$     d)  $\frac{25}{100}$     e)  $\frac{10}{12}$

y la escribirá en una cartulina. Además, calculará cuatro fracciones equivalentes a la elegida y anotará cada una de ellas en una cartulina.

Se mezclan las cartulinas y se reparten cinco a cada participante.

Los cinco jugadores pasan a la vez al compañero/a de la derecha la carta que no quieren, así sucesivamente, hasta conseguir cinco fracciones equivalentes.

- Puedes organizar el mismo juego con fracciones con el mismo denominador o con el mismo numerador.



## ► ¡Un conflicto de... fracciones!

Un turista dio ocho monedas a dos fabricantes de quesos de Salinas por haber compartido su comida con él. El primero aportó 5 quesos y el segundo aportó 3. El segundo fabricante pensó que le correspondían 3 monedas pero el primero dijo que a él le correspondían 7 de las ocho monedas. Llevaron este problema a un juez y éste determinó que el primer fabricante tenía la razón.

Si tú fueses el juez, ¿cómo justificarías este reparto?

— Completa, en tu cuaderno, los términos de las fracciones que faltan para hallar la solución del problema.

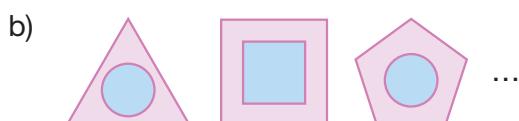
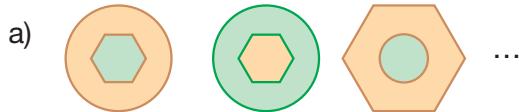
Fracción de queso que come cada uno:  $\frac{8}{3}$

Fracción de queso que come el turista procedente del primer fabricante:  $5 - \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

Fracción de queso que come el turista procedente del segundo fabricante:  $\dots - \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

Si hay 8 monedas, ..... monedas corresponden al primero y ..... monedas al segundo.

## ► Serie de figuras



## ► Seis vasos

Mueve un solo vaso de manera que consigas esta secuencia:

LLENO-VACÍO-LLENO-VACÍO-LLENO-VACÍO



## Buen Vivir

Se entiende por medioambiente todo lo que afecta a un ser vivo y condiciona especialmente las circunstancias de vida de las personas o la sociedad en su vida. Comprende el conjunto de valores naturales, sociales y culturales existentes en un lugar y un momento determinado, que influyen en la vida del ser humano y en las generaciones venideras. Es decir, no se trata sólo del espacio en el que se desarrolla la vida sino que también abarca seres vivos, objetos, agua, suelo, aire y las relaciones entre ellos, así como elementos tan intangibles como la cultura.

Existen altos niveles de contaminación causados por el hombre, pero no sólo el hombre contamina, sino que también existen algunos factores naturales que así como benefician, perjudican al medio ambiente.

[http://es.wikipedia.org/wiki/Medio\\_ambiente](http://es.wikipedia.org/wiki/Medio_ambiente)

### Educación ambiental



#### Actividades

- 1 Piensen en algunas alternativas para utilizar nuestros recursos sin dañar la naturaleza; por ejemplo: el agua, el viento, el sol, la tierra, etc.
- 2 Los ecuatorianos compartimos un espacio diverso. ¿Cuál debe ser nuestro compromiso para conservar adecuadamente los recursos naturales como el agua, el suelo y el aire?
- 3 Propongan alguna alternativa para aprovechar la energía solar y un experimento para comprobar su utilidad. Pueden recurrir a Internet como fuente de consulta.
- 4 ¿Qué vas a hacer para cuidar la naturaleza en adelante?



# Autoevaluación

# Coevaluación

Si logras resolver el 70 % de estas actividades individuales y grupales, puedes avanzar.

1. Copia y completa en tu cuaderno:

Fracción	Lectura	Representación
.....	.....	
.....	.....	
$\frac{7}{15}$	Siete quinceavos	.....

2. Obtén la fracción irreducible de  $\frac{225}{600}$ .

3. Resuelve:

a)  $\frac{1}{7} + \frac{2}{3}$    b)  $5 \times 2 \frac{1}{5}$    c)  $\frac{3}{7} \times \frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$

4. A un partido de fútbol, asistió las tres cuartas partes del aforo y la mitad de los asistentes abandonó el estadio antes de que finalizara el evento.

- Escribe los números fraccionarios que aparecen en el texto.
- Si el aforo es de 45 000 espectadores, calcula cuántas personas había al final del partido.

1. Completén en su cuaderno:

a)  $\frac{1}{5}$  de 750 = .....   b)  $\frac{2}{3}$  de ..... = 720

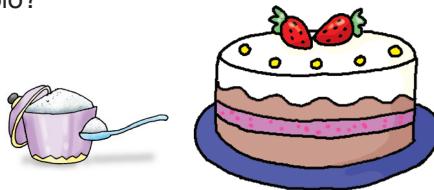
2. Ordenen de menor a mayor:

$$\frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{1}{4}, \frac{7}{10}, \frac{11}{15}, \frac{7}{18}$$

3. Resuelvan:

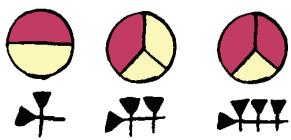
a)  $\left(1 - \frac{5}{9}\right) + \frac{1}{6}$    b)  $\frac{2}{5} + \left(\frac{7}{4} - \frac{1}{5}\right) \times \frac{3}{7}$

4. Estamos preparando la masa de un pastel y observamos que es necesario añadirle un poco más de azúcar. Le añadimos una cantidad equivalente a un quinto del azúcar que ya tiene, con lo que finalmente la masa del pastel contiene 600 g de azúcar. ¿Qué cantidad de azúcar habíamos puesto al principio?



## Sección de historia

Los babilonios tenían símbolos especiales para algunas fracciones, que consideraban como totalidades.



Los egipcios empleaban fracciones con numerador unidad. Para ello, colocaban un símbolo especial encima del número que actuaba de denominador.



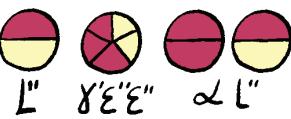
$$\frac{1}{3}, \frac{1}{10}, \frac{1}{110}$$

Determinadas fracciones egipcias se expresaban mediante signos especiales.



$$\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$$

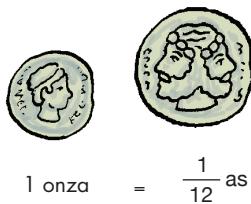
Los griegos tendieron, al principio, a usar fracciones con numerador unidad, como los egipcios.



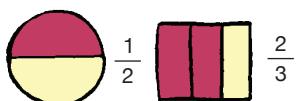
Originariamente, los griegos consideraron las fracciones como razones geométricas. Pero, en el período alejandrino, ya les dieron entidad de números.

Uno de tres      Un tercio

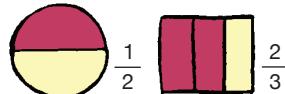
Los romanos usaban un sistema fraccionario basado en la división de la unidad en 12 partes.



Los hindúes indicaban las fracciones escribiendo el numerador encima del denominador.



Los árabes adoptaron el sistema hindú y le añadieron la barra horizontal. Así crearon los símbolos que utilizamos en la actualidad.





# Crónica matemática

Las fracciones aparecen en situaciones tan distintas, como por ejemplo:

- En la compra: tres cuartos de kilogramo de naranjas, medio litro de zumo, media docena de huevos...
- En el tiempo de duración de las notas musicales (negra, corchea, semicorchea) o en el sonido de las notas musicales (octavas).
- En las escalas de los mapas.

## Estamos rodeados de fracciones...

Además de estas fracciones, ¿sabrías decírnos otras que aparecen en nuestro entorno?



media docena



un cuarto de hora



una milésima



un décimo

## Música y fracciones

### Tiempo de duración de las notas musicales

- Observa en la tabla la fracción de tiempo de duración de la corchea y de la semicorchea respecto de la negra.

Nombre	Símbolo	Tiempo
Negra		1
Corchea		$\frac{1}{2}$
Semicorchea		$\frac{1}{4}$

Así, si una negra durase 1 segundo, ¿cuánto durarían una corchea y una semicorchea? ¿Y si durase 3 segundos?

### Sonido de una cuerda: octavas

Coge una cuerda tensa y púlsala: sonará una nota. Ahora divide la cuerda en dos y vuelve a pulsar: sonará la misma nota pero una octava más alta.



Pitágoras descubrió que existía una relación entre la longitud de las cuerdas y el sonido que producían, y determinó que las octavas tenían una proporción o razón de 2 a 1.

Empezando por cualquier cuerda, puede subirse la escala disminuyendo la longitud de la cuerda según simples fracciones.

Así, si partimos de una cuerda que nos da el *do*, los  $\frac{8}{9}$  de ésta dan *re*; los  $\frac{64}{81}$ , *mi*; los  $\frac{3}{4}$ , *fa*; los  $\frac{2}{3}$ , *sol*; los  $\frac{16}{27}$ , *la*; los  $\frac{128}{243}$ , *si* y  $\frac{1}{2}$ , el *do* de una octava más alta.

## Las TIC y la Matemática

### Escalas y fracciones

Los mapas se dibujan a **escala**, es decir, reduciendo el tamaño de manera proporcional. Así, por ejemplo, si la escala de un mapa es 1 : 10 000 significa que 1 cm en el mapa representa 10 000 cm en la realidad, es decir, 100 m.

La razón entre el tamaño en el mapa y el real puede expresarse también mediante la fracción



# Módulo 3

**Bloques:** Numérico.  
Relaciones y funciones.  
Geométrico

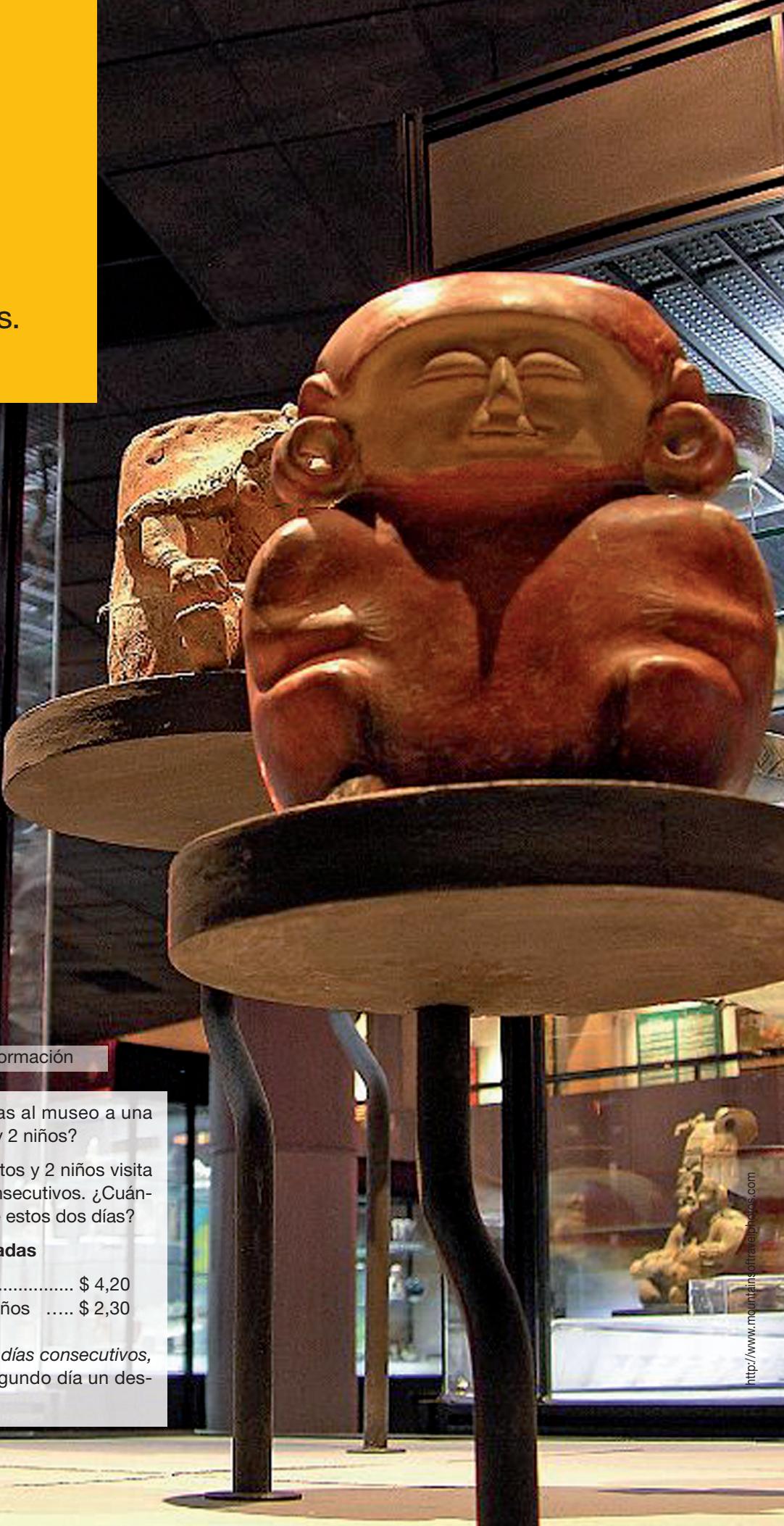
## Buen vivir: Comunicación e información

- ¿Cuánto costarán las entradas al museo a una familia formada por 2 adultos y 2 niños?
- Un grupo formado por 12 adultos y 2 niños visita el museo durante dos días consecutivos. ¿Cuánto pagarán por las entradas de estos dos días?

### Precio de las entradas

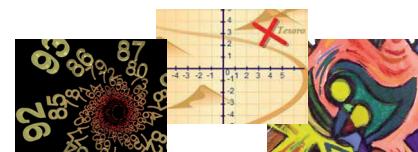
Adultos .....	\$ 4,20
Niños y niñas menores de 12 años .....	\$ 2,30

Si se visita el museo durante *dos días consecutivos*, se aplicará a las entradas del segundo día un descuento del 25 %.



# Números decimales

## Volúmenes de prismas y cilindros



Con tus conocimientos sobre los números decimales podrás *expresar cantidades y operar con ellas*, así como también volúmenes de cuerpos geométricos.

### DCD Destreza con criterios de desempeño

- Leer y escribir números decimales positivos.
- Ordenar y comparar números decimales positivos.
- Simplificar expresiones de números decimales positivos con aplicación de reglas de potenciación y radicación.
- Generar sucesiones con operaciones combinadas.
- Operar con números decimales valorando la ne-

cesidad de resultados exactos o aproximados.

- Deducir y aplicar las fórmulas para el cálculo del volumen de prismas y cilindros.
- Resolver situaciones cotidianas mediante cálculos en los que intervienen los porcentajes.
- Presentar de manera clara, ordenada y argumentada el proceso seguido en la resolución de un problema.



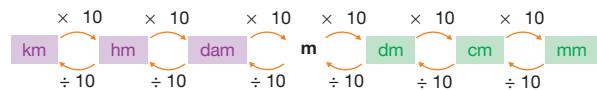
### Prerrequisitos

#### Recuerda

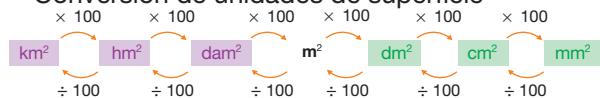
- Toda **fracción** consta de *numerador* y *denominador*.

El **numerador** —  $\frac{a}{b}$  — El **denominador** indica el número de partes iguales en que se ha dividido la unidad.

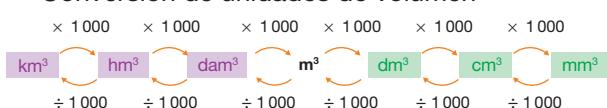
- Conversión de unidades de longitud



- Conversión de unidades de superficie



- Conversión de unidades de volumen



Estas relaciones nos permiten transformar unas unidades de volumen en otras usando factores de conversión.

#### Evaluación diagnóstica

- Indica el orden de unidades de la cifra 4 en cada uno de los siguientes números: 4 321, 32 043, 124, 4 001 321, 240 218.
- Expresa el número 8 650 como:
  - Suma de cuatro números diferentes, múltiplos de 10.
  - Suma de tres números diferentes, uno de ellos múltiplo de 3 y otro de 3 y de 7.
- Efectúa:
  - $1 + 12 \div 4 - 3$
  - $2 + [95 - (10 + 2) \times 3]$
  - $(1 + 2 \times 5 - 4) \div 7 + 15 \div 3$
  - $3 \times [2 - (3 - 2) - 20 \div 10 + 30]$
- De cada 100 baldosas que produce una fábrica, 8 son de color rojo. Si en una hora se fabrican 400 baldosas, ¿cuántas son rojas?
- Si los  $\frac{7}{11}$  de una cantidad son 1 750, determina dicha cantidad.

#### Derechos del consumidor

Art. 52. Las personas tienen derecho a disponer de bienes y servicios de óptima calidad y a elegirlos con libertad, así como a una información precisa y no engañosa sobre su contenido y características.

Constitución de la República del Ecuador, 2008.



# 1 Números decimales y fracciones decimales

Un químico pesa 123,896 g de una sustancia para llevar a cabo una reacción. Observa que este número consta de una coma con números a su derecha y a su izquierda. Se trata de un **número decimal**.

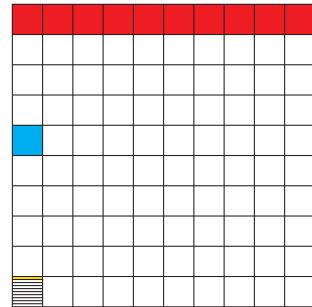
Los números decimales constan de dos partes separadas por una coma, la *coma decimal*.

123 , 896  
Parte entera      ↓  
Coma decimal      Parte decimal

Si dividimos la unidad en 10 partes iguales, cada una de ellas recibe el nombre de **décima**.

Si dividimos la unidad en 100 partes iguales, cada una de ellas es una **centésima**.

Cada una de las 1 000 partes iguales en que dividimos la unidad es una **milésima**.



10 décimas = 1 unidad

10 centésimas = 1 décima  
100 centésimas = 1 unidad

10 milésimas = 1 centésima  
100 milésimas = 1 décima  
1 000 milésimas = 1 unidad

## FÍJATE

Para que una fracción sea equivalente a una fracción decimal, los factores primos de su denominador, una vez simplificada, sólo pueden ser 2 o 5, que son los factores de 10.

El número decimal 123,896 también puede expresarse mediante la *fracción decimal*  $\frac{123\,896}{1\,000}$ .

Una **fracción decimal** tiene como denominador una potencia de 10, es decir,  $10, 10^2, 10^3\dots$  Las más sencillas tienen un 1 como numerador. Observa:

$$1 \text{ décima} = 0,1 = \frac{1}{10}$$

$$1 \text{ centésima} = 0,01 = \frac{1}{100}$$

$$1 \text{ milésima} = 0,001 = \frac{1}{1\,000}$$

Para hallar el *número decimal* correspondiente a una fracción decimal, se escribe el numerador y se separan tantas cifras decimales como ceros tiene el denominador.

$$\frac{123\,896}{1\,000} = 123, \frac{896}{\text{ }} \quad \begin{matrix} 3 \text{ ceros} \\ 3 \text{ cifras} \\ \text{decimales} \end{matrix}$$

$$\frac{23}{100} = 0, \frac{23}{\text{ }} \quad \begin{matrix} 2 \text{ ceros} \\ 2 \text{ cifras} \\ \text{decimales} \end{matrix}$$

Para hallar la *fracción decimal* correspondiente a un número decimal se escribe, como numerador, el número sin coma y, como denominador, la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el número decimal.

$$1\,014, \frac{5}{\text{ }} = \frac{10\,145}{10} \quad \begin{matrix} 1 \text{ cifra} \\ 1 \text{ cero} \\ \text{decimal} \end{matrix}$$

$$0, \frac{067}{\text{ }} = \frac{67}{1\,000} \quad \begin{matrix} 3 \text{ cifras} \\ 3 \text{ ceros} \\ \text{decimales} \end{matrix}$$

## Actividades

1 Di cuántas unidades hay en 100 décimas, cuántas milésimas hay en 30 décimas y cuántas centésimas hay en 500 milésimas.

2 Escribe el número decimal correspondiente.

$$\frac{5}{10}, \frac{4}{100}, \frac{324}{100}, \frac{256}{1\,000}, \frac{52}{10}, \frac{27}{1\,000}$$

3 Escribe en forma de fracción decimal y en forma de número decimal: 5 décimas; 47 centésimas; 21 milésimas; 64 décimas.

4 Di cuáles de las fracciones siguientes son reducibles a fracciones decimales.

$$\frac{2}{7}, \frac{3}{4}, \frac{9}{15}, \frac{13}{25}, \frac{9}{200}$$

## 1.1. Lectura de números decimales

Observa los órdenes de las unidades del número 123,896.

Número	Parte entera			Parte decimal			
	c	d	u	,	décima	centésima	milésima
123,896	1	2	3	,	8	9	6

Para leer correctamente un número decimal, el procedimiento que seguimos es el siguiente:

- Primero, nombramos las unidades enteras.
- A continuación, leemos la parte que va detrás de la coma, dándole el nombre de la última unidad decimal que aparece.

Así 123,896 se lee *123 unidades 896 milésimas*. De la misma manera, 3,5 se lee *3 unidades 5 décimas* y 87,02 se lee *87 unidades 2 centésimas*.

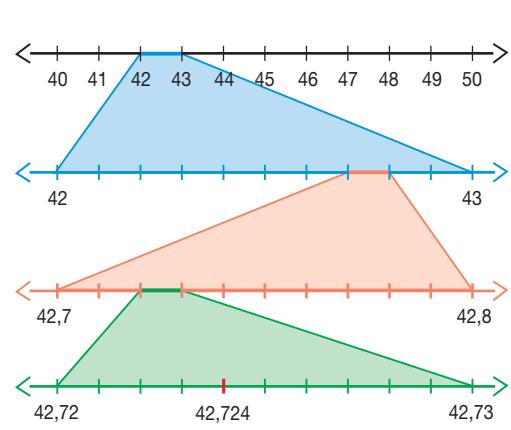
### Órdenes de unidades inferiores a la milésima

- 1 **diezmilésima** = 0,0001  
1 **cienmilésima** = 0,00001  
1 **millonésima** = 0,000001

## 1.2. Representación sobre la recta

Observa el procedimiento que utilizamos para representar sobre una recta el número 42,724.

- Localizamos sobre la recta los dos números enteros entre los que se encuentra el número decimal que queremos representar.
- Dividimos el segmento determinado por estos números en 10 partes iguales para representar las décimas.
- Dividimos cada décima en 10 partes iguales para representar las centésimas; cada centésima en 10 partes iguales para representar las milésimas; y así sucesivamente.



### Actividades

5 Lee los siguientes números decimales e indica en cada caso el orden de unidades de la cifra 6: 6,04; 0,06; 0,61; 0,006; 6 025,2; 264,27; 21,16.

6 Escribe estos números decimales: 25 centésimas; 4 unidades 124 milésimas; 78 unidades 2 décimas; 1 025 unidades 25 milésimas.

7 Representa aproximadamente sobre una recta los siguientes números decimales: 75 centésimas; 1 unidad 4 décimas; 2 unidades 5 décimas; 3 unidades 2 décimas.

8 Representa sobre una recta: 100,7; 100,1; 100,15; 100,9.

### 1.3. Orden de los números decimales

Al igual que en anteriores unidades hemos ordenado números naturales, números enteros y números fraccionarios, también podemos comparar y ordenar los números decimales.

El procedimiento general para comparar números decimales es el siguiente:

Procedimiento	Ejemplos
<ul style="list-style-type: none"><li>– En primer lugar, nos fijamos en su parte entera.</li><li>– Si tienen las partes enteras iguales, nos fijamos en la cifra de las décimas.</li><li>– Si tienen la cifra de las décimas iguales, nos fijamos en la cifra de las centésimas.</li><li>– Si tienen la cifra de las centésimas iguales, nos fijamos en la cifra de las milésimas y así sucesivamente.</li></ul>	<p><b>15,82</b> y <b>14,25</b> → 15 &gt; 14 por tanto <math>15,82 &gt; 14,25</math></p> <p><b>15,76</b> y <b>15,82</b> → 8 &gt; 7 por tanto <math>15,82 &gt; 15,76</math></p> <p><b>15,80</b> y <b>15,82</b> → 2 &gt; 0 por tanto <math>15,82 &gt; 15,80</math></p> <p><b>1,254</b> y <b>1,255</b> → 5 &gt; 4 por tanto <math>1,255 &gt; 1,254</math></p>

Si comparamos, por ejemplo, los números 15,8; 14,25; 15,76 y 15,82, podemos establecer su ordenación:

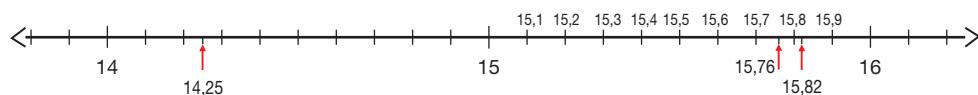
$$15,82 > 15,8 > 15,76 > 14,25$$



#### FÍJATE

Si un número decimal es menor que 1, su parte entera es 0.

También podemos ordenar los números decimales a partir de su representación sobre la recta.



De la misma manera que con los números naturales y los enteros, cuanto mayor es el número, más a la derecha está representado sobre la recta.

#### Actividades



##### Ceros a la derecha de un número decimal

Los ceros que aparecen al final de la parte decimal de un número decimal pueden suprimirse.

$$3,4 = 3,40 =$$

$$= 3,400 = \dots$$

Ya que:

$$4 \text{ décimas} =$$

$$= 40 \text{ centésimas} =$$

$$= 400 \text{ milésimas} = \dots$$

- 9 Completa con uno de estos signos: <, >, =.

a)  $1,48 \dots \frac{3}{2}$       b)  $2,1 \dots 2,01$       c)  $0,8 \dots 0,80$

- 10 Ordena de menor a mayor:

$$2,1; 2,01; 12,1; \frac{21}{2}; 2,12; 2,11$$

- 11 Representa sobre la recta los siguientes números: 1,5; 1,55; 1,6; 1,42; 1,63.

- 12 Escribe los siguientes números decimales y ordénalos de mayor a menor: 3 décimas, 30 milésimas, 3 milésimas, 33 milésimas y 303 milésimas.

- 13 Las alturas alcanzadas por tres saltadores en una competición son: 2,35 m; 2,38 m y 2,32 m. Indica cuál es la mejor marca y cuál es la peor.

## 2 Operaciones con números decimales

Veamos algunas operaciones que podemos efectuar con los números decimales: la *suma*, la *resta*, la *multiplicación* y la *división*.

### 2.1. Adición y sustracción

Para sumar o restar dos números decimales, hemos de tener en cuenta que sólo podremos sumar, o restar, las décimas con las décimas, las centésimas con las centésimas...

El procedimiento que seguiremos es el siguiente:

Procedimiento	Ejemplos	Las TIC y la Matemática
<ul style="list-style-type: none"><li>Se colocan los números en columna de modo que coincidan las unidades del mismo orden. Si es necesario, se añaden ceros a la derecha para que todos tengan el mismo número de cifras decimales.</li><li>Se efectúa la operación como si se tratase de números enteros.</li><li>Se coloca la coma en el lugar correspondiente.</li></ul>	$42,09 + 68,634 + 17,2 =$ $42,090$ $+ 68,634$ $\hline 17,200$ $127,924$ $432,768 - 274,959 =$ $432,768$ $- 274,959$ $\hline 157,809$ $759,6 - 326,732 =$ $759,600$ $- 326,732$ $\hline 432,868$	<p>Con la calculadora puedes efectuar también operaciones con números decimales. En la mayoría de las calculadoras, la tecla para introducir la coma viene representada por un punto. Así, para introducir el número decimal 24,6 teclearemos:</p> <p>2 4 • 6</p>

### Actividades



14 Coloca en columna y efectúa:

- a)  $46,02 + 321,8$       d)  $38,456 + 21,4$   
b)  $1,234 + 0,708$       e)  $0,0456 + 0,341$   
c)  $6,01 - 3,201$       f)  $12,076 - 9,205$

15 Resuelve:

- a)  $289,99 + 0,0345 + 56,72$   
b)  $0,0456 + 0,3419 + 0,9899$

16 Calcula el término que falta.

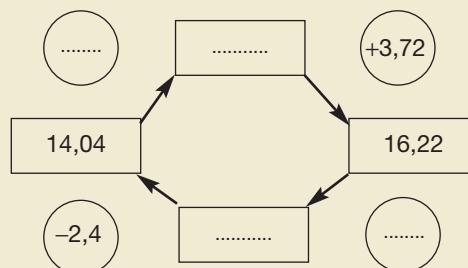
- a)  $120,5 + \dots = 1955$   
b)  $\dots - 19,54 = 21,01$

— Comprueba el resultado con la calculadora.

17 Completa el cuadrado mágico para que la suma de cada fila, de cada columna y de cada diagonal sea 0,12.

0,048		0,016
		0,072
0,064		

18 Completa:



19 La suma de dos precios de artefactos eléctricos es de \$ 87,96. Si uno de los artefactos cuesta \$ 45,6, ¿cuánto vale el otro?

20 Enrique mide 1,61 m de estatura, María 0,03 m más que Enrique y Silvia 0,06 m más que María. ¿Cuánto mide Silvia?

21 Encuentra el número decimal que al restarle 2,15 nos dé 6,004.

## 2.2. Multiplicación

El cambio entre el euro y el dólar varía diariamente. Hace unos días el periódico publicaba que el cambio de un euro era 1,284 dólares. Si tenemos ahorrados 162,5 euros y queremos saber a cuántos dólares equivalen, debemos multiplicar los 162,5 euros por 1,284.

El procedimiento general que debemos seguir para multiplicar dos números decimales es el siguiente:

### FÍJATE

Para multiplicar dos números decimales podemos multiplicar las fracciones decimales correspondientes.

$$\begin{aligned}162,5 \times 1,284 &= \\&= \frac{1\,625}{10} \times \frac{1\,284}{1\,000} \\&= \frac{2\,086\,500}{10\,000} = 208,6500\end{aligned}$$

Procedimiento	Ejemplo
<ul style="list-style-type: none"><li>Se efectúa la multiplicación como si se tratara de dos números enteros.</li><li>Se separan tantas cifras decimales como tengan entre los dos factores.</li></ul>	$\begin{array}{r} 1\,625 \\ \times 1,284 \\ \hline 6\,500 \\ 1\,300\,0 \\ 3\,250 \\ \hline 2\,086\,500 \end{array}$

Así, pues, los 162,5 euros ahorrados equivalen a 208,65 dólares.

### Las TIC y la Matemática

#### Un consejo

Interésate por conocer las características de tu calculadora en lo que se refiere a los números decimales.

### Multiplicación por la unidad seguida de ceros

Si multiplicamos 12,56 por 10, por 100 y por 1 000, obtendremos, respectivamente, 125,6; 1 256 y 12 560.

Los mismos resultados pueden obtenerse sin efectuar las multiplicaciones. Observa el siguiente procedimiento:

Procedimiento	Ejemplos
<ul style="list-style-type: none"><li>Se desplaza la coma hacia la <b>derecha</b> tantos lugares como ceros acompañan a la unidad.</li><li>Si es necesario, se añaden ceros.</li></ul>	$8,15 \times 10 = 81,5$ Desplazamos la coma un lugar.  $8,15 \times 1\,000 = 8\,150$ Desplazamos la coma tres lugares.

### Actividades

**22** Efectúa:

- a)  $3,761 \times 6,4$       c)  $248,87 \times 0,025$   
b)  $56,567 \times 0,023$       d)  $237,45 \times 67,129$

**23** Efectúa mentalmente:

- a)  $0,035 \times 1\,000$       c)  $0,981 \times 10$   
b)  $987,34 \times 100$       d)  $0,004 \times 100$

**24** Consulta el cambio entre el euro y el dólar. Luego responde. ¿A cuántos dólares equivalen 105,72 euros? ¿Y 92,3 euros?

**25** Calcula mentalmente:

- a)  $0,3 \times 0,2$       c)  $0,6 \times 0,5$   
b)  $0,3 \times 0,31$       d)  $0,8 \times \frac{1}{2}$

## 2.3. División

Para efectuar divisiones con números decimales debemos conocer previamente la *aproximación decimal del cociente de una división entera*.

### Aproximación decimal del cociente de una división entera

Podemos aproximar una división hasta la cifra decimal que queramos, prosiguiendo la división hasta que el cociente tenga el número de cifras decimales deseado.

Veamos el procedimiento para efectuar una división con aproximación del cociente, por ejemplo, hasta las décimas.

Procedimiento	Ejemplo
<ul style="list-style-type: none"><li>— Se efectúa la división entre los números enteros.</li><li>— Se pasa el resto a décimas.</li><li>— Se coloca la coma en el cociente para indicar que a continuación van las décimas y se prosigue la división.</li><li>— El resto obtenido son décimas.</li></ul>	<p>236      52    El cociente es 4 y el resto 28 unidades.</p> $28 \times 10 = 280$ <p>236      52    El resto, 20, son décimas.</p> $\begin{array}{r} 280 \\ 20 \end{array} \quad 4,5$

Al aproximar el cociente de una división entera se sigue cumpliendo:

$$\text{Dividendo} = \text{Divisor} \times \text{Cociente} + \text{Resto}$$

$$\text{Resto} < \text{Divisor}$$

Para expresar el resto en unidades debemos tener en cuenta que el resto viene expresado en el orden de unidades de la última cifra del cociente.

Así, en el ejemplo que hemos propuesto, 20 décimas son 2 unidades, y se cumple que:

$$236 = 52 \times 4,5 + 2$$

### Actividades



- 26** Efectúa las siguientes divisiones approximando el cociente hasta las centésimas.

$$6\,414 \div 315 ; 14\,896 \div 753 ; 6\,137 \div 27 ; 12 \div 7 ; 2\,105 \div 34 ; 18\,500 \div 320$$

- 27** Calcula el gasto medio diario de un viajero si durante los cinco días laborables de una semana ha gastado 309 dólares. Aproxima el resultado hasta las décimas.

- 28** Una cuerda de 11 m de largo se divide en 7 trozos iguales. ¿Cuál será la longitud de cada trozo? Aproxima el resultado hasta las décimas.

— Determina el resultado de la misma operación pero approximando hasta las centésimas.

- 29** Divide 7 410 entre 562, approximando el cociente hasta las décimas, y determina el resto.

## División de un número decimal para un número natural

Los pasos que debemos seguir para dividir un número decimal para un número natural dependerán de que la parte entera del dividendo sea mayor o menor que el divisor.

- *Parte entera del dividendo mayor que el divisor*

Procedimiento	Ejemplo
<ul style="list-style-type: none"> <li>— Se efectúa la división de la parte entera.</li> <li>— Se baja la cifra correspondiente a las décimas y se coloca una coma en el cociente.</li> <li>— Se prosigue la división hasta obtener el número de cifras decimales deseado.</li> </ul>	$  \begin{array}{r}  857,2 \quad   37 \\  117 \quad \quad \quad 23 \\  06  \end{array}  $ $  \begin{array}{r}  857,2 \quad   37 \\  117 \quad \quad \quad 23,1 \\  062 \\  25  \end{array}  $

- *Parte entera del dividendo menor que el divisor*

Procedimiento	Ejemplo
<ul style="list-style-type: none"> <li>— Se coloca un cero en el cociente seguido de una coma y se desplaza la coma del dividendo un lugar hacia la derecha.</li> <li>— Una vez que la parte entera del dividendo es mayor que el divisor, se efectúa la división.</li> </ul>	$  \begin{array}{r}  7897,6 \quad   8932 \\  \quad \quad \quad \quad 0,  \end{array}  $ $  \begin{array}{r}  78976 \quad   8932 \\  75200 \quad \quad 0,88 \\  3744  \end{array}  $

Si después de colocar en el cociente un cero seguido de una coma y desplazar un lugar hacia la derecha la coma del dividendo, éste sigue siendo menor que el divisor, debemos seguir desplazando la coma hacia la derecha hasta que el dividendo sea mayor que el divisor, añadiendo cada vez un cero en el cociente.

$$\begin{array}{r}
 1,678 \quad | 25 \\
 \quad \quad \quad \quad 0, \\
 \quad \quad \quad \quad 1 < 25
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 16,78 \quad | 25 \\
 \quad \quad \quad \quad 0,0 \\
 \quad \quad \quad \quad 16 < 25
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 167,8 \quad | 25 \\
 \quad \quad \quad \quad 0,0 \\
 \quad \quad \quad \quad 167 > 25
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 167,8 \quad | 25 \\
 \quad \quad \quad \quad 0,067 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 3
 \end{array}$$

## Actividades



- 30 Efectúa estas divisiones:  $149,1 \div 87$  ;  $16,589 \div 234$ ;  
 $0,043 \div 29$  ;  $21,46 \div 354$

- 32 Completa la siguiente tabla.

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
	753	45,2	0
0,0988	99		
	48	0,08	0,27

- 31 Tres amigos han puesto dinero a partes iguales para cambiarlo por dólares. Si les dan 93,16 dólares, ¿cuántos dólares le corresponden a cada uno?

## División de dos números decimales

Para efectuar una división de dos números decimales es preciso transformar previamente el divisor en un número entero. Fíjemonos en cómo hacerlo.

Procedimiento	Ejemplo
<ul style="list-style-type: none"><li>— Se multiplican el dividendo y el divisor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el divisor.</li><li>— A continuación, se efectúa la división.</li></ul>	$178,43 \div 62,5$ El divisor tiene una cifra decimal. Multiplicamos el dividendo y el divisor por 10. $178,43 \times 10 = 1784,3$ $62,5 \times 10 = 625$ La división inicial se ha transformado en: $1784,3 \div 625$

## División por la unidad seguida de ceros

Al dividir 27,13 entre 10, entre 100 y entre 1 000, obtenemos, respectivamente, 2,713, 0,2713 y 0,02713.

Pero también podemos obtener estos resultados sin efectuar la división. El procedimiento que debemos seguir es el siguiente:

Procedimiento	Ejemplos
<ul style="list-style-type: none"><li>— Se desplaza la coma hacia la <b>izquierda</b> tantos lugares como ceros acompañan a la unidad.</li><li>— Si es necesario, se añaden ceros.</li></ul>	$27,13 \div 10 = 2,713$ Para dividir por 10 desplazamos la coma un lugar. $27,13 \div 1000 = 0,02713$ Para dividir por 1 000 desplazamos la coma tres lugares.



## FÍJATE

Para dividir dos números decimales podemos dividir las fracciones decimales correspondientes.

$$178,43 \div 62,5 =$$

$$= \frac{17\ 843}{100} \div \frac{625}{10} =$$

$$= \frac{17\ 843}{62\ 500} = \frac{17\ 843}{6\ 250}$$

## CÁLCULO MENTAL

- Dividir entre 0,1, entre 0,01 y entre 0,001 equivale a multiplicar por 10, por 100 y por 1 000, respectivamente.
- Multiplicar por 0,1, por 0,01 y por 0,001 equivale a dividir entre 10, entre 100 y entre 1 000, respectivamente.
- Utiliza esta estrategia para efectuar las siguientes operaciones:
  - a)  $23,4 \div 0,1$
  - b)  $145,78 \div 0,01$
  - c)  $857 \times 0,001$
- Completa:
  - a)  $13,5 \div \dots = 1\ 350$
  - b)  $\dots \times 0,001 = 155,5$

## Actividades



**33** Efectúa las siguientes divisiones.

a)  $175,63 \div 6,2$       c)  $0,876 \div 7,54$   
b)  $0,089 \div 0,25$       d)  $6\ 423,5 \div 13,3$

**34** Calcula approximando hasta las milésimas:

a)  $245,8 \div 6,3$       c)  $34,86 \div 0,23$   
b)  $6,345 \div 2,56$       d)  $0,814 \div 1,6$

**35** Efectúa mentalmente:

a)  $245,8 \div 10$       c)  $6\ 345 \div 1\ 000$   
b)  $34,86 \div 10\ 000$       d)  $0,814 \times \frac{1}{100}$

**36** Halla el factor que falta.

a)  $4,2 \times \dots = 13,79994$   
b)  $30,56 \times \dots = 81,22848$

## 2.4. Operaciones combinadas

Al operar con números decimales, nos encontramos que muchas veces debemos combinar más de una operación. En estos casos procederemos de la manera siguiente:

Procedimiento	Ejemplos
<ul style="list-style-type: none"> <li>– Primero, efectuamos las operaciones indicadas en los paréntesis, si los hay.</li> <li>– A continuación, realizamos las multiplicaciones y las divisiones en el orden en que aparecen.</li> <li>– Por último, las sumas o las restas, también en el orden en que aparecen.</li> </ul> <p>Si hay paréntesis y corchetes, deben efectuarse primero las operaciones que se encuentran en el interior de los paréntesis.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>2,34 + 5,4 \times 3,2 = 2,34 + 17,28 = 19,62</math></li> <li>• <math>1,1 \times [2,5 - 2 \times (1,1 - 0,4) + 0,32] =</math>  <math>= 1,1 \times (2,5 - 2 \times 0,7 + 0,32) =</math>  <math>= 1,1 \times (2,5 - 1,4 + 0,32) = 1,1 \times 1,42 = 1,562</math></li> </ul>

## Las TIC y la Matemática

Observa cómo efectuamos con la calculadora operaciones con números decimales.

$$23,56 + 13,5 = \boxed{37,06}$$

Al realizar operaciones combinadas, debemos tener en cuenta la prioridad de las operaciones. Observa:

$$2,56 - 1,07 \times 0,6 = \boxed{1,918}$$

$$0,2 + 0,9 \times (2,7 - 1,3) = \boxed{1,46}$$

Al efectuar una división entera con la calculadora, ésta nos da el valor del cociente de la división. Si queremos conocer el resto de dicha división, podemos proceder de la siguiente manera:

$$830 \div 23 = 36,08695652 \rightarrow 0,08695652 \times 23 = 1,99999996$$

Luego el cociente de la división es 36 y el resto es 2.

## Actividades



**37** Efectúa:

- $106,78 - 4,7 \times 21,4 - 5,4$
- $[(2,3 - 0,5) \times (3,71 - 2,7)] \div 2,5 + \frac{1}{4}$
- $(3,12 - 0,13) \div 2,3 + 4 \times (3 + 2,1 \times 3,2)$

**38** Efectúa con la calculadora:

- $3 \times [2,1 - (3,5 - 2,7)] + 2 \div 0,5$
- $[(5,3 - 0,4) \times (5,71 - 3,4)] \div 4,5 + 3,7$

**39** Obtén con la calculadora el resto de las siguientes divisiones enteras.

- a)  $457 \div 17$       b)  $3875 \div 11$

**40** Una persona recibe 25,72 euros y 37,28 dólares. Si gasta 1 250 céntimos de euro y 1 euro equivale a 1,254 dólares, expresa de cuánto dinero dispone al final.

- a) En euros      b) En dólares

## 2.5. Potenciación de números decimales

Recuerda que la potenciación es el producto de factores iguales.

$$\left(\underbrace{1,05}_{\text{base}}\right)^2 \xrightarrow{\text{exponente}}$$

$$\begin{array}{r} 1,05 \\ \times 1,05 \\ \hline 525 \\ 000 \\ 105 \\ \hline 1,1025 \end{array}$$

La potenciación de números decimales cumple con las propiedades de la potenciación de enteros.

Una forma práctica de calcular potencias con números decimales es:

Procedimiento	Ejemplo 1	Ejemplo 2
Elevamos la base a la potencia indicada como si se tratara de un número entero.	$(0,08)^2 = 8 \times 8 = 64$ $(0,08)^2 = 0, \underbrace{08 \times 0,08} = 0, \underbrace{0064}$	$(1,2)^3 = 12 \times 12 \times 12 = 1\,728$ $(1,2)^3 = 1, \underbrace{2 \times 1,2 \times 1,2} = 1, \underbrace{728}$
El exponente nos indica cuantas veces se repite la base como factor, por tanto, se separan tantas cifras decimales como tengan los factores. Si es necesario se aumentan ceros.		

### Las TIC y la Matemática

Observa cómo efectuamos con la calculadora potencias con números decimales.

$$(0,5)^6 = \boxed{0 \ . \ 5 \ ^ \wedge \ 6 = 0,015625}$$

### ↓ FÍJATE

La potenciación de decimales cumple con las regla de los signos de los números enteros.

$$(-0,5)^2 = (-0,5) \times (-0,5) = 0,25$$

$$(-0,4)^3 = (-0,4) \times (-0,4) \times (-0,4) = (-0,064)$$



## FÍJATE

$$\sqrt[2]{b} = \sqrt{b}$$

Cuando en una raíz no aparece el índice, se entiende que se trata de una raíz cuadrada.

## 2.6 Radicación de números decimales

Sabemos que la radicación es una operación inversa a la potenciación.

$$\sqrt[3]{a} = b \rightarrow b^3 = a$$

### Raíz cuadrada

Vamos a calcular el lado de un cuadrado conociendo que su área es igual a  $10,24 \text{ cm}^2$



### MUCHO OJO

$$\begin{aligned}1^3 &= 1 \\2^3 &= 8 \\3^3 &= 27 \\4^3 &= 64 \\5^3 &= 125 \\6^3 &= 216 \\7^3 &= 343 \\8^3 &= 512 \\9^3 &= 729 \\10^3 &= 1\,000\end{aligned}$$

Para encontrar el lado del cuadrado debemos calcular la raíz cuadrada de 10,24

Muchas raíces cuadradas no son exactas por tanto podemos encontrar el resultado probando con tantas cifras decimales sea necesario.

### Procedimiento

Busquemos un número que multiplicado por si mismo sea mayor a 10.

$2^2 = 4$  Es menor que 10

$3^2 = 9$  Es menor que 10

$4^2 = 16$  Es mayor que 10

En este paso empezamos a probar aumentando decimales al 3 ya que el cuadrado de este es el más cercano a 10.

$3,1^2 = 9,61$  Es menor que 10

$3,2^2 = 10,24$  Es el resultado  $\sqrt{10,24} = 3,2$

R: El lado del cuadrado es 3,2 cm.

En la calculadora para obtener la raíz cuadrada, usamos la tecla  $\sqrt{ }$ .

### Raíz cúbica

Con el conocimiento de los cubos perfectos es posible calcular algunas raíces cúbicas. Ejemplo:

$$\sqrt[3]{0,512} = 0,8 \text{ porque } 0,8 \times 0,8 \times 0,8 = 0,512$$

$$\sqrt[3]{0,27} = 0,3 \text{ porque } 0,3 \times 0,3 \times 0,3 = 0,27$$



$\sqrt[n]{b} = a$ ; donde  $\begin{cases} n \text{ es el índice del radical, } n \in \mathbb{N} - \{0,1\}. \\ b \text{ es el radicando.} \\ a \text{ es raíz; si } n \text{ es par entonces } b \geq 0. \end{cases}$

En general:  $\sqrt[n]{b} = a \Leftrightarrow a^n = b$

## 2.7. Aproximación por redondeo

A veces, cuando operamos con números decimales encontramos un resultado con muchas cifras decimales.

En algunos casos, como, por ejemplo, una cantidad de \$ 29,362 8 en el precio de un producto no tiene sentido por el elevado número de decimales. Por ello, debemos realizar una **aproximación por redondeo**.

Así, consideraremos \$ 29,36 en lugar de \$ 29,362 8.

El procedimiento para **redondear un número** hasta una determinada cifra decimal es el siguiente:

- Si la primera cifra que debemos suprimir es menor que 5, dejamos igual la última cifra que se conserva.
- Si la primera cifra que suprimimos es mayor o igual a 5, aumentamos en una unidad la última cifra que se conserva.

### Las TIC y la Matemática

#### Redondeo con la calculadora

Para saber si tu calculadora redondea la última cifra, realiza la operación  $2 \div 3$ .

Si el resultado en pantalla es 0,66666667, la calculadora redondea el resultado; si aparece 0,66666666, es que no lo hace.

#### ejemplo 1

Redondea el número 4,275 3 hasta las décimas, las centésimas y las milésimas.

- Redondeo hasta las décimas. Se elimina a partir del 7.  $2 \rightarrow 3 \Rightarrow 4,3$
- Redondeo hasta las centésimas. Se elimina a partir del 5.  $7 \rightarrow 8 \Rightarrow 4,28$
- Redondeo hasta las milésimas. Se elimina el 3.  $5 \rightarrow 5 \Rightarrow 4,275$

### Actividades



- 41** Redondea hasta las décimas: 2,345 5; 44,25; 2,021; 12,18; 1,25; 0,127 1; 6,666 7; 3,333 3; 21,34; 2 582,7; 34 567,182 7.
- 42** Redondea hasta las centésimas: 2,345 5; 75,161 6; 0,127 1; 1,333 3; 0,003 4 - 71 150,728 2; 32,277; 4 528,181; 1 726,011.
- 43** Efectúa las siguientes operaciones y aplica el redondeo al resultado. Señala a qué cifra aplicas el redondeo y por qué.
  - $2,5 + 3,268 + 6,01 \times 1,1$ . El resultado es el precio de una prenda de vestir.
  - $1,263 - 0,03 + 0,15 \times 0,172 5$ . El resultado es la longitud en metros de una pieza, medida con una cinta métrica.
- 44** Repite la actividad anterior primero redondeando los números que aparecen en las operaciones y luego efectuando éstas.
  - Compara los resultados obtenidos en la actividad anterior y señala cuándo te parece más adecuado aplicar el redondeo.

#### FÍJATE

4,275 3 Redondeo 4,275

Observa que:

$$4,275 < 4,275 3$$

Decimos que hemos efectuado una **aproximación por defecto**.

4,275 3 Redondeo 4,28

Observa que:

$$4,28 > 4,275 3$$

Decimos que hemos efectuado una **aproximación por exceso**.



Johann Elert Bode

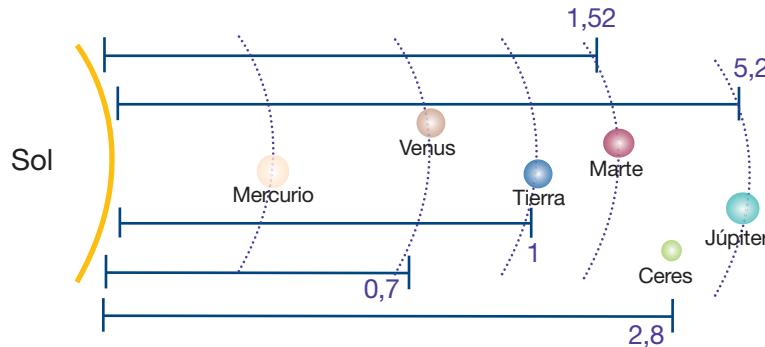
## 2.8. Sucesiones con operaciones combinadas

El astrónomo alemán Johann Elert Bode, en 1772, estudió la sucesión **3; 6; 12; 24; 48; ...** y la modificó al sumar a cada término cuatro y dividir el resultado para diez, con lo que obtuvo la sucesión denominada **de Bode-Tito**: **0,7; 1; 1,6; 2,8; 5,2; ...**

La sucesión lo asombró, pues los primeros números se aproximaban a la distancia entre el Sol y los planetas conocidos hasta ese entonces. Posteriormente, científicos descubrieron que a la distancia de 2,8 unidades astronómicas se encontraba el asteroide Ceres.

### FÍJATE

Una **unidad astronómica** es la distancia entre el Sol y la Tierra y se la utiliza para calcular la distancia entre el Sol y cualquier otro planeta del Sistema Solar.



En ocasiones, resulta más complicado encontrar los elementos de una sucesión, pues estos pueden estar relacionados por varias operaciones: por ejemplo, en la sucesión: **1; 1; 2; 3; 5; 8; ...** cada término es el resultado de la suma de los dos términos anteriores.

Para encontrar la relación que existe entre los términos de una **sucesión con operaciones combinadas**, podemos hacer uso del procedimiento aprendido en las sucesiones con sumas y multiplicaciones, pero existen otros métodos según la sucesión.

### ejemplo 2

Encuentra la relación entre los términos de la sucesión:

$$3; 5; 9; 17; 33; \dots$$

— En primer lugar, restamos o dividimos cada número de la sucesión para su término anterior:

	Restamos los términos sucesivos	Dividimos los términos sucesivos
	$33 - 17 = 16$	$33 \div 17 = \frac{33}{17}$
	$17 - 9 = 8$	$17 \div 9 = \frac{17}{9}$
	$9 - 5 = 4$	$9 \div 5 = \frac{9}{5}$
	$5 - 3 = 2$	$5 \div 3 = \frac{5}{3}$

— A continuación, evaluamos si los cocientes o las diferencias tienen algún patrón que podamos entender fácilmente. En nuestro ejemplo, las diferencias forman otra sucesión:

### ejemplo 3

- Evaluamos la sucesión que forman las diferencias, para saber si es posible hallar los nuevos términos de esta sucesión.

$$16 \div 8 = 2$$

$$8 \div 4 = 2$$

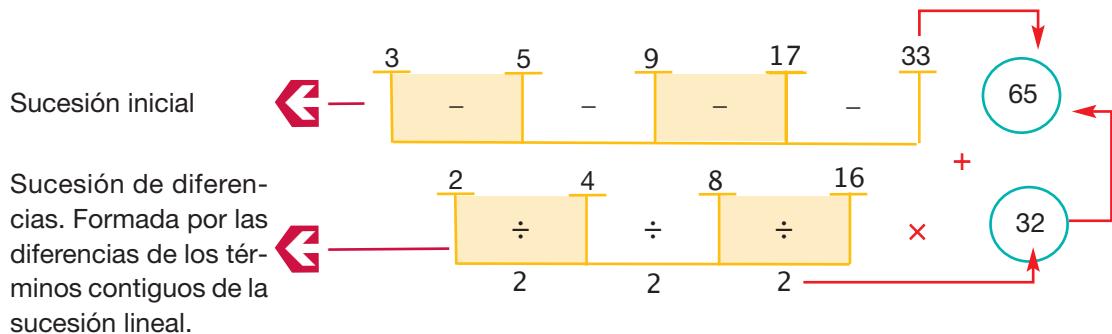
$$4 \div 2 = 2$$

– Como todas las divisiones entre términos sucesivos tienen el mismo cociente, podemos encontrar cuál es el próximo término de la sucesión de diferencias.

– Organizamos los elementos que hemos encontrado y hallamos los nuevos términos de cada sucesión:

» Para hallar el nuevo término de la sucesión de diferencias, multiplicamos el último término por el cociente común; es decir:  $16 \times 2 = 32$

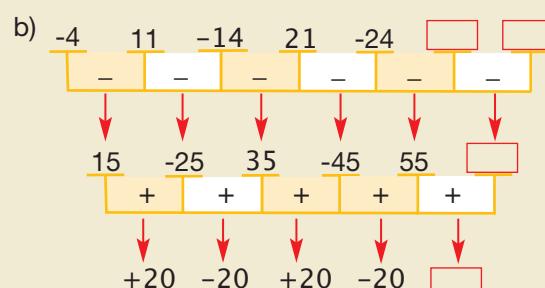
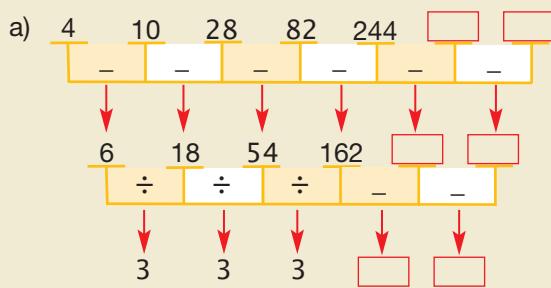
» Para hallar el nuevo término de la sucesión original debemos sumar el término que acabamos de encontrar (el nuevo término de la sucesión de diferencias) al último término de la sucesión original.



## Actividades



- 45 Encuentra los siguientes dos términos de cada sucesión.



- 46 Crea tu propia sucesión, en la que para encontrar un término se necesiten realizar operaciones combinadas.

### 3 Porcentajes

El uso de los porcentajes está muy extendido en la vida cotidiana. Descuentos en los almacenes, incrementos salariales, impuestos como el IVA, se expresan mediante porcentajes.

Así, decir que Alberto ahorra el 10 % de su paga equivale a decir que de cada 100 dólares, ahorra \$ 10.

➔ Un **porcentaje** o **tanto por ciento** es una determinada cantidad de cada cien unidades consideradas. Se expresa añadiendo a la cantidad el símbolo %.

Si la paga de Alberto es de \$ 50, el 10 % corresponde a \$ 5.

En un porcentaje intervienen tres cantidades. Observa el procedimiento para el cálculo de cada una de ellas.

#### 5 dólares

La cantidad resultante

#### 10 %

El tanto por ciento o porcentaje

#### 50 dólares

La cantidad de referencia

Cálculo de la cantidad resultante

Cálculo del porcentaje

Cálculo de la cantidad de referencia

- Se multiplica la cantidad de referencia por el tanto por ciento.
- El resultado se divide por 100.

- Dividimos la cantidad resultante entre la cantidad de referencia.
- Multiplicamos el resultado por 100.

- Se multiplica la cantidad resultante por 100.
- El resultado se divide por el tanto.

Ejemplo:  
Calcula el 6 % de 50.

$$50 \times 6 \div 100 = 3$$

Ejemplo:  
¿Qué porcentaje es 30 de 75?

$$30 \div 75 \times 100 = 40$$

Ejemplo:  
¿De qué cantidad es 39 el 6 %?

$$39 \times 100 \div 6 = 650$$

#### CÁLCULO MENTAL

Observa:

$$20 \% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

$$25 \% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$50 \% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

$$75 \% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

Por tanto, el 20 % de un número es su quinta parte; el 25 % de un número es su cuarta parte; el 50 %, su mitad y el 75 %, sus tres cuartas partes.

$$5 \% = \frac{5}{100} = 0,05$$

Para hallar el tanto por ciento de una cantidad, basta multiplicar dicha cantidad por la fracción equivalente al porcentaje, o por el número decimal equivalente al porcentaje. Por ejemplo:

$$5 \% \text{ de } 18\,560 = \frac{5}{100} \times 18\,560 = 0,05 \times 18\,560 = 928$$

#### Actividades

47 Calcula:

- a) 25 % de 400      b) 20 % de 2 480      c) 50 % de 16 700

48 Calcula las cantidades que faltan.

- a) El 7 % de 45 es .....      b) El ..... % de 50 es 7.      c) El 8 % de ..... es 120.

Veamos unos ejemplos de resolución de problemas en los que aparecen porcentajes.

### ejemplo 4

Andrea quiere comprar un libro que cuesta 8,4 dólares. En la caja de la librería le informan que tiene un descuento del 15 %. ¿Cuánto pagará por él?

— Calculamos el 15 % de 8,4.

$$8,4 \times 0,15 = 1,26$$

— Descontamos 1,26 dólares del precio inicial.

$$8,4 - 1,26 = 7,14$$

Andrea pagará \$ 7,14.

Las operaciones que hemos realizado han sido:

$$8,4 - 8,4 \times 0,15 = 8,4 \times (1 - 0,15) = 8,4 \times 0,85$$

Luego, podemos obtener directamente la cantidad resultante de aplicar un descuento del 15 %, multiplicando la cantidad inicial por 0,85.

### ejemplo 5

El precio de un artículo sin IVA es de 125 dólares. ¿Cuál será su precio de venta al público si el porcentaje que se aplica de IVA es del 12 %?

— Calculamos el 12% de 125.

$$125 \times 0,12 = 15$$

— Aumentamos en 15 dólares el precio inicial.

$$125 + 15 = 140$$

El precio de venta al público es 140 dólares.

Las operaciones que hemos realizado han sido:

$$125 + 125 \times 0,12 = 125 \times (1 + 0,12) = 125 \times 1,12$$

Luego, podemos obtener directamente la cantidad resultante de aplicar un aumento del 12 %, multiplicando la cantidad inicial por 1,12.

## Las TIC y la Matemática

La mayoría de las calculadoras posee una tecla específica para calcular porcentajes. Es la tecla **%**.

Veamos cómo utilizarla en el cálculo del 12 % de 15 500:

1 5 5 0 0 × 1 2 % = 1860

Si tu calculadora no tiene la tecla **%**, debes proceder así:

1 5 5 0 0 × 1 2 : 1 0 0 = 1860

Otros cálculos que podemos efectuar son:

• Aumentar 618 en un 20 %: 6 1 8 × 2 0 % +

• Descontar un 20 % de 618: 6 1 8 × 2 0 % -

**C1** Calcula: 15 % de 450; 10 % de 5 000; 24 % de 28 800.

**C2** ¿Cuánto debemos pagar por un artículo de \$ 54 si tiene una rebaja del 10 %?

**C3** ¿Cuánto pagaremos por una factura de \$ 150 si se aplica el 12 % del IVA?



## Actividades

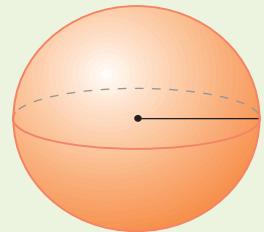
- 49** Óscar compró, en Pelileo, tres pantalones de \$ 25 cada uno, con un descuento del 20 %, y 5 camisas de \$ 7 cada una, con un descuento del 10 %. Si paga con cinco billetes de \$ 20, ¿cuánto dinero le devolverán?
- 50** La familia Macas acaba de comprar un automóvil cuyo precio sin impuestos asciende a \$ 9 000. Si el porcentaje de impuestos es del 32 %, ¿cuánto pagarán por el automóvil?

## 4 Volúmenes de poliedros y cuerpos de revolución

### 4.1. Volúmenes de poliedros

Vamos a saber cómo podemos calcular los volúmenes de los poliedros más sencillos: el prisma y la pirámide.

#### CONTRAEJEMPLO

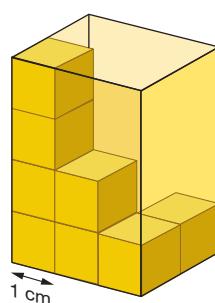


La esfera no es un poliedro.

#### Prisma

Construimos un prisma de altura  $h$  como el de la figura.

Material concreto



- En el prisma caben 24 cubos de 1 cm de arista.
- Cada cubo tiene un volumen de  $1 \text{ cm}^3$ .

Por lo tanto, el volumen del prisma es de  $24 \text{ cm}^3$ .

Fíjate en que el volumen del prisma coincide con el producto del área de la base por su altura.

$$A_{\text{base}} \cdot h = 6 \cdot 4 = 24 \Rightarrow V_{\text{prisma}} = 24 \text{ cm}^3$$

El **volumen** de un **prisma** de altura  $h$  es el producto del área de su base por su altura.

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h$$

Si el prisma es un cubo de arista  $a$ , como el área de la base es  $a^2$ , tenemos:

$$V_{\text{cubo}} = A_{\text{base}} \cdot a = a^2 \cdot a = a^3$$

#### ejemplo 6

Calcula el volumen de este contenedor.

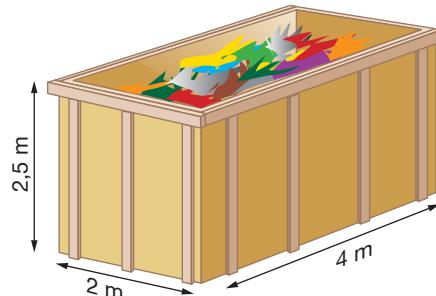
- Calculamos el área de la base.

$$A_{\text{base}} = 4 \cdot 2 = 8$$

- Aplicamos la fórmula anterior y tus conocimiento de números decimales para obtener el volumen del prisma.

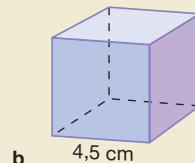
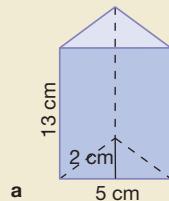
$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h = 8 \cdot 2,5 = 20$$

Por lo tanto, el volumen del contenedor es  $20 \text{ m}^3$ .



#### Actividades

- 51 Calcula los volúmenes de estos dos prismas.



- 52 Calcula el volumen de un prisma hexagonal regular de altura 7 dm y de apotema y lados de la base 10,39 dm y 12 dm, respectivamente. Expresa el resultado en  $\text{cm}^3$ .

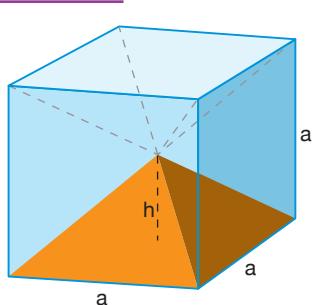
- 53 El volumen de un prisma cuadrangular regular es de  $150 \text{ cm}^3$ . Si su altura mide 6 cm, ¿cuánto mide su arista básica?

- 54 Calcula el volumen de un ortoedro de dimensiones  $3 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 7 \text{ cm}$ . A continuación, calcula el volumen de un ortoedro mayor y semejante al anterior con razón de semejanza  $k = 4$ .

- ¿Cuál es la razón entre los volúmenes? ¿Qué relación hay entre el valor obtenido y la razón de semejanza  $k$ ?

## Pirámide

Consideramos una pirámide de altura  $h$  dentro de un cubo de arista  $a$ , siendo  $a$  el doble de  $h$ , como muestra la figura. Puedes comprobar que, en este caso, dentro del cubo puedes colocar seis pirámides iguales de altura  $h$ .



- El volumen de la pirámide es la sexta parte del volumen del cubo.
- El área de la base de la pirámide,  $A_{\text{base}}$ , es el área de la base del cubo,  $a^2$ .

Por lo tanto, tenemos:

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{1}{6} V_{\text{cubo}} = \frac{a^3}{6} = \frac{a^2 \cdot a}{6} = \frac{a^2 \cdot 2h}{6} = \frac{a^2 \cdot h}{3} = \frac{A_{\text{base}} \cdot h}{3}$$

➤ El **volumen** de una **pirámide** de altura  $h$  es igual a un tercio del producto del área de su base por su altura.

$$V_{\text{pirámide}} = \frac{A_{\text{base}} \cdot h}{3}$$

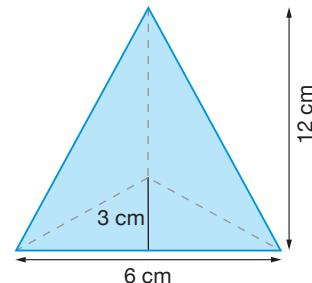
## ejemplo 7

Calcula el volumen de esta pirámide.

- Calculamos el área de la base:  $A_{\text{base}} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$
- Aplicamos la fórmula anterior para obtener el volumen de la pirámide.

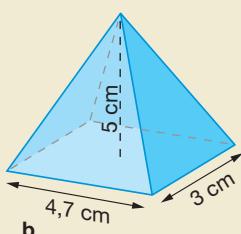
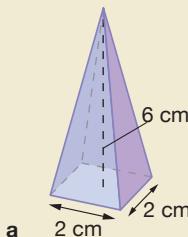
$$V_{\text{pirámide}} = \frac{A_{\text{base}} \cdot h}{3} = \frac{9 \cdot 12}{3} = 36$$

Por lo tanto, el volumen de la pirámide es de  $36 \text{ cm}^3$ .



## Actividades

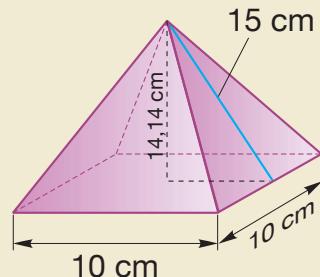
- 55 Calcula los volúmenes de estas pirámides.



- 56 Calcula el volumen de una pirámide cuadrangular cuya base tiene un perímetro de 36 cm y su altura mide 14,31 cm. Expresa el resultado en  $\text{dm}^3$ .

- 57 El volumen de una pirámide hexagonal regular es de  $193\ 500 \text{ cm}^3$ . Halla su altura sabiendo que el área de la base es  $6\ 450 \text{ cm}^2$ .

- 58 Observa esta pirámide y calcula su área y su volumen.

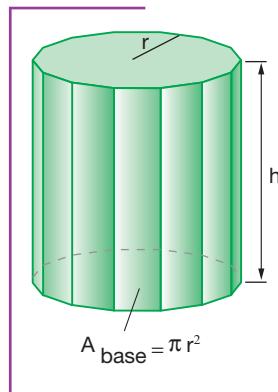


## 4.2. Volúmenes de cuerpos de revolución

Hemos obtenido el volumen de los prismas y el de las pirámides a partir del volumen del cubo. A continuación, calcularemos los volúmenes de los cuerpos de revolución, comparándolos con los de prismas y pirámides.

### Cilindro

Consideremos un cilindro de altura  $h$  y de radio  $r$ .



Podemos imaginar el cilindro como un prisma regular de un número elevado de caras, como muestra la figura. Entonces se cumple:

- La altura del prisma  $h$  coincide con la altura del cilindro.
- El área de la base del prisma coincide con el área de la base del cilindro.

Por lo tanto, tenemos:

$$V_{\text{cilindro}} = V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h$$

➔ El **volumen** de un **cilindro** de altura  $h$  y de radio  $r$  es igual al producto del área de su base por su altura.

$$V_{\text{cilindro}} = A_{\text{base}} \cdot h = \pi r^2 \cdot h$$

### ejemplo 8

Calcula el volumen de este tanque. ¿Con cuántos litros de agua lo podemos llenar?

— Calculamos el volumen del tanque.

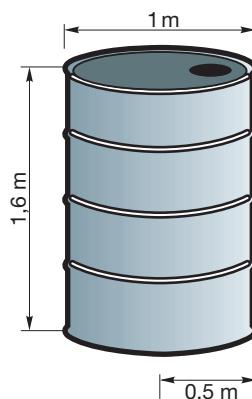
- Obtenemos el área de la base:  $A_{\text{base}} = \pi \cdot 0,5^2 = 0,79$
- Aplicamos la fórmula anterior para conseguir el volumen del cilindro.

$$V_{\text{cilindro}} = A_{\text{base}} \cdot h = 0,79 \cdot 1,6 = 1,26$$

Por lo tanto, el volumen del tanque es de  $1,26 \text{ m}^3$ .

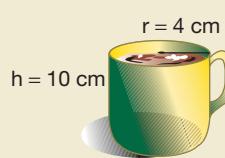
— Calculamos ahora la capacidad del tanque en litros:  $1,26 \text{ m}^3 = 1,26 \text{ kl} = 1260 \text{ l}$ .

Así, podemos llenar el tanque con 1260 l de agua.



### Actividades

- 59 Calcula el volumen de esta taza de café con leche. ¿Cuántos mililitros de café con leche se necesitan para llenar la taza totalmente y sin derramarlos?



- 60 ¿Cuál es el volumen de un cilindro, formado a partir de la rotación de un rectángulo de área  $32 \text{ cm}^2$  y con uno de los lados de 4 cm?

- 61 Calcula el volumen de un cilindro de 8 cm de altura cuya área lateral es igual al área de su base.

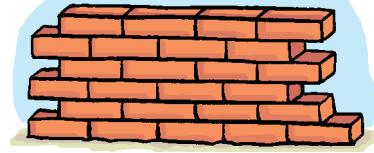
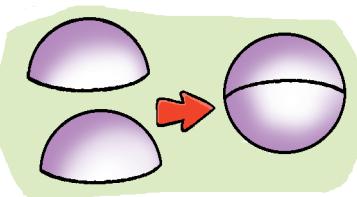
### 4.3. Estimación de volúmenes

Para hallar los volúmenes de los cuerpos geométricos, se realizan mediciones de las dimensiones del objeto y los valores obtenidos se sustituyen en la fórmula con la que podemos calcular el volumen del cuerpo correspondiente.

Es posible que queramos conocer el volumen de un objeto y no dispongamos de instrumentos para tomar sus medidas y poder así calcularlo.

En estos casos llevaremos a cabo una **estimación del volumen**, que consiste en encontrar un valor aproximado del volumen que queremos calcular.

A continuación, te presentamos una serie de estrategias, que pueden resultarte útiles a la hora de efectuar una estimación.

Estrategia	Descripción	Ejemplo
<b>Estimación de longitudes y aplicación de fórmulas</b>	Usamos estrategias de longitud para estimar las dimensiones del cuerpo geométrico y aplicamos fórmulas para obtener el volumen.	Para obtener el volumen de una caja, estimamos sus dimensiones y aplicamos la fórmula del volumen de un prisma. 
<b>Adición repetida</b>	Rellenamos mentalmente el volumen que mediremos con la unidad escogida y contamos el número de veces que está contenida.	Para medir el volumen de un muro, estimamos el volumen de un ladrillo y contamos el número de ladrillos que lo forman. 
<b>Reestructuración</b>	Separamos una parte del objeto y la unimos en otro lugar para obtener un volumen más fácil de calcular.	Transformamos estas dos semiesferas en una única esfera. 

### MUCHO OJO

Para efectuar estimaciones de áreas hay distintas estrategias, tres de las cuales son:

- **Estimación de longitudes y aplicación de fórmulas.** Consiste en estimar las longitudes de una región y aplicar fórmulas para obtener el área.
- **Adición repetitiva.** Consiste en recubrir mentalmente una superficie con una unidad de medida escogida y contar el número de veces que está contenida.
- **Reestructuración.** Se separa una parte del objeto y se une en otro lugar para obtener otra superficie más fácil de medir.

### Actividades



- 62** Cita tres objetos que midan aproximadamente  $1 \text{ dm}^3$ .
- 63** Explica cómo darías una estimación del volumen de varias cajas de diferentes tamaños apiladas y del volumen de un depósito cilíndrico.
- 64** Estima la medida del volumen del libro de matemáticas y del área de la pizarra de tu clase realizando únicamente estimaciones de longitud.
- 65** Estima el volumen de una estantería basándote en el volumen de los libros que contenga.

# Cómo resolver problemas

## Estrategia: Ensayo-error

La estrategia de resolución denominada *ensayo-error* consiste en experimentar con posibles soluciones hasta dar con la correcta. Efectuamos los pasos siguientes:

- Escogemos un valor (resultado u operación) posible.
- Probamos si este valor escogido satisface las condiciones del problema.
- Modificamos el valor inicial en función del resultado obtenido y repetimos el proceso hasta encontrar la solución.

La calculadora puede servirte de gran ayuda para resolver problemas con este método. Con ella efectuarás los cálculos con mayor rapidez.

*El producto de tres números primos consecutivos es 65 231. Averigua de qué números se trata.*



### ► Comprensión del enunciado

- Leemos de nuevo el enunciado del problema.
- Recordamos el significado de *números primos consecutivos*.
- Escribimos las condiciones que han de cumplir los números buscados.

### ► Planificación de la resolución

Para resolver el problema aplicamos la estrategia *ensayo-error*.

Seguiremos estos pasos:

- Tomaremos tres números primos consecutivos cualesquiera y calcularemos su producto.
- Si el producto calculado es mayor que 65 231, probaremos con otros tres números menores; si el resultado es menor que 65 231, probaremos con otros tres mayores.
- Repetiremos el proceso hasta dar con la solución.

### ► Ejecución del plan de resolución

- Tomamos tres números primos consecutivos cualesquiera, por ejemplo 19, 23 y 29, y calculamos su producto.

$$19 \times 23 \times 29 = 12673$$

- Como el producto es menor que 65 231, probamos con 31, 37 y 41.

$$31 \times 37 \times 41 = 47027$$

- El resultado sigue siendo menor que 65 231. Probamos con 41, 43 y 47.

$$41 \times 43 \times 47 = 82861$$

- El producto es mayor que 65 231. Probamos con 37, 41 y 43.

$$37 \times 41 \times 43 = 65231$$

Los números buscados son 37, 41 y 43.

### ► Revisión del resultado y del proceso seguido

Comprobamos que efectivamente los números hallados son primos y consecutivos, y que su producto es 65 231.

## Actividades



Pon en práctica la estrategia anterior en la resolución de los siguientes problemas:

- 66** Halla dos números naturales impares consecutivos cuyo producto sea 323.
- 67** Cuatro números enteros consecutivos suman –2. Averigua qué números hemos sumado.
- 68** El cubo de un número es 4 096. Calcula el valor del número.
- 69** Halla dos cuadrados perfectos consecutivos cuyo producto excede en dos unidades a 1 762.
- 70** Encuentra un número tal que, al elevarlo al cubo y restarle el número buscado, obtenemos 9 240.
- 71** Calcula un número natural cuyo cuadrado excede en ocho unidades a su duplo.
- 72** Halla dos números naturales consecutivos tales que, al restarle el menor a su producto, se obtiene 324.

## En resumen

- Los **números decimales** constan de dos partes separadas por la coma decimal.

- Una **fracción decimal** es la que tiene como denominador una potencia de 10.

$$\frac{3}{10} ; \frac{17}{100} ; \frac{1}{1,000} \dots$$

- Con los números decimales efectuamos varias operaciones: *suma, resta, multiplicación y división*

Para resolver una serie de operaciones combinadas, primero efectuamos las operaciones indicadas en los paréntesis, si los hay. A continuación, realizamos las multiplicaciones y las divisiones en el orden en que aparecen. Por último, realizamos las sumas y las restas.

$$\begin{aligned}
 5 \times (4,83 - 2 \times 1,19) + 6,4 \times 7,8 &= \\
 = 5 \times (4,83 - 2,38) + 6,4 \times 7,8 &= \\
 = 5 \times 2,45 + 6,4 \times 7,8 &= \\
 = 12,25 + 49,92 &= 62,17
 \end{aligned}$$

Lee, recuerda y completa mentalmente lo que haga falta.

- Un **porcentaje** o **tanto por ciento** es una determinada cantidad de cada cien unidades consideradas. Se expresa añadiendo el símbolo % a la cantidad.

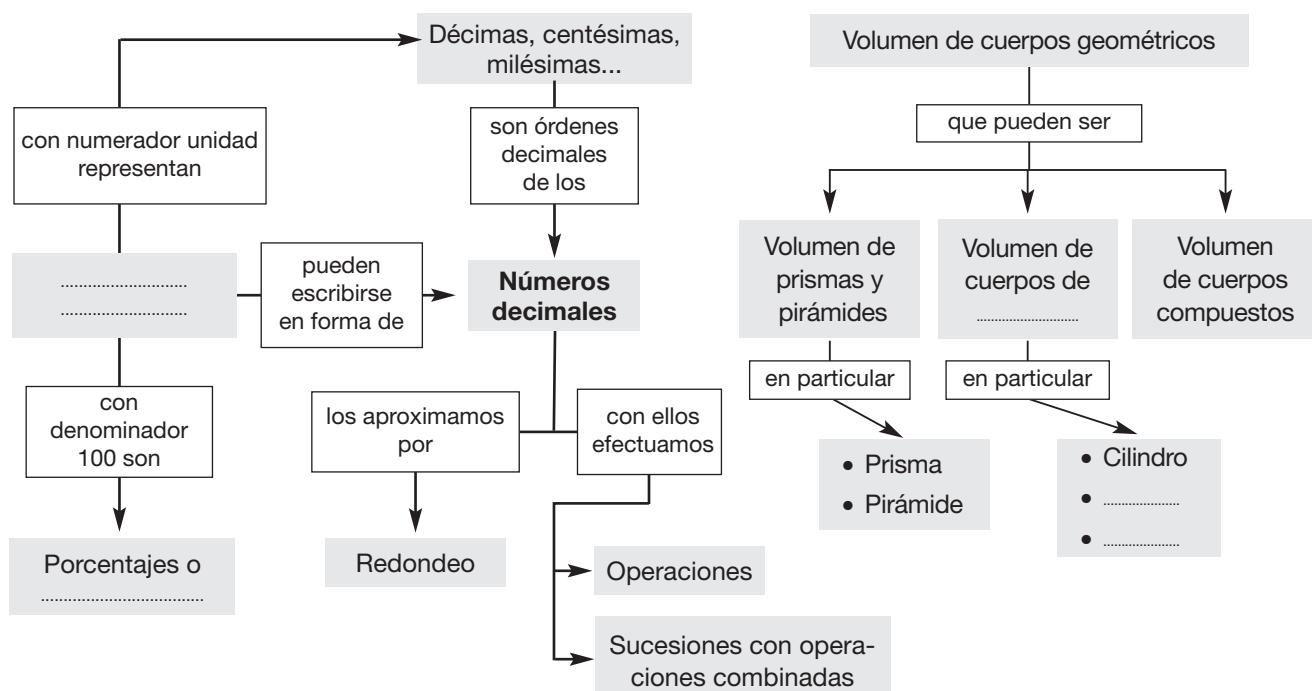
Todo porcentaje es equivalente a una fracción de denominador 100 y, por tanto, al número decimal correspondiente.

$$75 \% = \frac{75}{100} = 0,75$$

- El **volumen de un cuerpo geométrico** es la medida del espacio que ocupa.
  - Las áreas y los volúmenes de:

Figura	Área	Volumen
Prisma (altura $h$ )	$A_{total} = A_{lateral} + A_{base}$	$V_{prisma} = A_{base} \cdot h$
Cilindro (altura $h$ radio $r$ )	$A_{total} = 2\pi r \cdot (h + r)$	$V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot h$

- El **área** y el **volumen** de los cuerpos compuestos se calculan descomponiendo el cuerpo en otros más sencillos de los que sepamos calcular el área y el volumen.



# Ejercicios y problemas integradores

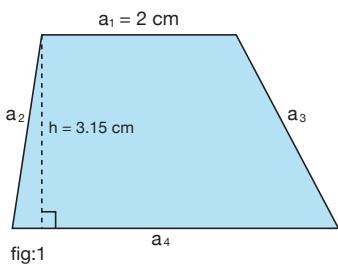


fig:1

- Javier tiene una caja cuya base es un trapecio escaleno del cual se conoce que los lados están en progresión aritmética (fig.1). Si el lado menor mide 2 cm y la diferencia entre un lado y el siguiente es 1,2 cm.
  - Calcula el volumen de la caja cuya altura es 15,3 cm.
  - Calcula el perímetro de la base de la caja.
- La caja es un prisma cuya base es una figura de cuatro lados diferentes, es decir un trapecio escaleno.

Primer lado:  $a_1 = 2 \text{ cm}$

Segundo lado:  $a_2 = 2 \text{ cm} + 1,2 \text{ cm} = 3,2 \text{ cm}$

Tercer lado:  $a_3 = 3,2 \text{ cm} + 1,2 \text{ cm} = 4,4 \text{ cm}$

Cuarto lado:  $a_4 = 4,4 \text{ cm} + 1,2 \text{ cm} = 5,6 \text{ cm}$

+ 1,2      + 1,2      + 1,2

Observamos la sucesión: 2 ; 3,2 ; 4,4 ; 5,6

- El volumen del prisma es igual al área de la base por la altura, como la base es un trapecio, aplicamos la siguiente fórmula:

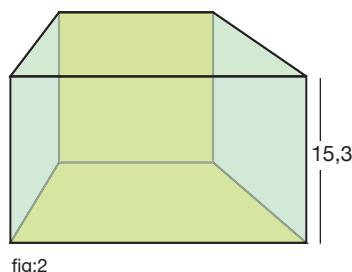


fig:2

$$\begin{aligned} A_{base} &= \frac{(B + b) \times h}{2} \\ A_{base} &= \frac{(4,4 + 2) \times 3,15}{2} \\ A_{base} &= \frac{(6,4) \times 3,15}{2} \end{aligned}$$

$$A_{base} = \frac{20,16}{2}$$

$$A_{base} = 10,08 \text{ cm}^2$$

$$V_{prisma} = A_{base} \times \text{altura del prisma}$$

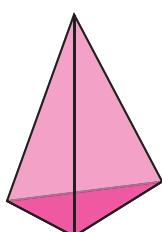
$$V_{prisma} = 10,08 \text{ cm}^2 \times 15,30 \text{ cm} = 154,224 \text{ cm}^3$$

Realizamos una aproximación por redondeo: (aproximación por defecto)

- El perímetro de la base del prisma es:  $2 \text{ cm} + 3,2 \text{ cm} + 4,4 \text{ cm} + 5,6 \text{ cm} = 15,2 \text{ cm}$

**R: El perímetro de la base del prisma es 15,2 cm y el volumen del prisma 154,22 cm<sup>3</sup> aproximadamente.**

## Práctica



- Calcula las aristas en la base de un prisma triangular sabiendo que los lados que forman el triángulo de la base están en progresión aritmética y el lado menor mide 5 cm y el perímetro 19,2 cm.
- Andrés decidió capitalizar sus ahorros, para ello depositó en el banco una cantidad de \$1 500, los intereses que obtendrá al final de cada período de inversión es de 5% anual. ¿En cuánto se convertirá ese capital si Andrés mantiene su inversión durante tres años?

Hay dos formas de resolver el problema:

- Capitalizar es obtener un interés compuesto, es decir que al finalizar cada período, el capital inicial se ha incrementado y éste se vuelve a invertir.

Capital inicial: \$ 1 500

Expresamos el porcentaje como fracción o decimal:  $\frac{5}{100} = 0,05$

Al finalizar el primer año:  $1\ 500 \times 0,05 = 75$ . Es decir hay un incremento \$ 75

El nuevo capital al iniciar el segundo año es:  $1\ 500 + 75 = 1\ 575$

Al finalizar el segundo año:  $1\ 575 \times 0,05 = 78,75$ . Es decir hay un incremento de \$ 78,75

El nuevo capital al iniciar el tercer año es:  $1\ 575 + 78,75 = 1\ 653,75$

Al finalizar el tercer año:  $1\ 653,75 \times 0,05 = 82,6865$ . Es decir hay un incremento \$ 82,6865

El nuevo capital:  $1\ 653,75 + 82,6865 = 1\ 736,4375$

Realizamos una aproximación por redondeo: (aproximación por defecto)

**R: Andrés capitalizó \$ 1 736 aproximadamente**

b) Observamos que al capital inicial de cada año que es el 100%, siempre le incrementamos el 5%.

Es decir cada año hay un porcentaje de aumento correspondiente a: 105%.

La expresión decimal del porcentaje aumentado es: 1,05

Con las cantidades que se obtuvieron podemos formar una sucesión cuyo criterio de formación es multiplicar por 1,05 al anterior:

$1\ 500 ; 1\ 575 ; 1\ 653,75 ; 1\ 736,4375$

Otra forma de expresar las operaciones anteriores:

$1\ 500 \times 1,05 \times 1,05 \times 1,05 = 1\ 736,4375$

$1\ 500 \times (1,05)^3 = 1\ 736,4375$

**R: Andrés capitalizó \$ 1 736 aproximadamente**

Para calcular potencia con exponentes superiores a 2 y 3 puedes usar la calculadora digitando la siguiente tecla  Ejemplo:

### **FÍJATE**

En la calculadora la separación entre enteros y decimales aparece con un punto y entre miles con coma.

4 0 0 0 0 0 x 1 . 0 1 ^ 1 0 =

4,418,488.502

### **Practica**

En cuánto se convierten \$ 3 200 colocados al 3% de interés anual compuesto durante 2 años?

# Ejercicios y problemas



## Comprensión de conceptos y conocimiento de procesos

### Números decimales

73 ¿Cuántas centésimas hay en una décima? ¿Y en una unidad de mil?

74 Expresa en forma de fracción decimal los siguientes números decimales.

1,41; 2,414; 0,021; 76,3; 0,010

75 Reduce, siempre que sea posible, las siguientes fracciones a fracciones decimales y escribe el número decimal correspondiente.

$$\frac{6}{15}, \frac{4}{5}, \frac{10}{4}, \frac{3}{400}, \frac{5}{6}$$

76 Lee los siguientes números decimales:  
1 056,4; 523,456; 983,34567; 1 232 568,23.

77 Escribe estos números decimales.

- Siete unidades y veintitrés centésimas.
- Dieciséis milésimas.
- Quince diezmillonésimas.

78 Representa en una recta los siguientes números decimales: 0,5; 0,2; 0,7; 0,9; 0,1.

79 Intercala tres números entre 1,01 y 1,02.

1,01 1,012 1,013 1,019 1,02

80 Intercala cuatro números entre 2,154 y 2,155.

81 Ordena de menor a mayor: 3,45; 4; 5,012; 5,210; 5,00; 3,44.

82 Indica si son ciertas o falsas estas expresiones.

- |                           |                           |
|---------------------------|---------------------------|
| a) $0,31 < 0,4$           | d) $0,4 > \frac{4}{1000}$ |
| b) $0,078 < \frac{1}{10}$ | e) $0,9 = 0,90$           |
| c) $0,15 > 0,16$          | f) $0,07 > 0,070$         |

83 Ordena de menor a mayor y sitúa sobre la recta los siguientes números decimales: 3; 2,34; 3,12; 2; 0,23; 0,5; 4,2.

### Operaciones con números decimales

84 Coloca en columna y efectúa:

- $12,5 + 123,4 + 23,75$
- $345,76 + 24,89 + 1\,045,752$
- $21,75 - 13,4$
- $124,36 - 75,231$

85 Completa en tu cuaderno estas tablas. Efectúa los cálculos mentalmente.

+	0,6	2,1	4,3	1,2	3,1	5,3
0,06				10,8		
1,2				6,5		
0,25				8,4		

86 Calcula el término que falta en estas operaciones.

- $52,63 + \dots = 158,472$
- $0,430 + \dots = 2,36$
- $\dots - 0,66 = 14,33$
- $31,08 - \dots = 19,1$

87 Escribe el siguiente número decimal en estas series.

- $0,01 ; 0,03 ; 0,05 ; \dots$
- $2,61 ; 2,42 ; 2,23 ; \dots$

88 Completa en tu cuaderno esta tabla. Efectúa el producto como si fuesen números naturales y coloca después la coma en el lugar correspondiente.

×	0,5	0,3	0,6
0,4			
0,02			
0,3			
0,03			

89 Efectúa:

- |                       |                              |
|-----------------------|------------------------------|
| a) $3,46 \times 1,25$ | c) $12,43 \times 0,6$        |
| b) $0,6 \times 0,31$  | d) $0,8 \times \frac{2}{10}$ |

**90** Indica el resultado de las siguientes multiplicaciones por la unidad seguida de ceros.

- a)  $1,2888 \times 1000$       c)  $375,8 \times 100$   
 b)  $0,007 \times 10$       d)  $4,3 \times 1000$

**91** Calcula el factor desconocido.

- a)  $5,628 \times \dots = 69,7872$   
 b)  $32,1 \times \dots = 247,17$   
 c)  $\dots \times 0,23 = 1,4582$

**92** Suma 8,9 y 1,3. Divide el resultado para 0,04.

**93** Redondea hasta las centésimas: 3,1415; 2,7182; 0,0892; 27,300; 4,5623.

**94** Resuelve las siguientes operaciones combinadas y comprueba tu resultado con la calculadora.

- a)  $(45,7 + 6,24) \times 5,11$   
 b)  $(3,87 + 12,9) : 1,98 + 3,45$   
 c)  $(7,74 + 3,14) \times (7,74 - 3,14)$

## Porcentajes

**95** Completa:

- a) 6 % de ..... = 360  
 b) ..... % de 10 500 = 840  
 c) 15 % de ..... = 1 500  
 d) 20 % de 75 = .....

**96** Calcula qué tanto por ciento es 121,12 de 1 514.

**97** Calcula el 30 % de 150.

Conocemos ya varios métodos para resolver este ejercicio. Veamos ahora cómo se resolvía efectuando una *regla de tres*.

Llamamos  $x$  al valor del 30 % de 150. Se cumple:

$$\begin{array}{rcl} 30 & \rightarrow & 100 \\ & & \\ x & \rightarrow & 150 \end{array}$$

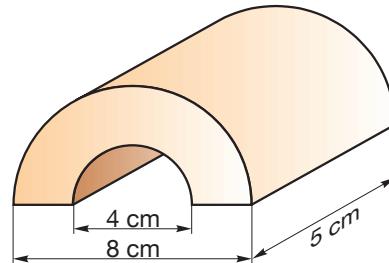
Por tanto:

$$x = \frac{30 \cdot 150}{100} = 45$$

**98** Calcula, mediante una regla de tres:

- a) El 16 % de 1 500 000.  
 b) El 40 % de 187,4.

**99** Halla el volumen del cuerpo geométrico representado en la figura.



**100** Se une, a cada una de las caras de un cubo de 5 cm de arista, una pirámide regular de 6 cm de altura. Halla el volumen del cuerpo geométrico que se ha formado.

## Aplicación en la práctica

**101** Repasa la factura de la compra del supermercado y di si es correcta.

- Indica qué operaciones has realizado para dar tu respuesta. Contrástalas con las de tus compañeros y compañeras.

Agua	$1,29 \times 2$	\$ 2,58
Leche	$1,22 \times 6$	\$ 7,32
Harina		\$ 0,47
Chocolate		\$ 1,90
<b>Total</b>		\$ 12,57
<b>Efectivo</b>		\$ 15,00
<b>Cambio</b>		\$ 2,43

**102** El consumo medio de gasolina de un automóvil es de 7,1 litros por cada 100 kilómetros y al iniciar un viaje, el depósito contiene 47 l. ¿Cuántos litros de gasolina quedarán en el depósito después de recorrer 160 km? ¿Queda suficiente gasolina para recorrer otros 300 km?

**103** Un edificio formado por planta baja y 7 pisos tiene una altura de 29,52 m. Calcula la altura de cada piso si la planta baja mide 3,56 m de altura.

**104** Un alumno, para acudir a la escuela, realiza cuatro veces al día un trayecto de 2,1 km.

- a) ¿Cuántos kilómetros recorre cada día?  
 b) ¿Cuántos días tardará en recorrer 134,4 kilómetros?



- 105** Una caja que contiene 30 bombones iguales pesa 1,453 kg y el peso de la caja vacía es 142,3 g.
- a) ¿Cuánto pesa cada bombón?

b) ¿Cuánto pesa la caja después de sacar 10 bombones?

- 106** Hemos clasificado a los alumnos de una clase de 8.º de EGB en tres grupos según la actividad diaria que desarrollan al finalizar la escuela. El 40 % de los alumnos practica un deporte, el 50 % va a cursos de informática y 3 alumnos no hacen ninguna actividad extraescolar.
- a) ¿Por cuántos alumnos está formado el grupo?
- b) ¿Cuántos practican deporte? ¿Cuántos van a cursos de informática?

- 107** Determina dos múltiplos consecutivos de 3 cuyo producto sea 1 638. Utiliza la estrategia de ensayo-error.

- 108** Entra en la dirección <http://www.rfea.es/ranking/altt/rankingalth.pdf> y calcula la diferencia entre la marca del primero y la del décimo corredor en el ranking de la prueba de 100 m planos masculinos.

- 109** Accede a la dirección de la actividad anterior y señala cómo afectaría al ranking si se redondearan los tiempos a la décima de segundo.

- 110** Las dimensiones de un ortoedro son tres números enteros consecutivos que suman 27. Halla el área total y el volumen del ortoedro.

Las dimensiones son tres números consecutivos que llamaremos  $x$ ,  $x + 1$  y  $x + 2$ . Sabemos que suman 27 cm; entonces deben cumplir:

$$x + x + 1 + x + 2 = 27 \Rightarrow 3x + 3 = 27 \Rightarrow x = 8$$

Por lo tanto, las dimensiones del ortoedro son 8 cm  $\times$  9 cm  $\times$  10 cm.

Aplicamos ahora las fórmulas para encontrar el área total y el volumen.

$$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2 \cdot A_{\text{base}} = P \cdot h + 2 \cdot A_{\text{base}}$$

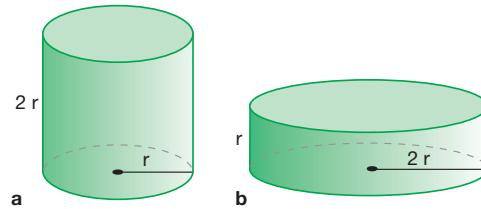
$$A_{\text{total}} = 34 \cdot 10 + 2 \cdot (8 \cdot 9) = 484$$

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h = (8 \cdot 9) \cdot 10 = 720$$

El área total mide 484 cm<sup>2</sup> y el volumen, 720 cm<sup>3</sup>.

- 111** Las dimensiones de un ortoedro son proporcionales a 2, 4 y 5, y su suma es 16,5. Halla el área total y el volumen del ortoedro.

- 112** Sin hacer ningún cálculo, intenta determinar cuál de las siguientes figuras tiene más área lateral, más área total y más volumen.



— Haz ahora los cálculos oportunos y comprueba si has acertado.

### Más a fondo

- 113** Comprueba que multiplicar por cuatro quintos es lo mismo que dividir por 1,25. Explica este hecho.

- Cita otras multiplicaciones por fracciones que equivalgan a divisiones por números decimales.
- Busca otras estrategias para efectuar divisiones por números decimales.

- 114** Halla el mayor número decimal que cumpla las dos condiciones siguientes:

- La parte decimal está formada por dos cifras.
- Si se suma con 1,45 y se redondea el resultado de la suma hasta las décimas se obtiene 3,8.

- 115** Formen grupos de trabajo e investiguen acerca del impuesto al valor agregado, IVA.

- Formas de pago y de retención.
- Productos a los que se aplica.

- 116** Un depósito de forma cilíndrica de 3 dm de radio y 1 m de altura está lleno de agua y se vacía su contenido a otro depósito cilíndrico de mayor altura y de 4 dm de radio. ¿Qué altura alcanzará el agua en este segundo depósito?

- 117** Encuentra el volumen de un cilindro de 8 cm de radio, sabiendo que la razón entre el área lateral y el área de la base es 3.



## ► Años bisiestos

En un año bisiesto, ¿cuántos meses tienen 29 días?

## ► El náufrago

Un náufrago construye una balsa y abandona la isla en dirección al continente, que se encuentra a una distancia de 100 km.

Cada día rema hacia su destino 40 km, pero debido al gran esfuerzo que realiza debe descansar al día siguiente, en el que los vientos y las mareas le hacen retroceder 30 km.

¿Cuántos días tardará en llegar al continente?



## Buen Vivir

¿Sabías que el pasaje de bus para estudiantes, menores de edad, adultos mayores y personas con capacidades especiales cuesta \$ 0,12? Esta diferencia también se aplica a otros servicios, como la visita a museos.

### Museo del Banco Central (Quito)

Horario: Martes a viernes de 09h00 a 17h00.

Sábados, Domingos y feriados: De 10h00 a 16h00.

Teléfono: 02 222 3258, 02 256 8975

Internet: [www.bce.fin.ec](http://www.bce.fin.ec)

Costo: Extranjeros \$ 2

Nacionales \$ 1

Universitarios \$ 0,5

Estudiantes \$ 0,25

## Actividades

1 ¿Por cuáles medios pueden consultar para enterarse de las tarifas de acceso a servicios y lugares públicos?

## ► Material concreto

Elige un número decimal y prepara cinco cartas con el número decimal escogido, cinco con la fracción decimal equivalente a dicho número y cinco con el porcentaje equivalente también a dicho número. (Ponte de acuerdo con tus compañeros y compañeras para que el número elegido no sea el mismo.)



Reúne tus cartas con las de los demás y formen cinco juegos completos (en cada juego, un tercio de las cartas llevará un número decimal; un tercio, las fracciones decimales equivalentes y el tercio restante, los porcentajes equivalentes).

Para jugar, distribúyanse en grupos de aproximadamente 5 personas. El juego consiste en formar tríos (un trío consta de un número decimal, su fracción y su porcentaje equivalentes). Una vez repartidas todas las cartas, los jugadores se desprendrán, si es el caso, de los tríos que tengan. A continuación, el jugador que inicie el juego tomará una carta del compañero o compañera de su derecha y así sucesivamente. Gana el primer jugador que se quede sin cartas.

### Derechos del consumidor



2 ¿Por qué creen que es importante conocer este tipo de información para sus actividades diarias?



3 ¿Qué necesitan para poder construir su opinión respecto al tema? Organízense y elaboren un periódico mural con los pros y contras de un incremento de los costos para acceder a servicios públicos. En cada postura, indiquen cuáles son los argumentos de las partes involucradas.



4 ¿Cuál sería su respuesta si el transportista quiere cobrarte pasaje de adulto?



3 ¿Qué harían ustedes si les ofrecen un producto con sobreprecio?

# Autoevaluación

# Coevaluación

Si logras resolver el 70 % de estas actividades individuales y grupales, puedes avanzar.

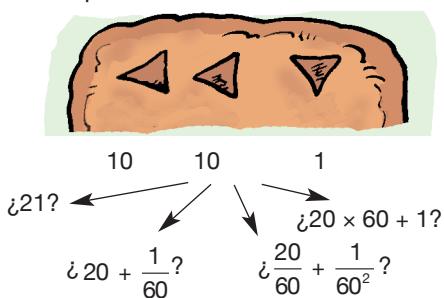
1. Representa sobre una recta los siguientes números: 3,5; 2,8; 2; 2,9; 3,1.
2. Redondea hasta las centésimas: 12,176823; 4,780155; 123,23598; 1,5827.
3. Calcula:
  - a)  $25,2 + 37,1 \times (18,06 - 3,4) \div 1,2 - 6$
  - b)  $3 \times 750 - 415 - 36,5 \div (286,08 - 281,08)$
4. Completa:
  - a) 12 % de 630 = ..... c) .... % de 6,8 = 0,34
  - b) 6 % de ..... = 720 d) 3 % de ..... = 720
5. Escribe tres números decimales distintos cuya parte entera sea 3.
6. Ordena estas masas de arena de mayor a menor: 0,97 kg; 2,374 kg; 0,99 kg; 2,37 kg y 2,437 kg.  
— Calcula la masa total de arena.

1. Efectúen estas divisiones, aproximando hasta las milésimas:  $2 \div 18$ ;  $50 \div 14$ ;  $0,7 \div 23$ ;  $1 \div 0,3$ .
2. Sacamos 1,06 kg de arroz de una bolsa que contiene 2,5 kg. Calculen la masa de arroz que queda en la bolsa.  
— Si repartimos el resto del arroz en otras tres bolsas, ¿cuánto arroz habrá en cada una de ellas?
3. Indiquen oralmente cuáles afirmaciones son falsas.
  - a) El área de un tetraedro de arista 2 cm es  $6,92 \text{ cm}^2$ .
  - b) El área de un hexaedro de arista 5 cm es  $150 \text{ cm}^2$ .
  - c) El volumen de una pirámide cuadrada de 7 cm de lado y 9 cm de altura es de  $147 \text{ cm}^3$ .
  - d) El volumen de un cilindro de 5 cm de radio y 5 cm de altura es de  $125 \text{ cm}^3$ .
  - e) El volumen en  $\text{cm}^3$  de una esfera de radio 1 cm es igual a la tercera parte de su superficie en  $\text{cm}^2$ .

# Historia

## Sección de historia

Los babilonios escribían los números decimales en su sistema posicional de base 60, igual que los números enteros. Esto daba lugar a una ambigüedad que se resolvía por el contexto.



Al-Ugildisi utilizó las fracciones decimales con una notación muy parecida a la actual. Así 2,35 era:

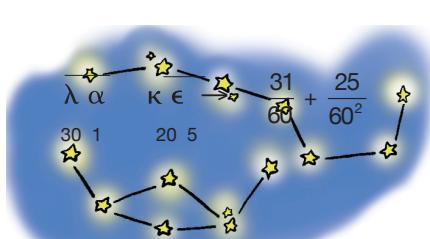
2'35 → 2 unidades y 35 de cien

Al-Kasi divulgó su teoría sobre números decimales en su obra *Clave de la aritmética*.

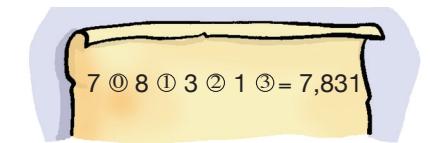
**Miftah al hisáb**

Los egipcios no utilizaban números decimales, sólo fracciones.

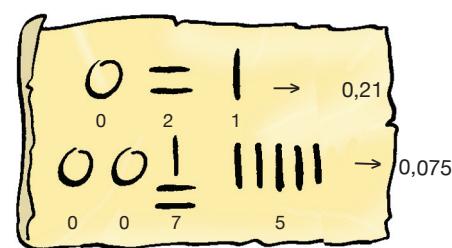
Los griegos y los hindúes solamente los utilizaban para cálculos astronómicos, manteniendo el sistema babilónico.



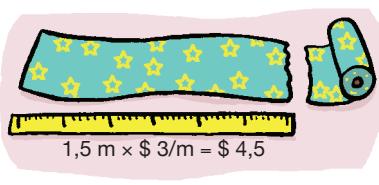
En 1585, el belga S. Stevin demostró en su obra *La Disme* que con números decimales podía operarse de la misma forma que con números naturales. La notación que utilizó para estos números fue:



Una vez introducida la cifra 0, los chinos escribían los números decimales con su método de varillas de manera muy similar a la nuestra.



El escocés J. Napier introdujo a principios del siglo XVII la notación actual para los números decimales. Sin embargo, hasta bien entrado el siglo XVIII estos números no adquirieron toda su importancia práctica.





## Crónica matemática

### La coma decimal

La coma decimal fue ideada a principios del siglo XVII por el matemático y óptico holandés Wilbord Snellius conocido también como Willebrord Snell y Snel van Royen.

Según la Real Academia Española (RAE), en las expresiones numéricas escritas con cifras, la normativa internacional establece el uso de la coma para separar la parte entera de la parte decimal.

En países de habla inglesa se usa el punto. En el hablar cotidiano, el punto se utiliza en ámbitos muy variados: los valores de apertura en fotografía, la ubicación de las emisoras de radio en el dial...

Hasta hace unos pocos años aún era común en la expresión numérica de las cantidades separar los millares, los millones, etc. mediante un punto y colocar la coma decimal en la parte superior.

### Medallas Fields

En campos como la física, la química, la fisiología y la medicina, la literatura, la economía y la paz existen unas distinciones de gran prestigio: los premios Nobel.

Llama la atención el hecho de que no existe el Nobel de Matemática. En este campo la más alta distinción que se concede es la medalla Fields.

Las medallas Fields surgieron en el Congreso Internacional de Matemática de 1924. En esta reunión, su presidente, el matemático canadiense John Charles Fields, presentó la propuesta de unas «medallas internacionales para destacados descubrimientos matemáticos».

Fields sugirió que los premios deberían otorgarse a nivel internacional y sin vincular este premio a ningún país, persona o institución. Igualmente propuso que los galardones fueran concedidos a gente joven (no especificó edad), como estímulo y para fomentar nuevos estudios. De ahí la tradición de no premiar a mayores de 40 años.



### Los decimales de $\pi$

El número conocido de decimales de  $\pi$  ha variado a lo largo de la historia.

- En el papiro de Ahmes (1650 a. C.) aparece el valor 3,16.
- Arquímedes hacia el 300 a. C. utilizaba 3,14163 como valor de  $\pi$ .
- Al-Kashi, en Persia en 1429, utilizaba el valor 3,1415926535897932.
- El matemático alemán Ludolph van Ceulen en 1615 obtuvo treinta y cinco cifras decimales.
- En 1706 Machin alcanzó los primeros cien decimales.
- Con la ayuda de una calculadora Ferguson y Wrench en 1947 obtuvieron 808 decimales.
- En 1949 Reitwiesner, con uno de los primeros ordenadores, determinó  $\pi$  con 2 037 decimales.

14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288  
41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164  
06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148  
08651 32823 06647 09384 46095 50582 23172  
53594 08128 48111 74502 84102 70193 85211  
05559 64462 29489 54930 38196 44288 10975  
66593 34461 28475 64823 37867 83165 27120  
19091 45648 56692 34603 48610 45432 66482  
13393 60726 02491 41273 72458 70066 06315  
58817 48815 20920 96282 92540 91715 36436  
78925 90360 01133 05305 48820 46652 13841

- En 1961, D. Shanks y Wrench obtuvieron 100 265 cifras.
- En 1967, Guilloud y Dichampt llegaron a los 500 000 decimales.
- En 1999, Kanada y Takahashi (Universidad de Tokio), utilizando una potente computadora, calcularon  $\pi$  con **206 158 430 000** cifras decimales para lo que tardaron 37 horas.

En la página de Internet <http://www.angio.net/pi/piquery> puedes localizar una serie numérica (por ejemplo, una fecha) en la infinita serie de números decimales de  $\pi$ .

46951 94151 16094 33057 27036 57595 91953  
09218 61173 81932 61179 31051 18548 07446  
23799 62749 **06120 7**5754 52724 89122 79381  
83011 94912 98336 73362 44065 66430 86021  
39494 63952 24737 19070 21798 60943 70277  
05392 17176 29317 67523 84674 81846 76694  
05132 00056 81271 45263 56082 77857 71342  
75778 96091 73637 17872 14684 40901 22495  
34301 46549 58537 10507 92279 68925 89235

# Módulo 4

Bloques: Geométrico.  
Relaciones y funciones

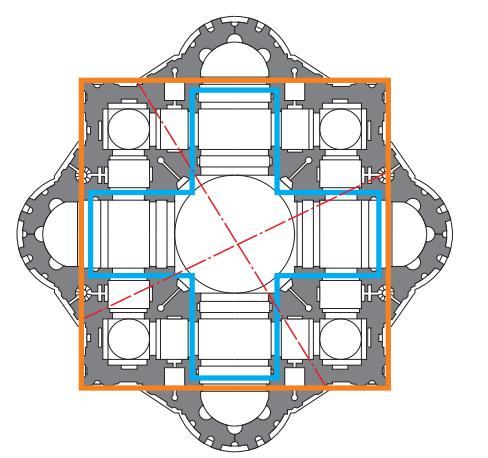


Buen vivir: Derechos y obligaciones

Algunas iglesias son diseñadas a partir del modelo de la cruz griega inscrita en un cuadrado.

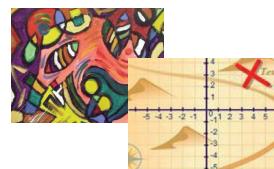
Fíjate en la cruz griega de la figura.

- ¿Cuántos lados tiene el polígono?
- ¿Son iguales los lados del polígono? ¿Y sus ángulos?
- ¿Es un polígono regular? ¿Por qué?
- ¿Cuántos cuadrados pueden inscribirse dentro de la cruz griega?
- Si realizamos los dos cortes representados en la cruz griega y reorganizamos las piezas, ¿qué paralelogramo obtenemos?



# Polígonos: triángulos y cuadriláteros

## Iniciación al álgebra



Con tus conocimientos sobre los polígonos, *profundizarás* en el estudio de los triángulos y los rectángulos y *trazarás* figuras geométricas con la computadora. Además, te iniciarás en el estudio del álgebra: *aprenderás* a utilizarla para expresar información, *efectuar* operaciones con expresiones en las que aparecen letras y números.

### DCD Destrezas con criterios de desempeño

- Construir figuras geométricas con el uso de la regla y del compás siguiendo pautas específicas.
- Conocer los conceptos geométricos elementales y aplicarlos en problemas de la vida cotidiana.
- Definir y representar medianas, mediatrices, alturas y bisectrices de un triángulo en gráficos.
- Determinar el baricentro, ortocentro, incentro y circuncentro en gráficos.
- Utilizar los medios informáticos para la representación de figuras geométricas.
- Expresar un enunciado simple en lenguaje matemático.
- Reconocer y agrupar monomios homogéneos.

### Prerrequisitos

#### Recuerda

- Rectas secantes
- Rectas paralelas
- Rectas coincidentes



- Dos rectas secantes que al cortarse forman cuatro ángulos iguales son perpendiculares.

- Ángulo convexo  $< 180^\circ$
- Ángulo cónvexo  $> 180^\circ$



- Una **potencia** es un producto de factores iguales. El factor que se repite se denomina **base** y el número de veces que se repite el factor es el **exponente**, por ejemplo:  $5^3 = 5 \times 5 \times 5$ .
- Una potencia de exponente 1 es igual a la base.
- El **producto de potencias** de igual base es otra potencia de la misma base cuyo exponente es la suma de los exponentes de los factores. Observa:  $2^4 \times 2^3 = 2^{4+3} = 2^7$

#### Evaluación diagnóstica

- Dibuja un segmento  $AB$  y traza su mediatrix.
- Dibuja un ángulo  $\hat{A}$  y traza su bisectriz.
- ¿Qué edad tendrás dentro de 4 años? ¿Qué edad tenías hace 6 años?
- Elena mide 170 cm y es 8 cm más alta que Juan. ¿Cuál es la estatura de Juan?
- Calcula el área de un rectángulo de 50 cm de base y 35 cm de altura.
- Efectúa:  $2^2 \times 2^5$ ;  $3^3 \times 3^2 \times 3^7$ ;  $2^3 \times 3^4 \times 2^5 \times 3^6$
- Escribe el número que falta en las siguientes expresiones.
  - a)  $3 + \dots = 21$
  - b)  $12 - \dots = 7$
  - c)  $\dots \times 9 = 45$
  - d)  $\dots \div 8 = 5$
- Completa cada apartado con un mismo número.
  - a)  $4 \times (\dots - 5) = 3 \times \dots$
  - b)  $5 - \dots = 4 \times \dots - 5$
  - c)  $7 \times \dots - 2 = 16 + \dots$

#### Hábitat y vivienda

Art. 30. Las personas tienen derecho a un hábitat seguro y saludable, y a una vivienda adecuada y digna, con independencia de su situación social y económica.

Constitución de la República del Ecuador, 2008.



## Líneas poligonales



Abierta



Cerrada

# 1 Polígonos

Fíjate en las siguientes señales de tránsito.



3 segmentos



4 segmentos



8 segmentos

## CONTRAEJEMPLO

Esta figura no constituye un polígono:



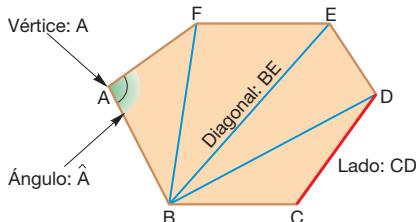
El borde de estas señales son segmentos consecutivos, no alineados y sus extremos están unidos. Forman una *línea poligonal cerrada*.

Cada una de estas señales se identifica con una región del plano limitada por una línea poligonal cerrada. Se trata de *polígonos*.

**→ Polígono** es la región del plano limitada por una línea poligonal cerrada.

## 1.1. Elementos de un polígono

En un polígono podemos diferenciar los siguientes elementos:



- **Lados:** segmentos que forman la línea poligonal.
- **Vértices:** extremos de los lados del polígono.
- **Ángulos interiores:** regiones del plano interior del polígono comprendidas entre dos lados contiguos.
- **Diagonales:** segmentos que unen dos vértices no adyacentes.

## FÍJATE

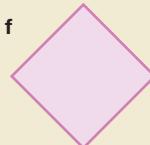
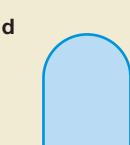
Cuando hablamos de ángulos de un polígono nos referimos a los ángulos interiores.

En todo polígono se cumple:

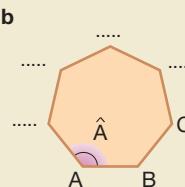
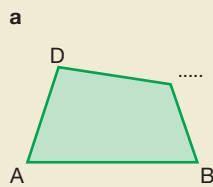
$$\text{Número de lados} = \text{Número de vértices} = \text{Número de ángulos}$$

## Actividades

- 1 Identifica cuáles de las siguientes figuras son polígonos.



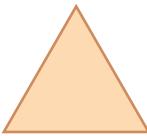
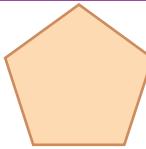
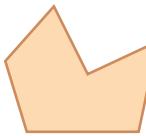
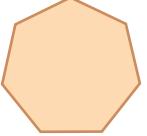
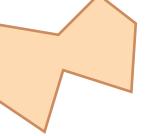
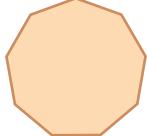
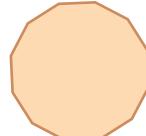
- 2 Dibuja en tu cuaderno estos polígonos y escribe los vértices y los ángulos que faltan en estos polígonos. Traza una diagonal en cada uno de ellos.

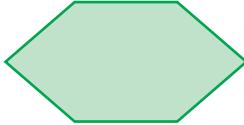


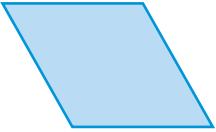
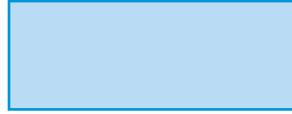
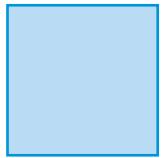
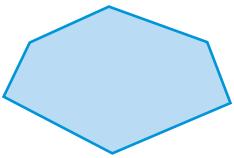
— Anota en una tabla todos los vértices, ángulos, lados y diagonales de los polígonos anteriores.

## 1.2. Clasificación de los polígonos

Los polígonos pueden clasificarse según diferentes criterios.

Según el número de lados					
					
3 lados <b>Triángulo</b>	4 lados <b>Cuadrilátero</b>	5 lados <b>Pentágono</b>	6 lados <b>Hexágono</b>	7 lados <b>Heptágono</b>	8 lados <b>Octágono u octágono</b>
				...	...
9 lados <b>Eneágono</b>	10 lados <b>Decágono</b>	11 lados <b>Endecágono</b>	12 lados <b>Dodecágono</b>	...	20 lados <b>Icoságono</b>

Según sus ángulos	
	
Un polígono es <b>convexo</b> si tiene todos sus ángulos convexos.	Un polígono es <b>cóncavo</b> si alguno de sus ángulos es cóncavo.

Según la longitud relativa de sus lados y la amplitud relativa de sus ángulos			
			
Un polígono es <b>equilátero</b> si tiene todos sus <i>lados de igual longitud</i> .	Un polígono es <b>equiángulo</b> si tiene todos sus <i>ángulos de igual amplitud</i> .	Un polígono es <b>regular</b> si tiene todos sus <i>lados y ángulos iguales</i> .	Un polígono es <b>irregular</b> si todos sus <i>lados y ángulos no son iguales</i> , es decir, si no es regular.

### Actividades



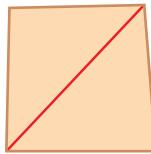
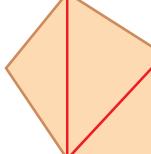
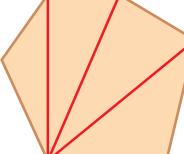
- 3 Un polígono tiene siete ángulos. ¿Cuántos vértices y cuántos lados tiene? ¿Qué nombre recibe?
- 4 ¿Cómo se llama el cuadrilátero regular?
- 5 ¿Existe algún polígono regular cóncavo? Razona tu respuesta.
- 6 ¿Un polígono irregular puede ser equilátero? ¿Y equiángulo? Justifica tus respuestas con ejemplos.
- 7 Identifica y dibuja señales de tránsito comunes en nuestro medio que tengan los siguientes polígonos.
  - a) Un octágono cóncavo.
  - b) Un hexágono regular.
  - c) Un cuadrilátero equiángulo pero no equilátero.
  - d) Un pentágono convexo.

### 1.3. Propiedades

A partir del **número de lados** de un polígono, podemos calcular el número de diagonales y la suma de los ángulos de dicho polígono.

#### Número de diagonales

Observa la tabla.

Polígono			
Número de vértices	4	5	6
Número de diagonales que parten de un vértice	1	2	3

¿Encuentras alguna relación entre el número de vértices de los polígonos y el número de diagonales que parten de un vértice?

Puesto que desde un vértice no podemos trazar diagonales ni a él mismo ni a los dos vértices adyacentes, la relación que existe es:

$$\begin{array}{c} \text{Número de diagonales} \\ \text{que parten de un vértice} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Número de vértices} \\ \text{del polígono} \end{array} - 3$$

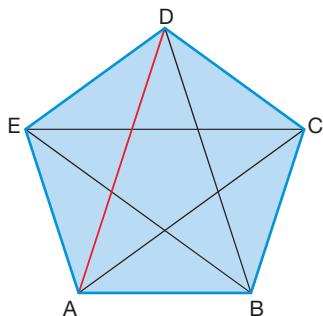


Fig. 1. La diagonal  $AD$  que parte del vértice  $A$  y la diagonal  $DA$  que parte del vértice  $D$  son la misma.

Para obtener **el número total de diagonales** de un polígono, debemos multiplicar el número de diagonales que parten de un vértice por el número de vértices y dividir el resultado entre 2, ya que contamos cada diagonal dos veces (fig. 1).

➔ El **número total de diagonales** de un polígono es igual al número de vértices por el número de vértices menos 3, todo ello dividido entre 2.

Puesto que un polígono de  $n$  lados tiene  $n$  vértices, para un polígono de  $n$  lados se tiene:



$$\text{Número de diagonales} = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

#### ejemplo 1

Calcula el número de diagonales de un icoságono.

$$\text{Número de diagonales de un icoságono} = \frac{20 \cdot (20 - 3)}{2} = \frac{20 \cdot 17}{2} = 170$$



#### Actividades

- 8 ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de 10 lados?
- 9 ¿Cuál es el número mínimo de lados que debe tener un polígono para que podamos trazar en él diagonales?
- 10 Un polígono tiene en total 9 diagonales. ¿De qué polígono se trata?
- 11 ¿Cuál es el polígono que tiene el mismo número de lados que de diagonales?

## Suma de los ángulos

Consideremos de nuevo el cuadrilátero, el pentágono y el hexágono en los que hemos trazado todas las diagonales desde uno de los vértices.

Polígono			
Número de lados	4	5	6
Número de triángulos en que hemos descompuesto el polígono	2	3	4

Comprobamos que, en todos los casos:

- Número de triángulos obtenidos = Número de lados – 2
- Suma de los ángulos del polígono = Suma de los ángulos de los triángulos obtenidos

Como la suma de los ángulos de un triángulo es  $180^\circ$ , tendremos:

 **La suma de los ángulos** de un polígono de  $n$  lados es igual a:  
 $180^\circ \cdot (n - 2)$

Esta suma nos permite obtener el valor de cada uno de los ángulos de un polígono en el caso particular en que éste sea regular.

### ejemplo 2

Calcula el valor de los ángulos de un heptágono regular.

Aplicamos la expresión anterior para calcular la suma de los ángulos de un heptágono regular.

$$180^\circ \cdot (7 - 2) = 180^\circ \cdot 5 = 900^\circ$$

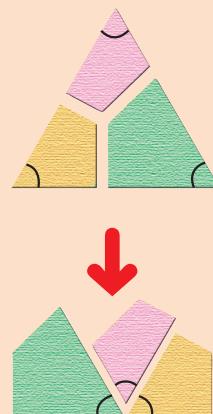
Por ser regular, todos los ángulos miden lo mismo. Así, el valor de cada ángulo será:

$$900^\circ \div 7 = 128,6^\circ$$

### MUCHO OJO

La suma de los ángulos de un triángulo es  $180^\circ$ .

Para comprobarlo, recorta un triángulo y procede del mismo modo que se indica en la figura.



Sea cual sea el triángulo, siempre podrás formar un ángulo llano.

## Actividades

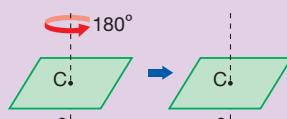


- 12** Calcula la suma de los ángulos interiores de este polígono convexo a partir del número de lados.
- Comprueba con un graduador la suma de ángulos calculada.
- 13** Calcula la suma de los ángulos de un eneágono. ¿Cuánto mide cada ángulo si se trata de un polígono regular?
- 14** Calcula cuánto mide cada uno de los ángulos de un pentágono regular. Con ayuda de un graduador, traza un pentágono regular de 3 cm de lado.



### Centro de simetría

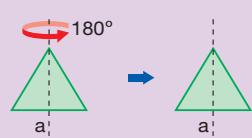
Si un polígono gira  $180^\circ$  respecto a una perpendicular por un punto  $c$  tal como indica la figura y se ve idéntico,  $c$  es **centro de simetría** del polígono.



Así, el centro de un cuadrado es centro de simetría del cuadrado.

### Eje de simetría

Si un polígono gira  $180^\circ$  respecto a un eje  $e$  tal como indica la figura y se ve idéntico,  $e$  es **eje de simetría** del polígono.

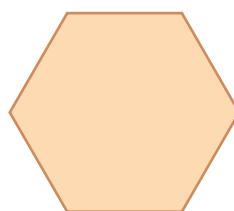
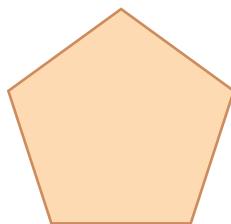


Así, una altura de un triángulo equilátero es eje de simetría del triángulo.

Observa que el número de ejes de simetría de un polígono regular coincide con el número de vértices (o lados) que lo forman.

## Centro, apotema y ángulo central de un polígono regular

Hemos estudiado que los polígonos regulares son aquellos que tienen todos sus lados y sus ángulos iguales.



Estos polígonos tienen unos elementos característicos y exclusivos: el **centro**, las **apotemas** y los **ángulos centrales**.

	<b>Centro</b>	Punto interior del polígono que está a la misma distancia de todos sus vértices.
	<b>Apotema</b>	Segmento que une el centro del polígono con el punto medio de cualquier lado.
	<b>Ángulo central</b>	Ángulo con vértice en el centro del polígono cuyos lados son semirectas que pasan por dos vértices adyacentes.

Fíjate en que todas las apotemas de un polígono regular miden lo mismo y que cada apotema es perpendicular al lado correspondiente.

Sabemos que hay tantos ángulos centrales como lados. Puesto que todos ellos suman  $360^\circ$  y son iguales, tendremos que:

El valor de un **ángulo central** de un polígono regular de  $n$  lados es igual a:

$$360^\circ \div n$$

### ejemplo 3

Calcula el valor del ángulo central de un pentágono regular.

$$360^\circ \div 5 = 72^\circ$$

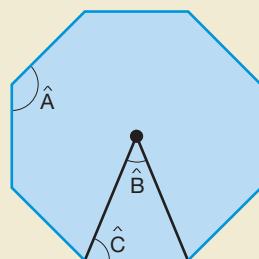
## Actividades

15 Dibuja un cuadrado y halla su centro. A continuación, dibuja un ángulo central y una apotema. ¿Cuánto mide el ángulo central? ¿Qué relación existe entre la apotema y el lado del cuadrado?

16 Determina el valor del ángulo central de un octágono regular.

17 ¿Es posible que el ángulo central de un decágono regular mida  $30^\circ$ ? Razona tu respuesta.

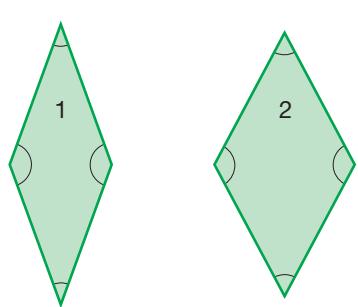
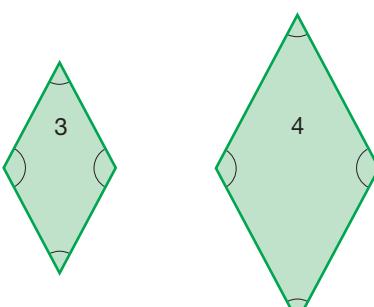
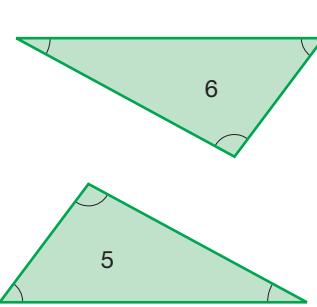
18 Halla las medidas de los ángulos señalados en el siguiente octágono regular.



## 1.4. Congruencia de polígonos

Si calcamos y recortamos dos polígonos y los superponemos, podemos comprobar si son iguales.

Observa qué sucede si intentamos hacer coincidir estos polígonos.

		
<p>No se superponen. Los cuadriláteros 1 y 2 no son iguales. Observa que tienen los lados iguales, pero los ángulos correspondientes son diferentes.</p>	<p>No se superponen. Los cuadriláteros 3 y 4 no son iguales. Observa que tienen los ángulos iguales, pero los lados son diferentes.</p>	<p>Se superponen. Los triángulos 5 y 6 son <b>iguales</b>. Observa que tienen los lados y los ángulos correspondientes iguales.</p>

Para que podamos superponer cualquier polígono, es preciso que tengan los lados y los ángulos correspondientes iguales.

→ Dos polígonos son **congruentes** si tienen iguales los lados y los ángulos correspondientes.

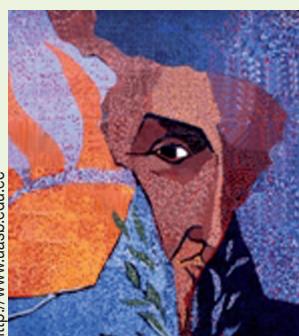
### Actividades

- 19 Dibuja dos triángulos que tengan los ángulos interiores iguales pero que no sean iguales entre sí.
- 20 Dos cuadrados tienen igual los lados. ¿Son congruentes?
- 21 ¿Son iguales dos pentágonos regulares de 5 cm de lado?
  - ¿Es cierto que dos polígonos regulares con el mismo número de lados son iguales si tienen igual el lado? Razona tu respuesta.
- 22 Construye un triángulo equilátero de 4 cm de lado y comprueba si puede dividirse en dos triángulos iguales, en tres triángulos iguales y en cuatro triángulos iguales.
- 23 ¿Son iguales estas parejas de polígonos?
  - a) 
  - b) 

### FÍJATE

La repetición indefinida de motivos geométricos permite crear mosaicos de gran belleza.

En la Universidad Andina de Quito hay un mosaico creado con repeticiones de polígonos.



<http://www.usb.edu.ec>

¿Te atreves a construir un mosaico con polígonos regulares?

## 2 Triángulos

Un triángulo es un polígono de tres lados.

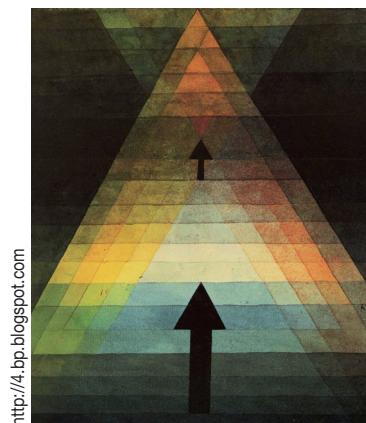
### Propiedad de los triángulos

En la construcción de la fotografía de la derecha se usan triángulos para reforzar la estructura.

Los triángulos se utilizan frecuentemente en estructuras metálicas, tendidos eléctricos..., debido a una propiedad que los caracteriza y diferencia del resto de los polígonos: son **indeformables**.



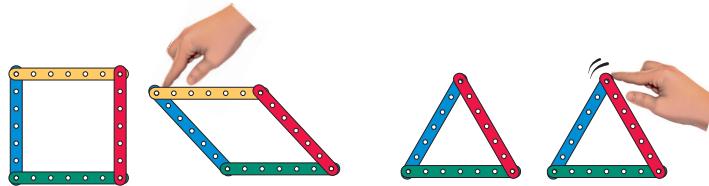
http://2.bp.blogspot.com



http://4.bp.blogspot.com

■ Eros, de P. Klee. En esta obra puede apreciarse la utilización del triángulo como elemento artístico.

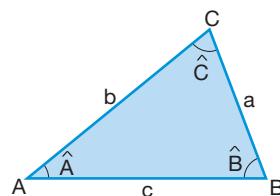
Si construyes otros polígonos, por ejemplo, un cuadrilátero con piezas de mecano, comprobarás que puedes deformarlo fácilmente obteniendo un nuevo cuadrilátero; pero si construyes un triángulo te resultará imposible deformarlo.



### 2.1. Elementos de un triángulo

Para referirnos a un triángulo nombraremos sus vértices siguiendo el sentido contrario de las agujas del reloj.

Así, el triángulo de la figura es el triángulo  $ABC$ .



**Triángulo:**  $ABC$   
**Vértices:**  $A$ ,  $B$  y  $C$   
**Ángulos:**  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$   
**Lados:**  $a$ ,  $b$  y  $c$

Diremos que el lado  $a$  es **opuesto** al ángulo  $\hat{A}$ , el lado  $b$  es **opuesto** al ángulo  $\hat{B}$  y el lado  $c$  es **opuesto** al ángulo  $\hat{C}$ .

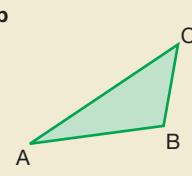
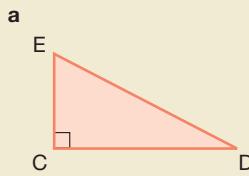
Fíjate que los lados se designan con la misma letra que su ángulo opuesto, pero en minúscula.

Asimismo, diremos que los ángulos  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  son **contiguos** al lado  $c$ , que  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$  son **contiguos** al lado  $a$  y que  $\hat{A}$  y  $\hat{C}$  son **contiguos** al lado  $b$ .

### Actividades

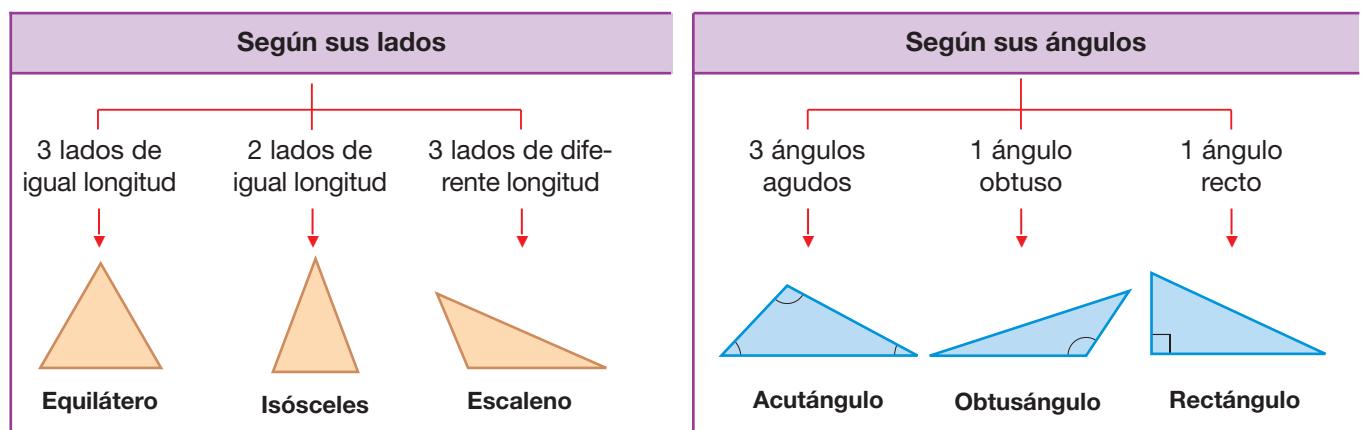
24 Nombra los siguientes triángulos e indica sus elementos.

— ¿Tienen los triángulos diagonales?



## 2.2. Clasificación de los triángulos

Los triángulos pueden clasificarse según sus **lados** o según sus **ángulos**.



Observa que:

- En un triángulo equilátero, los tres ángulos son iguales; por tanto, es polígonos regular.
- En un triángulo isósceles, los dos ángulos contiguos al lado desigual son iguales.

### Triángulos rectángulos

Un triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo recto, es decir, un ángulo de  $90^\circ$ .

Los lados de este triángulo reciben nombres especiales.

- El lado opuesto al ángulo recto,  $a$ , se denomina **hipotenusa**.
- Los lados  $b$  y  $c$  que forman el ángulo recto se llaman **catetos**.

Además, en todo triángulo rectángulo se cumple que:

- La hipotenusa es mayor que cada uno de los catetos.
- Los ángulos agudos son complementarios, ya que:

$$\begin{aligned}\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &= 180^\circ & \hat{B} + \hat{C} &= 90^\circ \\ \hat{A} &= 90^\circ\end{aligned}$$

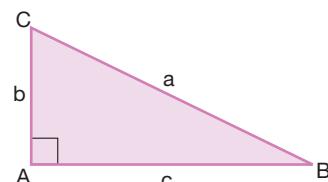


Fig. 1

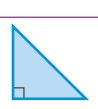
### MUCHO OJO

Dos ángulos son **complementarios** si suman  $90^\circ$ .

### Actividades

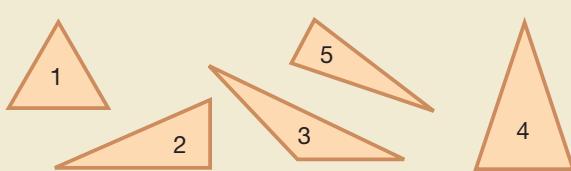


- 25 Completa la siguiente tabla en tu cuaderno.

	Acutángulo	Rectángulo	Obtusángulo
Escaleno		.....	.....
Isósceles	.....		.....
Equilátero	.....	No existe.	.....

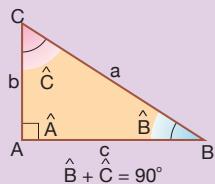
- 26 ¿Es posible que un triángulo tenga dos ángulos rectos? Razona tu respuesta.

- 27 Clasifica cada uno de estos triángulos según sus lados y según sus ángulos.



## Construcción de triángulos rectángulos

En un triángulo rectángulo, uno de sus ángulos es de  $90^\circ$  por lo que sus dos ángulos agudos son complementarios.



Además, como estudiaremos en el siguiente tema, conocidas las longitudes de dos de sus lados, podemos calcular la otra mediante el teorema de Pitágoras.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Estas propiedades posibilitan que para construir un triángulo rectángulo sea suficiente con conocer:

- Dos lados.
- Un lado y un ángulo agudo.

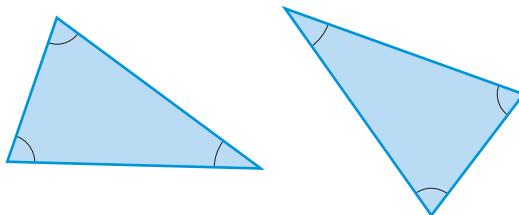
## Criterios de congruencia de triángulos rectángulos

Dos triángulos rectángulos son congruentes si:

- Tienen dos lados iguales.
- Tienen iguales un lado y un ángulo agudo.

## 2.3. Congruencia de triángulos

Recuerda que dos polígonos son congruentes si tienen congruentes los lados y los ángulos correspondientes.



Sin embargo, para saber si dos triángulos son congruentes, no es necesario comparar los tres lados y los tres ángulos.

En cada uno de los cuatro casos anteriores hemos visto que para construir un triángulo sólo nos hacen falta tres datos:

- Los tres lados.
- Un lado y sus dos ángulos contiguos.
- Dos lados y el ángulo que forman.
- Dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.

Por consiguiente, para que dos triángulos sean iguales basta con que lo sean algunos de sus elementos.

 **Dos triángulos son congruentes** si se cumple una de las cuatro condiciones siguientes:

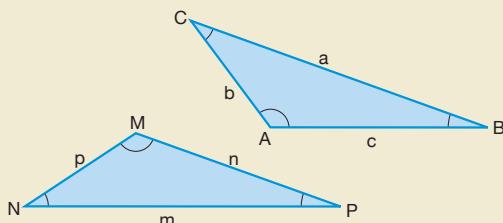
1. Tienen **iguales los tres lados**.
2. Tienen **iguales un lado y sus dos ángulos contiguos**.
3. Tienen **iguales dos lados y el ángulo que forman**.
4. Tienen **iguales dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos**.

Estas condiciones son los **criterios de congruencia** de triángulos.

## Actividades

**28** Construye un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mida 8 cm y uno de sus ángulos agudos,  $23^\circ$ .

**29** Los triángulos de la siguiente figura cumplen:  $\hat{A} = \hat{M}$ ,  $c = n$  y  $b = p$ . ¿Son congruentes? ¿En qué criterio te basas?



**30** Dos triángulos tienen sus tres ángulos iguales. ¿Son congruentes?

**31** Dos triángulos isósceles tienen igual su ángulo de igual. ¿Podemos asegurar que son congruentes?

**32** Dos triángulos tienen igual la suma de las longitudes de sus lados. ¿Son necesariamente congruentes? Razónalo.

**33** Dos triángulos rectángulos tienen iguales sus dos catetos. ¿Son congruentes?

**34** Dos triángulos rectángulos tienen iguales las hipotenusas y un ángulo agudo. ¿Son congruentes?

## 2.4. Rectas notables

Puesto que los lados de un triángulo son segmentos, podemos trazar las *mediatrices* de sus lados.

También podemos trazar las *bisectrices* de sus ángulos.

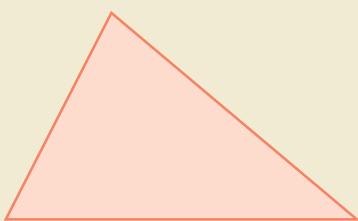
Las mediatrices y las bisectrices de un triángulo, junto con las *medianas* y las *alturas*, que definiremos a continuación, constituyen las denominadas **rectas notables** del triángulo y sus intersecciones se denominan **puntos notables**.

Mediatrices	Bisectrices
<p>Las <b>mediatrices</b> de un triángulo son las mediatrices de sus lados.</p> <p>Las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto denominado <b>circuncentro</b>, <i>O</i>.</p> <p>El circuncentro está a la misma distancia de cada vértice, por lo que es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.</p>	<p>Las <b>bisectrices</b> de un triángulo son las bisectrices de sus ángulos internos.</p> <p>Las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un punto denominado <b>incentro</b>, <i>I</i>.</p> <p>El incentro está a la misma distancia de cada lado del triángulo, por lo que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.</p>
<p><b>Medianas</b></p> <p>Las <b>medianas</b> de un triángulo son los segmentos que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto.</p> <p>Las tres medianas de un triángulo se cortan en un punto denominado <b>baricentro</b>, <i>G</i>.</p> <p>El baricentro divide cada mediana en dos segmentos, uno cuya longitud es el doble de la del otro.</p>	<p><b>Alturas</b></p> <p>Las <b>alturas</b> de un triángulo son los segmentos perpendiculares a un lado y que unen dicho lado (o su prolongación) con el vértice opuesto.</p> <p>Las tres alturas de un triángulo (o sus prolongaciones) se cortan en un punto denominado <b>ortocentro</b>, <i>H</i>.</p> <p>Si el triángulo es obtusángulo, el ortocentro es exterior. Si es un triángulo acutángulo, el ortocentro es interior y si es un triángulo rectángulo, el ortocentro coincide con el vértice del ángulo recto.</p>

### Actividades



- 35 Dibuja un triángulo escaleno y acutángulo como el de la figura, y halla su circuncentro, su baricentro y su ortocentro.



— Comprueba que estos tres puntos se encuentran sobre una línea recta, llamada recta de Euler, y que el baricentro se sitúa a doble distancia del ortocentro que del circuncentro.

- 36 Visita la página [http://descartes.cnice.mec.es/materiales\\_didacticos/Triangulos\\_propiedades\\_metricas/Triangulos\\_%20Propiedades%20metricas.htm](http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/Triangulos_propiedades_metricas/Triangulos_%20Propiedades%20metricas.htm)

- a) Comprueba las construcciones que has realizado en la actividad anterior y halla el incentro para el mismo triángulo.
- b) Traza las rectas notables y los puntos notables de los distintos triángulos clasificados según sus ángulos.



■ Señal de tráfico que indica la situación de un paso para peatones.

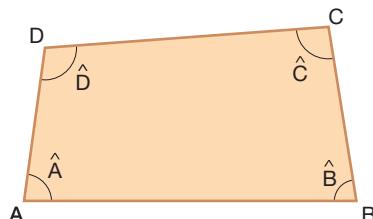
## 3 Cuadriláteros

Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados.

### 3.1. Elementos de un cuadrilátero

Para referirnos a un cuadrilátero, nombraremos sus vértices, siguiendo el sentido contrario a las agujas del reloj.

Así, el cuadrilátero de la figura es  $ABCD$ .



**Cuadrilátero:**  $ABCD$

**Vértices:**  $A, B, C$  y  $D$

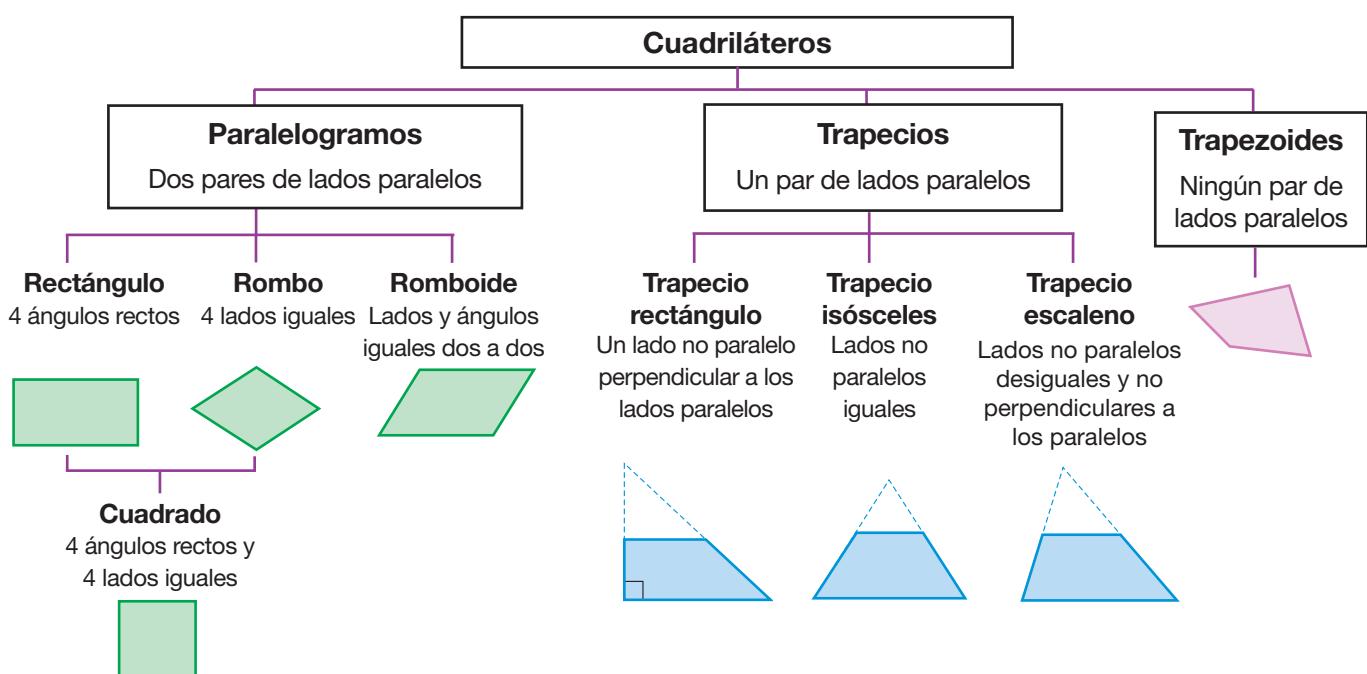
**Ángulos:**  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  y  $\hat{D}$

**Lados:**  $AB, BC, CD$  y  $DA$

### 3.2. Clasificación de los cuadriláteros

Según el paralelismo de sus lados, los cuadriláteros se clasifican en: *paralelogramos*, *trapezios* y *trapezoides*.

A su vez, los paralelogramos y los trapezios se clasifican según se muestra en el siguiente esquema.



### Actividades

- 37 Dibuja un romboide, un trapecio rectángulo y un trapezoide con vértices  $A, B, C$  y  $D$ , e indica sus elementos. ¿Tienen estos cuadriláteros diagonales? ¿Cuáles son?
- 38 Averigua el valor de la suma de los ángulos de un cuadrilátero.

### 3.3. Construcción

Veamos cómo pueden construirse los diferentes paralelogramos con la regla y el compás.

Cuadrado		Rectángulo	
Datos:		Datos:	
①		①	
②		②	
③		③	
④		④	
<b>Rombo</b>		<b>Romboide</b>	
Datos:		Datos:	
①		①	
②		②	
③		③	
④		④	
⑤		⑤	

### Actividades



- 39** Explica con tus propias palabras los pasos realizados en la construcción de los distintos paralelogramos con la regla y el compás.
- 40** Construye con la regla y el compás los siguientes paralelogramos.
- Un cuadrado de 2,5 cm de lado.
  - Un rectángulo de lados 4 cm y 3 cm.
  - Un rombo de 4 cm de lado y  $\hat{A} = 60^\circ$ .
  - Un romboide de lados 5 cm y 4 cm, y  $\hat{A} = 60^\circ$ .
- Elabora una tabla de cuatro columnas (para los cuatro paralelogramos) y tres filas (para la figura, cómo son los lados y cómo son los ángulos). Complétala.
- 41** Di si estas afirmaciones son verdaderas o falsas.
- Todo cuadrilátero es un cuadrado.
  - Todo rectángulo es un paralelogramo.
  - Algunos trapecios son paralelogramos.
- 42** Construye un rectángulo cuyos lados midan 5 cm y 3 cm.
- 43** Construye un rombo de 4 cm de lado sabiendo que uno de sus ángulos mide  $40^\circ$ .
- ¿Qué figura se forma si el ángulo es recto?
- 44** Construye un romboide cuyos lados formen un ángulo de  $110^\circ$  y midan 6 cm y 4 cm.



## FÍJATE

El radio de la circunferencia que circunscribe un hexágono regular y el lado de dicho hexágono miden lo mismo.

## 4 Hexágono

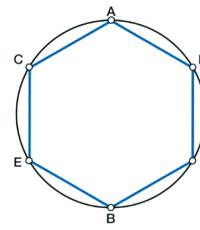
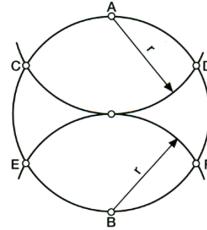
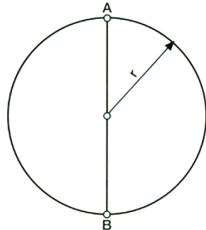
Observa el panal de abejas de la fotografía.

Fíjate en que cada celda del panal tiene forma de hexágono y en que cada uno de estos está unido por el lado a otros seis, dando forma a este conjunto.



### Inscrito

Imagina que nos piden que diseñemos una red compuesta de hexágonos y del tamaño que deseemos. Se pueden construir hexágonos de una forma muy sencilla partiendo de su circunferencia circunscrita.



Trazamos una circunferencia de radio  $r$  y determinamos su diámetro vertical  $AB$ .

Con centro en  $A$  y radio  $r$ , describimos un arco que corta a la circunferencia en los puntos  $C$  y  $D$ .

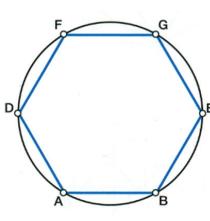
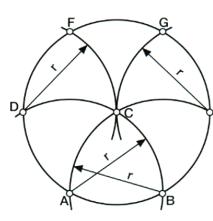
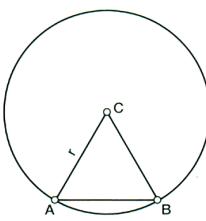
Con centro en  $B$  y radio  $r$ , describimos un arco que corta a la circunferencia en los puntos  $E$  y  $F$ .

Si unimos los puntos  $A, C, E, B, F$  y  $D$ , obtenemos el hexágono  $ACEBFDAE$ .

### Dado el lado

Supón ahora que, por cuestiones técnicas, es necesario que los hexágonos tengan un determinado tamaño, y te proporcionan la longitud del lado. Para diseñar entonces la estructura necesitas saber cómo construir hexágonos a partir del lado.

En este caso recurrimos a la construcción del triángulo equilátero.



Situamos el lado  $AB$  y sobre éste reproducimos la reconstrucción de un triángulo equilátero a partir del lado, con lo que obtenemos el punto  $C$ .

Con centro en  $C$  y radio  $AC$ , trazamos una circunferencia.

Con centro en  $A$  y en  $B$  y radio  $AB$ , trazamos dos arcos que cortan a la circunferencia en los puntos  $D$  y  $E$ .

Con centro en  $D$  y en  $E$  y radio  $AB$ , describimos de nuevo dos arcos que cortan a la circunferencia en los puntos  $F$  y  $G$ .

Si unimos los puntos  $A, B, E, G, F$  y  $D$ , obtenemos el hexágono  $ABEGFD$ .

## Actividades

- 45 Observa la imagen. ¿Crees que podría hacerse lo mismo con pentágonos? Razona tu respuesta.

— ¿Con qué otra figura podrías hacerlo?



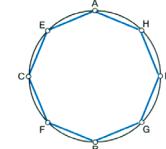
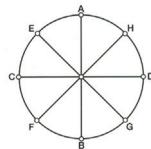
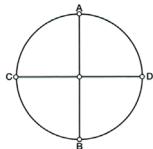
## 5 Octágono

Si vas al zoológico y observas los reptiles, podrás comprobar que en algunos casos su piel está formada por la unión de polígonos. Y, en particular, algunas de las especies tienen su piel formada por octágonos, como en el caso de las tortugas.



### Inscrito

Imagina que quieres desarrollar un diseño imitando la piel de las tortugas. La forma más sencilla de reproducir octágonos es inscritos en una circunferencia. En este caso recurriremos a la construcción del cuadrado.



Trazamos una circunferencia de radio  $r$  y determinamos su diámetro vertical AB, y su diámetro horizontal CD.

Con lo que ya tenemos cuatro vértices del octágono.

Podemos obtener los cuatro vértices que faltan trazando:

1. Las mediatrices de los lados del cuadrado ACBD.
2. La bisectriz de los ángulos que forman los diámetros.

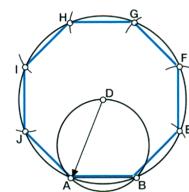
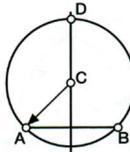
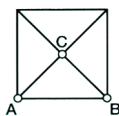
En ambos casos obtenemos los puntos E, F, G y H.

Si unimos los puntos A, E, C, F, B, G, D y H, obtenemos el octágono AECFBGDH.

### Dado el lado

Supón que, por una cuestión de diseño, algunos de los octágonos deben tener un tamaño determinado, para lo que nos proporcionan la longitud del lado. Veamos cómo podemos construir octágonos dado el lado.

En este caso también recurriremos a la construcción del cuadrado.



Situamos el lado AB, y sobre éste construimos un cuadrado. Trazamos sus diagonales, que se cortan en el punto C.

Con centro en C y radio CA, trazamos una circunferencia. La mediatrix del segmento AB corta a la circunferencia en el punto D.

Con centro en D y radio DA, trazamos una circunferencia. Sobre ella, y a partir del punto B, trasladamos la medida del segmento AB, con lo que obtenemos los puntos E, F, G, H, I y J. Si unimos dichos puntos, obtendremos el octágono ABEFGHIJ.

### Actividades

46 Observa la siguiente fotografía.

- ¿Cómo crees que resulta más sencillo reproducirlo, inscrito o a partir del lado?  
Razona tu respuesta.



## MUCHO OJO

### Pentágono dado el lado

Trazamos la mediatrix al lado AB, para lograr O. Con centro en A y una abertura A-O, cortamos a la perpendicular de A en C. Con centro en C y un radio C-A, trazamos un arco que corta a la prolongación BC en D. Con centro en B y abertura hasta D trazamos un arco, luego desde A y el mismo radio trazamos otro que corta al interior en E. Con radio A-B y centros encontramos F y G con lo cual describimos al polígono.

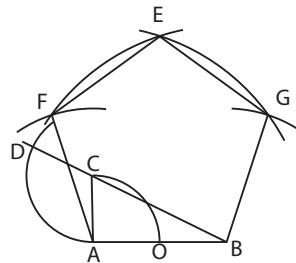
## 6 Polígonos estrellados

Seguramente habrás visto alguna estrella de mar, o mirando de noche el cielo estrellado te habrás preguntado cuántas puntas tendría esa estrella tan luminosa... Seguidamente veremos cómo construir polígonos estrellados.

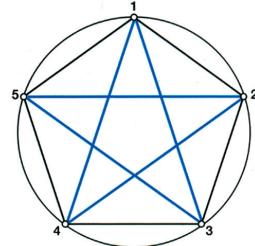
En general, se obtienen al unir los vértices de dos en dos, de tres en tres..., a partir de uno arbitrario, y recorriendo todos los demás: del correspondiente polígono convexo hasta completar el polígono estrellado en el vértice de partida.

### Estrella de cinco puntas

Construimos un pentágono regular convexo, conociendo el lado.

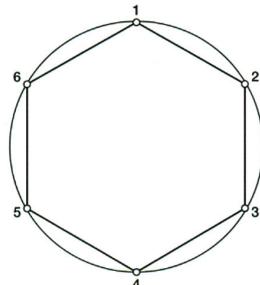


Si unimos sus vértices de dos en dos, es decir, el vértice 1 con el 4, el 4 con el 2, el 2 con el 5, el 5 con el 3 y el 3 con el 1, cerramos en el vértice 1 un polígono estrellado de cinco puntas después de recorrer dos veces la circunferencia.

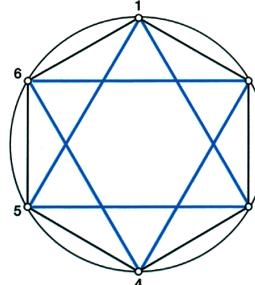


### Estrella de seis puntas

Construimos un hexágono regular convexo.

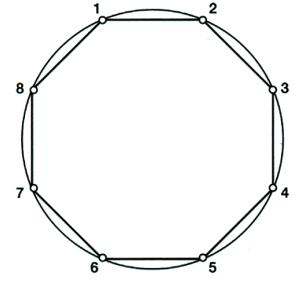


Si unimos sus vértices de dos en dos, es decir el vértice 1 con el 5, el 5 con el 3 y el 3 con el 1, cerramos un triángulo equilátero después de recorrer una vez la circunferencia.

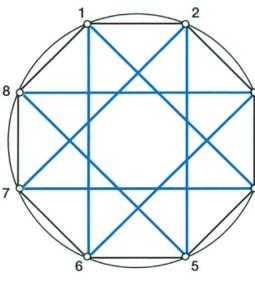


### Estrella de ocho puntas

Construimos un octágono regular convexo.



Si unimos sus vértices de tres en tres, es decir, el vértice 1 con el 4, el 4 con el 7, el 7 con el 2, el 2 con el 5, el 5 con el 8, el 8 con el 3, el 3 con el 6 y el 6 con el 1, cerramos en el vértice 1 un polígono estrellado de ocho puntas.



## Actividades

47 Resuelve los siguientes apartados.

- Comprueba qué sucede si unes de tres en tres, a partir de uno arbitrario, los vértices de un pentágono regular.
- Comprueba qué sucede si unes de tres en tres y de cuatro en cuatro, a partir de uno arbitrario, los vértices de un hexágono regular.

- Comprueba qué sucede si unes de dos en dos, de cuatro en cuatro y de seis en seis, a partir de uno arbitrario, los vértices de un octágono regular.
- Comprueba qué sucede si unes de dos en dos y de cuatro en cuatro, a partir de uno arbitrario, los vértices de un decágono regular.

# Las TIC y la Matemática

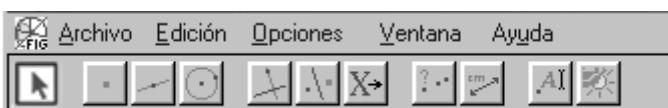
## Construcciones geométricas con la computadora

En la actualidad podemos utilizar varios programas de licencia libre que sirven para trazar figuras geométricas, algunos de estos, que los puedes descargar en tu computadora son: GEONext, GeoGebra y Winplot.

Los menús generales que ofrece la mayoría de programas que permiten construir figuras geométricas son generalmente comunes, aunque tienen comandos propios, como por ejemplo, *Revisar construcción* o *Regenerar dibujo* en el menú *Edición*.

Veamos algunas opciones que nos ofrece uno de estos programas de uso libre.

- Nos situamos en el programa.
- Abrimos los menús superiores (*Archivo*, *Edición...*) y observamos las opciones que podemos utilizar.



- Las opciones de dibujo aparecen en los menús inferiores. Cada una de ellas se identifica mediante un ícono.

Observa las opciones que aparecen al pulsar el ícono

El ícono

sólo identifica la opción *Recta*; si seleccionamos cualquier otra, el ícono cambia.

- Si activamos la opción *Ayuda*, se abre un espacio en la parte inferior de la ventana, donde aparece la finalidad de la opción de dibujo que hemos seleccionado.



Así, si está seleccionada la opción *Recta*, en la parte inferior de la ventana aparece el texto siguiente:

Construya la recta determinada por un punto y su dirección o por dos puntos.

Si está seleccionada la opción *Triángulo* (

), la ayuda nos informa de que:

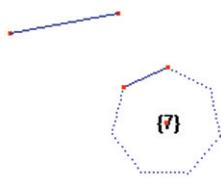
Construya el triángulo determinado por tres puntos.

## Actividades



- 48** Si dispones de un programa informático para llevar a cabo construcciones geométricas, explora las diferentes opciones de cada menú, dibuja los íconos que tengan asociados en tu cuaderno y escribe cuáles son sus finalidades.

## Dibujos elementales

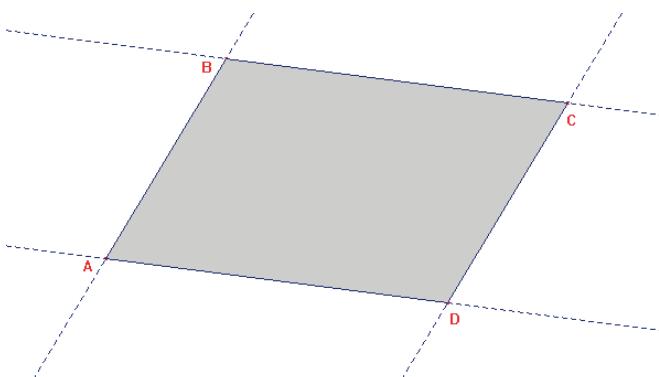


Para dibujar cualquier elemento geométrico debemos tener activada la opción correspondiente y hacer clic dentro de la ventana de dibujo. Veamos cómo dibujar los siguientes elementos:

- *Dibujo de un punto.* Activamos la opción *Punto* (■) y pulsamos, dentro de la ventana de dibujo, en el lugar donde queramos situarlo.
- *Dibujo de un segmento.* Para crearlo, con la opción *Segmento* (□) activada, haz clic en los puntos inicial y final de este segmento.
- *Dibujo de un polígono regular.* Activamos la opción *Polígono regular* (◇) y pulsamos, primero, en el centro del polígono y, después, en uno de los vértices. A continuación, nos alejamos del vértice trazado y observamos que aparece en el centro del polígono un número que varía. Éste nos indica el número de lados del polígono. Pulsamos cuando aparece el apropiado.

## Construcción de un paralelogramo a partir de tres puntos

- Dibujamos tres puntos cualesquiera con la opción *Punto* (■). Con la opción *Etiqueta* creamos tres etiquetas, una para cada punto, que contengan los nombres *A*, *B* y *C*.
- Con la opción *Recta* (□) dibujamos una recta *r* que une los puntos *A* y *B*, y otra recta *s* que une los puntos *B* y *C*.
- Con la opción *Recta paralela* (□) creamos una recta paralela a *r* que pase por *C* y una recta paralela a *s* que pase por *A*. Creamos un punto (opción *Punto*) en la intersección de estas dos rectas, le ponemos una etiqueta (opción *Etiqueta*) y le llamamos *D*.
- Convertimos las líneas de las rectas en punteadas con la opción *Punteado* (□). A continuación, utilizamos la opción *Polígono* para crear un polígono cuyos vértices sean *A*, *B*, *C* y *D*.
- Pintamos el polígono de color con la opción *Llenar* (□).



Movemos las etiquetas utilizando la opción *Puntero* hasta que se sitúen donde queramos.

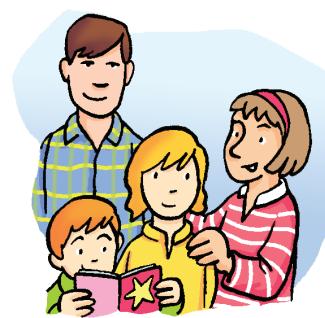
Para guardar la construcción geométrica escogemos *Archivo > Guardar*; y para salir del programa, *Archivo > Salir*.

## Actividades



- 49 Dibuja una recta, una semirrecta, un triángulo, un polígono, un pentágono regular, una circunferencia y un arco de circunferencia seleccionando la opción adecuada en cada caso.
- Construye un rectángulo a partir de tres puntos. ¿Cómo deben situarse estos tres puntos?

## 7 Iniciación al álgebra. Expresiones algebraicas



Para representar cantidades generalmente utilizamos números. Pero hay ocasiones en que también empleamos letras.

Observa la figura del margen. Si sabemos que Toa tiene 8 años, podemos calcular fácilmente la edad de sus hermanos.

Juan

$$8 - 2 = 6$$

Carla

$$8 + 2 = 10$$

Patricio

$$2 \times 8 = 16$$

Si desconocemos la edad de Toa y la representamos con la letra  $x$ , podemos expresar la edad de sus hermanos de la siguiente forma.

Juan

$$x - 2$$

Carla

$$x + 2$$

Patricio

$$2x$$

Estas expresiones reciben el nombre de *expresiones algebraicas*.

→ Una **expresión algebraica** es una serie de números y letras unidos mediante los signos de las operaciones aritméticas.

Para **escribir** una expresión algebraica debemos tener en cuenta las siguientes normas:

Norma	Ejemplos
El signo $\times$ de la multiplicación puede sustituirse por el signo $\cdot$ .	$3 \times a \rightarrow 3 \cdot a$
Cuando el signo de la multiplicación aparece entre letras o entre un número y una letra, suele suprimirse.	$3 \times a \times b \rightarrow 3 \cdot a \cdot b \rightarrow 3ab$
El factor 1 no se escribe.	$1x^2y \rightarrow x^2y$
El exponente 1 no se escribe.	$a^2b^1 \rightarrow a^2b$

Para **leer** una expresión algebraica podemos nombrar las letras y los signos en el orden en que aparecen o hacer una pequeña frase que las defina. Así:

Se lee...	O bien...
$a + b$ → $a$ más $b$	→ suma de $a$ y $b$
$(a + b)^2$ → $a$ más $b$ al cuadrado	→ cuadrado de la suma de $a$ y $b$
$2x$ → dos por $equis$ (o dos $equis$ )	→ doble de $equis$
$3a^2$ → tres por $a$ al cuadrado (o tres $a$ cuadrado)	→ triple del cuadrado de $a$

Antes de expresar en lenguaje algebraico cualquier frase, es conveniente seguir estos pasos:

- Leer con atención el enunciado que debe traducirse.
- Escoger la letra o letras para representar las cantidades desconocidas.
- Si es un enunciado compuesto, proceder por partes.

Veamos unos ejemplos en la página siguiente.

**ejemplo 4**

Escribe la expresión algebraica correspondiente a la siguiente frase: «La diferencia entre el triple del cuadrado de un número y el doble del cubo de otro número es igual a 12».

- En el texto aparecen dos números; representamos el primero por  $a$  y el segundo por  $b$ .
- Como se trata de un enunciado compuesto, procederemos por partes:
  - Primer número:  $a \rightarrow$  Cuadrado de  $a \div a^2 \rightarrow$  Triple del cuadrado de  $a \div 3 a^2$
  - Segundo número:  $b \rightarrow$  Cubo de  $b \div b^3 \rightarrow$  Doble del cubo de  $b \div 2 b^3$
  - Diferencia entre el triple del cuadrado de  $a$  y el doble del cubo de  $b \div 3 a^2 - 2 b^3$
  - Finalmente, expresamos que dicha diferencia es igual a  $12 \div 3 a^2 - b^3 = 12$

Las expresiones algebraicas también nos sirven para describir diferentes situaciones.

**ejemplo 5**

Mercedes plantó una semilla de maíz en una maceta. Certo día observó que había brotado una planta de 1 mm de altura y cada día sucesivo la planta creció 3 mm de altura. Encuentra una expresión algebraica que nos permita obtener la altura de la planta con relación al tiempo transcurrido.

- Calculamos la altura de la planta tras 1, 2 y 3 días de la primera observación.



Primera observación (0 días)  $\rightarrow$  1 mm  
 Tras 1 día  $\rightarrow$  4 mm  
 Tras 2 días  $\rightarrow$  7 mm  
 Tras 3 días  $\rightarrow$  10 mm

- Observamos que la altura es el triple del número de días transcurridos más uno.

Si representamos mediante la letra  $t$  el tiempo transcurrido (en días), la altura de la planta (en mm) será  $3t + 1$ .

**Actividades**

- 50** Escribe una frase que defina cada una de las siguientes expresiones algebraicas.

a) $2a + b$	c) $(a - b)^2$	e) $3a^2 + b$
b) $a - 3b$	d) $a^2 + b$	f) $a + \frac{b}{2}$

- 51** Expresa con números, signos y letras:

- La suma del doble del cuadrado de  $a$  más su cubo es igual a 96.
- La diferencia de  $a$  menos el triple de  $b$  es igual a 12.

- 52** El tiempo que queda de una película de Sebastián Cordero es el doble del que ha transcurrido ya. Si llamamos  $x$  al tiempo transcurrido, expresa algebraicamente el tiempo que queda de película.

- 53** Completa en tu cuaderno esta tabla.

	$3a^2$	$\frac{b}{3}$	$2(c + 1)$
La mitad			
El doble			
El cuadrado			
El doble del cuadrado			

- 54** Escribe la expresión que nos permite obtener el número de palillos necesarios para construir la siguiente figura, según el número de triángulos.



## 7.1. Valor numérico

En el ejemplo 5 de la página anterior establecimos que la expresión algebraica que nos permite obtener la altura de la planta con relación al tiempo transcurrido es  $3t + 1$ .

Para determinar cuántos días se necesitan para tener una altura determinada de la planta, solo tenemos que sustituir la letra  $t$  por el número dado en la expresión  $3t + 1$ . Obtendremos así su valor numérico.



### FÍJATE

Aunque podemos utilizar cualquier letra para simbolizar cantidades desconocidas, las que se emplean con más frecuencia son  $x$  e  $y$ .

 El **valor numérico** de una expresión algebraica es el número obtenido al sustituir las letras que aparecen en ella por números determinados y realizar las operaciones indicadas.

Así, la altura de la planta en 5 días será:

$$3t + 1 = 3 \cdot 5 + 1 = 16 \text{ mm}$$

Y al cabo de 8 días será de:

$$3t + 1 = 3 \cdot 8 + 1 = 25 \text{ milímetros}$$

Observa que el valor numérico de una expresión algebraica no es único, depende del valor que demos a la letra o letras que intervienen en ella.

### ejemplo 6

Calcula el valor numérico de  $3a^2 - 2ab^2$ .

a) Para  $a = 3$  y  $b = 2$       b) Para  $a = -2$  y  $b = -1$

- Sustituimos la letra  $a$  por 3 y la  $b$  por 2 en la expresión  $3a^2 - 2ab^2$ . Así:

$$3 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 9 - 2 \cdot 3 \cdot 4 = 27 - 24 = 3$$

- Sustituimos la  $a$  por  $-2$  y la  $b$  por  $-1$  en  $3a^2 - 2ab^2$ . Tendremos:

$$3 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) \cdot (-1)^2 = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 1 = 12 + 4 = 16$$

## Actividades



**55** Calcula el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas.

a)  $3x^2 + 2$  para  $x = 3$       b)  $(a + b)^2$  para  $a = 2$  y  $b = 3$

c)  $2xy + \frac{3x}{2}$  para  $x = 6$  e  $y = 2$

**56** El número de habitantes de una población de la Costa ecuatoriana aumenta en 500 personas cada año.

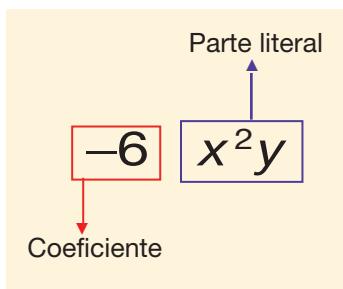
a) Expresa algebraicamente el aumento del número de habitantes dentro de  $x$  años.

b) ¿En cuántos habitantes habrá aumentado la población en 6 años?  
¿Y en 10 años?

## 7.2. Términos y coeficientes

Fíjate en la siguiente expresión algebraica.

$$a^2 + b^2 - 2 a b + 5$$



Cada uno de los sumandos de esta expresión algebraica se denomina **término**. Así pues, tendremos cuatro términos:

$$a^2 \qquad b^2 \qquad - 2 a b \qquad 5$$

Cada término puede constar de dos partes: una numérica, llamada **coeficiente**, y otra formada por las letras con sus exponentes, que se denomina **parte literal**.

Ten en cuenta que en algunos de los términos no se observa el coeficiente y en otros no se observa la parte literal. Así:

- La parte numérica o coeficiente de los términos  $a^2$  y  $b^2$ , 1, no aparece explícita.
- El cuarto término consta sólo de parte numérica, 5.

Observa los siguientes términos.

$$-5 x y^2 \qquad 2 x y^2 \qquad \frac{2}{5} x y^2$$

Todos ellos presentan algo en común: tienen las mismas letras elevadas a los mismos exponentes, es decir, su parte literal es la misma.

**Términos semejantes** son aquellos que tienen la misma parte literal.

### Actividades



**57** Indica el número de términos de cada una de estas expresiones algebraicas.

- a)  $5 a b c$       c)  $2 + 4 a - 3 a b - b$   
b)  $5 x^2 + y$       d)  $2 a + 3 b - 2 a b + a^2 b - 3$

— Señala el coeficiente y la parte literal de cada uno de los términos que aparecen en las expresiones algebraicas anteriores.

**58** De los siguientes términos, indica los que son semejantes.

$$5 a b ; 4 b ; \frac{1}{2} x y ; 2 a^2 b ; -7 a b ; 12 a ; 2 x y$$

**59** Escribe tres términos diferentes que sean semejantes a  $-2 x y^2$ .

**60** Escribe un término cuya parte literal sea  $x^2y$  y cuyo valor numérico para  $x = 2$  y para  $y = 1$  sea 20.

# 8 Operaciones con expresiones algebraicas

En ocasiones, es necesario operar con expresiones algebraicas del mismo modo que lo hacemos con los diferentes tipos de números. Veamos cómo proceder para efectuar la suma, la resta y la multiplicación de expresiones algebraicas.

## 8.1. Adición y sustracción

En la adición y la sustracción de expresiones algebraicas, sólo pueden sumarse y restarse los términos semejantes. El procedimiento es el siguiente:

Procedimiento	Ejemplos
<p>Si <b>todos</b> los términos son <b>semejantes</b>:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>— Se suman o restan los coeficientes.</li><li>— Se deja la misma parte literal.</li></ul>	$2a + 4a = a + a + a + a + a + a = 6a$ $5x - 2x = x + x + x + x + x - (x + x) = 3x$
<p>Si <b>no son semejantes todos</b> los términos:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>— Se suman o restan los términos semejantes entre ellos.</li></ul>	$2a + 3b + 3a - b = 5a + 2b$ $3 - 1 = 2$

## 8.2. Multiplicación

La multiplicación de dos términos de una expresión algebraica siempre puede efectuarse, aunque dichos términos no sean semejantes.

Procedimiento	Ejemplos
<ul style="list-style-type: none"><li>— Se multiplican los coeficientes.</li><li>— Se multiplican las partes literales.</li></ul>	$3a \cdot 4a = 12a \cdot a = 12a^2$ $4x \cdot 5y = 20xy$

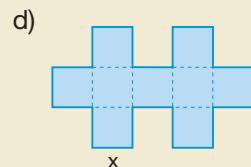
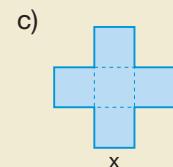
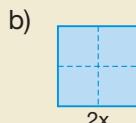
## Actividades



61 Efectúa las siguientes operaciones.

a)  $2x + 3x + 1$    b)  $2 + 3b - a - 2b$    c)  $3a - 2b + a - 3b + 5a$    d)  $5x - 2xy + 4x - y + 3xy$

62 Expresa algebraicamente el perímetro y el área de estos polígonos.



63 Calcula estos productos.

a)  $5x \cdot 3x^2$    b)  $2x \cdot 4x^2 \cdot 3x$    c)  $2ab \cdot 3ab^2$    d)  $\frac{1}{2}ab \cdot \frac{2}{3}abc$

### 8.3. Propiedad distributiva

Observa las siguientes figuras y las propiedades que se deducen.

#### FÍJATE

En las fórmulas de la propiedad distributiva de las operaciones con expresiones algebraicas, las letras  $a$ ,  $b$  y  $c$  representan expresiones algebraicas cualesquiera.

Así, si  $a = 2n$ ,  $b = 3n$  y  $c = n$ , la propiedad

$$a(b+c) = ab+ac$$

nos indica que

$$2n(3n+n) = 2n \cdot 3n + 2n \cdot n$$

	<p>El área del rectángulo azul es igual al área del rectángulo grande menos el área del rectángulo verde.</p>	<p><b>Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la resta.</b></p> $a(b-c) = ab-ac$

### 8.4. Factor común

La **aplicación de la propiedad distributiva** nos ha permitido transformar una multiplicación en sumas o restas de multiplicaciones. Esta misma propiedad nos permite también realizar el proceso inverso, es decir, *transformar sumas o restas en multiplicaciones*, proceso denominado sacar el **factor común**.

Veamos cómo extraer el factor común en unos ejemplos.

•  $5a + 5b = 5(a + b)$

•  $ax + ay + a = a(x + y + 1)$

Si a una expresión algebraica en la que hemos sacado el factor común le aplicamos la propiedad distributiva, obtenemos de nuevo la expresión algebraica original.

$$\frac{6bz - 6b - 6bzy^2}{\text{Factor común}} \xrightarrow{\text{Propiedad distributiva}} 6b(z - 1 - zy^2) = 6bz - 6b - 6bzy^2$$

#### Actividades

64 Desarrolla los siguientes productos aplicando la propiedad distributiva.

a)  $3(5x - 4y)$       b)  $4y(y + 2y^2)$       c)  $2a(3a - b + 1)$       d)  $x(1 + 2x - y)$

65 Completa en tu cuaderno:

a)  $6x^3 + 3x^2 = 3x^2(2x + \dots)$       b)  $2a^3 + 4a^2b - 6a^3b = 2a^2(\dots + \dots - \dots)$

66 Saca el factor común en las siguientes expresiones algebraicas.

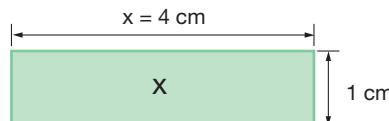
a)  $4x + 4y$       b)  $5x + 10xy + 5$       c)  $3xy + 6xz - x^2$       d)  $4a^2 - ab$

## 8.5. Representación concreta de monomios hasta grado 2

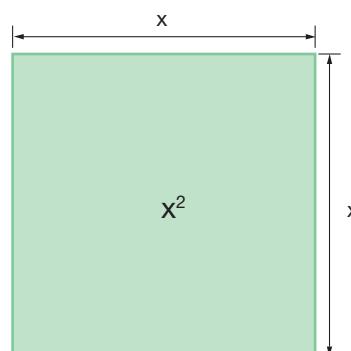
En algunas ocasiones, para realizar operaciones con expresiones algebraicas es útil construir material concreto. Con lo que podemos realizar las operaciones matemáticas de una manera fácil y divertida.

Observa el procedimiento:

- Designamos una letra que será nuestra variable:  $x$ , cada variable debe tener un material concreto con distinto tamaño.
- Construimos rectángulos verdes de cartulina o de foamy, por ejemplo de 4 cm de largo por 1 cm de ancho.



- Para construir el cuadrado de  $x$ , verificamos que tengan de ancho y de largo la longitud de la variable.



- Para representar la parte numérica de las expresiones algebraicas, creamos el número uno, formando cuadrados de 1 cm de lado.

Como no conocemos el valor de las variables, las dimensiones y la forma de la figura que representa la unidad de la parte numérica no está relacionada con las figuras que representan las variables.

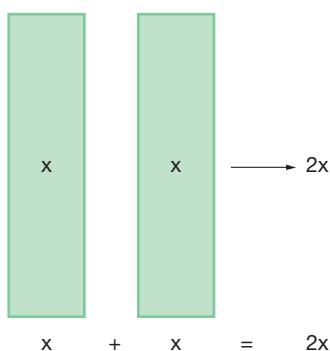
Representa en material concreto la expresión algebraica:  $2x$ .

### ejemplo 7

- En primer lugar, expandimos cada término de la expresión, para eliminar los coeficientes.

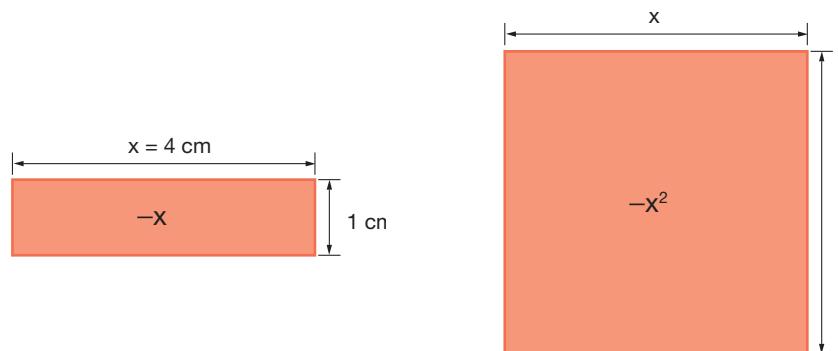
$$2x = x + x$$

- Agrupamos las figuras que representan a cada variable:



Ahora vamos a diseñar material concreto para los números y las variables que están precedidas por un signo negativo. Cuando realizamos operaciones con material concreto no se utilizan signos.

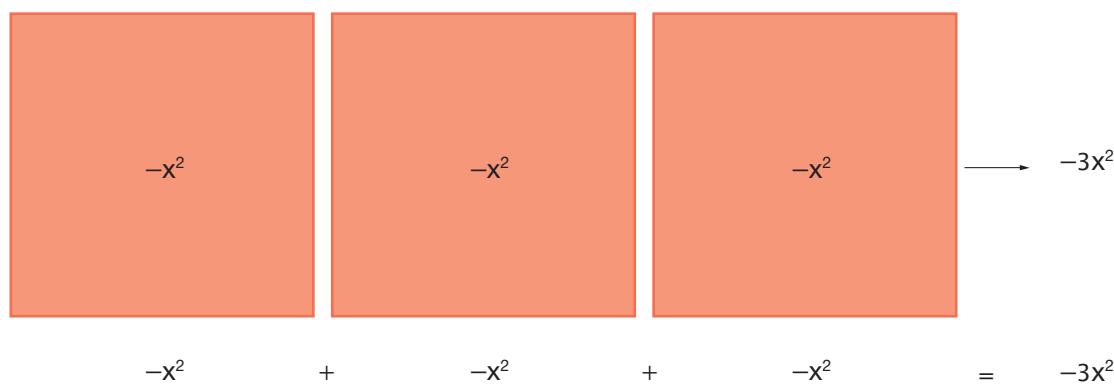
- Utilizamos la misma letra que empleamos para las variables, precedidas por el signo positivo.
- Construimos las variables y los cuadrados de las variables de las mismas dimensiones que utilizamos para la variable con signo positivo, pero lo hacemos de color rojo.



- Para crear la parte numérica negativa de las expresiones algebraicas, creamos el número  $-1$ , usando las mismas dimensiones que usamos para el  $1$  pero cambiando el color a rojo.

Representa la siguiente expresión algebraica:  $-3x^2$

**ejemplo 8**



## Actividades



**67** Crea el material concreto necesario para poder representar seis elementos de las variables  $X$  y  $Y$ , con sus respectivos cuadrados y valores negativos. También crea seis unidades numéricas positivas y seis negativas.

**68** Representa los siguientes monomios:

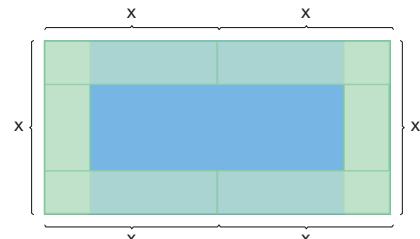
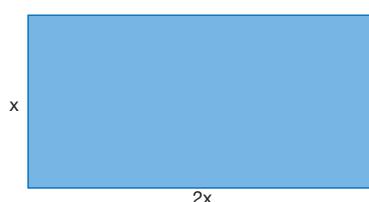
- |           |            |            |         |           |
|-----------|------------|------------|---------|-----------|
| a) $5x^2$ | b) $-4x$   | c) $6$     | d) $3y$ | e) $-y^2$ |
| f) $3y$   | g) $-6y^2$ | h) $-2x^2$ | i) $-2$ | j) $x$    |

## 8.6. Agrupación de monomios semejantes con material concreto

Para calcular el perímetro o el área de figuras geométricas regulares podemos utilizar material concreto.

Encuentra el perímetro de la siguiente figura geométrica.

**ejemplo 9**



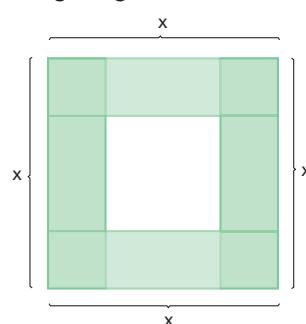
A cada lado de la figura lo representamos por una variable y aplicamos la fórmula para calcular el perímetro, es decir sumamos los lados.

$$P = x + 2x + x + x + 2x + x = 6x$$

Cuando debamos calcular el perímetro, de una figura geométrica más compleja que la anterior, podemos utilizar el material concreto que representa a las variables negativas.

Encuentra el perímetro de esta figura geométrica

**ejemplo 10**



Este es un cuadrado de lado x.

$$P = x + x + x + x$$

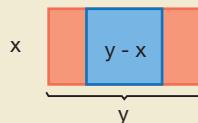
$$P = 4x$$

$$P = x + x + x + x = 4x$$

### Actividades

**69** Utilizando material concreto, encuentra el perímetro de un hexágono regular de lado x.

**70** Con material concreto encuentra el perímetro del cuadrado que se encuentra dentro del rectángulo.



**MUCHO OJO**

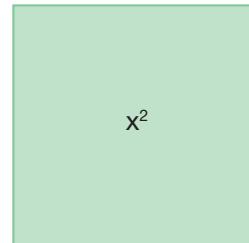
El material concreto de una variable no tiene ninguna relación con el de otra variable.

Utilizando material concreto también es posible calcular el área de algunas figuras geométricas, observa el ejemplo.

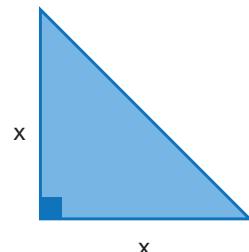
### ejemplo 11

Representa el área de un triángulo rectángulo isósceles, en el que un cateto es igual a  $x$ .

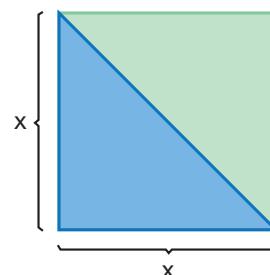
Como la variable que aparece en el problema es  $x$ , el área de la figura, será en función de  $x^2$ .



Construimos la figura geométrica considerando las medidas que hemos empleado para construir la variable.



Analizamos las dimensiones y la forma de la figura geométrica, para hallar alguna relación entre ésta con el material concreto.



### MUCHO OJO

Monomios de distinto signo pero igual variable y orden, se anulan entre sí.

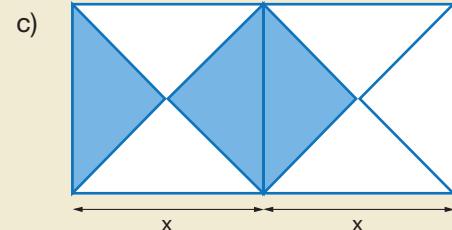
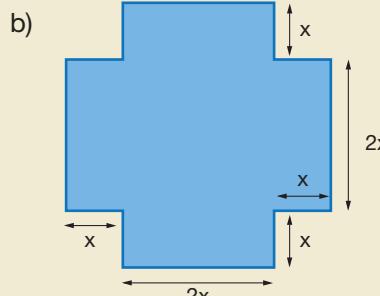
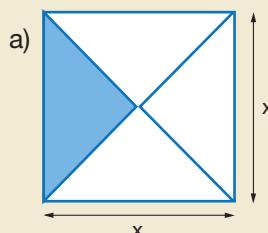
$$-x^2 + x^2 = 0$$

En este caso, el área del triángulo es la mitad del cuadrado de la variable.

$$A \text{ triángulo} = \frac{x^2}{2}$$

### Actividades

71 Encuentra el área de las figuras geométricas coloreadas, con ayuda de material concreto.

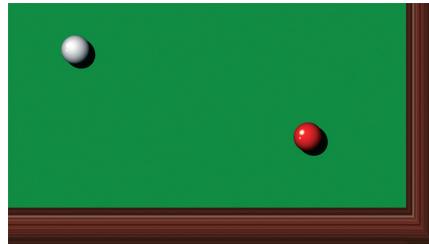


# Resolución de problemas

## Estrategia: Experimentación con la posible solución

En ocasiones, *imaginar la posible* solución del problema nos conduce a la solución real de éste. Esta estrategia es especialmente útil en problemas geométricos.

Averigua en qué punto de la banda debe chocar la bola blanca para que al rebotar golpee la bola roja. Considera que los ángulos formados por la trayectoria de la bola con la banda, antes y después de chocar con ésta, son iguales.

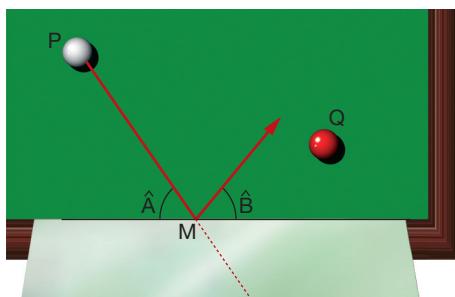


### ► Comprensión del enunciado

- Expresa el enunciado del problema con tus palabras.

### ► Planificación de la resolución

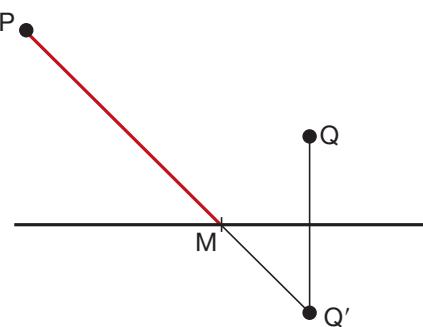
Supongamos que la bola choca en un punto  $M$  de la banda. Puesto que  $\hat{A} = \hat{B}$ , si colocáramos un espejo en la banda, veríamos a través de él que la bola continúa en línea recta después de chocar con ésta.



Para que la bola blanca golpee a la roja, esa recta deberá pasar por la imagen de la bola roja en el espejo. Basta pues con unir la bola blanca con el simétrico de la bola roja respecto del espejo.

### ► Ejecución del plan de resolución

- Trazamos  $Q'$ , el simétrico de  $Q$  respecto del espejo.
- Unimos  $P$  y  $Q'$ . El punto  $M$  es la solución.



### ► Revisión del resultado y del proceso seguido

Comprobamos con el transportador de ángulos que los ángulos formados por la trayectoria de la bola con la banda, antes y después de chocar en el punto  $M$ , son iguales.

## Actividades

- 72** Lee el siguiente problema: en qué punto del espejo debe incidir un rayo láser que pasa por A para que el rayo reflejado pase por B. Observa la gráfica.



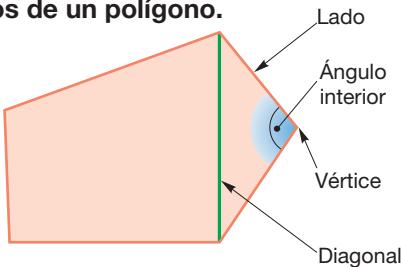
- 73** Expresa el enunciado del problema con tus palabras.

- 74** Imagina la posible solución. Recuerda que esto es muy útil en problemas geométricos.

- 75** Resuelve el problema y comprueba la solución.



- Un **polígono** es la región del plano limitada por una línea poligonal cerrada.
- **Elementos de un polígono.**



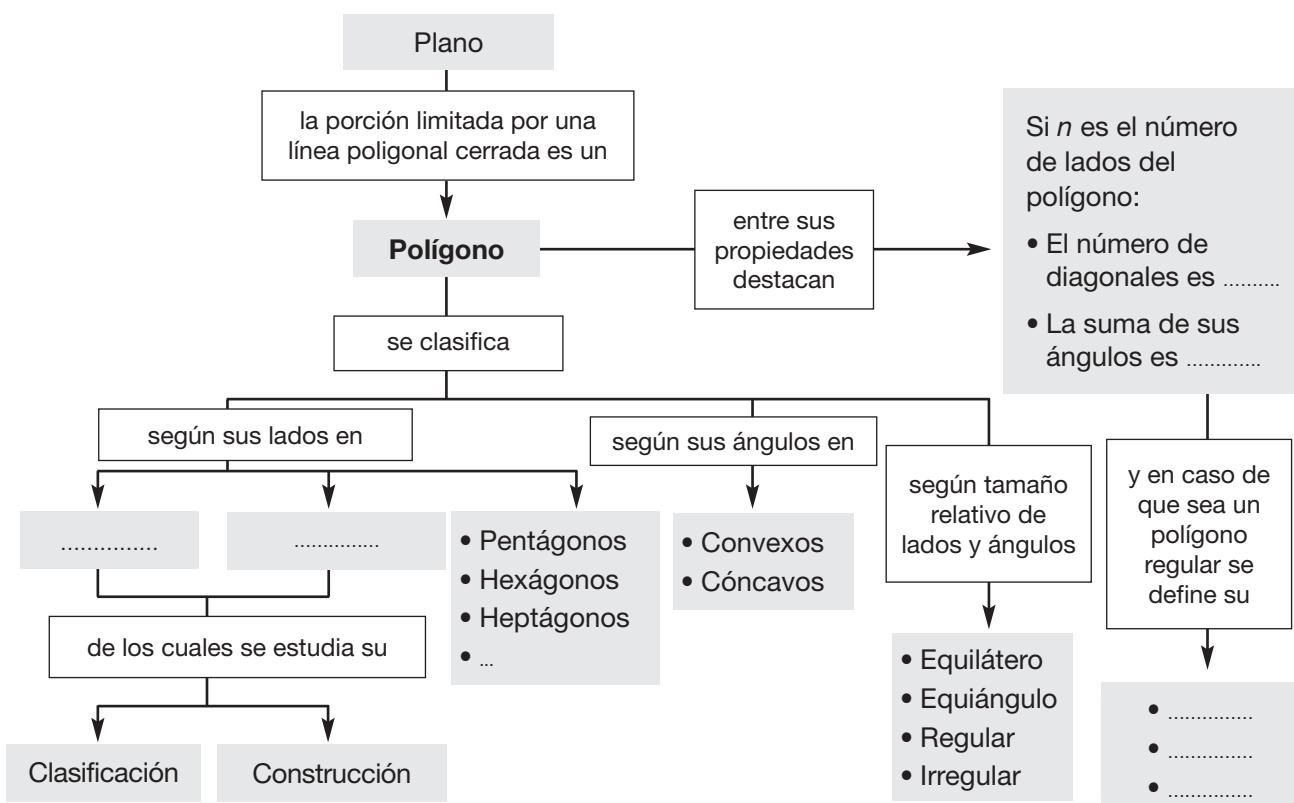
**Lados:** segmentos que forman la línea poligonal.

**Vértices:** extremos de los lados del polígono.

**Ángulos interiores:** regiones del plano interior del polígono comprendidas entre dos lados contiguos.

**Diagonales:** segmentos que unen dos vértices no adyacentes.

Repasa los conocimientos de geometría y completa mentalmente lo que hace falta:



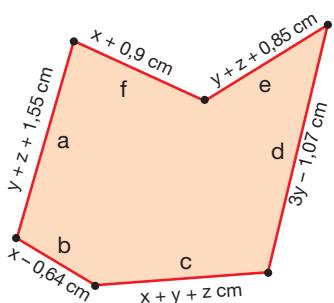
- Una **expresión algebraica** es una serie de números y letras unidos mediante los signos de las operaciones aritméticas.
- Al sustituir las letras de una expresión algebraica por números se obtiene el **valor numérico** de dicha expresión.
- Cada uno de los sumandos de una expresión algebraica se denomina **término**.

Cada término puede constar de dos partes: una numérica, llamada **coeficiente**, y otra formada por las letras con sus exponentes, que se denomina **parte literal**.

**Términos semejantes** son aquellos que tienen la misma parte literal.

- Podemos operar con expresiones algebraicas del mismo modo que lo hacemos con los diferentes tipos de números. Así, podemos efectuar la *suma*, la *resta* y la *multiplicación* de expresiones algebraicas, aplicar la *propiedad distributiva* y sacar *factor común*.

# Ejercicios y problemas integradores



- Calcula el perímetro de la siguiente figura sabiendo que  $x = 2$  cm,  $y = 1,4$  cm y  $z = 0,39$  cm.

- Observamos que la medida de cada uno de los lados de la figura es una expresión algebraica y por los datos presentados hay que hallar el valor numérico de cada lado.

**Lado a:**

$$\begin{aligned} y + z + 1,55 &= \\ 1,4 + 0,39 + 1,55 &= \\ 3,34 \text{ cm} & \end{aligned}$$

**Lado b:**

$$\begin{aligned} x - 0,64 &= \\ 2 - 0,64 &= \\ 1,36 \text{ cm} & \end{aligned}$$

**Lado c:**

$$\begin{aligned} x + y + z &= \\ 2 + 1,4 + 0,39 &= \\ 3,79 \text{ cm} & \end{aligned}$$

**Lado d:**

$$\begin{aligned} 3y - 1,07 &= \\ 3(1,4) - 1,07 &= \\ 4,2 - 1,07 &= \\ 3,13 \text{ cm} & \end{aligned}$$

**Lado e:**

$$\begin{aligned} y + z + 0,85 &= \\ 1,4 + 0,39 + 0,85 &= \\ 2,64 \text{ cm} & \end{aligned}$$

**Lado f:**

$$\begin{aligned} x + 0,9 &= \\ 2 + 0,9 &= \\ 2,9 \text{ cm} & \end{aligned}$$

- Si sabemos que el perímetro de una figura es igual a la suma de sus lados:

$$P = l + l + l + l + l + l$$

$$P = (3,34 + 1,36 + 3,79 + 3,13 + 2,64 + 2,9) \text{ cm}$$

$$P = 17,16 \text{ cm}$$

- Podemos realizar la suma de forma vertical, de tal forma que se ubiquen los monomios semejantes uno bajo otro:

a		y	+z	+1,55
b	x			-0,64
c	x	+y	+z	
d		3y		-1,07
e		y	+z	+0,85
f	x			+0,9
Total	3x	+6y	+3z	+1,59

La expresión algebraica del perímetro de la figura es:  $3x + 6y + 3z + 1,59$

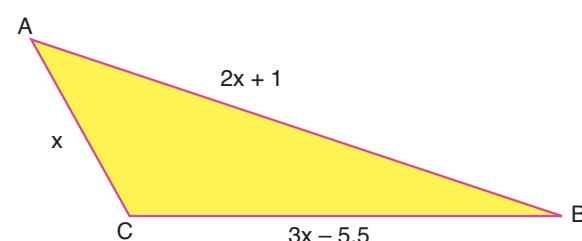
Ahora con esta expresión simplificada es más fácil hallar el valor numérico.

$$3(2) + 6(1,4) + 3(0,39) + 1,59 =$$

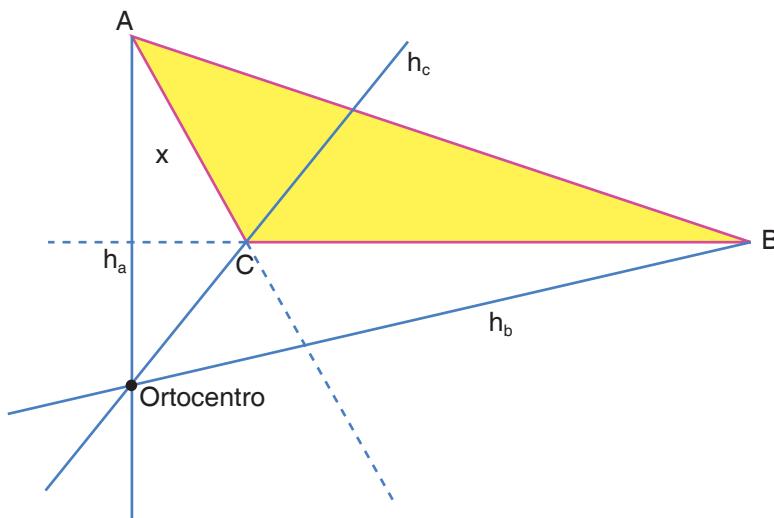
$$6 + 8,4 + 1,17 + 1,59 = 17,16$$

**R: El perímetro de la figura es 17,16 cm**

- Trazas las tres alturas del siguiente triángulo e indica cómo se llama el punto en el que se cortan. Calcula el valor de  $x$  sabiendo que el perímetro del triángulo es 19,5 cm.



- El triángulo que se observa según sus lados es obtusángulo y según sus lados es escaleno.
- Para trazar las alturas de este triángulo es necesario prolongar los lados que forman el ángulo obtuso.
- Prolongamos las alturas y el punto donde se cortan las tres alturas se llama ortocentro.
- En un triángulo obtusángulo el ortocentro se encuentra en el exterior.



Si conocemos que el perímetro del triángulo es 19,5 cm, podemos plantear la siguientes igualdad:  $x + 2x + 1 + 3x - 5,5 = 19,5$

Sumando los monomios semejantes:  $6x - 4,5 = 19,5$

Por tanto vamos a probar cuál puede ser el valor de  $x$  para que exista una igualdad:  $6x - 4,5 = 19,5$

Si $x = 1$	$6 \times 1 - 4,5 \neq 19,5$	$6 - 4,5 \neq 19,5$
Si $x = 2$	$6 \times 2 - 4,5 \neq 19,5$	$12 - 4,5 \neq 19,5$
Si $x = 3$	$6 \times 3 - 4,5 \neq 19,5$	$18 - 4,5 \neq 19,5$
Si $x = 4$	$6 \times 4 - 4,5 = 19,5$	$24 - 4,5 = 19,5$

**R: El valor de  $x$  es 4 cm, cada uno de sus lados mide: 4cm ,9 cm y 6,5 cm**

### Práctica

- Trazas las mediatrices, bisectrices y medianas del triángulo del problema anterior y calcula el valor de cada uno de sus lados sabiendo que  $x = 1,5$  cm



# Ejercicios y problemas

En tu cuaderno



## Comprensión de conceptos y conocimiento de procesos

### Polígonos

**76** ¿Qué diferencia existe entre una línea poligonal cerrada y un polígono?

**77** Investiga qué nombres reciben los polígonos de 13 y 15 lados.

**78** Dibuja cuatro señales de tráfico que tengan formas poligonales diferentes.

a) Explica el significado de cada una de ellas.

b) Escribe debajo de cada señal el nombre del polígono que representa.

**79** ¿Cuál es el menor número de lados que puede tener un polígono cóncavo? ¿Y un polígono convexo?

**80** Los ángulos interiores de un polígono miden  $106^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $110^\circ$  y  $84^\circ$ . ¿Cuántos vértices y cuántos lados tiene? ¿Es cóncavo o convexo?

**81** Dibuja un pentágono y un hexágono convexos. Calcula mentalmente:

a) El número de diagonales de un pentágono y el de un hexágono.

b) La suma de los ángulos de un pentágono y de un hexágono.

c) El número de ejes de simetría de un pentágono y de un hexágono.

**82** ¿Existe algún polígono que tenga mayor número de lados que de diagonales? ¿Y que tenga el mismo número de lados que de diagonales?

**83** ¿Cuántas diagonales tiene un eneágono?

**84** Si un polígono tiene 35 diagonales, ¿cuál es su número de vértices?

**85** Calcula las sumas de los ángulos interiores de los polígonos de 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 lados.

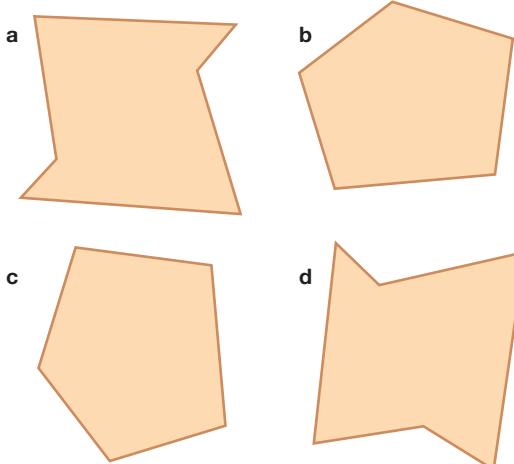
**86** Determina cuál es la amplitud del ángulo  $\hat{D}$  de un cuadrilátero  $ABCD$ , si los ángulos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$  miden, respectivamente,  $90^\circ$ ,  $80^\circ$  y  $70^\circ$ .

**87** El ángulo central de un polígono regular mide  $30^\circ$ . ¿De qué polígono se trata?

**88** ¿Existe un polígono regular cuyo ángulo central sea  $36^\circ$ ? ¿Y cuyo ángulo central mida  $37,5^\circ$ ? Razona tus respuestas.

**89** ¿Qué ángulo forman las apotemas correspondientes a dos lados contiguos de un pentágono regular?

**90** Empareja los polígonos que sean iguales, haciendo las mediciones oportunas. Explica el criterio seguido.



### Triángulos

**91** Dibuja, si existe, un triángulo que sea:

a) Isósceles y obtusángulo.

b) Escaleno y rectángulo.

c) Equilátero y obtusángulo.

**92** ¿Puede ser equilátero un triángulo rectángulo? ¿E isósceles? ¿Por qué?

**93** Construye un triángulo rectángulo cuyos lados midan 3 cm, 4 cm y 5 cm.

a) Traza las mediatrices y señala el circuncentro. ¿Está situado en el punto medio de la hipotenusa?

b) Dibuja la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo y cuyo centro es el circuncentro.

**94** Di cuáles de los siguientes enunciados son ciertos y explica el porqué.

a) Una de las medianas de un triángulo rectángulo coincide con uno de sus lados.

b) En un triángulo rectángulo el ortocentro coincide con uno de sus vértices.

c) En un triángulo equilátero las medianas coinciden con las alturas.

d) El baricentro de un triángulo es el punto donde se cortan las tres mediatrices.

## Cuadriláteros

- 95 Señala los diferentes cuadriláteros que aparecen en esta pintura y clasifícalos.



- 96 Completa las siguientes frases en tu cuaderno.

- La suma de todos los ángulos de un paralelogramo es .....
- Cada uno de los ángulos de un cuadrado mide .....
- El cuadrilátero que no tiene lados paralelos se denomina .....
- El cuadrilátero con los 4 lados iguales y los ángulos iguales dos a dos se denomina .....

- 97 Nombra los cuadriláteros que poseen estas características.

- Tienen los cuatro lados iguales y los ángulos no son rectos, pero son iguales dos a dos.
- No tienen lados paralelos.
- Tienen dos lados paralelos y los lados no paralelos son iguales.
- Tienen los ángulos y los lados iguales dos a dos.

- 98 Indica si los siguientes enunciados son ciertos y explica por qué.

- Un cuadrilátero es un cuadrado cuando todos sus lados tienen la misma longitud.
- Un cuadrilátero es un cuadrado cuando sus diagonales tienen la misma longitud.

- 99 Uno de los ángulos de un romboide mide  $35^\circ$ . ¿Cuánto miden los demás ángulos?

- 100 Construye un rectángulo cuya base mide 6 cm y es  $\frac{3}{2}$  de la altura.

- 101 Representa los rectángulos distintos que no sean cuadrados que pueden formarse sobre esta cuadrícula.



- 102 Dos lados contiguos de un paralelogramo son iguales y el ángulo que comprenden mide  $120^\circ$ . Constrúyelo y di de qué paralelogramo se trata.

- 103 Construye un rombo de 3 cm de lado sabiendo que uno de sus ángulos mide  $60^\circ$ .

- 104 ¿Son perpendiculares las diagonales de un rombo? ¿Se cortan en partes iguales?

— Construye un rombo cuyas diagonales midan 6 cm y 4 cm.

- 105 Formen grupos y realicen un trabajo sobre los polígonos en nuestro entorno. Recojan fotografías de su localidad o de distintas publicaciones que presenten objetos con formas poligonales.

— Clasifiquen los polígonos según el número de lados y según sus ángulos.

## Expresiones algebraicas

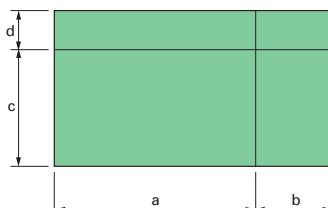
- 106 Representamos por  $x$  la edad actual de Marcos. Escribe mediante una expresión algebraica su edad en cada uno de los siguientes casos.

- Dentro de 5 años.
- Hace 4 años.
- Cuando tenga el triple de la edad que tiene ahora.
- Cuando su hermano que ahora tiene 7 años tenga el doble de esta edad.

- 107 Escribe las expresiones algebraicas correspondientes a las siguientes frases.

- El resultado de añadir 5 al triple de un número es 20.
- La suma de las tres quintas partes de un número más tres medios es uno.
- El 5 % de un número es 20.
- La suma de dos números pares consecutivos es 30.

- 108** Expresa el perímetro y el área de cada uno de los nueve rectángulos de la siguiente figura.



- 109** Escribe una frase que defina cada una de estas expresiones algebraicas.

a)  $3a - b$       c)  $\frac{a}{3} - 4$       e)  $\frac{a+b}{2}$   
 b)  $3a^2 + b$       d)  $a^2 - b^2$       f)  $(a+b)^2$

- 110** Señala el coeficiente y la parte literal de cada uno de los siguientes términos y clasifícalos en términos semejantes.

a)  $4xy$       d)  $3xy^2$       g)  $26x^2y$   
 b)  $\frac{1}{2}xy$       e)  $2x^2y$       h)  $\frac{3^2xy^2}{7}$   
 c)  $\frac{a}{3}$       f)  $5a$       i)  $xy$

- 111** Calcula el valor numérico de las expresiones algebraicas siguientes.

a)  $2x + 5$  para  $x = 4$   
 b)  $a + ab + b$  para  $a = 5$  y  $b = \frac{1}{3}$   
 c)  $\frac{x-6}{2}$  para  $x = 12$

- 112** El valor numérico de  $2x + 6$  para  $x = 2$  coincide con el valor numérico de  $5$  y para un determinado valor de  $y$ . Halla dicho valor de  $y$ .

## Operaciones con expresiones algebraicas

- 113** Efectúa:

a)  $3y + 2x - 5y + x - 3y + 2x$   
 b)  $5ab \cdot 4a^2b$   
 c)  $\frac{2}{3}xy^2 \cdot \frac{5}{4}x^2y^3 \cdot 5x$

- 114** Desarrolla los siguientes productos aplicando la propiedad distributiva.

a)  $2a(b-a)$       c)  $2xy(x+3y-x^2)$   
 b)  $(a-3ab)b$       d)  $x^2(1+2x-y^2)$

- 115** Saca factor común en la siguiente expresión algebraica:  $2xy - 4x + 2x^2y = 2x(y - 2 + xy)$

- 116** Saca factor común en las siguientes expresiones algebraicas.

a)  $\frac{1}{2}ab^2c - 2a^2bc^2$   
 b)  $3xy - 9x^2y + 6xy^2$   
 c)  $5a - 25ca^2 + 15abc$

- 117** Completa en tu cuaderno:

a)  $25x^2 + 5x = 5x(5x + \dots)$   
 b)  $a^3b - 9a^2b^2 = a^2b(\dots - \dots)$   
 c)  $8a^3 + 16a^2b - 24a^2b^2 + 18a^3b^7 = 2a^2(\dots + \dots - \dots + \dots)$

- 118** Usando material concreto representa y simplifica los siguientes monomios:

a)  $3x^2$   
 b)  $4y$   
 c)  $2$   
 d)  $5x$

## Aplicación en la práctica

- 119** Tenemos 88 palillos y 68 cerillas, y queremos construir con ellos polígonos con el mismo número de lados y que éste sea el mayor posible. Además, no mezclaremos en una misma figura palillos y cerillas y no queremos que nos sobren ninguno de ellos.

- a) Determina el número de lados de estos polígonos.  
 b) ¿Cuántos polígonos construidos con palillos resultan? ¿Y cuántos con cerillas?

- 120** Una plaza tiene forma de triángulo y sus lados miden 18 m, 15 m y 18 m. Se quieren disponer postes de luz equidistantes entre sí bordeando la plaza y de manera que haya una en cada esquina.

- a) ¿Cuál es el mínimo número de postes de luz que debemos colocar?  
 b) ¿Cuántos postes de luz se distribuirán en cada uno de los lados?

- 121 Representa los centros y los ejes de simetría de las siguientes figuras planas:

Rectángulo	Triángulo isósceles
Rombo	Trapecio rectángulo
Triángulo rectángulo	Trapecio isósceles

- 122 Un automóvil tiene un consumo medio de 7,6 litros de gasolina cada 100 kilómetros.

- Escribe una expresión algebraica que indique su consumo al cabo de  $x$  kilómetros.
- Aproximadamente, ¿cuántos litros consume al recorrer 150 kilómetros? ¿Y al recorrer 180 kilómetros?

- 123 Una empresa de alquiler de vehículos cobra \$ 18 diarios por el alquiler de un automóvil más \$ 0,75 por kilómetro recorrido.

- Escribe mediante una expresión algebraica el precio que debe pagarse por alquilar el automóvil durante  $x$  días y recorrer  $y$  kilómetros.
- Halla el precio que debe pagarse por alquilar un automóvil 3 días y recorrer 523 kilómetros.

- 124 El número de libros de la biblioteca de un colegio es igual al triple de alumnos del centro más 150. El número de alumnos que asisten, entre los dos turnos, es el doble de la capacidad de las aulas, que es de 200 personas. ¿Cuántos libros hay en la biblioteca?

- 125 Entra en Internet en la página <http://platea.pntic.mec.es/~anunezca/Revista/Ingenioso2/Alkhwarizmi.htm> e indica a quién se conoce como padre del álgebra, y su lugar y su fecha de nacimiento.

- 126 En la página <http://aula.elmundo.es/aula/laminas/lamina1079950514.pdf> aparece otro significado de la palabra álgebra. Comprueba si es cierto en el diccionario.

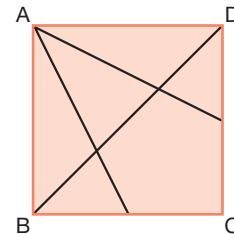
### Más a fondo

- 127 Busca información sobre la construcción de polígonos estrellados a partir de polígonos regulares en <http://roble.pntic.mec.es/~jarran2/cabriweb/poliestrellado.htm> y construye mediante la aplicación todos los polígonos estrellados que aparecen para un polígono regular de 15 lados.

- 128 Trazamos dos segmentos desde el vértice  $A$ , uno hasta el punto medio del segmento  $BC$  y otro hasta el punto medio del segmento  $CD$ , y la diagonal que no pasa por dicho vértice.

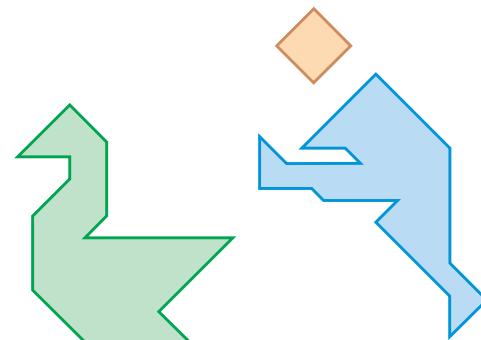
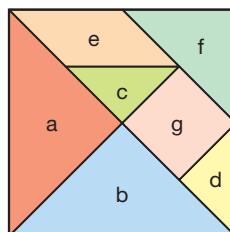
Como puedes comprobar, en la figura se cumple que los tres segmentos en los que se divide la diagonal son iguales. ¿Sabrías decir por qué?

*Indicación.* Considera dos triángulos rectángulos con vértice en  $A$  y aplícales la propiedad enunciada en la actividad 32.



- 129 El *tangram* es un rompecabezas chino constituido por siete piezas con las que pueden obtenerse infinidad de figuras. Observa la de la derecha.

- Clasifica los diferentes triángulos y cuadriláteros que aparecen, e indica si hay figuras iguales.
- Construye con cartulina tu propio *tangram* e intenta obtener las siguientes figuras.



- 130 Aplica la propiedad distributiva y reduce los términos semejantes que obtengas en cada una de estas expresiones.

- |                     |                |
|---------------------|----------------|
| a) $(a + b)^2$      | c) $(a - b)^2$ |
| b) $(a + b)(a - b)$ | d) $(a + b)^3$ |

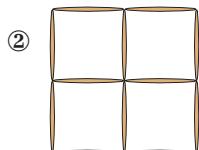
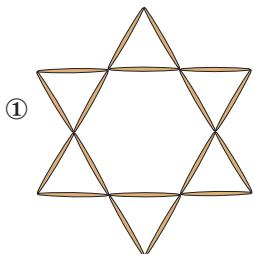
- 131 Obtén la suma de los cien primeros números naturales. A partir de ella, deduce la suma de los cien primeros números pares y la de los cien primeros números impares.

— ¿Te atreves a encontrar la fórmula general de la suma de los  $n$  primeros números naturales? ¿Y la de los  $n$  primeros números pares? ¿Y la de los  $n$  primeros números impares?



## ► Figuras con palillos

Observa las siguientes figuras formadas con palillos.



Mueve dos palillos en cada una de las figuras y obtén:

- En ①, una figura que tenga sólo 6 triángulos.
- En ②, una figura formada por 7 cuadrados.

## ► Construye figuras sin levantar el lápiz del papel

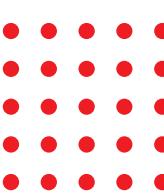
Dibuja la figura de la derecha formada por 8 segmentos consecutivos sin levantar el lápiz del papel y sin pasar por el mismo segmento más de una vez. ¿Por cuántos triángulos está formada? ¿Cómo son?



Une los 4 puntos con 3 segmentos consecutivos de manera que obtengas un triángulo rectángulo.



Une los 25 puntos de este cuadrado con 8 segmentos consecutivos sin levantar el lápiz del papel.



## Buen Vivir

### Hábitat y vivienda



Los siguientes artículos de la Declaración de los Derechos Humanos sustentan y garantizan el derecho de las personas a la vivienda.

#### Art. 17

1. Toda persona tiene derecho a la propiedad, individual y colectivamente.
2. Nadie será privado arbitrariamente de su propiedad.

#### Art. 25

1. Toda persona tiene derecho a un nivel de vida adecuado que le asegure, a sí como a su familia, la salud y el bienestar, y en especial la alimentación, el vestido, la vivienda, la asistencia médica y los servicios sociales necesarios; tiene asimismo derecho a los seguros en caso de desempleo, enfermedad, invalidez, viudez, vejez u otros casos de pérdida de sus medios de subsistencia por circunstancias independientes de su voluntad.

#### Actividades



1. Investiguen los datos de las personas sin vivienda en el Ecuador.

2. Observa la situación de tu localidad: ¿hay más personas con vivienda o sin vivienda?; ¿dónde y cómo viven quienes no la poseen?



3. Si el acceso a la vivienda es un derecho, ¿por qué creen que existen tantas personas sin casa?



4. Generen una campaña sobre los Derechos Humanos en su institución. Para ello, busquen las mejores estrategias para comunicar y crear conciencia entre sus compañeros, sobre todo relacionado con el derecho a la vivienda.



5. Recuerda que no solo tenemos derechos, también la obligación de respetar la naturaleza, preservar un ambiente sano y utilizar los recursos naturales de modo racional, sustentable y sostenible.



6. Todos tenemos el derecho y la obligación de conocer la realidad de nuestro país. ¿Sabías que muchos ecuatorianos carecen de lo indispensable para vivir? ¿Qué podemos hacer para construir una sociedad más justa?



Si logras resolver el 70 % de estas actividades individuales y grupales, puedes avanzar.

1. Nombra tres objetos de tu entorno en los que observes triángulos y cuatro objetos de tu entorno en los que observes cuadriláteros.

2. Dibuja un hexágono convexo irregular y un heptágono cóncavo irregular.

3. ¿Cuándo son iguales dos polígonos?

4. Escribe una frase que defina cada una de las siguientes expresiones algebraicas.

a)  $2a^3$       b)  $(a-b)^3$       c)  $\frac{a+b}{2}$

5. Halla el valor numérico que adquiere la expresión

$$3x^2 - \frac{x}{2} \text{ para } x = 6.$$

— Escribe una expresión algebraica cuyo valor numérico para  $x = 1$  sea 12.

6. Aplica la propiedad distributiva y reduce los términos semejantes.

$$4(x+2) + x^2 - 2x - x(x+1)$$

7. Efectúa:

a)  $5ab - 2b + 3a + 2ab - b$

1. De las proposiciones siguientes, indiquen cuáles son verdaderas y cuáles son falsas.

- a) Los lados de los polígonos son segmentos.
- b) Un polígono con dos diagonales es un cuadrilátero.
- c) Un octógono tiene ocho ángulos.
- d) Todo polígono tiene por lo menos tres ángulos cóncavos.

2. Calculen el número de diagonales de un decágono regular y el valor de cada uno de sus ángulos centrales.

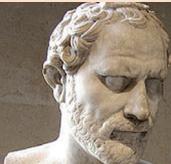
3. Hagan un esquema que incluya toda la clasificación de los cuadriláteros.

4. En un estacionamiento hay el triple de autos que de motos. Representen por  $x$  el número de motos y expresenlo en lenguaje algebraico:

- a) El número de automóviles.
- b) El número de vehículos.

5. Saquen factor común en las siguientes expresiones algebraicas.

a)  $2x^2 + 3x$       b)  $5a^2b - ab$



## Sección de historia

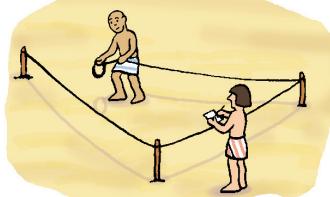
Algunos animales son capaces de identificar figuras geométricas sencillas: triángulos, cuadriláteros, círculos...



Las primeras civilizaciones, al utilizar objetos con formas geométricas, se plantean cuestiones sobre medidas, lo que motiva el nacimiento de la geometría.



Los egipcios utilizaban métodos geométricos para repartir las parcelas de tierra, inundadas periódicamente por el Nilo.



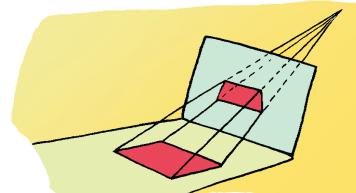
Tales (600 a. C.), tras haber estado en Egipto, introduce la geometría en Grecia.



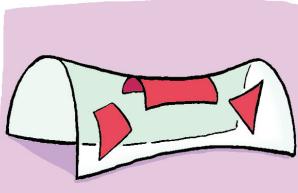
En la Edad Media, los árabes y los griegos bizantinos traducen y comentan textos griegos clásicos de geometría.

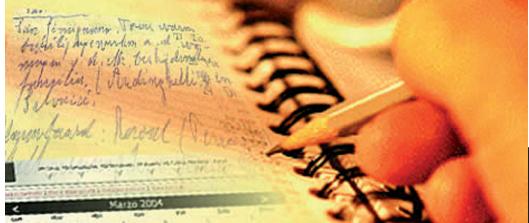


En el siglo XV, la geometría proyectiva estudia los polígonos desde el punto de vista de la perspectiva.



Actualmente, sólo se estudian polígonos en geometría proyectiva.





# Crónica matemática

Observa las distintas formas poligonales que pueden aparecer en la naturaleza tanto a nivel macroscópico («Los polígonos en el entorno») como a nivel microscópico («Los ladrillos de la materia»).

## Los polígonos en el entorno

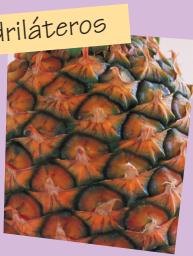
¿Alguna vez te has parado a observar detenidamente la naturaleza?

Si es así, quizás te has dado cuenta de que en ella aparecen numerosas formas poligonales.

<http://users.frii.com>



Triángulos



Cuadriláteros

<http://galeria.porcolombia.info>



Pentágonos



Hexágonos

<http://www.dalequedale.com>

## Los ladrillos de la materia

Los átomos se unen para formar moléculas y redes cristalinas que determinan las características de las sustancias. Muchas de estas estructuras presentan una geometría poligonal.

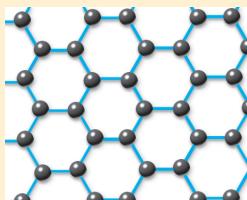
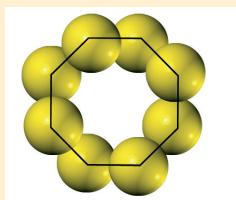
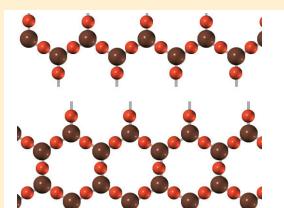


Gráfico. En cada vértice se sitúa un átomo de carbono.



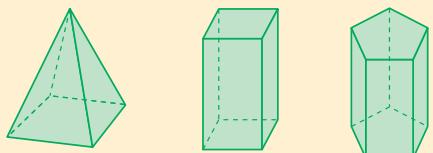
Azufre. Molécula de 8 átomos de azufre.



Los silicatos, combinación de silicio y oxígeno, forman cadenas, dobles cadenas, láminas...

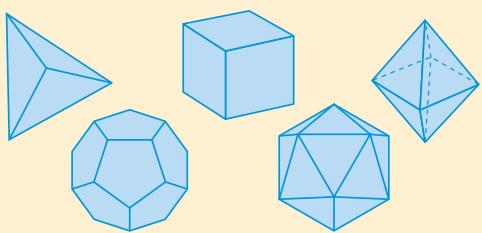
## Poliedros

Un **poliedro** es una figura del espacio cerrada limitada por polígonos planos.



Las caras de los **poliedros regulares** son polígonos regulares y todas son iguales.

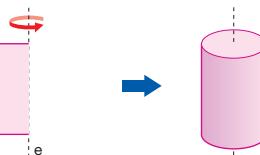
Observa que sólo existen 5 poliedros regulares:



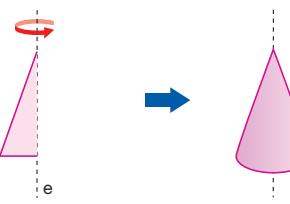
## Volúmenes de revolución

Un **volumen de revolución** es aquel que se forma cuando una figura plana gira  $360^\circ$  respecto a un eje.

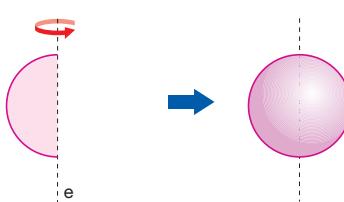
Así, la rotación del rectángulo genera el cilindro.



La rotación de un triángulo rectángulo genera el cono.



La rotación del semicírculo genera la esfera.



# Módulo

# 5

Bloques: Geométrico.  
Medida



Las distancias medidas en un mapa deben ser proporcionales a las distancias reales.

Imagínate que en la carretera Panamericana hay cuatro casas. La primera al inicio de ésta. La segunda a 4 km de la primera. La tercera a 7 km de la primera, y la última se encuentra al final de la carretera, a 10 km.

Si en un mapa esta carretera mide 6 cm, ¿a qué distancia colocarías cada casa en él?

# Proporcionalidad geométrica



Con este conocimiento de proporcionalidad serás capaz de expresar este concepto utilizando el lenguaje geométrico, así como reconocer figuras semejantes y aplicar estos conocimientos en la resolución de problemas.

## DCD Destrezas con criterios de desempeño

- Determinar el factor de escala entre dos triángulos semejantes.
- Determinar la escala entre figuras semejantes en la aplicación de Tales.
- Aplicar el teorema de Tales en la resolución de figuras geométricas similares.
- Reconocer la semejanza de triángulos en la resolución de problemas.

- Reconocer líneas de simetría en figuras geométricas.
- Aplicar los conceptos geométricos elementales a la resolución de problemas de la vida cotidiana.
- Usar medios informáticos para realizar construcciones geométricas.
- Valorar el uso de recursos y herramientas matemáticas para afrontar situaciones que lo requieran.



## Prerrequisitos

### Recuerda

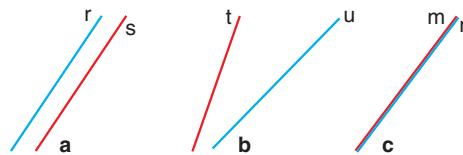
- Las fracciones  $\frac{a}{b}$  y  $\frac{c}{d}$  son **equivalentes** si se cumple que  $a \cdot d = b \cdot c$ .
- Dos **rectas** son **paralelas** si no tienen ningún punto en común.
- Dos **rectas** son **secantes** si tienen un único punto en común.
- Dos ángulos son **correspondientes** si tienen un lado común y el otro paralelo.
- Un **polígono** es la región del plano limitada por una línea poligonal cerrada.
- Los **polígonos regulares** tienen todos sus ángulos y todos sus lados iguales.
- El **perímetro** de un polígono es la suma de las longitudes de sus lados.
- El **área** de un polígono es la medida de la extensión que ocupa.

### Evaluación diagnóstica

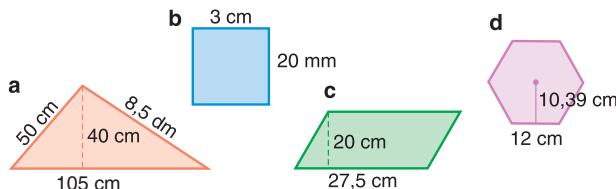
- Simplifica estas fracciones.

a)  $\frac{24}{14}$     b)  $\frac{5}{10}$     c)  $\frac{210}{410}$

- Escribe tres fracciones equivalentes a cada una de éstas. a)  $\frac{1}{2}$     b)  $\frac{3}{10}$     c)  $\frac{2}{7}$
- Si dibujamos cuatro puntos en una recta, ¿cuántos segmentos se forman?
- Indica la posición relativa de las rectas representadas en la figura.



- ¿Cómo se denomina un polígono de cinco lados? ¿Y de seis?
- Calcula los perímetros y las áreas de los siguientes polígonos y di si son regulares o no.



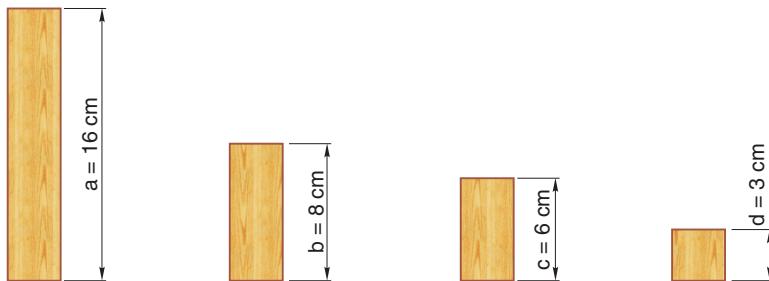
### Educación, cultura y saberes ancestrales

Art. 21.- Las personas tienen derecho a construir y mantener su propia identidad cultural, a decidir sobre su pertenencia o no a una o varias comunidades culturales y a expresar dichas elecciones; a la libertad estética; a conocer la memoria histórica de sus culturas y a acceder a su patrimonio cultural; a difundir sus propias expresiones culturales y tener acceso a ellas.

Constitución de la República del Ecuador, 2008.

# 1 Razón y proporcionalidad de segmentos

Observa los listones dibujados en la figura siguiente. Fíjate en algunos de los cocientes que pueden formarse a partir de sus longitudes.



$$\frac{a}{b} = \frac{16}{8} = 2$$

$$\frac{b}{c} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{6}{3} = 2$$



## FÍJATE

La igualdad entre dos razones es una proporción.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$



Se llama **razón** de dos segmentos de longitudes  $m$  y  $n$  al cociente entre estas longitudes,  $\frac{m}{n}$ .

## MUCHO OJO

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

Los segmentos  $a$  y  $b$  no tienen la misma razón que  $b$  y  $c$ . En cambio observa que los segmentos  $a$  y  $b$  tienen la misma razón que  $c$  y  $d$ . Diremos entonces que los segmentos  $a$  y  $b$  son **proporcionales** a los segmentos  $c$  y  $d$ , y escribiremos:

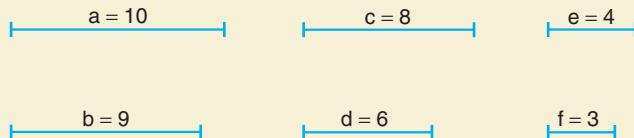
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

Este valor  $k$  se llama **constante** o **razón de proporcionalidad**.

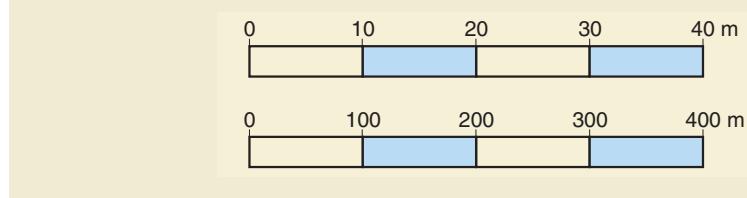
## Actividades



- 1 Dados estos segmentos, forma parejas que estén en la proporción  $\frac{3}{2}$ .



- 2 Dibuja estos seis segmentos: AB, CD, EF, GH, IJ, KL; de forma que se cumpla la razón de proporcionalidad siguiente:  $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH} = \frac{IJ}{KL} = 3$
- 3 ¿Qué razón de proporcionalidad hay entre estas dos escalas?

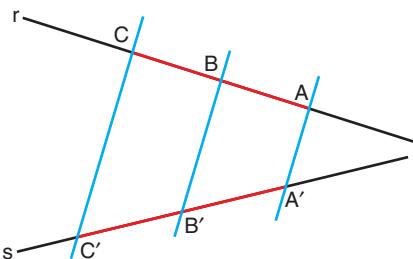


## 2 Rectas secantes cortadas por paralelas

Veamos la relación que se establece entre los segmentos que obtenemos al cortar dos rectas secantes con un conjunto de rectas paralelas.

### 2.1. Secantes cortadas en segmentos iguales

Observa la siguiente figura.



Las rectas  $r$  y  $s$  son secantes.

Tres rectas paralelas cortan  $r$  y  $s$ .

Las tres rectas paralelas determinan dos segmentos iguales sobre  $r$ .

$$\overline{AB} = \overline{BC}$$

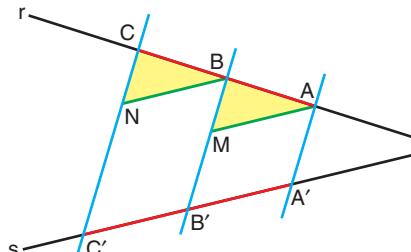
Vamos a demostrar que los segmentos determinados por las rectas paralelas sobre  $s$  también son iguales:  $\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$ .

Trazamos segmentos paralelos a  $s$  desde los puntos  $A$  y  $B$ , tal y como muestra la figura.

Si ahora consideramos los triángulos  $AMB$  y  $BNC$ , podemos ver:

- Tienen un lado igual  $AB = BC$ , por construcción.
- Los tres ángulos son iguales, ya que son ángulos agudos de lados paralelos.

Así, los dos triángulos son iguales y se cumple:



$$\overline{AM} = \overline{BN}$$

Además, por paralelismo:

$$\overline{AM} = \overline{A'B'} ; \overline{BN} = \overline{B'C'}$$

Y, por lo tanto, concluimos que:

$$\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$$

Los dos segmentos determinados sobre  $s$  por las tres rectas paralelas son iguales.

Este resultado puede generalizarse para cualquier conjunto de rectas paralelas.

→ Si un conjunto de **rectas paralelas** corta a dos **rectas secantes** de forma que los segmentos determinados en una de ellas son **iguales**, los segmentos correspondientes determinados en la otra también son **iguales**.

## 2.2. Teorema de Tales

Veamos ahora lo que ocurre si las rectas paralelas no determinan segmentos iguales sobre las rectas secantes.

<p>Las rectas <math>r</math> y <math>s</math> son secantes.</p>	<p>Seis rectas paralelas cortan <math>r</math> y <math>s</math> determinando segmentos iguales. La longitud de los segmentos sobre <math>r</math> es <math>u</math>. La longitud de los segmentos determinados sobre <math>s</math> es <math>u'</math>.</p>	<p>Consideramos los puntos <math>A, B</math> y <math>C</math> sobre <math>r</math> y sus puntos correspondientes sobre <math>s</math>. Estos puntos determinan sobre <math>r</math> segmentos de distinta longitud.</p> $\overline{AB} \neq \overline{BC}$
---	---	--

Vamos a comprobar que los segmentos  $A'B'$  y  $B'C'$  determinados sobre  $s$  son proporcionales a los segmentos  $AB$  y  $BC$  determinados sobre  $r$ :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

— La longitud de cada segmento es:

$$\overline{AB} = 2u; \quad \overline{BC} = 3u; \quad \overline{A'B'} = 2u'; \quad \overline{B'C'} = 3u'$$

— Si ahora nos fijamos en la relación entre los segmentos, obtenemos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2u}{3u} = \frac{2}{3} \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{2u'}{3u'} = \frac{2}{3}$$

— Y, por lo tanto, llegamos al resultado:

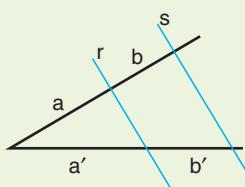
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

➔ Si dos **rectas secantes** son cortadas por un conjunto de **rectas paralelas**, los segmentos determinados en una de ellas son **proporcionales** a los segmentos correspondientes determinados en la otra.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \dots$$

### FÍJATE

El teorema de Tales puede aplicarse también para determinar si dos rectas son paralelas o no. Observa la figura.



Si se verifica que

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

entonces las rectas  $r$  y  $s$  son paralelas.

Esta conclusión se conoce como **teorema de Tales**, ya que fue el matemático y filósofo griego Tales de Mileto, quien lo enunció por primera vez en el siglo VI a. C.

Los segmentos  $A'B'$  y  $B'C'$  reciben el nombre de **proyección paralela** de los segmentos  $AB$  y  $BC$  sobre la recta  $s$ .

Además,  $A'B'$  y  $B'C'$  son los segmentos **homólogos** de  $AB$  y  $BC$ , respectivamente.

Vamos a ver cómo aplicar el teorema de Tales para hallar medidas indirectas.

### ejemplo 1

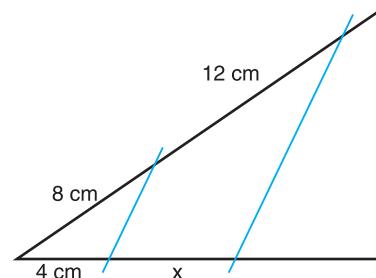
Calcula la longitud  $x$  del segmento de la figura.

Por el teorema de Tales, sabemos que los segmentos determinados sobre dos rectas secantes por un conjunto de rectas paralelas son proporcionales.

Así pues, podemos establecer la proporción siguiente:

$$\frac{8}{4} = \frac{12}{x} \Rightarrow x = \frac{12 \cdot 4}{8} = 6$$

La longitud del segmento es 6 cm.



### ejemplo 2

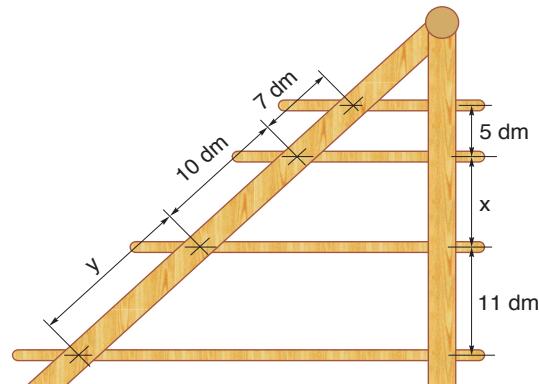
Los peldaños de la grada representada en la figura son paralelos. Calcula las longitudes de la grada representadas como  $x$  e  $y$ .

Si aplicamos el teorema de Tales, podemos establecer las siguientes proporciones entre las diversas longitudes de la grada:

$$\frac{7}{5} = \frac{10}{x} \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 10}{7} = \frac{50}{7} = 7,14$$

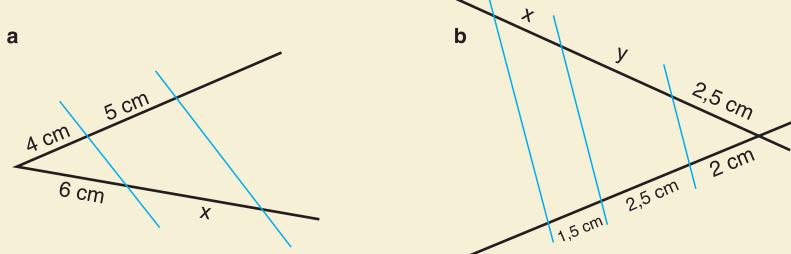
$$\frac{7}{5} = \frac{y}{11} \Rightarrow y = \frac{7 \cdot 11}{5} = \frac{77}{5} = 15,40$$

Las longitudes de  $x$  e  $y$  son 7,14 dm y 15,40 dm, respectivamente.

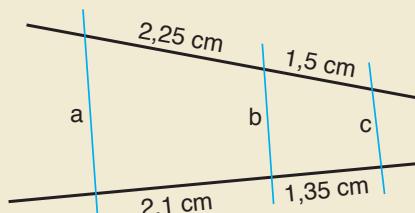


## Actividades

4 Encuentra las longitudes  $x$  e  $y$ .



5 Observa la figura de la derecha. ¿Puedes afirmar que las rectas  $a$ ,  $b$  y  $c$  son paralelas?



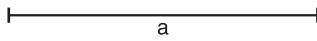
## 2.3. Aplicaciones del teorema de Tales

A continuación, estudiaremos algunas de las diferentes aplicaciones del teorema de Tales.

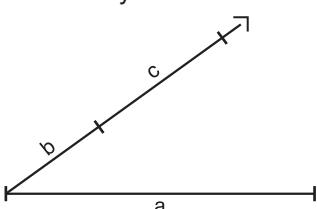
### División de un segmento en partes proporcionales a unos segmentos dados

En primer lugar, veremos cómo dividir un segmento de longitud  $a$  en dos partes proporcionales a los segmentos de longitudes  $b$  y  $c$ .

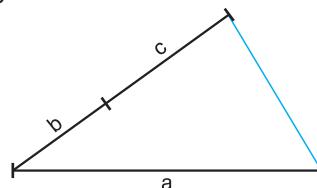
- Dibujamos el segmento  $a$ .



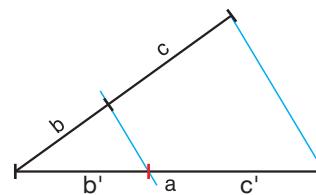
- Desde uno de sus extremos, dibujamos una semirrecta en la que situamos consecutivamente los segmentos  $b$  y  $c$ .



- Unimos el extremo libre del segmento  $c$  con el extremo libre del segmento  $a$ .



- Desde el extremo del segmento  $b$ , trazamos una recta paralela al segmento dibujado en el punto anterior.



$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

$$\frac{b'}{c'} = \frac{b}{c}$$

- Sobre el segmento hemos obtenido dos segmentos proporcionales a los segmentos  $b$  y  $c$ .

### ejemplo 3

*Dos personas quieren repartirse 20 m de cable eléctrico en partes proporcionales a 4 y 8, respectivamente. ¿Cuántos metros le tocarán a cada una?*

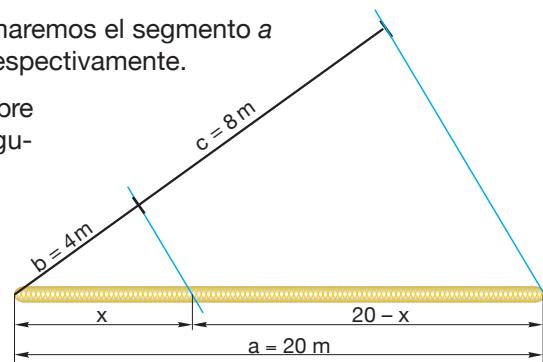
Para hacer los cálculos aplicaremos el procedimiento anterior. Tomaremos el segmento  $a$  de longitud 20 m y los segmentos  $b$  y  $c$  de longitudes 4 m y 8 m, respectivamente.

Consideramos ahora  $x$  como la longitud de uno de los segmentos sobre  $a$ , y  $20 - x$  la longitud del otro segmento (tal y como muestra la figura). Así, podemos establecer la proporción siguiente:

$$\frac{4}{x} = \frac{8}{20 - x} \Rightarrow x = 6,67$$

Por lo tanto,  $20 - x = 20 - 6,67 = 13,33$

Así, a una persona le corresponden 6,67 m y a la otra, 13,33 m.



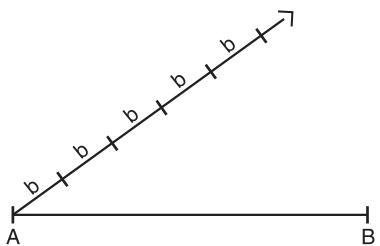
## División de un segmento en partes iguales

Veamos ahora cómo dividir un segmento  $AB$  en cinco partes iguales.

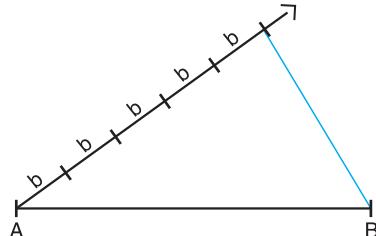
- Dibujamos el segmento  $AB$ .



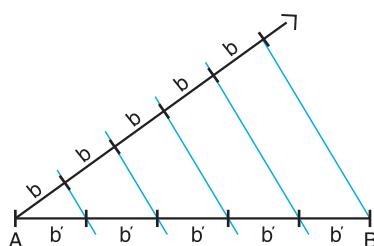
- Dibujamos una semirrecta con origen en  $A$ . Sobre esta semirrecta situamos consecutivos y alineados cinco segmentos de una misma longitud  $b$ .



- Unimos el extremo libre del último segmento  $b$  con el punto  $B$ .



- Trazamos rectas paralelas al segmento anterior de manera que pasen por los puntos marcados en la semirrecta.



Hemos dividido el segmento  $AB$  en cinco segmentos de igual longitud.

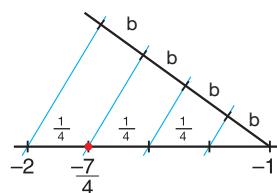
Este procedimiento es el mismo que hemos utilizado para representar las fracciones sobre la recta.

### ejemplo 4

Representa la fracción  $-\frac{7}{4}$  sobre la recta.

- Resolvemos la división entera  $-\frac{7}{4} \rightarrow 3 \frac{1}{4}$
- Sabemos que la fracción estará en el segmento que tiene como extremos  $-1$  y  $-2$ , ya que la fracción es negativa.

- A continuación, dividimos el segmento en cuatro partes iguales, y tomamos tres.



## Actividades



6 Divide gráficamente un segmento de longitud  $a = 9$  cm en dos partes proporcionales a los segmentos  $b = 4$  cm y  $c = 7$  cm.

7 Divide gráficamente un segmento de longitud  $a = 15$  cm en partes proporcionales a los segmentos  $b = 8$  cm,  $c = 6$  cm y  $d = 4$  cm.

8 Divide gráficamente un segmento de longitud  $a = 18$  cm en siete partes iguales.

9 Representa sobre la recta estas fracciones.

$$\frac{3}{5}; -\frac{23}{24}; \frac{22}{14}; -\frac{15}{6}$$

## Producto de dos segmentos

La determinación gráfica del segmento cuarto proporcional a tres segmentos dados tiene numerosas aplicaciones. Una de las más destacadas es la determinación gráfica del producto de dos segmentos.

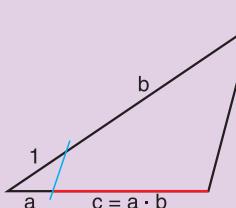
Aprendamos cómo podemos encontrar gráficamente el segmento  $c$ , producto de dos segmentos dados  $a$  y  $b$ :

$$c = a \cdot b$$

Observa que podemos expresar la relación anterior como:

$$1 \cdot c = a \cdot b \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{b}{c}$$

Por lo tanto, el segmento  $c$  representa el segmento cuarto proporcional a los segmentos de longitud 1,  $a$  y  $b$ .



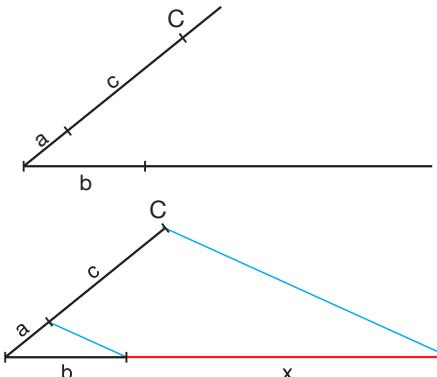
## Segmento cuarto proporcional a tres segmentos dados

Dados tres segmentos  $a, b, c$ , se llama **segmento cuarto proporcional** a estos tres segmentos al segmento  $x$  que verifica la proporción siguiente:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

Sepamos cómo determinar gráficamente el segmento cuarto proporcional a tres segmentos dados de longitudes  $a, b$  y  $c$ .

- Trazamos dos rectas secantes y situamos los dos segmentos de longitudes  $a$  y  $b$  sobre cada una de ellas. Situamos, entonces, el segmento  $c$  consecutivamente al segmento  $a$ .
- Unimos los extremos de los segmentos  $a$  y  $b$ . Trazamos una recta paralela a ésta que pase por el punto  $c$ , obteniendo así un segmento  $x$  a continuación del segmento  $b$ .



El segmento  $x$  obtenido es el **segmento cuarto proporcional** a los segmentos  $a, b$  y  $c$ .

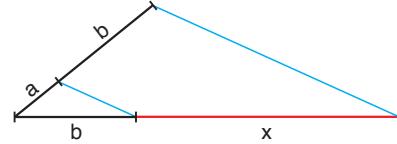
## Segmento tercero proporcional a dos segmentos dados

Dados dos segmentos  $a$  y  $b$ , se llama **segmento tercero proporcional** a estos dos al segmento  $x$  que verifica la siguiente proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

Veamos cómo determinar gráficamente el segmento tercero proporcional a dos segmentos dados  $a$  y  $b$ .

- La determinación gráfica del segmento tercero proporcional es análoga a la del segmento cuarto proporcional, considerando que  $c = b$ , tal y como muestra la figura.



El segmento  $x$  obtenido es el **segmento tercero proporcional** a los segmentos  $a$  y  $b$ .

## Actividades

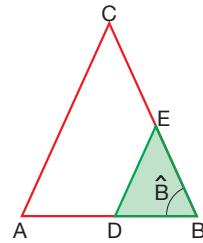


- 10 Construye el segmento cuarto proporcional a tres segmentos  $a, b$  y  $c$  de longitudes 10 cm, 5 cm y 7 cm, respectivamente.
- 11 Construye el segmento tercero proporcional a dos segmentos  $a$  y  $b$  de longitudes 8 cm y 3 cm, respectivamente.
- 12 Determina gráficamente el producto de dos segmentos de longitudes 2 cm y 6 cm, respectivamente.

### 3 Triángulos en posición de Tales

Si observas los triángulos  $ABC$  y  $DBE$  de la derecha, puedes comprobar que:

- Los dos triángulos tienen un ángulo común  $\hat{B}$ .
- Los lados opuestos al ángulo  $\hat{B}$  son paralelos.



→ Dos triángulos están en **posición de Tales** si tienen un **ángulo común** y los **lados opuestos** a este ángulo son **paralelos**.

A continuación, veremos qué propiedades tienen dos triángulos en posición de Tales y sus respectivas demostraciones.

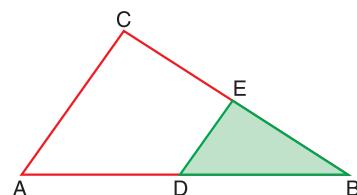
#### • Dos triángulos en posición de Tales tienen los lados proporcionales.

- Aplicamos el teorema de Tales a las rectas secantes  $BA$  y  $BC$ .

$$\frac{BC}{BA} = \frac{BE}{BD} \Rightarrow \frac{BC}{BE} = \frac{BA}{BD} \quad (1)$$

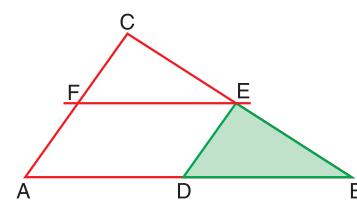
- Trazamos la recta  $EF$  paralela a  $AB$  y aplicamos el teorema de Tales a las rectas secantes  $CA$  y  $CB$ .

$$\frac{CA}{CB} = \frac{FA}{EB} \stackrel{FA=ED, \text{ por paralelismo}}{=} \frac{ED}{EB} \Rightarrow \frac{CA}{ED} = \frac{CB}{EB} \quad (2)$$



- Combinando los resultados (1) y (2), y teniendo en cuenta que  $CB = BC$  y  $EB = BE$ , podemos escribir:

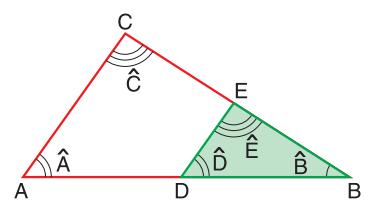
$$\frac{BC}{BE} = \frac{BA}{BD} = \frac{CA}{ED}$$



Los lados  $DB$ ,  $BE$  y  $ED$  son homólogos de  $AB$ ,  $BC$  y  $CA$ , respectivamente.

#### • Dos triángulos en posición de Tales tienen los ángulos iguales.

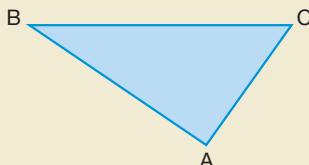
- El ángulo  $\hat{B}$  es común a los dos triángulos.
- Entonces se cumple  $\hat{A} = \hat{D}$  y  $\hat{C} = \hat{E}$ , puesto que son ángulos correspondientes.



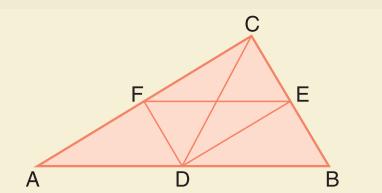
## Actividades



13 Observa esta figura. ¿Sabrías dibujar tres triángulos de modo que cada uno de ellos esté en posición de Tales respecto a los otros dos?



14 Observa la figura dada e indica pares de triángulos en posición de Tales. ¿Cuántos pares has encontrado?



# Las TIC y la Matemática

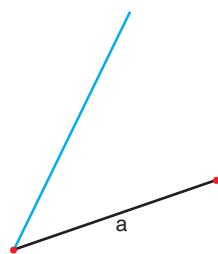
## Construcciones geométricas con la computadora

En la actualidad podemos utilizar varios programas de licencia libre que sirven para trazar figuras geométricas, algunos de estos, que los puedes descargar en tu computadora son: GEONext, GeoGebra y Winplot.

### División de un segmento en partes iguales

Partimos de un segmento  $a$  que queremos dividir en cinco partes iguales.

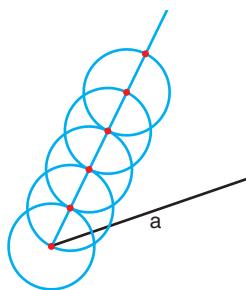
- Dibujamos el segmento  $a$  (opción *Segmento*). Observamos que quedan marcados los puntos inicial y final.
- Trazamos una semirrecta (opción *Semirrecta*) a partir del punto inicial del segmento  $a$ .



- Dibuja una circunferencia (opción *Circunferencia*) con centro en el punto inicial y un radio cualquiera.

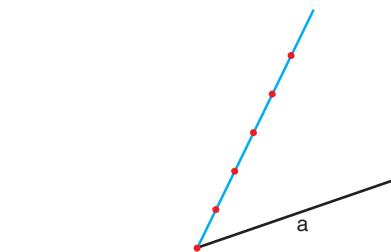
Con centro en el punto de intersección de la circunferencia con la semirrecta, trazamos otra circunferencia del mismo radio.

Repetimos el proceso hasta obtener en la semirrecta los extremos de cinco segmentos iguales.

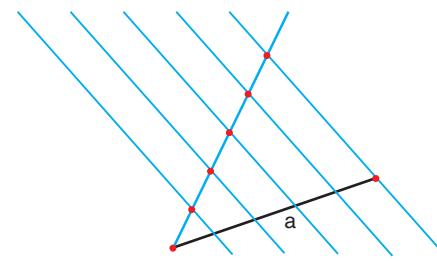


- Dibujamos los segmentos iguales a partir de los centros de las circunferencias trazadas (opción *Segmento*).

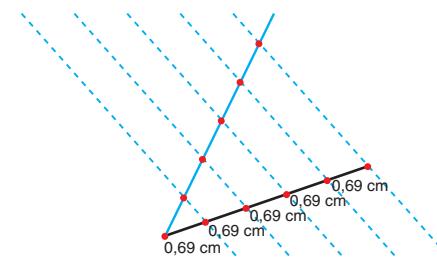
A continuación, escondemos las circunferencias (opción *Ocultar/mostrar*).



- Unimos mediante una recta el extremo del último segmento trazado sobre la semirrecta con el extremo libre de la recta  $a$ .
- Trazamos rectas paralelas a ésta que pasen por los extremos de los segmentos (opción *Recta paralela*).



- Trazamos los segmentos determinados por las rectas paralelas sobre el segmento  $a$  (opción *Segmento*) y convertimos las rectas paralelas en discontinuas (opción *Punteado*).
- Medimos los segmentos que acabamos de trazar y comprobamos que hemos dividido el segmento  $a$  en cinco partes iguales (opción *Distancia y longitud*).



### Actividades

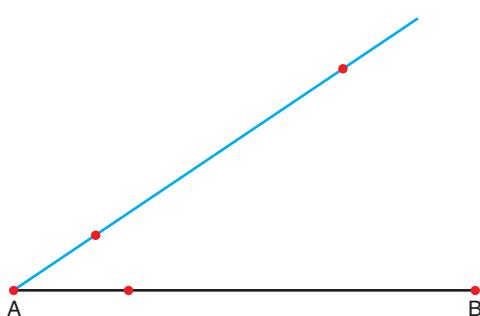
- 15 Si dispones de un programa de computación para efectuar construcciones geométricas, traza dos segmentos cualesquiera y divide el primero en siete partes iguales y el segundo en nueve partes iguales.

## División de un segmento en partes proporcionales a dos segmentos dados

Partimos de un segmento  $AB$  que queremos dividir en dos partes proporcionales a dos segmentos dados de longitudes 1 cm y 3 cm.

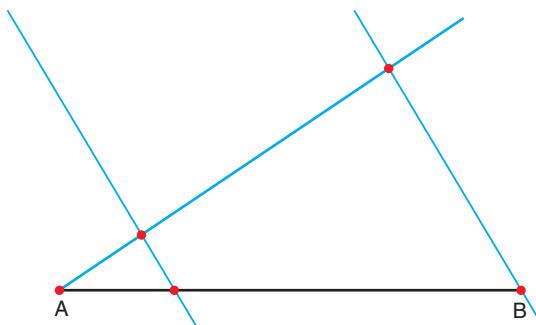
- Dibujamos el segmento  $AB$  (opción *Segmento*). Observamos que los puntos inicial y final quedan marcados.
- Dibujamos una semirrecta a partir del punto inicial  $A$  (opción *Semirrecta*).
- Determinamos dos segmentos consecutivos a partir de  $A$  de longitudes 1 cm y 3 cm. Para determinarlos creamos dos valores numéricos con la opción *edición numérica* 1 y 4, y los trasladamos sobre la semirrecta (opción *Transferencia de medidas*).

Así, obtenemos dos puntos sobre la semirrecta situados a 1 cm y 4 cm de los extremos, que nos determinan los segmentos buscados.

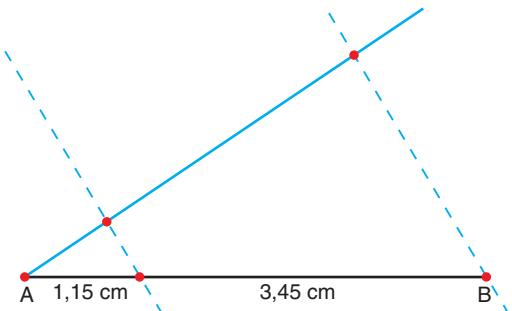


- Unimos mediante una recta (opción *Recta*) el último punto con el extremo libre de la recta  $AB$ .

Trazamos la recta paralela a ésta que pasa por el otro punto (opción *Recta paralela*).



- Trazamos los segmentos determinados por las rectas paralelas sobre  $AB$  (opción *Segmento*).
- Transformamos las rectas paralelas en discontinuas (opción *Punteado*).
- Medimos los segmentos trazados (opción *Distancia y longitud*) y así comprobamos que hemos dividido el segmento  $AB$  en dos partes iguales.



### Actividades



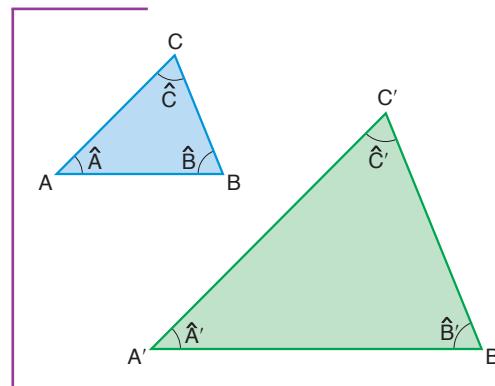
Si dispones de un programa informático para efectuar construcciones geométricas, realiza los siguientes ejercicios:

- 16** Traz a un segmento  $AB$  cualquiera, una semirrecta con origen en  $A$ , y cuatro segmentos consecutivos de diferentes longitudes sobre dicha semirrecta, el primero de ellos con origen en  $A$ . Divide el segmento  $AB$  en cuatro partes proporcionales a los cuatro segmentos consecutivos.

- 17** Investiga las opciones del programa para elaborar macros e intenta elaborar una que te permita dividir un segmento cualquiera en partes iguales. La macro debe pedirte el segmento; el número de particiones debe dibujar la semirrecta, las circunferencias... y dejar visible únicamente aquello que te interese: el segmento dividido y, si lo consideras útil, los segmentos o las rectas auxiliares.

## 4 Triángulos semejantes

Observa los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$ , y fíjate en las relaciones que guardan sus ángulos y sus lados. Usa tus materiales de geometría.



— Los ángulos de los dos triángulos son iguales.

$$\hat{A} = \hat{A}'; \quad \hat{B} = \hat{B}'; \quad \hat{C} = \hat{C}'$$

— Los lados de los dos triángulos son proporcionales.

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}} = 2$$

Decimos que los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  son **semejantes**.

### FÍJATE

Dos triángulos semejantes tienen la misma forma, aunque tengan distinto tamaño.

Dos triángulos son **semejantes** si tienen los **ángulos iguales** y los **lados proporcionales**.

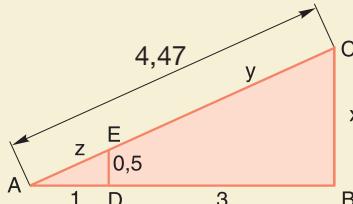
Los ángulos respectivamente iguales se llaman **homólogos**, y los lados opuestos a los ángulos homólogos se denominan **lados homólogos**.

La razón de proporcionalidad entre los lados homólogos de dos triángulos semejantes se denomina **razón de semejanza  $k$** .

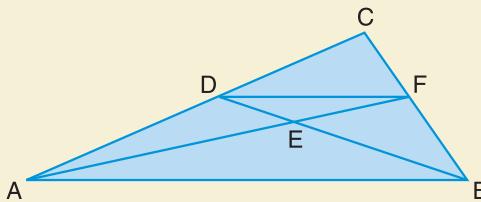
$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}} = k$$

### Actividades

- 18** Dibuja un triángulo de lados 3 cm, 5 cm y 6 cm. Construye otro triángulo semejante a éste con razón de semejanza  $\frac{2}{5}$ .
- 19** Calcula las medidas que faltan en la figura y halla la relación de semejanza entre los triángulos  $ABC$  y  $ADE$ .



- 20** Observa la figura siguiente y determina oralmente cuáles de los triángulos representados son semejantes.



- 21** Dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  son semejantes y su razón de semejanza es  $\frac{2}{3}$ . Calcula los lados del triángulo  $ABC$ , sabiendo que los lados del triángulo  $A'B'C'$  valen  $a' = 21$ ,  $b' = 12$  y  $c' = 18$ .

## 4.1. Semejanza de triángulos en posición de Tales

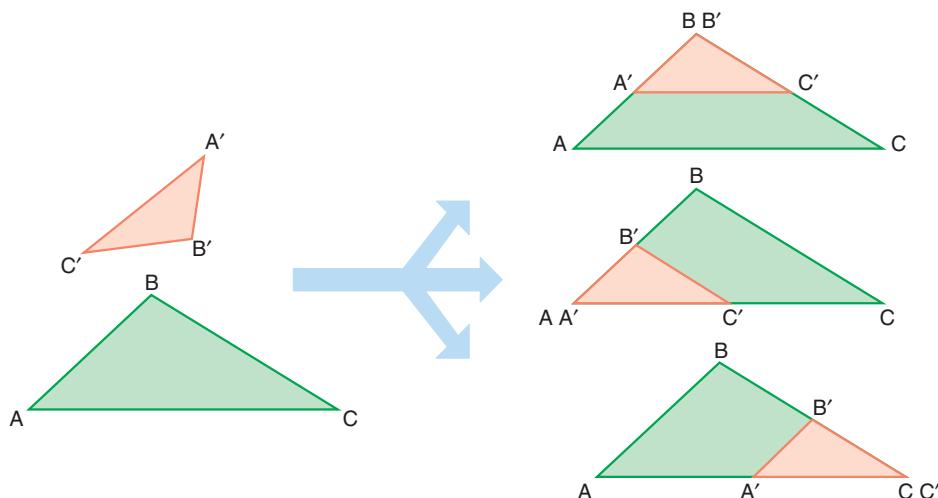
Anteriormente vimos que dos triángulos están en posición de Tales si tienen un ángulo común y los lados opuestos a este ángulo son paralelos.

También aprendimos que dos triángulos en posición de Tales tienen los lados proporcionales y los ángulos iguales.

Por lo tanto, dos triángulos en posición de Tales son semejantes.

El recíproco también es cierto; es decir, dos triángulos semejantes siempre pueden situarse en posición de Tales.

Para comprobarlo, basta mover uno de los triángulos hasta hacer coincidir en un mismo vértice dos de los pares de ángulos homólogos cualesquiera.



Observa que independientemente del ángulo escogido, los lados opuestos a este ángulo son paralelos y, por lo tanto, los triángulos siempre quedan situados en posición de Tales.

Así, pues, podemos enunciar:

→ **Dos triángulos en posición de Tales son semejantes, y dos triángulos semejantes pueden situarse en posición de Tales.**

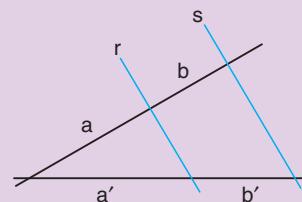
En el margen, puedes ver la demostración de este enunciado.

### Actividades

- 22 Dibuja dos triángulos en posición de Tales de forma que su razón de semejanza sea  $\frac{3}{4}$ .
- 23 Construye un triángulo rectángulo de catetos 5 cm y 10 cm. Dibuja otro cuyos catetos midan la mitad de los anteriores de manera que los dos estén en posición de Tales.
- 24 **Material concreto:** Calca los dos triángulos semejantes que hemos utilizado en este apartado, recórtalos y superponlos comprobando así que son semejantes.

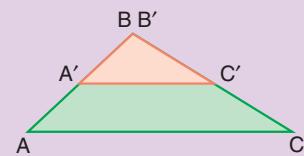
### Triángulos semejantes y posición de Tales

El teorema de Tales sirve para determinar si dos rectas que cortan dos rectas secantes son paralelas o no.



Si se cumple  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ , entonces r y s son paralelas.

Ahora considera los triángulos semejantes del ejemplo de la



izquierda ABC y A'B'C'.

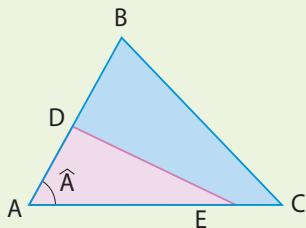
Al ser semejantes deben cumplir:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}$$

Por el teorema de Tales podemos afirmar que los segmentos BC y B'C' son paralelos y, por lo tanto, que los triángulos ABC y A'B'C' están en posición de Tales.

## CONTRAEJEMPLO

Los triángulos ABC y ADE no son semejantes porque los segmentos BC y DE no son paralelos.



## 4.2. Criterios de semejanza de triángulos

Hemos visto que dos triángulos son semejantes si tienen los ángulos iguales y sus lados son proporcionales.

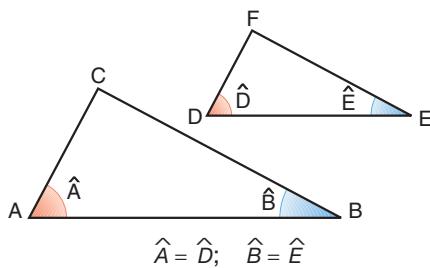
No obstante, no es necesario comparar los tres lados y los tres ángulos de dos triángulos para determinar si son semejantes.

► Las condiciones que nos permiten afirmar que dos triángulos son semejantes se llaman **criterios de semejanza**.

Hay diversos criterios de semejanza para triángulos.

A continuación, te presentamos tres de estos criterios, que se demuestran comprobando que los triángulos pueden situarse en posición de Tales.

### Criterios de semejanza

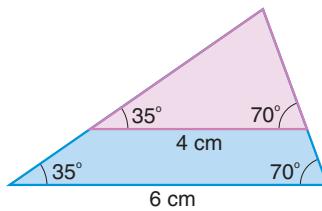


Dos triángulos que tengan **dos ángulos iguales** son **semejantes**.

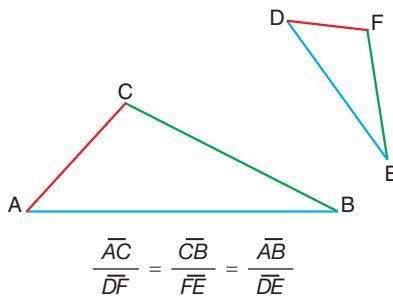
### Comprobación

— Construye un triángulo con un lado que mida 6 cm y con los ángulos contiguos a éste de  $35^\circ$  y  $70^\circ$ .

— Recorta los dos triángulos y comprueba que pueden situarse en posición de Tales.



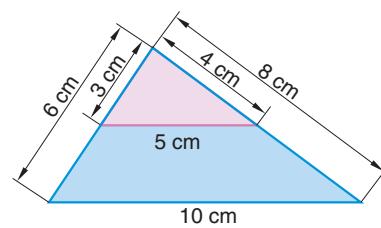
— Construye otro triángulo con un lado que mida 4 cm y con sus ángulos contiguos iguales a los anteriores.



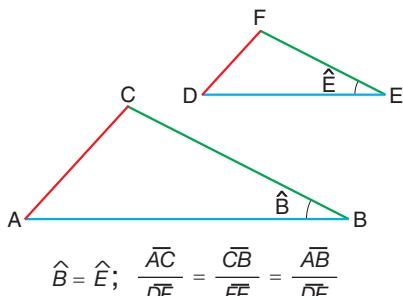
Dos triángulos que tengan sus **tres lados proporcionales** son **semejantes**.

— Construye un triángulo cuyos lados midan 6 cm, 8 cm y 10 cm.

— Recorta los dos triángulos y comprueba que pueden situarse en posición de Tales.



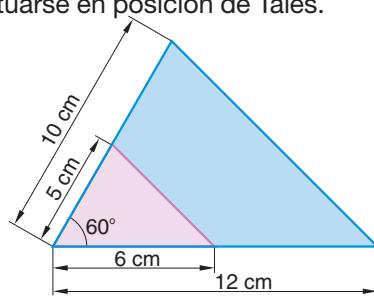
— Construye otro triángulo de lados proporcionales a los anteriores; por ejemplo, 3 cm, 4 cm y 5 cm.



Dos triángulos que tengan un **ángulo igual** y los **lados que lo forman proporcionales** son **semejantes**.

— Construye un triángulo con dos lados de 5 cm y 6 cm, y que forman un ángulo de  $60^\circ$ .

— Recorta los dos triángulos y comprueba que pueden situarse en posición de Tales.



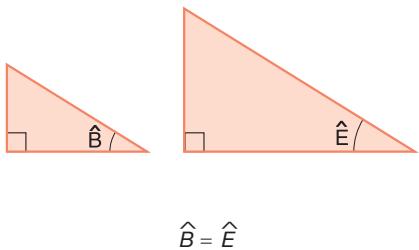
— Construye otro triángulo con dos lados proporcionales a los anteriores, por ejemplo 10 cm y 12 cm, y que formen el mismo ángulo.

Estos criterios de semejanza se simplifican para algunas clases de triángulos, como es el caso de los triángulos rectángulos y el de los triángulos isósceles.

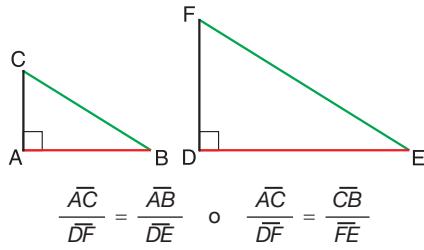
Veamos cuáles son estos criterios.

### Criterios de semejanza de triángulos rectángulos

Dos triángulos rectángulos que tengan un ángulo agudo igual son semejantes.

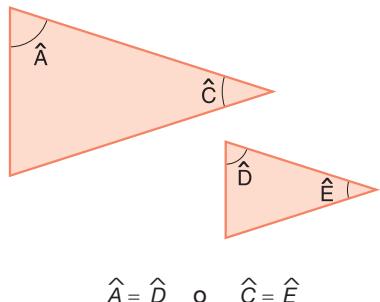


Dos triángulos rectángulos que tengan los catetos proporcionales o que tengan un cateto y la hipotenusa proporcionales son semejantes.

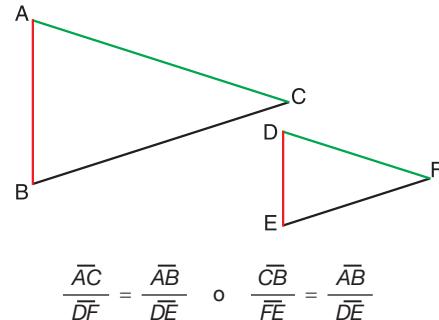


### Criterios de semejanza de triángulos isósceles

Dos triángulos isósceles que tengan uno de los ángulos correspondientes iguales son semejantes.

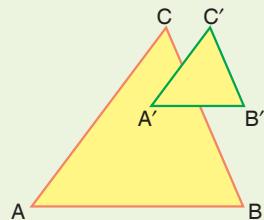


Dos triángulos isósceles que tengan un lado y la base proporcionales son semejantes.



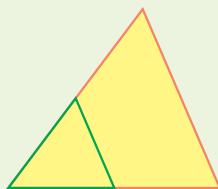
### FÍJATE

– Dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  de lados paralelos son semejantes.



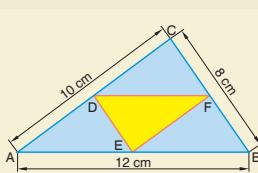
– La recta que une los puntos medios de los lados de un triángulo es paralela al tercer lado del triángulo y mide la mitad de éste.

Se verifica que la razón de semejanza entre los dos triángulos es  $k = \frac{1}{2}$ .



## Actividades

- 25 Dibuja tres triángulos equiláteros de diferente lado y comprueba que son semejantes aplicando los tres criterios de semejanza.
- 26 Un triángulo rectángulo  $ABC$  tiene un ángulo  $\hat{A} = 28^\circ$  mientras que otro triángulo rectángulo  $A'B'C'$  tiene un ángulo  $\hat{A}' = 62^\circ$ . ¿Son semejantes? ¿Por qué?
- 27 Dibuja dos triángulos isósceles que tengan un ángulo igual y comprueba que son semejantes.
- 28 **Material concreto:** Fíjate en el triángulo  $DEF$ . Lo hemos construido uniendo los puntos medios del triángulo  $ABC$ . ¿Son semejantes los triángulos  $DEF$  y  $ABC$ ? ¿Por qué? Con láminas de foamy, traza y recorta las figuras con las medidas indicadas y verifica si los triángulos son semejante, para lo cual ubícalos en posición de Tales.

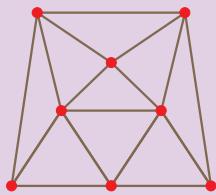


## 5 Polígonos semejantes

### Triangulación

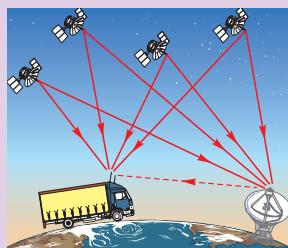
Si unimos tres puntos no alineados, obtenemos un triángulo.

Así pues, la triangulación consiste en unir un conjunto de puntos no alineados de tres en tres formando triángulos.



En los siglos XVIII y XIX, la triangulación se utilizaba para confeccionar mapas. Resolvían redes de triángulos cuyos vértices se localizaban en la cima de los montes y que recibían el nombre de redes geodésicas.

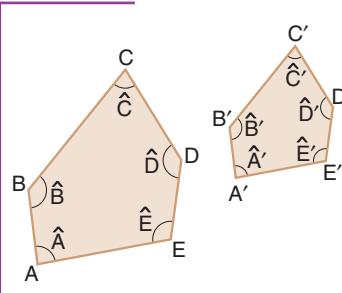
Actualmente, la triangulación es la base del funcionamiento del sistema de navegación GPS.



### FÍJATE

Dos polígonos regulares con el mismo número de lados son semejantes.

Observa los polígonos  $ABCDE$  y  $A'B'C'D'E'$  de la figura.



— Los ángulos de los dos pentágonos son respectivamente iguales.

$$\hat{A} = \hat{A}'; \hat{B} = \hat{B}'; \hat{C} = \hat{C}'; \hat{D} = \hat{D}'; \hat{E} = \hat{E}'$$

— Los lados de los dos pentágonos son proporcionales.

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'E'}{DE} = \frac{E'A'}{EA}$$

Decimos entonces que los pentágonos  $ABCDE$  y  $A'B'C'D'E'$  son **semejantes**.

► Dos polígonos del mismo número de lados son **semejantes** si tienen los **ángulos iguales** y sus **lados correspondientes proporcionales**.

Es decir que dos polígonos semejantes tienen la misma forma aunque tengan distinto tamaño.

La razón de proporcionalidad entre los lados correspondientes se llama **razón de semejanza**,  $k$ , entre los dos polígonos.

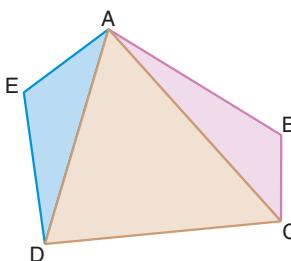
$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{D'E'}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{E'A'}}{\overline{EA}} = k$$

### 5.1. Construcción de polígonos semejantes

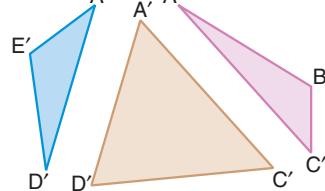
#### Construcción por triangulación

A continuación, vamos a construir un pentágono semejante a otro utilizando el método de la **triangulación**.

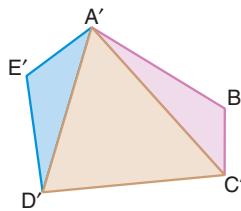
1. Efectuamos una triangulación trazando desde el vértice  $A$  todas las diagonales posibles. Así, obtenemos los triángulos  $ADE$ ,  $ACD$  y  $ABC$ .



2. Construimos ahora tres triángulos  $A'D'E'$ ,  $A'C'D'$  y  $A'B'C'$  semejantes a los anteriores.



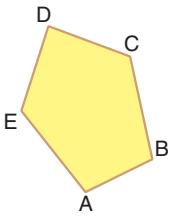
3. Si ahora los situamos en la misma posición que los originales, obtenemos otro pentágono cuyos lados son proporcionales a los del pentágono original, y cuyos ángulos son iguales a los del pentágono original.



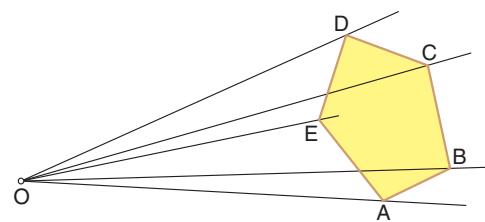
## Método de Tales o método de radiación

Uno de los métodos más utilizados para construir polígonos semejantes es el **método de Tales** o *método de radiación*. Este procedimiento se basa en la aplicación sucesiva del teorema de Tales que hemos estudiado anteriormente.

Observa el polígono  $ABCDE$  de la derecha y veamos cómo construir un polígono semejante con razón de semejanza  $k = \frac{2}{3}$ .



Tomamos un punto  $O$  cualquiera y trazamos semirrectas con origen en el punto  $O$  y que pasan por cada uno de los vértices del polígono dado.



Sobre una de las semirrectas, por ejemplo la  $OA$ , marcamos el punto  $A'$  de modo que se cumpla:

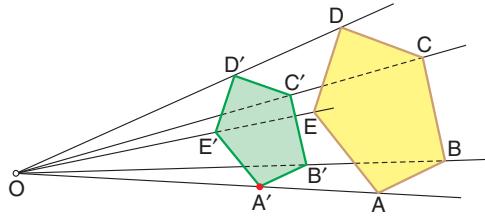
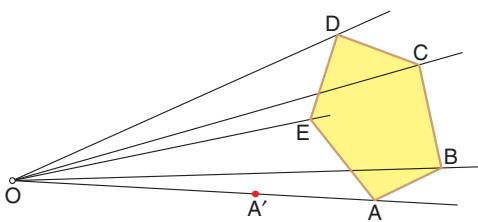
$$\frac{OA'}{OA} = \frac{2}{3}$$

El punto  $A'$  es el homólogo del punto  $A$ .

Por el punto  $A'$ , trazamos una paralela al lado  $AB$  hasta cortar la semirrecta  $OB$  en el punto  $B'$ .

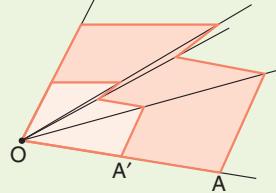
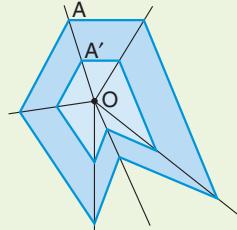
Por el punto  $B'$ , trazamos una paralela al lado  $BC$  hasta cortar la semirrecta  $OC$  en el punto  $C'$ .

Repetimos la operación hasta obtener el polígono  $A'B'C'D'E'$ .



## FÍJATE

El punto  $O$  también puede escogerse del interior del polígono o de un vértice de éste.



## Actividades



29 Construye dos cuadrados de lados 6 cm y 4 cm, y di cuál es su razón de semejanza.

30 Dibuja dos polígonos, que no sean semejantes, con todos sus ángulos iguales.

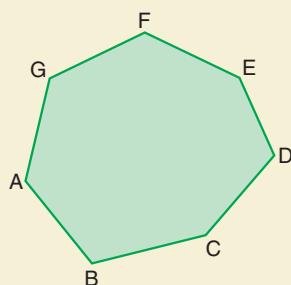
31 Dibuja dos polígonos, que no sean semejantes, con todos sus lados iguales dos a dos.

32 Construye un polígono semejante al de la figura en cada uno de estos casos.

a) El punto  $O$  es un punto exterior del hexágono y con razón de semejanza  $k = \frac{5}{3}$ .

b) El punto  $O$  es un punto interior del polígono y con razón de semejanza  $k = \frac{3}{4}$ .

c) El punto  $O$  es el vértice  $A$  y con razón de semejanza  $k = \frac{3}{2}$ .



## 5.2. Perímetros y áreas de polígonos semejantes

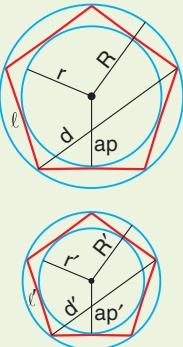
### FÍJATE

Dos polígonos regulares del mismo número de lados son semejantes.

### FÍJATE

En dos figuras semejantes, la razón entre dos longitudes homólogas es siempre la misma.

Por ejemplo, si consideramos dos pentágonos regulares:



La razón entre los lados, las diagonales, las apotemas, los radios de las circunferencias inscritas y los radios de las circunferencias circunscritas es igual a la constante de semejanza  $k$ .

$$\frac{l}{l'} = \frac{d}{d'} = \frac{R}{R'} = \frac{r}{r'} = \frac{ap}{ap'} = k$$

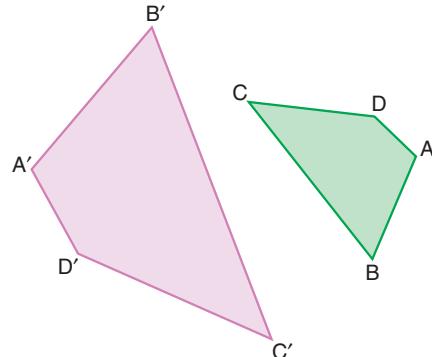
### Perímetros de polígonos semejantes

Observa los polígonos  $ABCD$  y  $A'B'C'D'$  de la figura.

- Los dos polígonos son semejantes.
- Su razón de semejanza es  $k$ .

Al ser polígonos semejantes de razón  $k$  se cumple:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA} = k$$



Así pues, podemos escribir:

$$A'B' = k \cdot AB; \quad B'C' = k \cdot BC; \quad C'D' = k \cdot CD; \quad D'A' = k \cdot DA$$

Calculamos los perímetros de los polígonos.

$$P = AB + BC + CD + DA$$

$$P' = A'B' + B'C' + C'D' + D'A' = k \cdot (AB + BC + CD + DA)$$

La razón entre sus perímetros será:

$$\frac{P'}{P} = \frac{k \cdot (AB + BC + CD + DA)}{AB + BC + CD + DA} = k$$

La razón entre sus perímetros es  $k$  y coincide con la razón de semejanza.

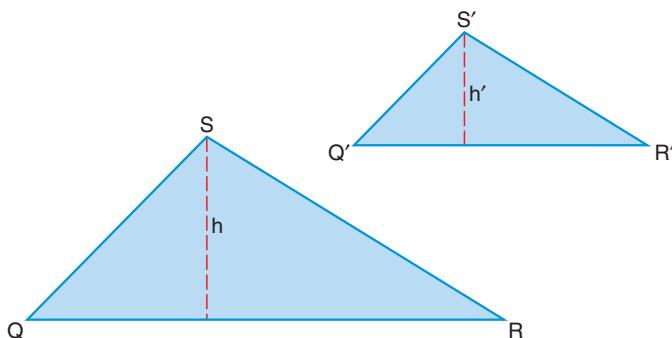
**→ La razón entre los perímetros de dos polígonos semejantes es igual a su razón de semejanza.**

### Actividades

- 33 Los lados de un triángulo miden 5 cm, 6 cm y 7 cm. ¿Cuál es el perímetro de un triángulo semejante al anterior, con razón de semejanza 3?
- 34 Las diagonales de un rombo miden 6 cm y 8 cm. ¿Cuánto valdrán las diagonales, los lados y el perímetro de otro rombo semejante a éste con razón de semejanza 2?
- 35 Dos polígonos semejantes tienen una razón de semejanza igual a  $\frac{1}{2}$ . Si el perímetro del menor de ellos es 40 cm, ¿cuál es el perímetro del otro?
- 36 Dibuja un hexágono regular de 6 cm de lado y otro inscrito en una circunferencia de 4 cm de radio. Halla las apotemas y los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita de cada uno de los hexágonos.
  - Calcula la razón entre las distintas longitudes homólogas y compárala con la razón entre los perímetros de las dos figuras.

## Áreas de polígonos semejantes

Fíjate en los triángulos  $QRS$  y  $Q'R'S'$  de la figura. Ambos son semejantes, y con razón de semejanza  $k$ .



Al ser semejantes, la relación entre dos longitudes homólogas es igual a la razón de semejanza. Entonces:

— La razón entre sus alturas es  $\frac{h}{h'} = k$ .

— La razón entre las bases es  $\frac{QR}{Q'R'} = k$ .

Así, pues, la razón entre sus áreas será:

$$\frac{A}{A'} = \frac{\frac{1}{2} \cdot QR \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot Q'R' \cdot h'} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot k \cdot \cancel{QR} \cdot k \cdot \cancel{h'}}{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{Q'R'} \cdot \cancel{h'}} = k \cdot k = k^2$$

La razón entre las áreas es  $k^2$ , que coincide con el cuadrado de la razón de semejanza.

► La razón entre las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

### Actividades



- 37 Halla la razón entre los perímetros y entre las áreas de dos cuadrados, sabiendo que el lado de uno de ellos mide 8 cm y el del otro la mitad.
- 38 La razón entre las áreas de dos triángulos es  $\frac{1}{4}$ . ¿Cuánto mide el perímetro del triángulo grande si el pequeño tiene un perímetro de 6 cm?
- 39 Un pentágono regular mide 10,9 cm de lado y 7,5 cm de apotema. ¿Cuánto valen el perímetro y el área de otro pentágono semejante a éste cuya razón de semejanza es  $\frac{4}{5}$ ?
- 40 Dibuja un trapecio semejante al de la figura cuya área sea cuatro veces mayor. ¿Cuál es la razón de semejanza entre las dos figuras?



## 6 Figuras semejantes

### Material concreto

#### El pantógrafo

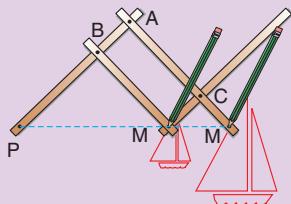
El pantógrafo es un instrumento que nos permite dibujar figuras semejantes.

Está formado por cuatro barras que forman un paralelogramo articulado,  $ABM'C$ , y la razón de semejanza puede graduarse modificando la proporción siguiente:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PM}{PM'}$$

El extremo  $P$  queda fijo; el extremo libre  $M$  lleva una punta con la que recorremos la figura original que queremos reproducir. En el extremo  $M'$  se coloca un lápiz que dibujará la figura semejante.

Al ir recorriendo la figura original con la punta situada en  $M$ , iremos dibujando una figura semejante con el lápiz situado en  $M'$ .



Un ejemplo de cómo funciona un pantógrafo lo encontrarás en la siguiente página web:

[@](http://www.ies.co.jp/math/java/geo/panta/panta.html)

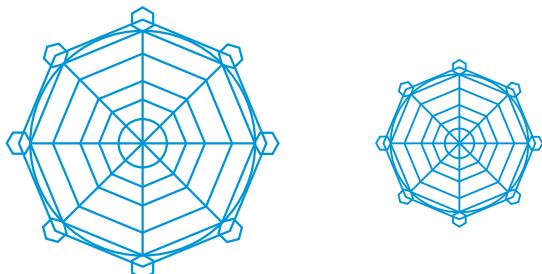
### MUCHO OJO

Otro procedimiento que podemos utilizar para dibujar figuras semejantes sencillas es el **método de Tales**.

El concepto de semejanza puede generalizarse más allá de los polígonos. Hablamos, entonces, de figuras semejantes.

Decimos que dos figuras son semejantes si la proporción entre la distancia de dos puntos cualesquiera y la distancia de sus puntos homólogos se mantiene.

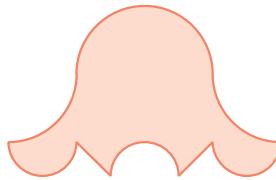
Así pues, dos figuras semejantes tienen la misma forma, pero distinto tamaño.



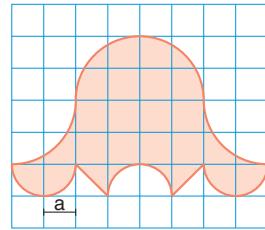
### 6.1. Construcción de figuras semejantes

Utilizamos el método de Tales para obtener figuras semejantes sencillas. Para figuras más complicadas emplearemos el **método de la cuadrícula**.

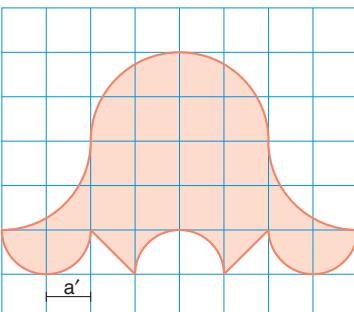
Dada la figura de la derecha, construiremos otra semejante con razón de semejanza  $\frac{3}{2}$ .



1. Inscribimos la figura original en una cuadrícula en la que la longitud de los cuadritos es  $a$ .



2. Construimos otra cuadrícula en la que aumentamos la longitud  $a'$  de cada cuadrado. La razón de semejanza entre los lados de los cuadritos de las dos cuadrículas es  $\frac{a'}{a} = \frac{3}{2}$ .



3. Por último, se reproducen las líneas de la figura sobre la segunda cuadrícula y de este modo obtenemos una figura semejante de razón  $\frac{3}{2}$ .

## 6.2. Escalas

A menudo utilizamos la semejanza de figuras para representar sobre papel objetos muy grandes u objetos muy pequeños, reduciendo o ampliando, respectivamente, sus medidas según la relación deseada.

En las figuras 1 y 2 de la derecha se muestran ejemplos de objetos representados a escala.

Un **dibujo a escala** es un dibujo cuyas dimensiones son proporcionales a las del objeto real.

La razón de semejanza entre el dibujo de un objeto y el objeto real es el **factor de escala** o la **escala** del dibujo.

La escala a la que se ha reproducido un dibujo se indica al pie de éste y se expresa mediante un cociente cuyo dividendo es la unidad.

Así, la escala 1 : 200 significa que una unidad de longitud del dibujo representa 200 unidades de estas mismas unidades en la realidad.

Ejemplos de representaciones hechas a escala serían los planos, las maquetas o los mapas.

A menudo, en el caso de los mapas, la escala se indica de forma gráfica, tal y como muestra la figura.

Así, la escala gráfica de la figura nos informa que un segmento del dibujo de longitud igual a la representada mide en realidad 500 km.



Indicar la escala de forma gráfica nos permite conocer directamente las dimensiones de la realidad con una simple medición.

Calcula en metros la anchura de la fachada del plano de la figura 1. ¿Cuál es la superficie de la habitación A en metros cuadrados?

La anchura de la fachada en el plano es de 3 cm. Llamamos  $x$  a la anchura real. La escala es 1 : 200, así pues la razón de semejanza es  $k = 200$ .

Entonces debe verificarse:

$$\frac{x}{3} = 200 \Rightarrow x = 600 \text{ cm}$$

Así, la anchura de la fachada es de 6 m.

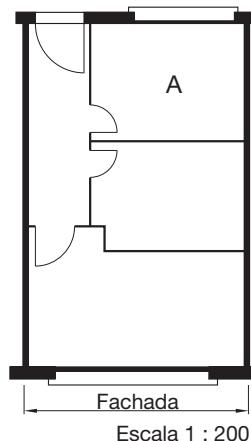


Fig. 1. Fachada de un edificio

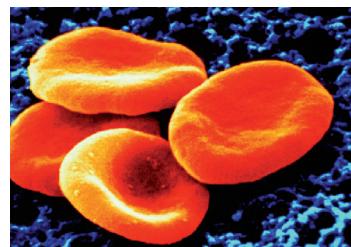
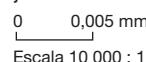


Fig. 2. Glóbulos rojos



Escala 10 000 : 1

### ejemplo 5

La superficie de la habitación A medida en el plano es:

$$2 \cdot 1,5 = 3 \Rightarrow 3 \text{ cm}^2$$

Llamamos  $y$  a la superficie de la habitación A. Como la relación entre las áreas de dos polígonos es igual al cuadrado de la razón de semejanza, debe verificarse:

$$\frac{y}{3} = 200^2 \Rightarrow y = 120000 \text{ cm}^2$$

Así, la superficie de la habitación A es de 12 m<sup>2</sup>.

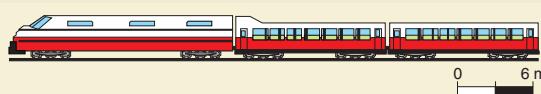
## Actividades



- 41 Utilizando el método de la cuadrícula, construye la figura semejante a la figura dada con razón de semejanza  $\frac{5}{3}$ .



- 42 A partir de la maqueta, halla la longitud y la altura real del tren.



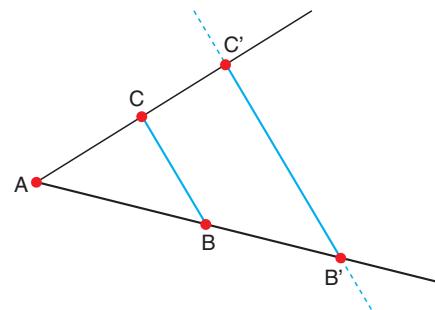
## Construcciones geométricas con la computadora

En la actualidad podemos utilizar varios programas de licencia libre que sirven para trazar figuras geométricas, algunos de estos, que los puedes descargar en tu computadora son: GEONext, GeoGebra y Winplot.

### Construcción de triángulos semejantes

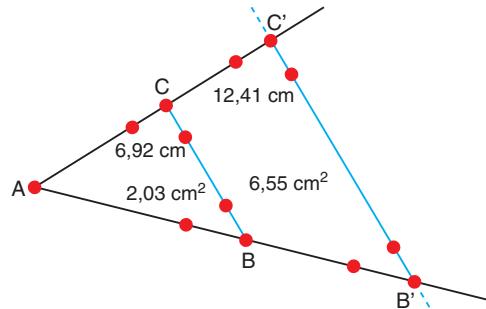
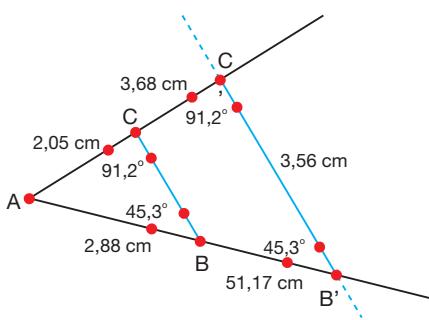
Vamos a dibujar dos triángulos semejantes y a comprobar que lo son.

- Dibujamos dos semirrectas a partir de un punto  $A$  (opción *Semirrecta*) y un triángulo  $ABC$ , de modo que los vértices  $B$  y  $C$  se sitúen sobre cada una de las semirrectas. Ponemos el nombre de los vértices mediante la opción *Etiqueta*.
- Trazamos una recta paralela al lado  $BC$  (opción *Recta paralela*), y dibujamos un triángulo  $A'B'C'$  (opción *Triángulo*) con un vértice en el punto  $A$  y los otros dos en los puntos de corte de la recta paralela con las semirrectas.



Así, hemos obtenido dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  semejantes. Procederemos ahora a comprobar la relación entre sus lados, sus perímetros y sus áreas. Para ello, medimos:

- Los ángulos no comunes de ambos triángulos (opción *Ángulo*).
- Los lados de ambos triángulos (opción *Distancia y longitud*).
- El perímetro de ambos triángulos (opción *Distancia y longitud*).
- El área de ambos triángulos (opción *Área*).



Observamos que:

- Los ángulos de ambos triángulos son iguales.  
 $\hat{B} = \hat{B}' = 45,3^\circ$  ;  $\hat{C} = \hat{C}' = 91,2^\circ$
- Los lados son proporcionales.

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{AC'}{AC} = 1,8$$

La razón de semejanza es 1,8.

- La razón de los perímetros es la razón de semejanza.

$$\frac{P_{AB'C'}}{P_{ABC}} = \frac{12,41}{6,92} = 1,8$$

- La razón de las áreas es el cuadrado de la razón de semejanza.

$$\frac{A_{AB'C'}}{A_{ABC}} = \frac{6,55}{2,03} = 3,23 \approx (1,8)^2$$

### Actividades

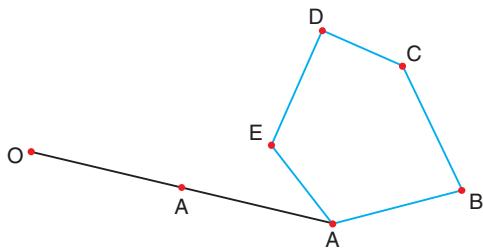


- 43 Si dispones de un *software* para realizar construcciones geométricas, comprueba las características que deben cumplir dos triángulos isósceles para ser semejantes. Haz lo mismo con dos triángulos rectángulos.

## Construcción de figuras semejantes

Vamos a construir un pentágono semejante a otro dado, con razón de semejanza  $\frac{1}{2}$ .

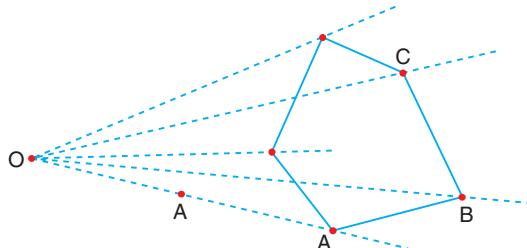
- Dibujamos un pentágono  $ABCDE$  (opción *Polígono*).
- Señalamos un punto  $O$  cualquiera exterior a la figura (opción *Punto*).
- Trazamos un segmento  $OA$  desde el punto exterior  $O$  hasta el vértice  $A$  (opción *Segmento*).
- Determinamos el punto medio del segmento (opción *Punto medio*) y lo denominamos  $A'$  (opción *Etiqueta*).



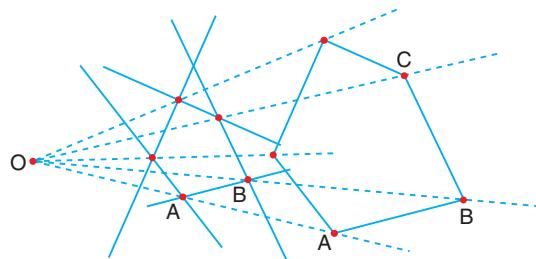
$$\text{Se cumple: } \frac{OA'}{OA} = \frac{1}{2}.$$

Ésta será la razón de semejanza.

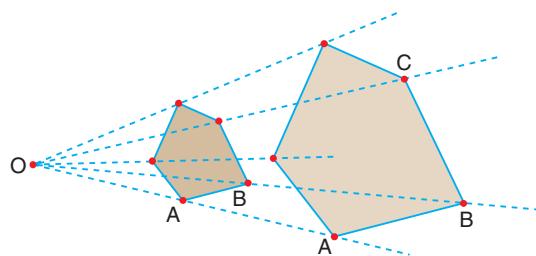
- Trazamos semirrectas desde el punto  $O$  a cada uno de los vértices del pentágono (opción *Semirrecta*).



- Dibujamos una recta paralela al lado  $AB$ , que pase por  $A'$  (opción *Recta paralela*). El punto de corte de esta recta con la semirrecta  $OB$  determinará el vértice  $B'$ .
- Dibujamos una recta paralela al lado  $BC$ , que pase por  $B'$ , y obtendremos el vértice  $C'$  en el punto de corte de esta recta con la semirrecta  $OC$ .
- Repetimos los mismos pasos para obtener los vértices  $D'$  y  $E'$ .



- A partir de los vértices encontrados, dibujamos el polígono  $A'B'C'D'E'$  (opción *Polígono*).
- Para observar con claridad la figura, escondemos las rectas paralelas (opción *Ocultar/mostrar*), transformamos las semirrectas en discontinuas (opción *Punteado*), y coloreamos los pentágonos (opción *Relleno*).



### Actividades

Si dispones de un programa informático para realizar construcciones geométricas, haz las siguientes actividades.

- 44** Construye dos pentágonos regulares semejantes con razón de semejanza 3.
- 45** Construye un heptágono semejante a uno dado con razón de semejanza 2.

# Cómo resolver problemas

## Estrategia: Experimentación con la posible solución

En ocasiones, imaginar la posible solución de un problema nos conduce a su solución real.

Esta estrategia es especialmente útil en problemas geométricos.

Construye el triángulo  $ABC$ , dados los ángulos  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  y la altura  $h_c$  correspondiente al vértice  $C$ .

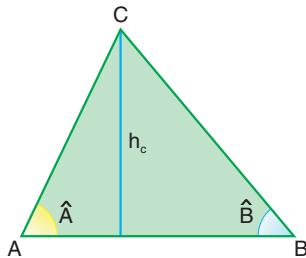
### ► Comprensión del enunciado

En primer lugar, dibuja un triángulo  $ABC$  para aclarar cuáles son los datos y qué es lo que buscas.

Los datos del problema son  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  y  $h_c$ .

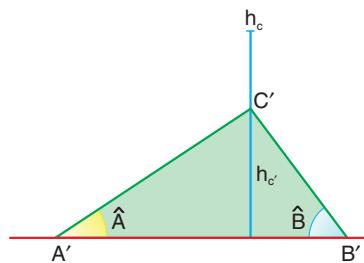
— Mediremos la altura  $h_c$ .

— Esta altura medida no coincide con la altura  $h_c$ . Pero observamos que si situamos  $h_c$  sobre  $h_{c'}$  y trazamos paralelas desde  $C$  a  $A'C'$  y  $B'C'$ , obtendremos la solución del problema.



### ► Planificación de la resolución

— Hay muchos triángulos con dos ángulos  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  iguales a los que nos piden en el enunciado, pero cada uno tendrá distintas alturas respecto al vértice  $C$ .



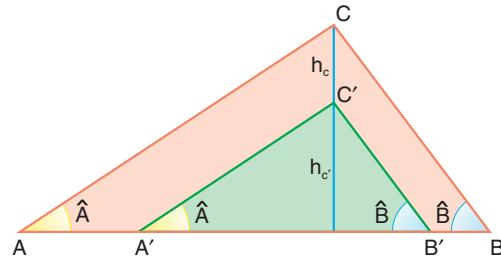
— Construiremos un triángulo cualquiera  $A'B'C'$  con los ángulos  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  que nos indica el enunciado.

### ► Ejecución del plan de resolución

Procedemos tal y como lo habíamos planificado.

Dibujamos un triángulo de ángulos  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$ .

Situamos  $h_c$  sobre  $h_{c'}$  y trazamos desde  $C$  paralelas a los lados  $A'C'$  y  $B'C'$ .



Así, obtenemos el triángulo  $ABC$ , que es la solución del problema.

### ► Revisión del resultado y el proceso seguido

Comprobamos que efectivamente el triángulo construido cumple las condiciones del enunciado.

## Actividades

Pon en práctica la estrategia anterior para resolver estos problemas.

- 46 Construye el triángulo  $ABC$ , dados los ángulos  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  y la longitud del segmento de bisectriz interior al triángulo correspondiente al ángulo  $\hat{A}$ .
- 47 Construye el triángulo  $ABC$ , sabiendo que la razón de proporcionalidad de sus catetos es  $\frac{AC}{BC} = \frac{2}{3}$  y la altura correspondiente al vértice  $C$  es  $h_c = 4$  cm.



## En resumen

- La **razón** entre dos segmentos de longitudes  $m$  y  $n$  es el cociente entre estas dos longitudes.

- Los segmentos  $a$  y  $b$  son **proporcionales** a los segmentos  $c$  y  $d$  si se cumple la relación:

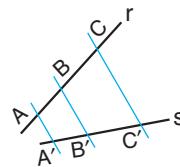
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$$

El valor numérico del cociente entre estas dos longitudes ( $k$ ) se denomina **razón de proporcionalidad**.

- Si un conjunto de **rectas paralelas** corta a dos **rectas secantes** de forma que los segmentos determinados en una de ellas son **iguales**, los segmentos correspondientes determinados en la otra también son **iguales**.

### ○ Teorema de Tales

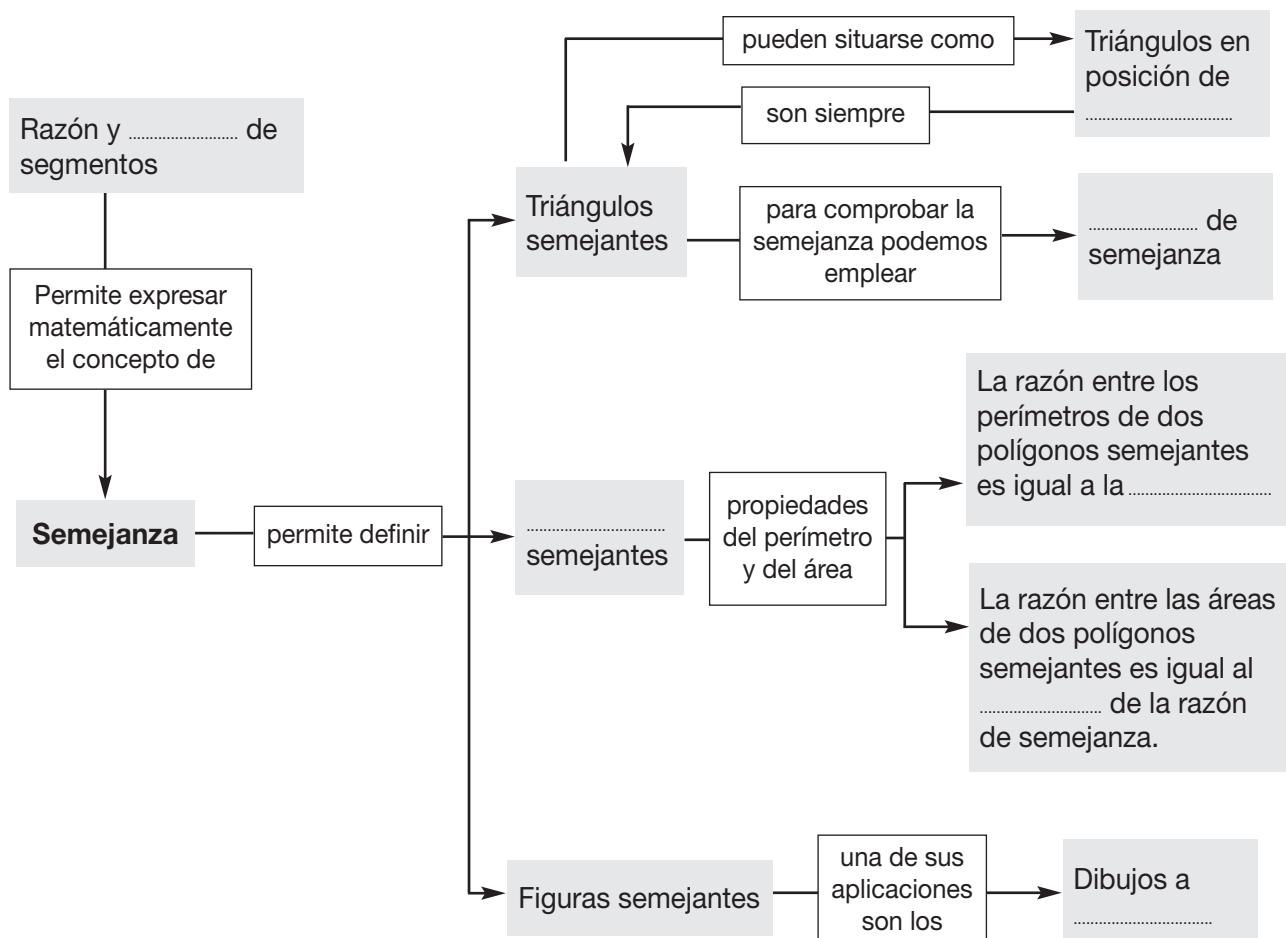
Si dos **rectas secantes** son cortadas por un conjunto de **rectas paralelas**, los segmentos determinados en una de ellas son **proporcionales** a los segmentos correspondientes determinados en la otra.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

- Dos triángulos están en **posición de Tales** si tienen un **ángulo común** y los **lados opuestos** a este ángulo son **paralelos**.
- Dos triángulos en posición de Tales tienen los **lados proporcionales** y los **ángulos iguales**.

Completa el organizador gráfico en tu cuaderno:



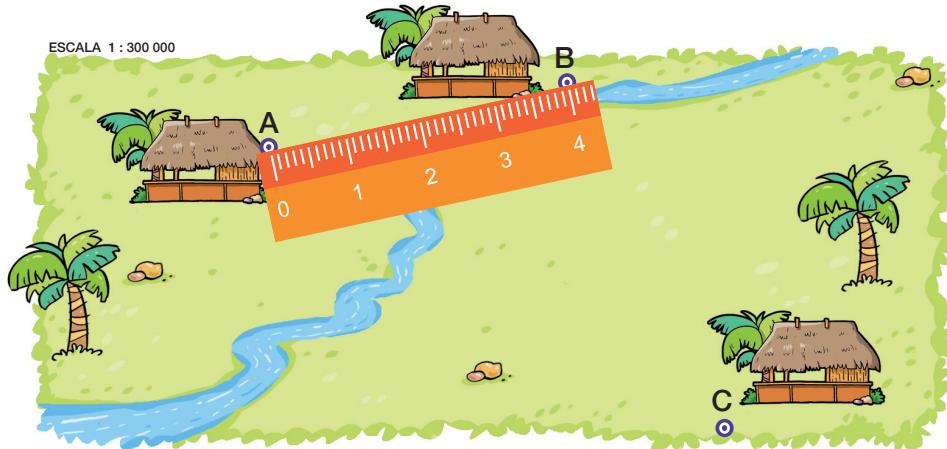
# Ejercicios y problemas integradores

- Calcular cuáles son las verdaderas distancias entre los tres pueblos que se observan en el mapa.



Para conocer las distancias reales en un mapa, es suficiente conocer la escala, observa:

- Con una regla, medimos los segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{CA}$ .



$$\overline{AB} = 4 \text{ cm} \quad \overline{BC} = 5 \text{ cm} \quad \overline{CA} = 7 \text{ cm}$$

La escala 1: 300 000 significa que un centímetro en el mapa equivale a 300 000 cm en la realidad.

- Planteamos una proporción utilizando la escala:

$$\frac{1}{300\,000} = \frac{4}{\overline{AB}}$$

- Ampliamos la propiedad fundamental de las proporciones:

El producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$\frac{1}{300\,000} = \frac{4}{\overline{AB}} \quad 1 \times \overline{AB} = 4 \times 300\,000 \quad \overline{AB} = 1\,200\,000$$

- Expresamos el 1 200 000 centímetros en kilómetros.

$$1 \text{ km} = 1\,000\,000 \text{ cm}$$

- Planteamos otra proporción utilizando la equivalencia anterior.

$$\frac{1}{1\,000\,000} = \frac{x}{1\,200\,000} \quad ; \quad \frac{1 \times 1\,200\,000}{1\,000\,000} = x \quad ; \quad \frac{1\,200\,000}{1\,000\,000} = x \quad ; \quad 12 \text{ km} = x \quad ; \quad x = 12 \text{ km}$$

- Repetimos el proceso para las otras medidas:

$$\frac{1}{300\,000} = \frac{5}{\overline{BC}}$$

$$\overline{BC} = 5 \times 300\,000$$

$$\overline{BC} = 1\,500\,000$$

$$\frac{1}{1\,000\,000} = \frac{x}{1\,500\,000}$$

$$\overline{BC} = 15 \text{ km}$$

$$\frac{1}{300\,000} = \frac{7}{\overline{CA}}$$

$$\overline{CA} = 7 \times 300\,000$$

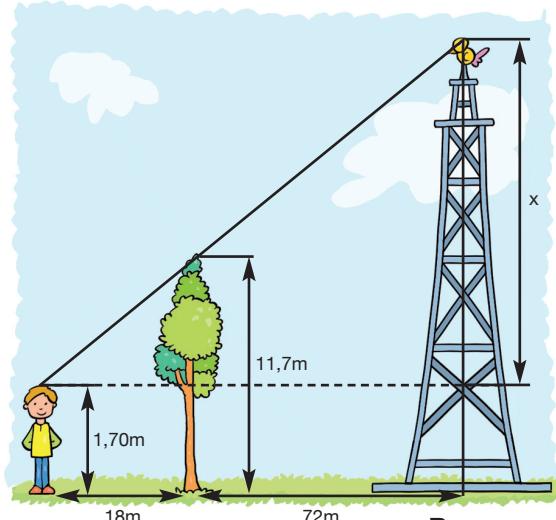
$$\overline{CA} = 2\,100\,000$$

$$\frac{1}{1\,000\,000} = \frac{x}{2\,100\,000}$$

$$\overline{CA} = 21 \text{ km}$$

**R: Los 4, 5 y 7 cm del mapa representan respectivamente 12, 15 y 21 km de distancia entre los pueblos, en la realidad.**

- Margarita observa que en la punta de la torre de las antenas de teléfono que están cerca de su casa, se encuentra un pajarito de hermosos colores. Con la información del gráfico adjunto, ¿calculé a qué altura se encuentra el pájaro?



- En la gráfica se observan dos triángulos rectángulos pues la horizontal que pasa sobre la cabeza de Margarita está paralela al piso y tanto el árbol como la torre están perpendiculares al piso.

- Como el ángulo agudo A en los dos casos tiene la misma amplitud podemos decir que los dos triángulos rectángulos son semejantes.
- Determinemos la medida de los lados cada uno de los triángulos:

Triángulo ACB	Triángulo AED
$\overline{AC} = 72 \text{ m} + 18 \text{ m} = 90 \text{ m}$	$\overline{AE} = 18 \text{ m}$
$\overline{BC} = x$	$\overline{DE} = 11,7 \text{ m} - 1,70 \text{ m} = 10 \text{ m}$

- Planteamos las proporciones con los lados correspondientes de los triángulos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} \quad \frac{90}{18} = \frac{x}{10}$$

- Aplicamos la propiedad a las proporciones y hallamos el lado BC.

$$\frac{90 \times 10}{18} = x \quad 50 \text{ m} = x$$

- Para conocer la altura de la torre, sumamos el valor del lado BC más la altura de Margarita:  $50 \text{ m} + 1,7 \text{ m} = 51,7 \text{ m}$

**R: El pajarito que observa Margarita se encuentra a una altura de 51,7 m.**

## Práctica

Observa la imagen. Ramiro, el joven que está junto a la puerta, mide 1,65 m. Calcula, a partir de ese dato, las dimensiones reales (largo y ancho) de la puerta.



# Ejercicios y problemas



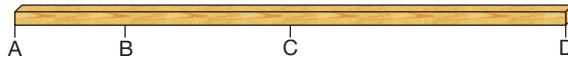
## Comprensión de conceptos y conocimiento de procesos

### Razón y proporcionalidad de segmentos

- 48 Dibuja seis segmentos, de manera que se cumpla la proporción siguiente:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH} = \frac{IJ}{KL} = 2$$

- 49 Hemos cortado un listón de madera en partes proporcionales a 2, 3 y 5.



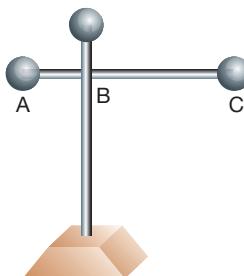
Halla la razón de estos segmentos.

- a)  $AB$  y  $CD$
- b)  $AC$  y  $BD$
- c)  $BC$  y  $AD$
- d)  $BC$  y  $BD$

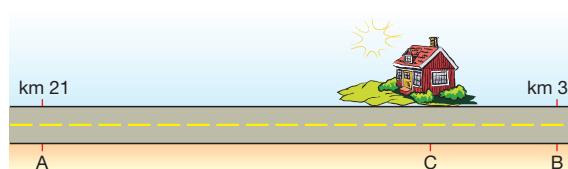
- 50 La razón de dos segmentos  $a$  y  $b$  es  $\frac{5}{3}$ , y la razón de dos segmentos  $b$  y  $c$  es  $\frac{2}{5}$ . Halla la razón de los segmentos  $c$  y  $a$ .

- 51 Observa la figura.

Halla las longitudes de los segmentos  $AB$  y  $BC$  si se sabe que su razón es  $\frac{1}{4}$  y que la longitud del segmento  $AC$  es de 2 dm.



- 52 Observa el siguiente tramo de carretera.



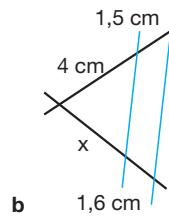
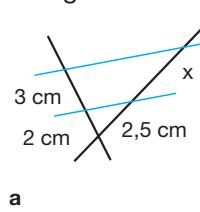
¿En qué kilómetro se encuentra la casa si  $\frac{AC}{AB} = \frac{5}{4}$ ?

## En tu cuaderno

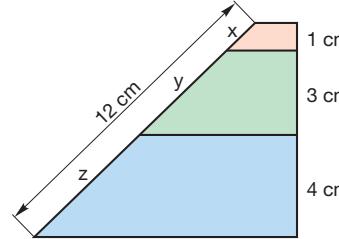
- 53 Halla las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es 36 cm y la razón de la base y la altura,  $\frac{5}{4}$ . Se conoce que la base mide 10 cm.

### Rectas secantes cortadas por paralelas

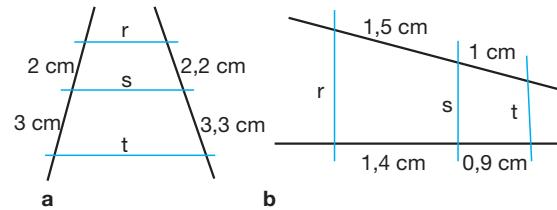
- 54 Calcula la longitud  $x$  de los segmentos de las siguientes figuras.



- 55 Observa la figura y halla las longitudes de los segmentos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .



- 56 Las rectas  $r$  y  $s$  de cada una de las figuras siguientes son paralelas. Indica si la recta  $t$  también es paralela a  $r$  y  $s$ .



- 57 Divide un segmento de 10 cm en partes proporcionales a 2,3 y 4.

- 58 Divide un segmento de 6 cm en partes proporcionales a 2, 3 y 4.

- 59 Dibuja un segmento de 7 cm y divídalo en ocho partes iguales.

- 60 Divide gráficamente un segmento  $AB$  de 6 cm de longitud en dos segmentos cuya razón sea  $\frac{3}{5}$ . ¿Cuánto mide cada uno de los segmentos?

- 61 Trazá un segmento  $AB$  de 10 cm. Dibuja otro encima que sea  $\frac{5}{6}$  de  $AB$ .

- 62** Elabora un segmento  $AB$  de 7 cm. Construye otro  $CD$ , de manera que se cumpla que  $CD = \frac{4}{3}AB$ .

- 63** Dibuja un segmento de 8 cm y divídalo en seis partes iguales. A continuación, señala un punto  $P$  tal que  $AP = \frac{5}{6}AB$  y un punto  $Q$  siendo  $\frac{AQ}{AB} = \frac{1}{3}$ .

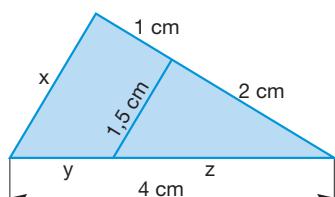
- 64** Construye el segmento tercero proporcional a los segmentos  $p$  y  $q$  cuyas longitudes son 3 cm y 4 cm, respectivamente. Considera que el segmento  $p$  es el que se repite.

- 65** Indica oralmente si las siguientes frases son ciertas o falsas.

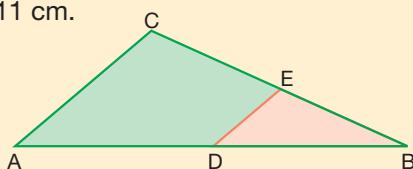
- a) La razón de dos segmentos de longitudes 2 dm y 40 cm es  $\frac{1}{2}$ .
- b) Los segmentos de longitudes 2 cm y 6 cm son proporcionales a los segmentos de longitudes 2,5 cm y 6,5 cm.
- c) El segmento tercero proporcional a los segmentos de longitudes 2 cm y 4 cm mide 3 cm.
- d) El segmento cuarto proporcional a los segmentos de longitudes 3 cm, 4 cm y 9 cm mide 12 cm.

## Triángulos en posición de Tales

- 66** Dibuja dos triángulos en posición de Tales, mide los lados y comprueba que son proporcionales.
- Mide también los ángulos y comprueba que son iguales.
- 67** Calcula, en tu cuaderno, las medidas que faltan en el triángulo de la figura siguiente.



- 68** Halla el perímetro del triángulo  $DBE$ , sabiendo que  $AC = 10$  cm,  $BC = 16$  cm,  $AB = 22,7$  cm y  $BD = 11$  cm.



Para hallar el perímetro, necesitamos conocer las medidas de los lados  $BE$  y  $DE$ .

Los dos triángulos se encuentran en posición de Tales. Así, podemos establecer las proporciones siguientes:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE} ; \quad \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DE}$$

Sustituyendo los valores que conocemos:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BE} \Rightarrow BE = \frac{BD \cdot BC}{AB} = \frac{11 \cdot 16}{22,7} = 7,8$$

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DE} \Rightarrow DE = \frac{BD \cdot AC}{AB} = \frac{11 \cdot 10}{22,7} = 4,8$$

$$P' = BD + BE + DE = 11 + 7,8 + 4,8 = 23,6$$

El perímetro del triángulo  $DBE$  es de 23,6 cm.

Otra forma de resolver el problema es argumentando que la razón entre los perímetros de dos triángulos en posición de Tales es igual a la razón entre dos lados homólogos cualesquiera.

El perímetro del triángulo  $ABC$  es:

$$P = AB + BC + AC = 22,7 + 16 + 10 = 48,7$$

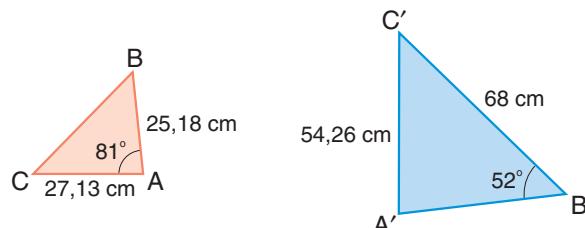
Así pues:

$$\frac{P'}{48,7} = \frac{11}{22,7} \Rightarrow P' = \frac{11 \cdot 48,7}{22,7} = 23,6$$

- 69** Dos triángulos equiláteros están en posición de Tales y la razón entre sus lados es  $\frac{2}{3}$ . Calcula mentalmente el perímetro del triángulo mayor si el del menor es 18 cm.

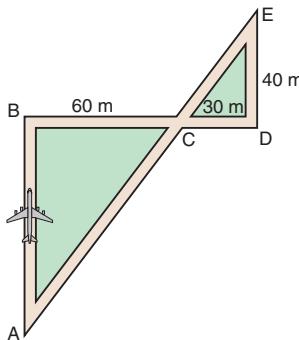
## Triángulos semejantes

- 70** Los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  de la siguiente figura son semejantes. Halla las medidas de los ángulos y de los lados desconocidos.

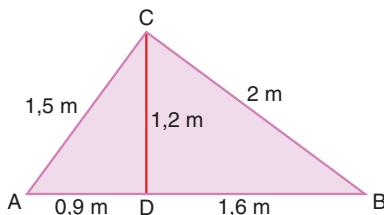


- 71** Construye un triángulo equilátero de 4 cm de lado. Dibuja otro triángulo equilátero semejante al anterior con razón de semejanza  $\frac{7}{6}$ .

- 72** Observa algunas de las pistas de un aeropuerto que unen los puntos de salida  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y  $E$ . ¿Cuál es la distancia entre  $A$  y  $B$ ?



- 73 En la siguiente figura pueden observarse tres triángulos rectángulos  $ABC$ ,  $ADC$  y  $DBC$ .



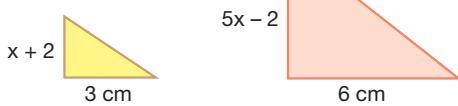
Averigua si son semejantes y, en caso afirmativo, halla la razón de semejanza entre  $ABC$  y  $ADC$ , entre  $ABC$  y  $DBC$ , y entre  $ADC$  y  $DBC$ .

- 74 El ángulo desigual de un triángulo isósceles mide  $108^\circ$  y el lado desigual 14 cm. Uno de los lados iguales de otro triángulo isósceles semejante mide 18 cm. Si la razón de semejanza entre los dos triángulos es 2, calcula mentalmente:

- a) La medida de los ángulos del triángulo mayor.
  - b) El perímetro del triángulo menor.

- 75** Los triángulos rectángulos de las siguientes figuras son semejantes.

  - ¿Cuál es la razón de semejanza?
  - ¿Cuánto miden los catetos cuyas longitudes no son conocidas?



## Polígonos semejantes

- 76** La razón de semejanza entre dos polígonos  $A$  y  $B$  es  $\frac{4}{7}$ . Completa, en tu cuaderno, la tabla.

	Razón de semejanza	Razón entre los perímetros	Razón entre las áreas
Entre $A$ y $B$	$\frac{4}{7}$		
Entre $B$ y $A$	$\frac{7}{4}$		

- 77** La razón entre las apotemas de dos hexágonos regulares es  $\frac{5}{4}$ . Si el área del mayor es  $35,2 \text{ cm}^2$ , ¿cuál es el área del menor?

- 78** El perímetro de un pentágono regular es  $\frac{7}{3}$  veces el perímetro de otro pentágono regular. ¿Cuál es el área del pentágono mayor si el área del menor es  $25,5 \text{ cm}^2$ ?

- 79** Construye un cuadrado de 4 cm de lado. Indica el punto medio de cada uno de sus lados y traza los segmentos que unen de forma consecutiva estos puntos medios. ¿Qué figura obtienes? ¿Es semejante a la figura original?

— Indica la razón de semejanza entre las dos figuras.

- 80** El perímetro de un pentágono  $ABCDE$  es 17,5 cm y su área, 21  $\text{cm}^2$ .

- a) Construye dos pentágonos semejantes  $A'B'C'D'E'$  y  $A''B''C''D''E''$  con razones

de semejanza  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{3}{2}$ .

b) Copia la tabla en tu cuaderno y llénala.

Pentágono	Perímetro	Área
$ABCDE$	17,5 cm	$21 \text{ cm}^2$
$A'B'C'D'E'$		
$A''B''C''D''E''$		

## Figuras semejantes

- 81 Se quiere colocar un listón alrededor de la puerta de un armario, cuyas medidas en un dibujo a escala 1 : 40 son 1,25 cm x 2 cm. ¿Cuántos metros de listón son necesarios?

La escala nos dice que una unidad de longitud del dibujo representa 40 de la realidad.

$$1,25 \text{ cm} \cdot 40 = 50 \text{ cm} = 0,5 \text{ m}$$

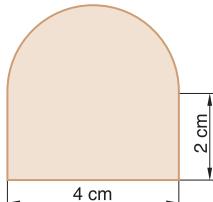
$$2 \text{ cm} \cdot 40 = 80 \text{ cm} = 0,8 \text{ m}$$

La puerta de un armario tiene forma rectangular; entonces, los metros de listón que necesitaremos serán:

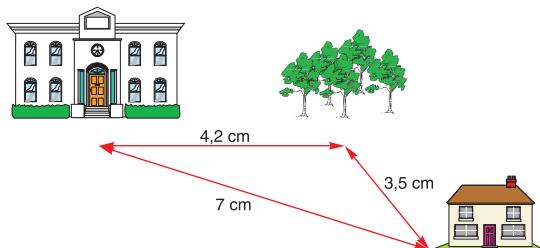
$$2 \cdot 0,5 \text{ m} + 2 \cdot 0,8 \text{ m} = 2,6 \text{ m}$$

Son necesarios 2,6 m de listón.

- 82 La siguiente figura está dibujada a escala 1 : 100. Halla su área.



- 83 En el plano de la figura están señaladas diferentes distancias. Si la distancia real entre la escuela y la casa es 700 m:

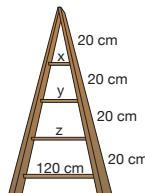


- a) ¿Cuál es la escala del plano?  
b) ¿Cuál es la distancia real entre la escuela y la arboleda y cuál es la distancia real entre la arboleda y la casa?

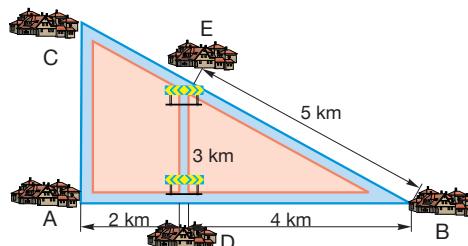
- 84 Dibuja un plano de tu casa con la escala que consideres más adecuada de las dos que te proponemos a continuación: 1 : 100 o 1 : 200.

### Aplicación en la práctica

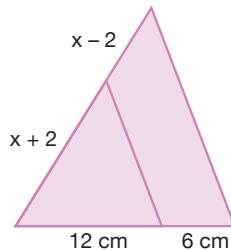
- 85 Halla la medida de cada uno de los peldaños de la escalera.



- 86 Observa, en el siguiente gráfico, las carreteras que unen los pueblos A, B, C, D y E. Puesto que la vía que une D con E está cortada, si un auto parte de D para ir a E tiene dos posibles recorridos, uno pasando por B y otro pasando por A y por C. ¿Cuántos kilómetros recorrería en cada caso?

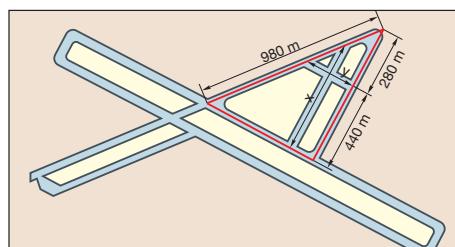


- 87 Halla las medidas de la siguiente figura correspondientes a  $x + 2$  y a  $x - 2$ .



- 88 Un auto asciende por una rampa a una velocidad de 5 m/s. Si a los 4 s de su salida se encuentra a una altura de 10 m, ¿a qué altura se hallará a los 15 s?

- 89 En la figura puedes observar la disposición de las pistas de la terminal de un aeropuerto. A partir de los datos que se indican, determina los valores para x e y.



- 90 Completa los siguientes ejercicios ayudándote de los *applets* (aplicaciones) de la página:

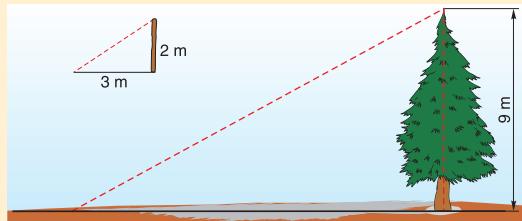
[http://tutormatematicas.com/Geometria\\_Applets\\_Interactivos.html](http://tutormatematicas.com/Geometria_Applets_Interactivos.html)

- a) Los segmentos de longitudes  $a = 4 \text{ cm}$ ,  $b = 6 \text{ cm}$ ,  $c = 7 \text{ cm}$  y  $d$  son proporcionales. Encuentra la razón de proporcionalidad y la longitud del segmento  $d$ .  
b) Encuentra distintos grupos de cuatro segmentos con razón de proporcionalidad 0,85.

- c) En las aplicaciones del Teorema de Tales investiga cómo cambian los valores de los cocientes de los segmentos al variar la posición de las rectas e intenta justificar el porqué.

- 91 Si un poste de 2 m proyecta una sombra de 3 m, ¿qué sombra proyectará un árbol de 9 m?

En primer lugar, hacemos un dibujo con los datos del enunciado.



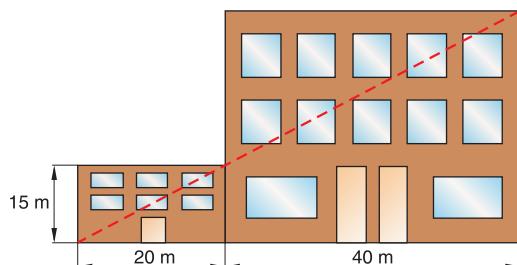
El poste, el árbol y sus respectivas sombras forman dos triángulos semejantes. Si llamamos  $x$  a la sombra del árbol, por semejanza de triángulos deberá cumplirse:

$$\frac{2}{9} = \frac{3}{x} \Rightarrow 2 \cdot x = 9 \cdot 3 \Rightarrow x = \frac{27}{2} = 13,5$$

La sombra proyectada por el árbol es de 13,5 m.

- 92 Para averiguar la altura de un poste telefónico medimos su sombra, que es de 30 m. A la misma hora, una señal de tráfico de 2 m de altura proyecta una sombra de 4,8 m. ¿Cuál es la altura del poste?

- 93 Un edificio está formado por dos bloques. Observa la figura y halla la altura del bloque más alto.



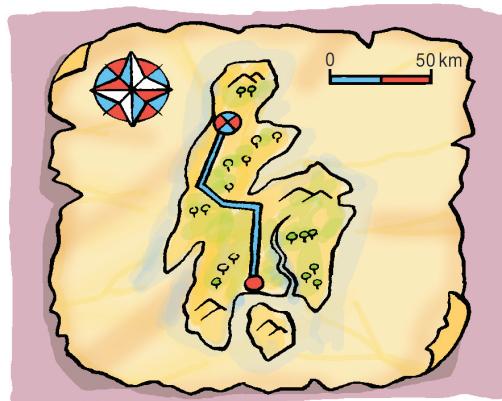
- 94 Calcula el área de un triángulo rectángulo, sabiendo que uno de los catetos y la hipotenusa de un triángulo semejante de constante de semejanza  $k = 2$  miden 3 cm y 5 cm, respectivamente.

- 95 Los lados de una habitación rectangular miden 4,5 m y 2,4 m. Al hacer un plano de la habitación la longitud del lado mayor es 1,5 cm.

a) ¿Cuál es la escala del plano?

b) ¿Cuánto medirá en el plano el lado menor de la habitación?

- 96 A partir de este mapa, halla la distancia real que recorrerán los piratas hasta llegar al tesoro.



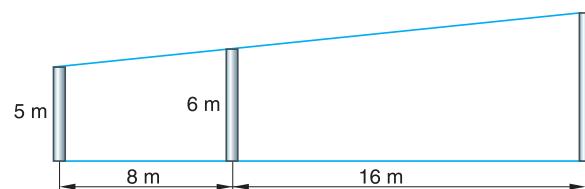
- 97 Observa el video de la siguiente página  
@ <http://www.youtube.com/watch?v=czzj2C4wdxY>  
y luego comenta en clase con tus compañeros.

- 98 En la página [http://www.mat.iesvillalbahervas.org/index.php?view=article&catid=38%3A4esobcll&id=241%3Apantografo-pantograph&option=com\\_content&Itemid=92](http://www.mat.iesvillalbahervas.org/index.php?view=article&catid=38%3A4esobcll&id=241%3Apantografo-pantograph&option=com_content&Itemid=92) puedes utilizar un **pantógrafo** virtual para dibujar figuras semejantes. Dibuja una casa y descubre qué relación de semejanza hay entre las figuras que obtengas.

### ► Más a fondo

- 99 Sobre un plano dibujado a escala 1 : 5 medimos un ángulo de 60°. ¿Cuál es su medida real?

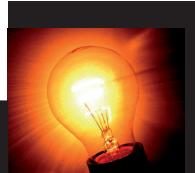
- 100 Calcula la longitud de la barra de acero más larga.



- 101 Un fabricante de material escolar quiere editar un mapa de una ciudad en formato INEN-A4 (297 mm x 210 mm).

Sabiendo que la ciudad mide de norte a sur, aproximadamente, 890 km, y que su anchura máxima es de 1 030 km, ¿qué escala debe emplear?

- 102 Formen grupos de 3 o 4 alumnos, y dibujen un plano de su centro escolar en la escala que consideren más adecuada de las dos propuestas a continuación: 1 : 100 o 1 : 200.



## ► Ampliar el césped

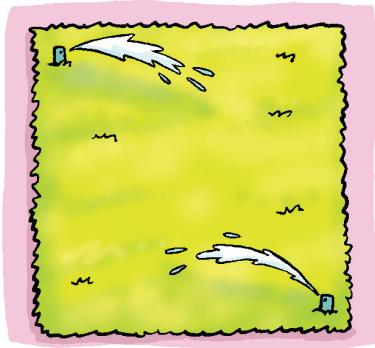
El césped de un jardín cuadrado necesita 30 l de agua al día. Su dueño quiere ampliarlo y aumentar en un factor 1,5 la longitud de cada uno de sus lados. Se lo comenta al jardinero y éste dice:

- Se puede ampliar, pero sepa que gastará más de 60 l de agua cada día para regarlo.

El dueño del jardín contesta:

- Vaya, pensaba que con 45 l diarios bastarían.

¿Cuántos litros de agua diarios calculas que necesitará el nuevo césped?



## ► Los comensales de la mesa redonda

En una mesa circular hay 8 comensales sentados en posiciones equiespaciadas. ¿En cuánto habría que aumentar la superficie de la mesa para que puedan sentarse 4 personas más manteniendo la misma distancia de separación entre comensales que antes?



## Buen Vivir

Educación, cultura y saberes ancestrales



Los incas desarrollaron técnicas avanzadas de cultivo que se usan hasta el día de hoy. Por ejemplo, se cuenta con la técnica de terrazas, para aprovechar el terreno montañoso de Los Andes. Las tierras a cultivar eran adecuadas con sistemas de riego y con desagües de gran desempeño que hasta ahora las utilizan.

Al trabajar de esta manera, los incas evitaban la erosión vertiginosa del suelo y lo mantenían con los nutrientes necesarios para que produzcan.

Las terrazas hechas en las montañas, vistas desde lejos, parecen grandes escaleras que llevan hacia el Sol.

### Actividades

- 1 ¿En qué socijan las construcciones incas a las terrazas de cultivo? Investigan su respuesta.
- 2 ¿Han visto en algún lugar de la Sierra ecuatoriana terrazas de cultivo? ¿Por qué creen que eso sucede? Argumenten.
- 3 Realicen una investigación sobre las técnicas de cultivo ancestrales y comenten si pueden ser aplicadas hoy.
- 4 ¿Saben que los pueblos ancestrales de nuestro país tienen el derecho a vivir según sus tradiciones y a mantener su identidad cultural? ¿Cómo podemos respetar y hacer cumplir este derecho?



# Autoevaluación

# Coevaluación

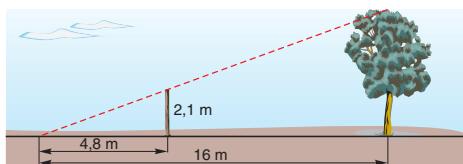
Si logras resolver el 70 % de estas actividades individuales y grupales, puedes avanzar.

1. Dibuja un segmento  $AB$  de 3,5 cm y construye los segmentos  $CD$ ,  $EF$  y  $GH$  tales que:

$$\overline{CD} = \frac{2}{3} \overline{AB}; \overline{EF} = 3 \overline{AB}; \overline{GH} = \frac{1}{5} \overline{AB}$$

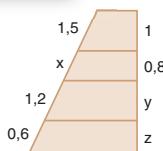
2. Si tenemos los segmentos  $a$ ,  $b$  y  $c$  cuyas longitudes son 7 cm, 10 cm y 4 cm, respectivamente, calcula el segmento cuarto proporcional.

3. Calcula la altura del árbol.



4. Aumentamos en 1,5 cm las longitudes de los lados de un triángulo dado y construimos otro. ¿Este nuevo triángulo es semejante al primero? ¿Y si aumentamos las longitudes de los lados 1,5 veces?

1. Observen la figura y hallen los valores de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

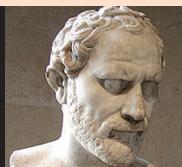


2. ¿Cuál es la altura de una estatua que proyecta una sombra de 8 m en el mismo instante en que un farol de 2,6 m proyecta una sombra de 1,8 m?

3. La razón de semejanza entre dos polígonos es  $k = \frac{5}{4}$ . El perímetro del más grande mide 30 cm y su área es de 50 cm<sup>2</sup>.

Calculen el perímetro y el área del polígono más pequeño.

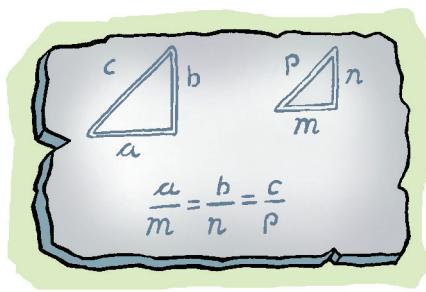
4. La distancia entre dos ciudades en línea recta es de 744 km. Al medir esta distancia en un mapa obtenemos el valor 372 mm. ¿Cuál es la escala del mapa?



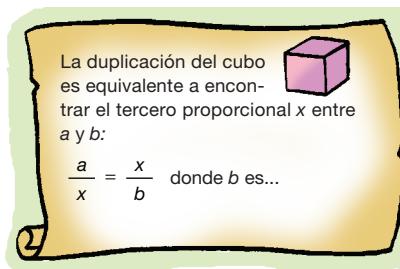
# Historia

## Sección de historia

Las civilizaciones antiguas ya conocían algunos resultados referentes a segmentos proporcionales.



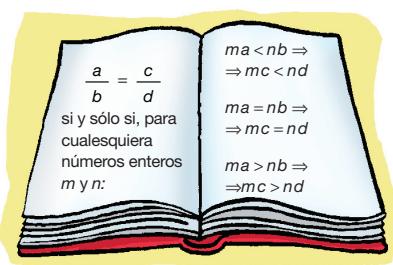
Los griegos utilizaban la proporcionalidad geométrica como herramienta para efectuar sus razonamientos matemáticos.



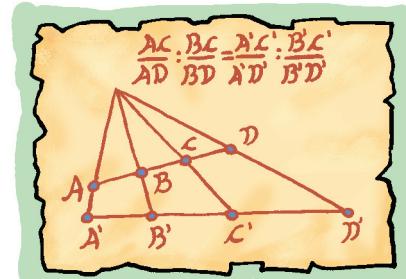
Las primeras definiciones precisas de razón y proporción entre segmentos las hizo Eudoxo en el siglo IV a. C. para ampliar la proporcionalidad entre números enteros.



Euclides, en el libro V de su obra los *Elementos*, desarrolló una teoría muy completa de la proporcionalidad geométrica.



Pappus (s. IV) ya definió la razón doble de cuatro puntos, concepto que constituirá la base de la geometría proyectiva.



Blaise Pascal, matemático francés y niño prodigo, descubrió por él mismo, según la tradición, los 32 teoremas de Euclides.



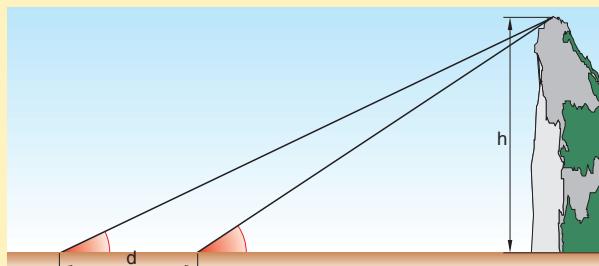


## Crónica matemática

### Medir alturas con el teodolito

El teodolito es un instrumento para la medida de ángulos horizontales y verticales. Es muy utilizado en topografía e ingeniería, sobre todo en las triangulaciones. Básicamente es un telescopio montado sobre un trípode y con dos círculos graduados, uno vertical y otro horizontal, con los que se miden los ángulos con ayuda de lentes.

Si, por ejemplo, queremos hallar la altura  $h$  de una colina, con el teodolito podemos medir los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ . Entonces, conocida la distancia real  $d$  entre las dos medidas, con un dibujo a escala y los dos triángulos de la figura, podemos determinar la altura  $h$ .



<http://meimiuai.files.wordpress.com>



### Las casas de muñecas

En las casas de muñecas se reproducen, a escala, puertas, ventanas y habitaciones reales, así como los distintos muebles y accesorios. Los muñecos que las habitan también son reproducciones a escala. La más utilizada es la escala 1 : 12, aunque también se construyen casas a 1 : 16, 1 : 24 y 1 : 48.

### Formatos en cine y televisión

Las pantallas de los televisores son rectángulos semejantes para que las imágenes tengan la misma forma en televisores grandes y pequeños. En las pantallas estándar la relación longitud/anchura es de 4 : 3. Este formato coincide con el «formato académico» utilizado en el cine hasta 1950.

Poco después, la industria cinematográfica desarrolló los formatos Cinemascope y Panavisión para la proyección de sus filmes en salas de cine, con una relación 2,35 : 1. Otro formato de cine actual es el 1,85 : 1 (flat o americano).

Al ver en un televisor estándar una película en Panavisión o en formato americano, no se conserva la semejanza y, o bien se ve toda la imagen pero desaprovechando área de pantalla (zonas en negro), o bien se pierde imagen de la película inicial.



A la izquierda (edición widescreen), se pierde zona de pantalla. A la derecha (edición fullscreen), se pierde parte de la imagen inicial.

En los televisores con pantalla panorámica, la relación de aspecto es de 16 : 9, por lo que hay menos zona en negro al ver una película en los formatos de cine.

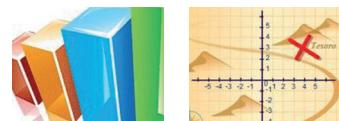
¿Qué porcentaje de área de pantalla está en negro al ver una película de formato Panavisión en una pantalla estándar y en una panorámica?

# Módulo 6

Bloques: Estadística y  
probabilidad.  
Relaciones y funciones



# Tablas y gráficos



En Estadística ampliarás tus conocimientos sobre tablas y gráficos y *aprenderás* a organizar datos en tablas, presentarlos en forma de gráfico, *analizarlos* e *interpretarlos*.

## DCD Destrezas con criterios de desempeño

- Reconocer pares ordenados con enteros y ubicarlos en el plano cartesiano.
- Interpretar y construir tablas de datos y gráficas relativos a diferentes ámbitos de la vida cotidiana.
- Recoger, analizar, organizar y representar datos estadísticos relativos a diferentes ámbitos de la vida cotidiana.

- Extraer información representativa de un colectivo a partir de los parámetros estadísticos.
- Calcular y contrastar frecuencias absolutas y acumuladas de una serie de datos gráficos.
- Reconocer la importancia del trabajo colectivo en la realización de tareas y estudios.



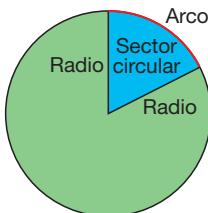
## Prerrequisitos

### Recuerda

- Las tablas sirven para visualizar varios datos correspondientes a unos pocos elementos.

Magnitud	Unidad	Símbolo
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	amperio	A
Temperatura	kelvin	K
Cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

- Un **sector circular** es la región del círculo limitada por dos radios y su arco correspondiente.



### Evaluación diagnóstica

- Representa sobre la recta los siguientes números enteros: 0, 2, -3, 4, -5, 7, -8.

- Averigua el número de hermanos y hermanas de cada uno de tus compañeros y compañeras de clase y, con los datos obtenidos, construye una tabla como la siguiente.

Número de hermanos	Frecuencia
0	.....
1	.....
2	.....
.....	.....

- Dibuja estos ángulos con ayuda del transportador de ángulos: 32°, 50°, 74°, 110° y 136°.
- Dibuja un ángulo de 45° con el transportador de ángulos, divídalo en dos ángulos iguales y calcula cuánto mide cada uno.
- Expresa las siguientes fracciones como un número decimal y como un porcentaje.

$$\frac{5}{7}, \frac{2}{3}, \frac{13}{15}$$

- Calcula el 16 % de 6 475. ¿Qué porcentaje representa 5 respecto de 125?



### Ciencia, tecnología e innovación

Art. 385. El sistema nacional de ciencia, tecnología, innovación y saberes ancestrales, en el marco del respeto al ambiente, la naturaleza, la vida, las culturas y la soberanía, tendrá como finalidad:

1. Generar, adaptar y difundir conocimientos científicos y tecnológicos.
2. Recuperar, fortalecer y potenciar los saberes ancestrales.
3. Desarrollar tecnologías e innovaciones que impulsen la producción nacional, eleven la eficiencia y productividad, mejoren la calidad de vida y contribuyan a la realización del Buen Vivir.

# 1 Tablas de datos y gráficas cartesianas

Muchas veces nos encontramos con la necesidad de analizar una gran cantidad de datos. En esos casos, conviene organizarlos en tablas de datos y representarlos mediante gráficas, que generalmente dibujamos en un *sistema de coordenadas cartesianas*, por lo que las llamaremos *gráficas cartesianas*.

## 1.1. Tablas de datos

Las tablas permiten ordenar y clasificar conjuntos de datos para que sea más sencilla su interpretación.

A continuación, presentamos la misma información de dos maneras diferentes. Analiza ambas maneras de disponer los datos y piensa cuál te parece más sencilla, por ejemplo, para buscar un dato determinado.

### Primera manera: mediante texto

En 8.º de EGB, 10 chicas y 8 chicos juegan baloncesto; 11 chicas y 12 chicos practican natación; 8 chicas y 11 chicos juegan fútbol y 6 chicas y 2 chicos, tenis. En 9.º de EGB, al baloncesto se dedican 8 chicas y 6 chicos; a la natación, 9 chicas y 5 chicos; al fútbol, 8 chicas y 15 chicos y al tenis, 7 chicas y 4 chicos. En 10.º de EGB, 10 chicas y 10 chicos juegan baloncesto; 11 chicas y 10 chicos practican natación; 4 chicas y 12 chicos se dedican al fútbol y 2 chicas y 3 chicos al tenis. En 1.º de Bachillerato, practican baloncesto 8 chicas y 10 chicos; natación, 12 chicas y 11 chicos; fútbol, 5 chicas y 10 chicos y tenis, 4 chicas y 3 chicos.

### Segunda manera: mediante una tabla

	8.º EGB		9.º EGB		10.º EGB		1.º Bachillerato	
	Chicas	Chicos	Chicas	Chicos	Chicas	Chicos	Chicas	Chicos
Baloncesto	10	8	8	6	10	10	8	10
Natación	11	12	9	5	11	10	12	11
Fútbol	8	11	8	15	4	12	5	10
Tenis	6	2	7	4	2	3	4	3

- ¿Cuántas chicas de 9.º de EGB practican la natación?
- ¿Cuántos chicos de 8.º de EGB juegan al fútbol?
- ¿Cuántas chicas de 10.º de EGB practican algún deporte?
- ¿Cuántos alumnos o alumnas de cualquier curso juegan tenis?

Contesta estas preguntas. Busca cada dato necesario tanto en el texto como en la tabla.

- ¿En qué presentación te ha resultado más fácil encontrar la información?
- ¿Cuál te parece más adecuada para comprender y estudiar los datos?

### ejemplo 1

En una olimpiada de invierno durante una competición de saltos de esquí, el saltador sueco, con el número 47, de 23 años y 1,80 m de estatura, consiguió una marca de 101,30 m. El esquiador finlandés, con el dorsal 14, de 21 años y 1,79 m de estatura, saltó 106,24 m.

El saltador suizo, que llevaba el número 19, con 25 años y 1,78 m de estatura, saltó 109,03 m. El representante de Alemania, que participó con el dorsal 21, de 24 años y 1,70 m de estatura, saltó 110,50 m. Finalmente, el participante ruso, con dorsal 23, de 29 años y 1,76 m de estatura, consiguió una marca de 104,48 m. Organiza los datos del enunciado en forma de tabla y contesta a estas preguntas:

- ¿Qué esquiador ganó la prueba?
- ¿Cuántos saltadores superaron los 105 m?
- ¿Cuántos saltadores menores de 25 años medían más de 1,75 m?



Nacionalidad	Sueco	Finlandés	Suizo	Alemán	Ruso
Número	47	14	19	21	23
Edad	23	21	25	24	29
Estatura	1,80	1,79	1,78	1,70	1,76
Marca	101,30	106,24	109,03	110,50	104,48

Si se observa la tabla, podemos contestar fácilmente las preguntas del enunciado.

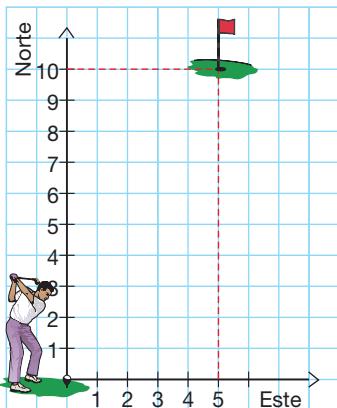
- Ganó la prueba el esquiador alemán, con una marca de 110,50 m.
- Hubo tres saltadores que superaron los 105 m: el finlandés, el suizo y el alemán.
- Participaron dos saltadores menores de 25 años que medían más de 1,75 m: el sueco y el finlandés.

## Actividades

1 La siguiente tabla ofrece información del idioma, el nivel y la edad de los alumnos de un instituto de idiomas. Teniendo en cuenta que cada alumno solamente estudia un idioma, contesta a estas preguntas:

- ¿Cuántos alumnos menores de 20 años están en el nivel 4 de italiano? ¿Y en el nivel 3 de francés?
- ¿Cuántos alumnos menores de 20 años están matriculados en el instituto? ¿Y de 20 años o más?
- ¿Cuántos alumnos están matriculados?
- ¿Cuántos estudian francés? ¿Qué porcentaje representa sobre el total de alumnos?

		Número de alumnos			
		Inglés	Francés	Alemán	Italiano
Nivel 1	Menos de 20 años	35	24	18	15
	20 años o más	23	31	15	10
Nivel 2	Menos de 20 años	24	18	13	10
	20 años o más	32	25	14	9
Nivel 3	Menos de 20 años	20	22	12	5
	20 años o más	24	25	16	11
Nivel 4	Menos de 20 años	22	23	15	6
	20 años o más	27	20	13	10



## 1.2. Coordenadas cartesianas

El jugador de golf necesita conocer la posición del hoyo para golpear la pelota con la fuerza y la dirección adecuadas. Así, tendrá en cuenta que está situado 5 m al Este y 10 m al Norte.

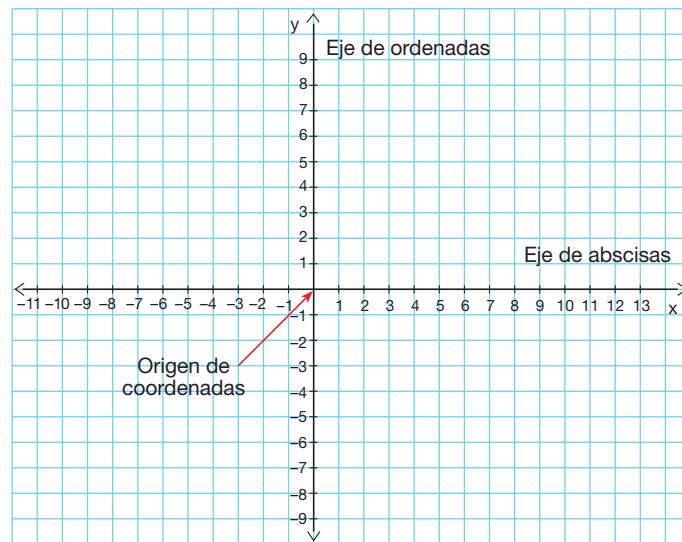
En general, para determinar la posición de un punto en el plano, debemos conocer un par de números.

Estos dos números pueden determinarse a partir de dos rectas perpendiculares, graduadas, que denominamos **ejes de coordenadas**. Los dos ejes de coordenadas constituyen un **sistema de coordenadas cartesianas** en el plano.

### FÍJATE

El eje de abscisas tiene varias divisiones, todas del mismo valor. Lo mismo ocurre con el eje de ordenadas.

En la gráfica de arriba, cada división, tanto en el eje de abscisas como en el de ordenadas, equivale a 1 m.



- El eje horizontal se llama **eje de abscisas** y se representa por  $x$ .
- El eje vertical se llama **eje de ordenadas** y se representa por  $y$ .

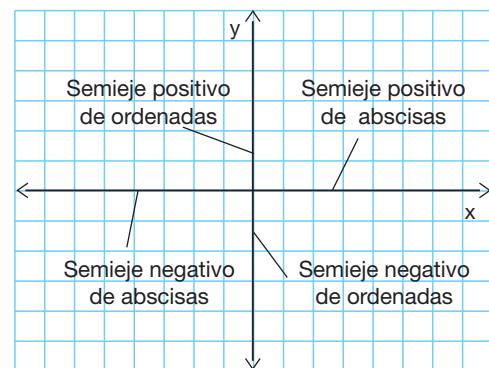
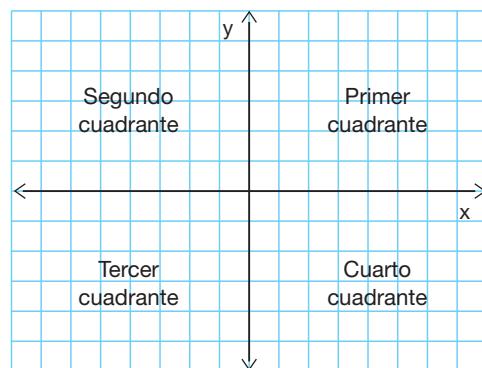
Los ejes de coordenadas dividen el plano en cuatro regiones.

Cada una de ellas se denomina **cuadrante** y se numera como se indica en la figura.

- El punto en que se cortan ambos ejes es el **origen de coordenadas** y se representa por  $O$ .

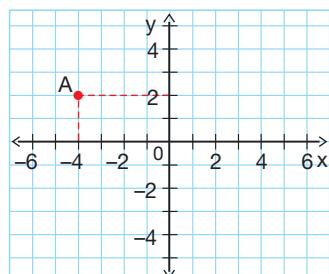
El origen de coordenadas es el punto cero de ambos ejes.

Este punto divide a cada eje en dos **semiejes**, uno positivo y otro negativo.



## Determinación de las coordenadas de un punto del plano

En un sistema de coordenadas cartesianas, a cada punto del plano le corresponde un par de números. Observa cómo determinamos el que corresponde al punto  $A$  de la figura.



- Trazamos una recta vertical por el punto  $A$ . Esta recta corta al eje de abscisas en  $-4$ .
  - Trazamos una recta horizontal por el punto  $A$ . Esta recta corta al eje de ordenadas en  $2$ .
- Al punto  $A$  le corresponde el par  $(-4, 2)$ . Diremos que  $-4$  y  $2$  son las **coordenadas** del punto  $A$ :  $-4$  es la abscisa y  $2$  es la ordenada.

$A (-4, 2)$

Abscisa de  $A$



Ordenada de  $A$

### Notación

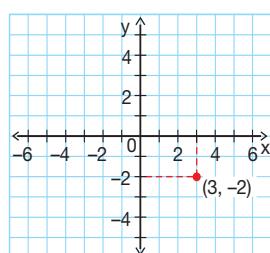
Indicamos las coordenadas cartesianas (o simplemente coordenadas) del punto  $P$  de esta manera:

$P(x, y)$

Donde  $x$  es la abscisa e  $y$  la ordenada.

## Representación de puntos en el plano a partir de sus coordenadas

De la misma manera, a cada par de números le corresponde un punto del plano. Observa cómo situamos el punto de coordenadas  $(3, -2)$ .



- Localizamos el  $3$  en el eje de abscisas y trazamos una recta vertical por este punto del eje.
- Localizamos el  $-2$  en el eje de ordenadas y trazamos una recta horizontal por este punto del eje.

El punto donde se cortan ambas rectas es justamente la representación gráfica del par  $(3, -2)$ .

## Actividades



**2** Dibuja un sistema de coordenadas cartesianas.

- Señala el eje de abscisas, el eje de ordenadas y el origen de coordenadas.
- Identifica con un número el primero, el segundo, el tercero y el cuarto cuadrantes.

**3** Representa en un sistema de coordenadas estos puntos e indica en qué cuadrante están situados.

$(-2, 5)$ ,  $(1, -3)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(-2, -1)$ ,  
 $(0, 5)$ ,  $(-2, 0)$ ,  $(-2, 1)$ ,  $(4, -3)$

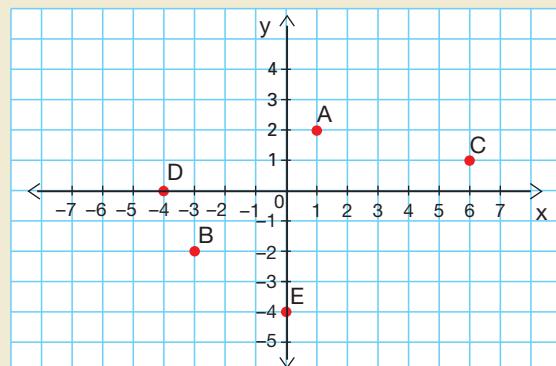
**4** Completa en tu cuaderno los signos que faltan:

Cuadrante	Primero	Segundo	Tercero	Cuarto
Coordenada				
Abscisa	+			

Ordenada		-		
----------	--	---	--	--

**5** Indica las coordenadas de los siguientes puntos.



**6** Las coordenadas de tres de los vértices de un cuadrado son  $(-2, 2)$ ,  $(4, 2)$  y  $(4, -4)$ . ¿Cuáles son las coordenadas del cuarto vértice?

### 1.3. Gráficas cartesianas

En un sistema de coordenadas cartesianas podemos representar información relativa a muchas situaciones de la vida cotidiana. Para ello, utilizamos las **gráficas cartesianas**.



Una **gráfica cartesiana** es un conjunto de puntos representados en un sistema de coordenadas cartesianas.

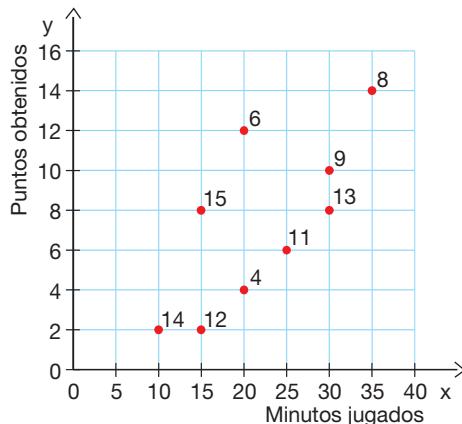


Fig. 1

#### Gráficas que se representan mediante puntos aislados

Observa la gráfica de la figura 1. Ofrece información sobre el partido disputado por las jugadoras de un equipo de baloncesto.

Cada punto corresponde a la jugadora cuyo dorsal se indica. Las abscisas nos informan de los minutos jugados y las ordenadas de los puntos que obtuvo.

Cada división del eje de abscisas equivale a 5 minutos, y cada división del eje de ordenadas equivale a 2 puntos.

Con la información representada en la gráfica es fácil responder a preguntas como las que plantea el siguiente ejemplo.

#### ejemplo 2

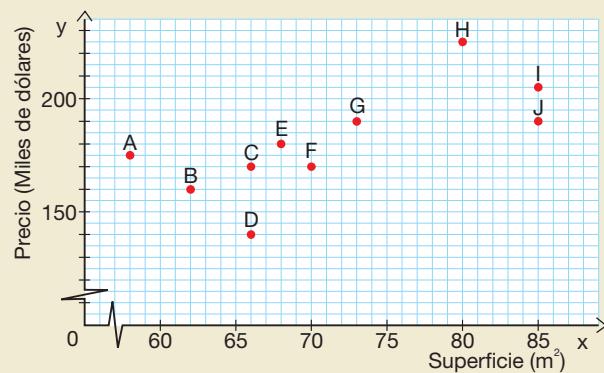
A partir de la gráfica de la figura 1, contesta:

- ¿Cuántas jugadoras participaron en el encuentro?
  - ¿Qué jugadora obtuvo mayor puntuación?
  - ¿Cuántos puntos obtuvo el equipo?
  - ¿Qué jugadora estuvo menos tiempo en la pista?
- 
- Participaron 9 jugadoras, puesto que hay 9 puntos representados.
  - La puntuación de cada jugadora nos viene dada por la ordenada del punto que la representa. El punto de mayor ordenada corresponde a la jugadora con el dorsal 8 y su valor es de 14 puntos.
  - Debemos sumar las ordenadas de todos los puntos.  
$$2+2+8+4+12+6+8+10+14 = 66$$
  
El equipo anotó 66 puntos.
  - El punto de menor abscisa corresponde a la jugadora con el dorsal 14 y su valor es de 10 minutos.

#### Actividades



- 7 Una agencia inmobiliaria tiene 10 departamentos en arriendo. La gráfica nos informa sobre el precio y la superficie de cada uno.
- ¿Cuál es el más económico? ¿Cuál el más amplio?
  - ¿Entre qué departamentos puede optar una familia que necesita un espacio mínimo de  $70\text{ m}^2$  y cuyo presupuesto no supera los 200 dólares?
  - ¿Cuál tiene una mejor relación superficie/precio?
  - ¿Qué importe recaudará la agencia por el arriendo de todos los departamentos?



## Gráficas que se representan mediante una línea

En el ejemplo de la página anterior, la gráfica estaba formada por puntos aislados, pues ofrecía información relativa a unas pocas jugadoras. En otras ocasiones, las gráficas están formadas por líneas de diversas formas, pues ofrecen información sobre infinitos puntos. Veamos un ejemplo.

La gráfica de la figura 2 nos muestra la temperatura en una estación meteorológica, que ha sido registrada por un termógrafo, de forma continua, durante un día.

En el eje de abscisas se ha representado la hora del día y cada una de sus divisiones corresponde a una hora.

En el eje de ordenadas se han representado las temperaturas y cada una de sus divisiones corresponde a 1 grado Celsius.

A partir de la gráfica, podemos averiguar la temperatura que hizo a las horas en punto y también podemos deducir la temperatura que hizo, por ejemplo, a las 10h30.

También podemos saber a qué hora se registró una temperatura determinada.

Veamos cómo podemos responder a algunas preguntas a partir de la información representada en la gráfica de la figura 2.

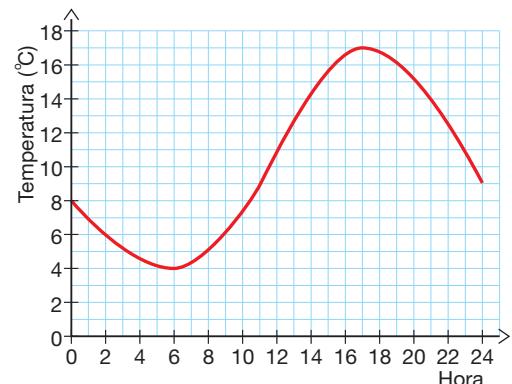


Fig. 2

### ejemplo 3

A partir de la gráfica de la figura 2, contesta las preguntas:

- ¿Qué temperatura se registró a las 11 de la mañana? ¿Y a las 6 de la tarde?
  - ¿A qué hora del día se registró la temperatura máxima?
  - ¿Cuál fue la temperatura más baja que se registró?
  - ¿Durante qué horas la temperatura fue en aumento?
- 
- A las 11 de la mañana se registraron 9 °C y a las 6 de la tarde unos 16,7 °C.
  - La temperatura máxima se registró a las 17 h y fue de 17 °C.
  - La temperatura más baja registrada fue de 4 °C.
  - La temperatura fue en aumento desde las 6 hasta las 17 h.

## Actividades



- 8 La gráfica representa la variación de la velocidad de un automóvil en función del tiempo para un trayecto entre dos semáforos.
- ¿Qué velocidad máxima alcanza el automóvil?
  - ¿Qué velocidad tiene a los 15 s? ¿En qué instante la velocidad es 15 m/s?
  - ¿Durante qué intervalo de tiempo la velocidad aumenta? ¿Durante qué intervalo disminuye?
  - ¿Durante cuánto tiempo el automóvil está circulando?



## 2 Estudios estadísticos

Conocer cuántos estudiantes toman transporte escolar para organizar otras rutas de recorrido o cuál es el promedio de notas del curso de matemática para tomar decisiones requiere de un proceso organizado que permita analizar datos, esto lo podemos realizar mediante un estudio estadístico siguiendo algunos pasos como:

- Elaborar encuestas.
- Recoger datos
- Organizar, clasificar las respuestas.
- Elaborar tablas con los resultados
- Construir gráficos

### 2.1. Variables estadísticas. Frecuencias

Analicemos la siguiente situación:

En 8.º año de EGB de un colegio se realizó la siguiente encuesta a 40 estudiantes:

Pregunta N.º1: ¿Cuántos hermanos o hermanas tienes?

Pregunta N.º2: ¿Por qué medio de transporte llegas al colegio?

Los resultados que se obtuvieron fueron.

N.º de hermanos	Frecuencia
0	3
1	8
2	15
3	11
4	2
5	1

Medio de Transporte	Frecuencia
Escolar	18
Bus de línea	11
Particular	5
Ninguno	6

El número de hermanos es una **variable estadística cuantitativa**, porque los valores que se emplean en la encuesta son numéricos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

El medio de transporte que utilizan los estudiantes es una **variable estadística cualitativa**, pues los valores que se emplean en la encuesta no son numéricos: transporte escolar, de línea, particular o ninguno.

El número de veces que se repite el número de hermanos o el medio de transporte se le llama frecuencia.

**Variable estadística:** cualquier característica que pueda observarse en un colectivo.

**Variable estadística cuantitativa:** aquella que toma valores numéricos.

**Variable estadística cualitativa:** no toma valores numéricos.

## 2.2. Frecuencia absoluta y relativa

La siguiente información corresponde a una encuesta realizada a 20 madres de familia que utilizan las instalaciones deportivas de un colegio para hacer deportes.

Encuesta:

¿Cuántos hijos tiene en el colegio?

¿Cuál es su deporte favorito?

N.º de hijos	Frecuencia absoluta
1	5
2	3
3	8
4	4

Deporte favorito	Frecuencia absoluta
Fútbol	11
Básquet	3
Natación	1
Ajedrez	5

El número de veces que se repite el mismo número de hijos o el mismo deporte es la **frecuencia absoluta**.

Ejemplo:

La frecuencia con la que se dan 3 hijos es 8, se expresa  $f(3) = 8$

La frecuencia de uso de del deporte ajedrez es 5, se expresa  $f(\text{ajedrez}) = 5$

Si en este estudio interesa saber cuántas madres de familia tienen 2 o menos de 2 hijos en el colegio, debemos sumar las frecuencias absolutas correspondientes a los valores 1 y 2:

$$5 + 3 = 8$$

Así, 8 madres de familia tienen menos de 3 hijos en el colegio. El número 8 se denomina la **frecuencia absoluta acumulada** del valor 2.

Si se requiere conocer qué parte del total de madres de familia practican básquet, dividimos la frecuencia absoluta para el total de datos:

$$\frac{3}{20} = 0,15 \text{ este valor lo llamaremos frecuencia relativa.}$$

La frecuencia relativa nos ayuda a determinar el porcentaje de madres de familia que practican básquet.

$$0,15 \times 100 = 15\%$$

Así, el 15% del total de madres de familia practican el básquet en el colegio.

**Frecuencia absoluta:** es el número de veces que se repite el valor de la variable.

**Frecuencia absoluta acumulada:** de un valor de la variable estadística es el resultado de sumar a su frecuencia absoluta las frecuencias absolutas de los valores anteriores.

**Frecuencia relativa:** de un valor de la variable estadística es el resultado de dividir la frecuencia absoluta de dicho valor entre el número total de datos.

### 3 Tablas y gráficos estadísticos

Las tablas y los gráficos son especialmente útiles en los *estudios estadísticos*.

► La **estadística** es la parte de la Matemática dedicada al estudio y el análisis de ciertas características de un conjunto de individuos llamado población.

#### 3.1. Tablas estadísticas

En este tipo de estudios se tiene gran cantidad de datos referidos a un colectivo. Dichos datos se interpretan con mayor facilidad cuando se organizan en *tablas estadísticas*.

##### Interpretación de tablas

Se ha llevado a cabo un estudio estadístico sobre la edad de los atletas participantes en una carrera organizada por la Universidad Técnica de Babahoyo y se han obtenido los siguientes resultados:

25 22 23 22 24 25 25 23 22 21 26 25 22 23 25 24

Estos datos se han organizado en una tabla estadística.

Variable estadística (edad)	21	22	23	24	25	26	
Frecuencia absoluta (n.º alumnos)	1	4	3	2	5	1	Total: 16
Frecuencia relativa	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$	Total: 1



Observa qué características aparecen en la tabla:

- **Variable estadística:** la edad.
- **Frecuencia absoluta:** el valor 25 tiene una frecuencia absoluta igual a 5.

La suma de todas las frecuencias absolutas es igual al número total de datos. En el ejemplo anterior, 16.

- **Frecuencia relativa:** La frecuencia relativa del valor 25 es  $\frac{5}{16} = 0,3125$  o, también, del 31,25 %, si la expresamos en porcentaje.

La suma de todas las frecuencias relativas es igual a 1.

A partir de la tabla estadística, podemos deducir un importante parámetro que representa a todo el colectivo. Se trata de la *media aritmética*.



#### FÍJATE

El valor de la variable estadística que se repite más veces recibe el nombre de **moda**.

En el ejemplo anterior, la moda es 25 años.



► La **media aritmética** es el valor que resulta de sumar todos los datos y dividir por el número total de ellos.

La media aritmética de las edades de los atletas es:

$$\frac{25 + 22 + 23 + 22 + 24 + 25 + 25 + 23 + 22 + 21 + 26 + 25 + 22 + 23 + 25 + 24}{16} = 23,6$$

## Construcción de tablas

En la clase de Yolanda se ha realizado un examen de Matemática. Observa en el ejemplo 4 cómo se organizan los resultados en una tabla y cómo puede obtenerse información relativa al colectivo.

### ejemplo 4

Las notas sobre 10 puntos de un examen de Matemática de una clase de 8.º de EGB han sido:

8 6 5 4 6 6 8 5 7 5 3 5 6 9 6 6 4 7 10 5

- Construye una tabla estadística indicando las frecuencias absolutas y relativas de cada valor.
- Calcula la media aritmética de las notas de la clase.

Nota	3	4	5	6	7	8	9	10	
Recuento	1	2	5	6	2	2	1	1	
F. absoluta	1	2	5	6	2	2	1	1	Total: 20
F. relativa	0,05	0,10	0,25	0,30	0,10	0,10	0,05	0,05	Total: 1

- b) Para hallar la media aritmética, debemos sumar todas las notas obtenidas y dividir por el número de notas. Pero sumar todas las notas es equivalente a multiplicar cada valor por su frecuencia absoluta y sumar los productos. Así:

$$\frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 1 + 10 \cdot 1}{20} = 6,05$$

La media aritmética es 6,05.

### Tipos de variables estadísticas

Las variables estadísticas que tienen valores numéricos se denominan **variables cuantitativas**. Ejemplos: nota, altura, peso...

En cambio, aquellas que tienen valores no numéricos se denominan **variables cualitativas**. Ejemplos: color de pelo, deporte favorito, materia preferida...

La media aritmética es un parámetro que sólo puede calcularse para variables cuantitativas, en cambio, la moda puede calcularse para ambos tipos de variables.

## Actividades



- 9 Para averiguar los conocimientos de sus alumnos acerca de los Derechos Humanos, un profesor efectúa una prueba de 10 preguntas y obtiene los resultados que muestra la tabla.

N.º respuestas correctas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
F. absoluta (n.º alumnos)	0	0	1	2	4	8	11	9	7	5	1	Total: 48
Frecuencia relativa												Total: 1

- Completa la tabla con las frecuencias relativas de cada resultado.
- Añade una fila en la que aparezcan las frecuencias relativas expresadas en porcentaje.
- ¿Cuál ha sido el resultado más repetido? ¿Qué porcentaje sobre el total le corresponde?
- Determina cuántas preguntas responde correctamente un alumno por término medio.

- 10 Los datos siguientes se refieren al número de veces que los alumnos de una clase de 8.º de EGB han visitado al dentista en los últimos tres meses.

1 1 6 0 2 6 1 6 1 6 7 6 1 2 1 1 6 2 1 0 6

- Construye una tabla estadística con las frecuencias absoluta y relativa de cada valor.
- ¿Cuántas veces, por término medio, los alumnos de 8.º de EGB visitan al dentista?
- ¿Cuál es el número de visitas que más se repite? ¿Qué tanto por ciento sobre el total representa?

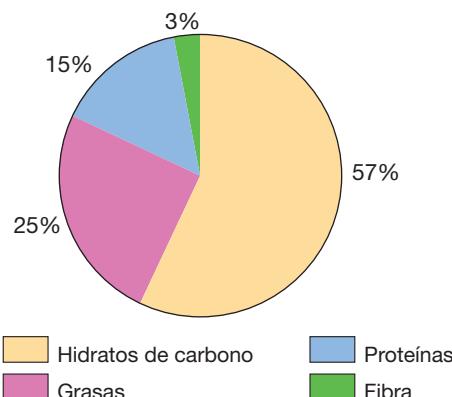
## 3.2. Gráficos estadísticos

La información relativa a un estudio estadístico suele representarse en *gráficos estadísticos*, pues de este modo se visualiza con mayor claridad.

Los dos gráficos más utilizados en estadística son el *diagrama de sectores* y el *diagrama de barras*.

### Diagrama de sectores

Al buscar los componentes de una dieta equilibrada, hemos encontrado el siguiente gráfico.



Este gráfico consiste en un círculo dividido en sectores de amplitud proporcional a las frecuencias de cada valor de la variable estadística.

— Para construirlo:

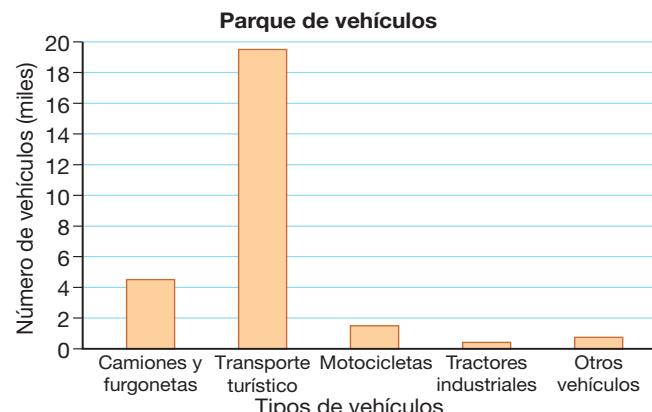
- Calculamos la amplitud de cada sector multiplicando por  $360^\circ$  las frecuencias relativas.
- Dibujamos un círculo y, utilizando un graduador de ángulos, lo dividimos en sectores de la amplitud calculada.

— Al observarlo, concluimos que:

- Más de la mitad de una dieta equilibrada debe estar formada por hidratos de carbono. Una cuarta parte debe estar constituida por grasas.
- La proporción de proteínas debe ser cinco veces mayor que la de fibra.

### Diagrama de barras

El gráfico muestra el parque de vehículos en una ciudad de la Costa.



En este gráfico cada barra representa un valor de la variable estadística y su altura es proporcional a la frecuencia de dicho valor.

— Para construirlo:

- Trazamos unos ejes de coordenadas. Sobre el eje de abscisas representamos los valores de la variable estadística y sobre el eje de ordenadas las correspondientes frecuencias.
- Para cada valor de la variable trazamos una barra vertical cuya altura coincida con su frecuencia.

— A partir del análisis de la gráfica concluimos que:

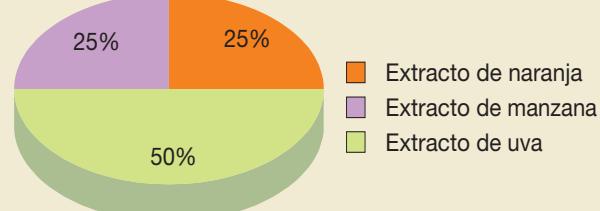
- El parque de vehículos de la ciudad está formado fundamentalmente por turismos. Los camiones y las furgonetas ocupan el segundo lugar.
- Los tractores industriales constituyen una parte ínfima.

## Actividades

11 En el siguiente diagrama de sectores está representada la composición de una bebida.

- ¿Qué extractos de frutas contiene? ¿En qué porcentajes?
- ¿Qué cantidad de extracto de cada una de las frutas se necesita para preparar 3 litros de bebida?

### Composición de una bebida



### 3.3. Descripción de experimentos aleatorios

Si conocemos el volumen de agua contenida en un recipiente y su densidad podemos determinar su peso. En cambio, habrás observado que al lanzar una moneda al aire, el resultado (cara o cruz) es completamente impredecible.

→ Llamamos **experimento determinista** a todo aquel cuyo resultado puede predecirse antes de que se realice.

Llamamos **experimento aleatorio** a todo aquel cuyo resultado no puede predecirse antes de que se realice.

Imagina ahora que lanzamos la moneda muchas veces. ¿Serías capaz de predecir el número de caras y cruces?

Construyamos la tabla de frecuencias correspondiente al suceso “salir cara”. Esta tabla indica la **frecuencia absoluta**, o número de veces que ocurre el suceso, y la **frecuencia relativa**, que es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número de veces que se repite el experimento.

Supongamos que los valores obtenidos son:

N.º de lanzamientos	100	200	300	400	500	600	700	800
Frecuencia absoluta	56	107	142	195	245	296	347	398
Frecuencia relativa	0,560	0,535	0,473	0,488	0,490	0,493	0,496	0,498

Observa atentamente el comportamiento de la frecuencia relativa. A medida que crece el número de repeticiones su valor se aproxima paulatinamente al valor 0,5.

De acuerdo con estos resultados podemos afirmar que el suceso “salir cara” ocurrirá en el 50% de los casos, o que su *probabilidad* es de 0,5.

→ Definimos **probabilidad** de un suceso en un experimento aleatorio como el valor al que se aproximan las frecuencias relativas del suceso al aumentar el número de repeticiones del experimento.

#### FÍJATE

La probabilidad indica el grado de certeza que tenemos de que ocurra un suceso. Su valor está comprendido entre 0 (suceso imposible) y 1 (suceso seguro).

#### Actividades



12 Se ha lanzado un dado 500 veces y se han obtenido estos resultados:

Suceso	1	2	3	4	5	6
Frecuencia absoluta	84	88	87	75	86	80

- Antes de realizar el experimento, ¿cuál crees que será la probabilidad de cada resultado?
- Completa la tabla con las frecuencias relativas de cada resultado. ¿Confirman estos datos tu hipótesis?
- Considera los sucesos:

A = Obtener un número par    B = Obtener un número mayor que 2

C = Obtener un número menor o igual que 6.

Calcula las frecuencias absoluta y relativa de cada suceso y ordénalos de más a menos probable.

# Cómo resolver problemas

## Estrategia: Organización de la información

Antes de iniciar la resolución de cualquier problema es necesario que tengas organizados los datos de los que dispones.

Esto es especialmente importante en los estudios con muchos cálculos. En esos casos es conveniente organizar los datos en una tabla que facilite las operaciones y simplifique los procesos.

*La energía consumida por una persona es múltiplo de su tasa de metabolismo basal (TMB). En reposo (durmiendo, tendida...) consume su TMB · 1; en actividad muy ligera (sentada o de pie), su TMB · 1,5; en actividad ligera (caminar, trabajar en un taller...), TMB · 2,5; en actividad moderada (marchar a 6 km/h, jardinería, bicicleta a 18 km/h, baile...), TMB · 5; en actividad intensa (correr a 12 km/h, jugar al fútbol...), TMB · 7; en actividad muy pesada (subir escaleras a toda velocidad, atletismo de competición...), TMB · 15.*

Una persona corriente tiene una TMB de 66 kcal/h. Calcula la energía consumida por una persona que efectúa las siguientes actividades a lo largo de 24 h: trabajar en un taller (8 h); estar sentado (2,5 h); caminar (2 h); leer (1,5 h); comer (2 h); dormir (8 h).

### ► Comprensión del enunciado

- Leemos de nuevo el enunciado. Localizamos los datos y los disponemos en la tabla de la derecha.
- Escribimos qué es lo que debemos buscar: la energía consumida por una persona a lo largo de 24 h.

Actividad	Tasa de energía requerida (kcal/h)	Ejemplos de actividades
Reposo	TMB > 1 = 66	Durmiendo, tendida...
Muy ligera	TMB > 1,5 = 99	Sentada o de pie.
Ligera	TMB > 2,5 = 165	Caminar, trabajar en un taller...
Moderada	TMB > 5 = 330	Marchar a 6 km/h, jardinería, bicicleta a 18 km/h, baile...
Intensa	TMB > 7 = 462	Correr a 12 km/h, jugar al fútbol...
Muy pesada	TMB > 15 = 990	Subir escaleras a toda velocidad, atletismo de competición...

### ► Planificación de la resolución

- Multiplicaremos la tasa de energía requerida para cada actividad por el número de horas y, a continuación, sumaremos los productos para hallar la energía consumida total.

### ► Ejecución del plan de resolución

$$8 \cdot 165 + 2,5 \cdot 99 + 2 \cdot 165 + 1,5 \cdot 99 + 2 \cdot 99 + 8 \cdot 66 = 2\,772 \text{ kcal}$$

### ► Revisión del resultado y del proceso seguido

Repasamos los cálculos efectuados y pensamos si el resultado obtenido es razonable.

## Actividades

- 13** Organiza los datos en una tabla.

La producción mundial de petróleo en el año 2002 está encabezada por Próximo Oriente con 20,973 millones de barriles diarios. Le siguen América del Norte (14,163 millones), ex repúblicas soviéticas (9,348 millones), Asia y Pacífico (7,987 millones), África (7,937 millones), Europa (6,874 millones) y América del Sur y Central (6,654 millones).

La lista de consumidores está encabezada por América del Norte con 23,487 millones de barriles diarios. Le siguen Asia y Pacífico (21,399 millones), Euro-

pa (16,025 millones), América del Sur y Central (4,590 millones), Próximo Oriente (4,388 millones), ex repúblicas soviéticas (3,381 millones) y África (2,527 millones).

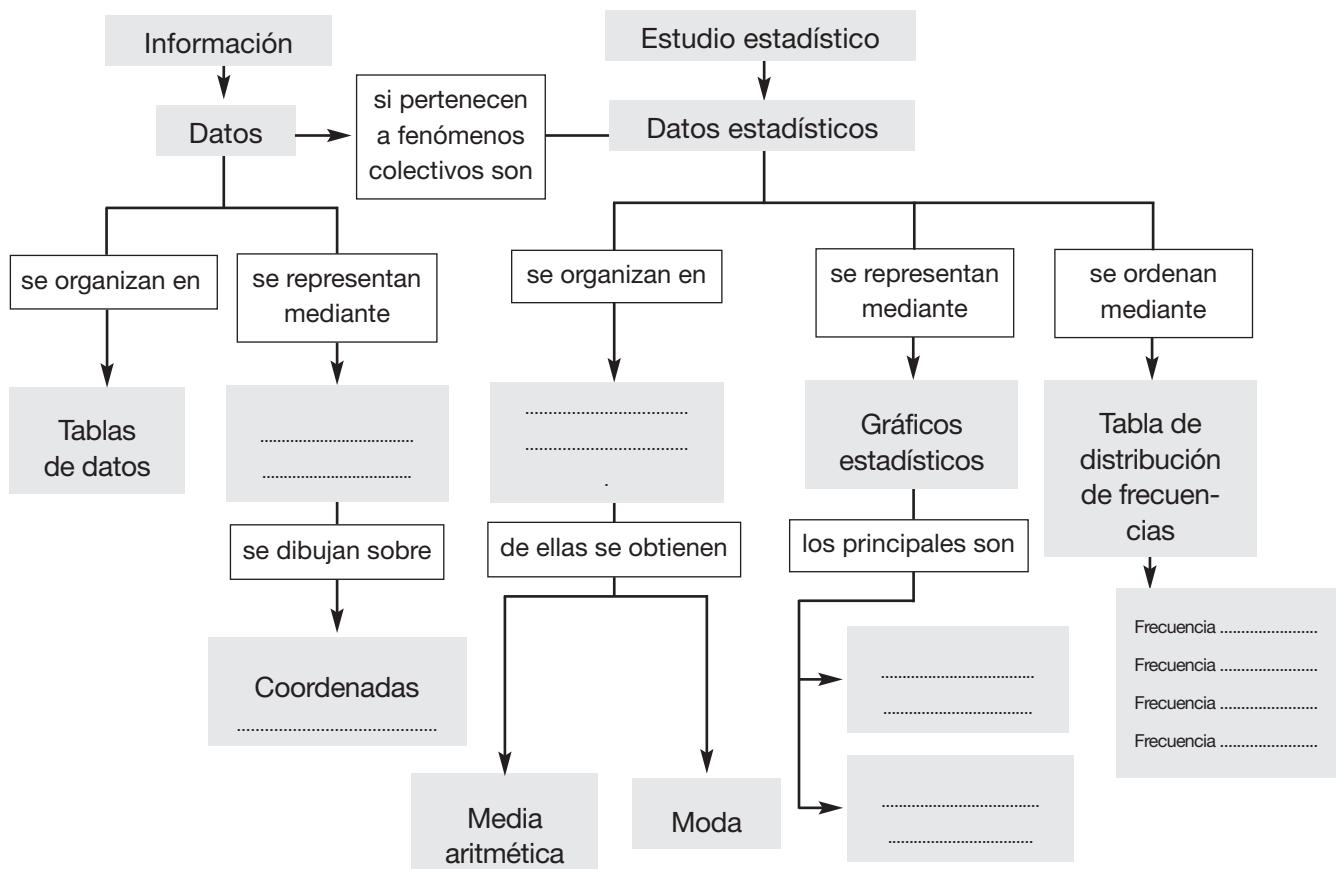
- 14** Resuelve:

- Di en qué zonas el consumo está por encima de la producción y en cuáles por debajo.
- Calcula el total de barriles de petróleo producidos diariamente en el mundo y el total de barriles consumidos diariamente. ¿Coinciden? ¿Qué significado tiene?

## En resumen

- Las **tablas** permiten ordenar y clasificar conjuntos de datos de manera que su interpretación sea más sencilla.
- Un **sistema de coordenadas cartesianas** consta de estos elementos:
  - El eje horizontal se llama **eje de abscisas** y se representa por  $X$ .
  - El eje vertical se llama **eje de ordenadas** y se representa por  $Y$ .
  - El punto en que se cortan ambos ejes es el **origen de coordenadas** y se representa por  $O$ .
- La **estadística** es la parte de las Matemáticas dedicada al estudio y el análisis de datos referidos a fenómenos colectivos.
- Los datos estadísticos se interpretan con mayor facilidad cuando se organizan en **tablas estadísticas**.
- La información relativa a un estudio estadístico suele representarse en **gráficos estadísticos** para visualizarla con mayor claridad.
- Una **población** es un conjunto de elementos que se quiere estudiar. Cada uno de sus elementos es un **individuo**. Una **muestra** es una parte de la población objeto de estudio.
- La característica de la población que se quiere estudiar es una **variable estadística**. Cada observación sobre ella es un **dato**. Las variables estadísticas pueden ser:
  - **Cualitativas**. No toman valores numéricos.
  - **Cuantitativas**. Se dan en forma numérica. Pueden ser **continuas** o **discretas**.
- Una **encuesta** es un conjunto de preguntas dirigidas a una muestra para la obtención de datos.
- La **frecuencia absoluta** de un valor de la variable estadística es el número de veces que se repite dicho valor.
- La **frecuencia relativa** de un valor de la variable estadística es el resultado de dividir la frecuencia absoluta de dicho valor entre el número total de individuos de la población.
- La **frecuencia absoluta acumulada** de un valor de la variable estadística es el resultado de sumar a su frecuencia absoluta las frecuencias absolutas de los valores anteriores.
- La **frecuencia relativa acumulada** de un valor de la variable estadística es el resultado de sumar a su frecuencia relativa las frecuencias relativas de los valores anteriores.

Repasa los contenidos de este tema y completa mentalmente lo que hace falta:



# Ejercicios y problemas integradores

- Samia tiene 15 años y mide 1,65 m, Rita tiene 12 años y mide 1,30 m, Nely tiene 14 años y mide 1,50 m y Luis tiene 16 años y mide 1,70 m. Representa a cada uno, en el plano cartesiano.

- Para representar esta información debemos identificar las variables dependiente e independiente.

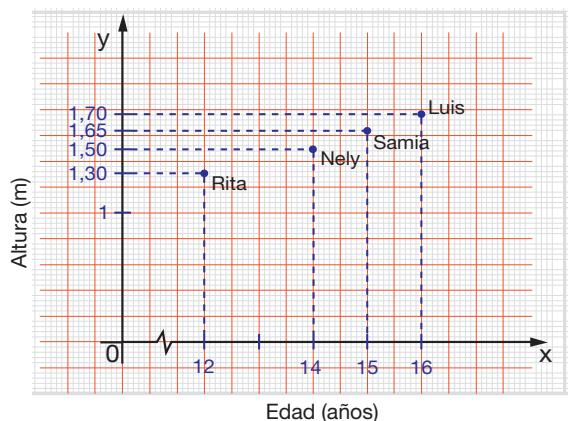
En este caso, la estatura depende de la edad.

Variable independiente x: Edad

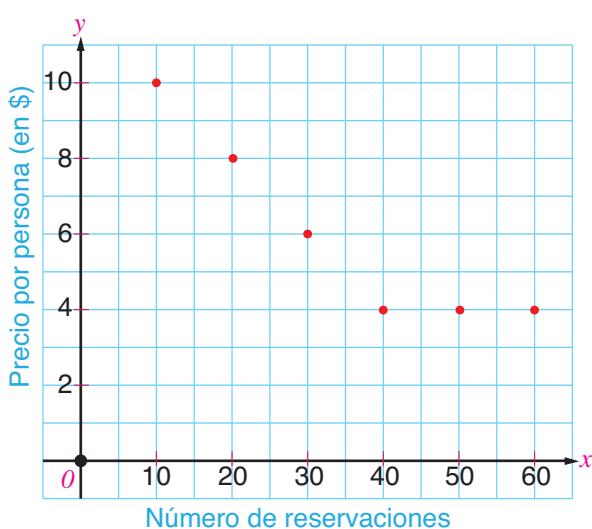
Variable dependiente y: Estatura

- Graficamos un plano cartesiano utilizando una escala adecuada que nos permita ubicar los valores entre 12 y 16 para el eje x, y entre 1 y 2 metros para el eje y.

- Formamos los pares ordenados correspondientes y los ubicamos en el plano.  $(15; 1,65); (12; 1,30); (14; 1,50); (16; 1,70)$



- Se va a organizar un paseo y el precio por persona va a depender del número de personas que vayan al paseo. El número máximo de reservaciones para el hotel es de 60, y el mínimo 10, admitiendo solamente grupos de 10 personas. Analiza la gráfica y contesta las preguntas:



- a) ¿Qué significado tienen los pares ordenados  $(10, 10)$ ,  $(30, 6)$ ,  $(20, 8)$ ?

Si hacen 10 reservaciones, cada persona pagará \$ 10.

Si hacen 30 reservaciones, cada persona pagará \$ 6.

Si hacen 20 reservaciones, cada persona pagará \$ 8.

Conclusión: Cuando el grupo de personas aumenta el costo de la reservación individual disminuye.

- b) ¿Es necesario que en el eje x consten números mayores a 60?

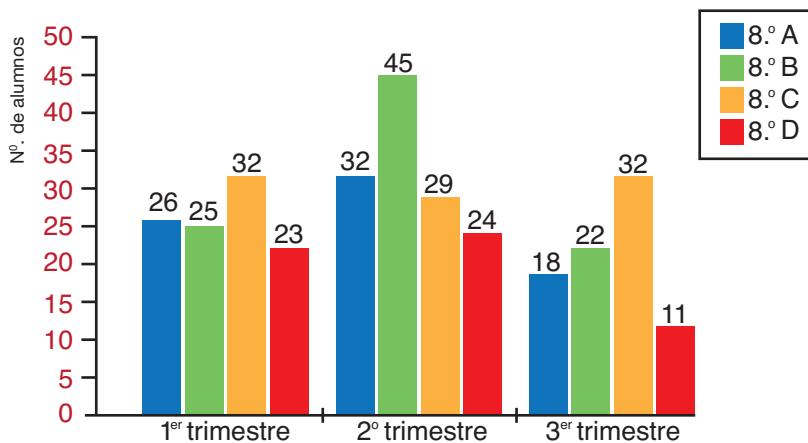
No, ya que hay un mínimo de reservaciones que es 10 y un máximo de 60 personas.

- c) ¿Por qué la gráfica no muestra los valores 15 y 55?

Porque solo se admiten grupos de 10 personas. Los valores intermedios no tienen sentido.

- Analiza el gráfico y responde a las preguntas:

### Inasistencia de los estudiantes de 8.º Año de Educación Básica



- a) ¿Qué representa el gráfico?

Las inasistencias de un grupo de estudiantes de octavo de básica.

- b) ¿En qué grupo se produjo el mayor número de ausencias en cada trimestre?

Primer trimestre 8.º C

Segundo trimestre 8.º B

Tercer trimestre 8.º C

- c) ¿Cuántas faltas se produjeron en el grupo 8.º B en el segundo trimestre?

Cuarenta y cinco faltas.

- d) Elabora una tabla de frecuencias del primer trimestre.

Paralelos	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
A	26	26
B	25	$26 + 25 = 51$
C	32	$25 + 32 = 57$
D	23	$32 + 23 = 55$

### Práctica

Elabora una tabla de frecuencias de todo el año escolar.

# Ejercicios y problemas



## Comprensión de conceptos y conocimiento de procesos



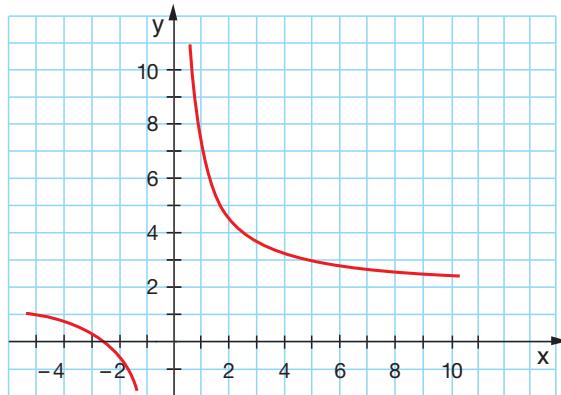
### Tablas de datos y gráficas cartesianas

- 15** Explica por qué es habitual presentar los datos de numerosas disciplinas (economía, sociología...) en forma de tablas y de gráficas. Ilustra tu explicación mediante ejemplos.
- 16** A partir de los datos que aparecen en la tabla, contesta a las siguientes preguntas.

Número de horas semanales			
	Estudio	Deporte	Dormir
Juan	18	14	61
Pedro	29	4	56
Toa	25	9	58

- ¿Quién dedica más horas a estudiar? ¿Quién dedica más tiempo al deporte? ¿Quién duerme más horas?
  - Si sumamos las horas de estudio y deporte, ¿quién dedica más tiempo a ambas actividades?
- 17** Representa en un sistema de coordenadas cartesianas los puntos  $(-5, -1)$ ,  $(-2, 2)$ ,  $(0, -4)$  y  $(7, 3)$ .
- 18** Indica, sin efectuar su representación, el cuadrante al que pertenecen los siguientes puntos.  
 $(-3, 5)$ ,  $(3, -4)$ ,  $(3, 11)$ ,  $(-2, 5, -1)$

- 19** Determina, a partir de la siguiente gráfica, el valor correspondiente a  $x = 5$  y el correspondiente a  $y = 4$ .



- Justifica si puedes transformar la gráfica anterior en un diagrama de barras.

### Tablas y gráficos estadísticos

- 20** Di qué conceptos aparecen en una tabla estadística y explica qué significa cada uno de ellos.
- 21** La siguiente tabla estadística corresponde a la suma de puntos obtenidos al lanzar dos dados.

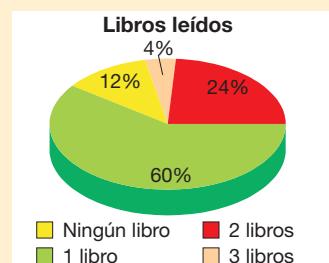
Puntuación	3	4	5	6	7	8	9	10
N.º veces	2	3	4	5	6	5	4	3

- ¿Cuántas veces hemos lanzado los dos dados?
- Completa la tabla con las frecuencias relativas expresadas en tanto por uno y en tanto por ciento.
- ¿Cuál ha sido el resultado más repetido? ¿Qué porcentaje de veces se ha obtenido?

- 22** El número de visitas que Juan ha hecho a sus abuelos en los últimos 12 meses es:  
3 4 3 4 3 5 6 4 3 4 3 5
- Organiza estos datos en una tabla estadística con la frecuencia relativa expresada en tanto por uno y en tanto por ciento.
  - Calcula la media aritmética.

- 23** El siguiente diagrama de sectores muestra el número de libros leídos durante el último mes por los alumnos de una clase de 8.º de EGB.

Si en la clase hay 25 alumnos, calcula cuántos alumnos no han leído ningún libro, cuántos han leído 1 libro, cuántos han leído 2 libros y cuántos han leído 3 libros.



$$\text{Ningún libro: } 25 \cdot \frac{12}{100} = 3$$

$$1 \text{ libro: } 25 \cdot \frac{60}{100} = 15$$

$$2 \text{ libros: } 25 \cdot \frac{24}{100} = 6$$

$$3 \text{ libros: } 25 \cdot \frac{4}{100} = 1$$



24 Construye un diagrama de barras con estos datos: A, 100; B, 150; C, 125; D, 50; E, 50 y F, 50.

25 Los siguientes datos corresponden al número de alumnos (en miles) matriculados en el periodo escolar Costa. Inicial: 1419; EGB: 2495; Bachillerato: 632; Educación técnica: 517; Educación universitaria: 1463; Educación especial: 29.

— Construye un diagrama de barras con ellos.

26 Al llegar a la oficina de turismo de una determinada población, los visitantes deben responder si han estado con anterioridad en dicha población.

— Completa, en tu cuaderno, la siguiente tabla sabiendo que el número de visitantes ha sido de 140 y que la frecuencia absoluta de la respuesta Sí es  $\frac{2}{5}$  de la frecuencia absoluta de la respuesta No.

27 Hemos preguntado a 10 personas el número de películas que han visto durante la última semana y hemos obtenido los siguientes datos:

1 2 2 1 4 3 2 1 0 1

a) Construye la tabla de distribución de frecuencias.  
b) Representa estos datos en un diagrama de barras acumuladas.



## Aplicación en la práctica

28 Organiza en una tabla los datos siguientes, correspondientes a las características de varios modelos de automóvil expuestos en un concesionario.

El modelo FFW 1.6i tiene una potencia de 100 CV, una cilindrada de 1596 cm<sup>3</sup>, alcanza una velocidad máxima de 185 km/h, pasa de 0 a 100 km/h en 11,3 s, consume 6,9 l a los 100 km y cuesta \$ 17 780.

El modelo OZ 1.8 16v tiene una potencia de 125 CV, una cilindrada de 1796 cm<sup>3</sup>, su velocidad máxima es 188 km/h, pasa de 0 a 100 km/h en 11,5 s, consume 7,6 l a los 100 km y cuesta \$ 20 180.

El modelo RS 2.0 tiene una potencia de 140 CV, una cilindrada de 1998 cm<sup>3</sup>, una velocidad máxima de 196 km/h, pasa de 0 a 100 km/h en 10,2 s, consume 8,0 l a los 100 km y cuesta \$ 19 950.

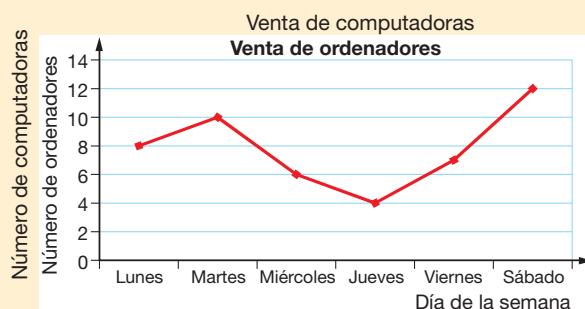
El modelo HS 2.0 ES tiene una potencia de 156 CV, una cilindrada de 1998 cm<sup>3</sup>, una velocidad máxima de 205 km/h, pasa de 0 a 100 km/h en 9,3 s, consume 8,6 l a los 100 km y cuesta \$ 23 500.

29 A partir de los datos de la actividad anterior, responde:

- ¿Qué modelo ofrece mejores prestaciones en velocidad máxima y tiempo de aceleración?
- ¿Están relacionados la potencia y el consumo?
  - Di si has analizado los datos a partir del texto de la actividad anterior o bien a partir de la tabla que has elaborado. Justifica tu elección.

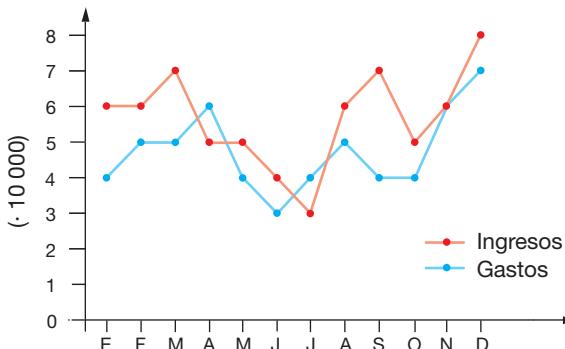
## Más a fondo

30 Esta gráfica muestra el número de computadoras que se han vendido en un centro comercial durante una semana.



- ¿Cuál fue el día en que se vendieron más computadoras? ¿Cuántos se vendieron?
  - ¿Qué día se vendieron 10?
  - ¿Cuántas computadoras se han vendido durante la semana?
- a) El sábado. 12.    b) El martes.  
c)  $8 + 10 + 6 + 4 + 7 + 12 = 47$

31 Analiza la siguiente gráfica.



- ¿En qué meses los ingresos superan a los gastos? ¿En cuáles son inferiores?
- Calcula los beneficios o las pérdidas obtenidos cada mes del año.



**32** Pregunta a cada uno de tus compañeros y compañeras de clase el deporte que prefiere. Calcula las frecuencias absolutas y las relativas, y expresa los resultados obtenidos en una tabla de frecuencias.

- Construye el diagrama de barras correspondiente. ¿Crees que sería adecuada en este caso la confección de un cartograma?

**33** La siguiente tabla muestra la evolución del porcentaje de trabajadores dependientes de los ingresos agrícolas en cuatro regiones del Ecuador. Exprésalo mediante diagramas de barras.

Región	1950	1960	1970	1980	1990	2000
1	76	71	64	56	51	41
2	76	71	69	66	60	55
3	87	84	81	74	69	64
4	55	50	43	35	26	21

Región 1: Amazonía; 2: Sierra; 3: Costa; 4: Galápagos.

**34** Observa los pasos que puedes seguir para elaborar una encuesta.

1. Definición del problema.
2. Formación de los grupos de trabajo y distribución de las tareas.
3. Formulación del cuestionario.
4. Elección de la muestra si es necesario.
5. Realización de las entrevistas.
6. Organización de los datos en tablas y elaboración de los gráficos más adecuados.
7. Análisis de los resultados y extracción de conclusiones.

A la hora de formular las preguntas es importante que tengas en cuenta las siguientes normas:

1. El número de preguntas debe ser reducido.
2. Formula las preguntas de forma concreta y precisa de modo que puedan contestarse rápidamente.
3. Las preguntas deben ser preferentemente cerradas y numéricas.

Formen grupos de trabajo y elaboren un formulario para estudiar los hábitos de ahorro de recursos en los alumnos de su colegio.

**35** Busca información sobre los planetas del Sistema Solar. Anota en una tabla el radio ecuatorial, la distancia media al Sol, el período de rotación, el período de revolución, el número de satélites y otros datos significativos que consideres interesantes. Puedes obtener ayuda en la página [http://websdemasiado.com/juan\\_1698/ASTRONO1.htm](http://websdemasiado.com/juan_1698/ASTRONO1.htm)

**36** Conéctate a la página web del Instituto Nacional de Estadística y Censos (<http://www.inec.gob.ec>) y busca información sobre la distribución de la población por provincias. Busca resultados preliminares por provincia.

- Representa los datos en un diagrama de barras.

**37** Vamos a efectuar un análisis de los productos alimentarios a partir de sus etiquetas.

**a** Formen grupos y recojan las etiquetas de los envases de productos alimentarios que consumen habitualmente.

Intenten conseguir de algún producto varias etiquetas correspondientes a distintas marcas.

**b** Analicen la presentación de la información.

- ¿Qué información recoge la etiqueta?
- ¿Se presenta de forma clara?
- ¿Aparecen los ingredientes?

**c** Escojan varios productos similares. Construyan una tabla detallando los ingredientes y su cantidad o proporción.

**d** Dibujen un diagrama de sectores que refleje la composición de cada producto.

**e** Pongan en común sus resultados con los de otros grupos.

**38** Busca información sobre las ventas anuales de automóviles en el Ecuador durante los últimos 10 años. Puedes consultar anuarios de periódicos, Internet... o seguir las orientaciones de tu profesor o profesora.

- Utiliza una hoja de cálculo para organizar los datos en una tabla. Representa los resultados gráficamente mediante ese mismo programa informático. Escoge el tipo de gráfico que creas más adecuado.

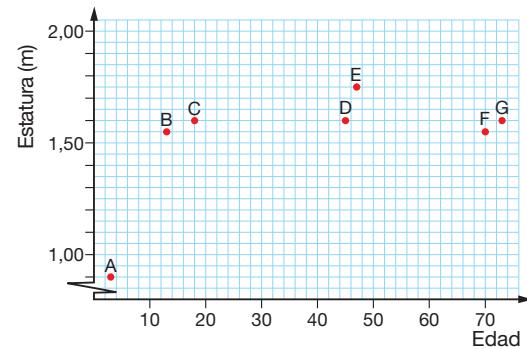
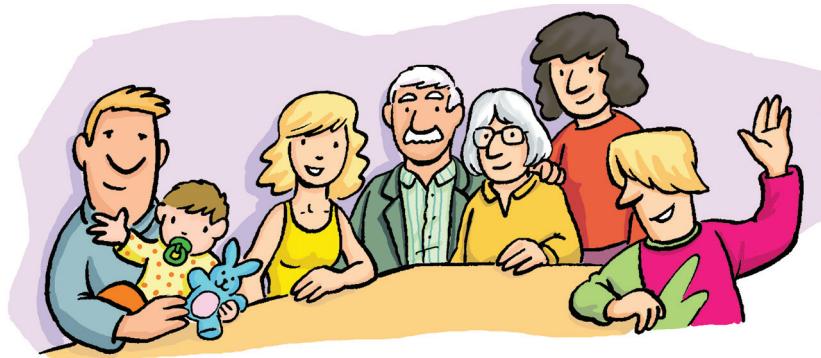
Sigue las orientaciones de tu profesor o profesora en el trabajo con aplicaciones informáticas.



## ► La familia

La familia Cañas está formada por siete miembros. Los abuelos son Alonso y Lupe, los padres son Francisco y Margarita, y los tres hijos son Javier, que estudia en la universidad; Armando, que estudia 8.º de EGB, y Luis, que va a la guardería.

¿Sabrías decir a quién representa cada uno de los puntos del diagrama de la derecha?



## Buen Vivir

Ciencia, tecnología e innovación



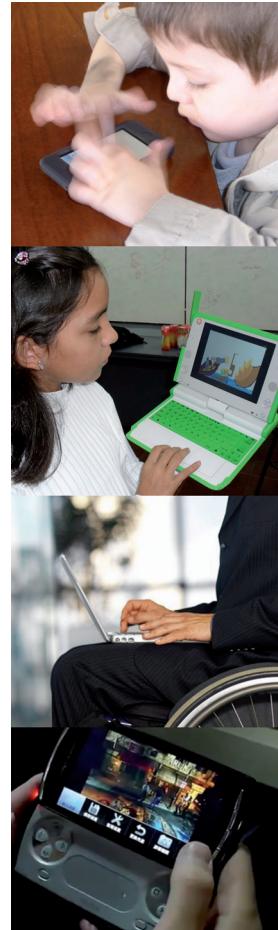
Quiero contarles mi experiencia para hacer muchos amigos: Desde hace algunos años he conocido a más de cien personas a través de las redes sociales y de los chats. He podido saber cómo piensan personas de otras partes del mundo sin necesidad de salir del país para conocer el mundo, pues ahora todo está al alcance de un clic y de que me acepten como amigo al otro lado de la red. En el colegio, todos mis compañeros cuentan historias asombrosas de sus amigos virtuales, unas son chistosas y otras me parecen inventadas. De todas formas, eso nos entretiene.

Pero ahora me doy cuenta que dejé morir el pequeño cactus que cuidaba con esmero todos los días y que me regaló mi hermana; también mi perro está lleno de motas, estoy descuidando mis obligaciones familiares y los deberes del colegio quedan para última hora. Incluso, apenas hablo con mis padres y mis amigos de antes, con los que tengo algo en común. ¿Qué ha pasado conmigo?

Pablo, estudiante de décimo año de Educación Básica.

### Actividades

- 1 ¿Qué cosas en común tienen con el joven que cuenta esta experiencia?
- 2 ¿Cuánto tiempo invierten en juegos y en navegar en Internet? ¿Cuáles son los contenidos que buscan en la red? ¿Qué utilidad tienen en su vida?
- 3 ¿Cómo deberían manejar su relación con la tecnología y el entorno que los rodea?
- 4 ¿Existe antagonismo o puntos de convergencia entre la tecnología y las culturas ancestrales? Argumenten su respuesta.
- 5 ¿Sabían que el desarrollo tecnológico y científico tiene aspectos positivos y negativos. Uno positivo en la rapidez con la que accedemos a la información; y el negativo es el sedentarismo y la poca actividad física? ¿Qué opinas al respecto?
- 6 Propongan una campaña para el uso saludable del tiempo libre. Divíguenla a través de las redes sociales.



# Autoevaluación

# Coevaluación

Si logras resolver el 70 % de estas actividades individuales y grupales, puedes avanzar.

1. Si representamos en un sistema de coordenadas cartesianas todos los puntos que tienen abscisa igual a  $-3$ , ¿qué figura se obtiene?

— ¿Qué figura se obtiene al representar todos los puntos que tienen ordenada igual a  $5$ ?

2. Para cubrir un puesto de trabajo se han presentado dos aspirantes. Cada uno realiza un total de 10 pruebas, con estos resultados:

Aspirante A: 10 10 9 9 8 7 6 7 6 6

Aspirante B: 10 9 9 8 8 8 7 8 7 6

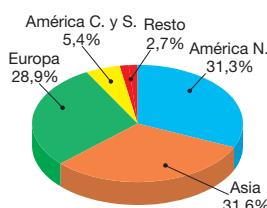
a) Construye una tabla estadística para cada aspirante, indicando las frecuencias absolutas y relativas de los resultados.

b) ¿Qué resultado ha obtenido con mayor frecuencia cada uno de los aspirantes? ¿En qué porcentaje de las pruebas lo obtiene?

c) ¿A qué aspirante contratarías? Justificalo hallando la media aritmética de los resultados.

3. Clasifica estas variables estadísticas en cualitativas y cuantitativas: año de nacimiento, color de ojos, nacionalidad y número de páginas de un libro.

1. Este diagrama de sectores representa la distribución de los internautas en el mundo. Si hay 843 millones de internautas en el mundo, ¿cuántos hay en cada región?



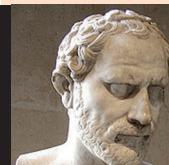
2. La siguiente tabla muestra las edades de los participantes en un campeonato de ajedrez.

Sabiendo que la media de edad es 12,4 años, calculen:

a) El valor de  $a$ .

b) La moda y la mediana.

3. En un país, el 8 % de las empresas pertenece al sector de la industria, el 14 % a la construcción, el 26 % al comercio y el 52 % al resto de servicios. Dibujen el diagrama de sectores correspondiente.



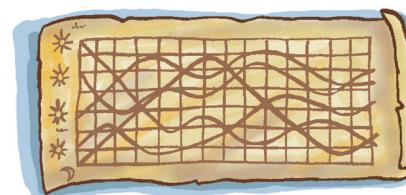
## Historia

### Sección de historia

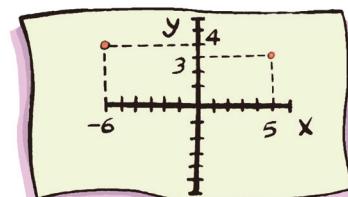
Las primeras civilizaciones ya construían tablas de censos, tributos, operaciones aritméticas, datos astronómicos...



Las primeras gráficas representan series temporales de datos. Ya en el siglo X o en el XI apareció una para ilustrar un comentario del *Sueño de Escipión*, de Cicerón.



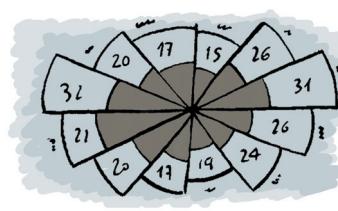
La introducción de las coordenadas cartesianas en el siglo XVII permitió la generalización de gráficas para representar datos.



Las primeras gráficas de barras y los primeros diagramas de sectores no aparecieron hasta el siglo XVIII, aplicados a la economía.

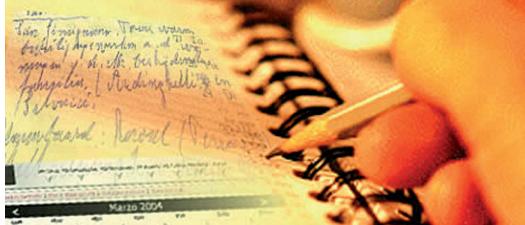


La expansión de las ciencias sociales y de la estadística en el siglo XIX favoreció la aparición de todo tipo de tablas y gráficas.



Las computadoras permiten trabajar con grandes cantidades de datos. Para interpretarlos se ordenan en tablas y gráficas.





# Crónica matemática

Los babilonios ya expresaban los datos matemáticos y astronómicos en forma de tablas, hacia el 2000 a. C. Sin embargo, las primeras gráficas no aparecieron hasta los siglos X o XI, y no se aplicaron a la estadística hasta el siglo XVIII.

## Tablas babilónicas

Uno de los aspectos más asombrosos de la cultura babilónica (2000 a. C.) es la existencia de tablas matemáticas que utilizaban para calcular. Tenían tablas de multiplicaciones elementales, de recíprocos, de cuadrados, de cubos...



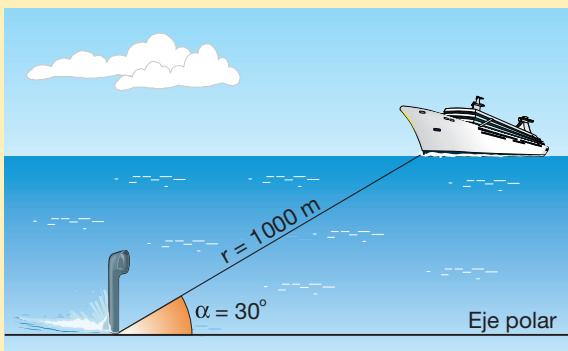
<http://4.bp.blogspot.com>

■ Tablilla de Plimpton 322. Se conserva en la Universidad de Columbia. Demuestra el conocimiento que tenían los babilonios del teorema de Pitágoras, al encontrar en ella varias ternas pitagóricas.

## Coordenadas polares

Muchas veces para determinar la posición de un punto en el plano utilizamos una alternativa a las coordenadas cartesianas.

Las coordenadas polares vienen dadas por dos números: el **radio  $r$**  o distancia a un punto fijo llamado origen de coordenadas y el **ángulo  $\alpha$** , que forma el radio con un eje fijo llamado **eje polar**.



■ El barco está a 1 000 m del periscopio y su orientación es de 30 °.

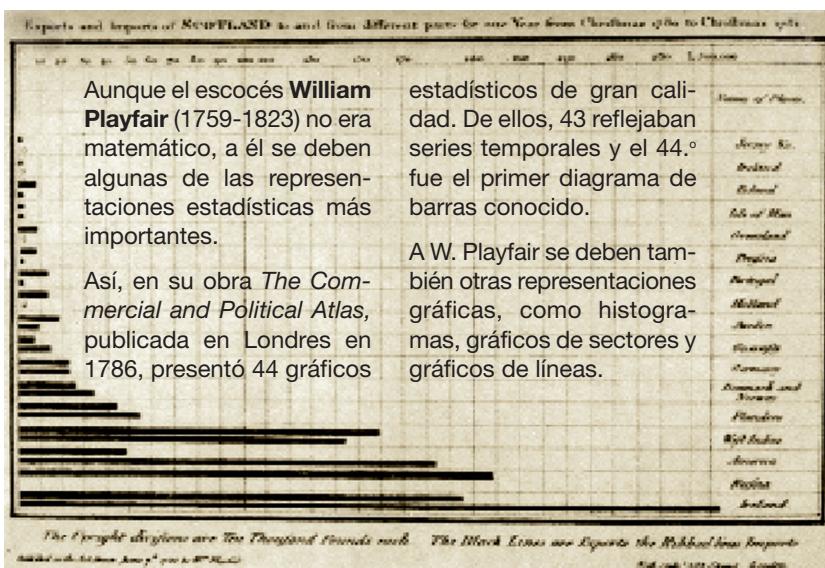
## Los primeros gráficos estadísticos

Aunque el escocés **William Playfair** (1759-1823) no era matemático, a él se deben algunas de las representaciones estadísticas más importantes.

Así, en su obra *The Commercial and Political Atlas*, publicada en Londres en 1786, presentó 44 gráficos

estadísticos de gran calidad. De ellos, 43 reflejaban series temporales y el 44.º fue el primer diagrama de barras conocido.

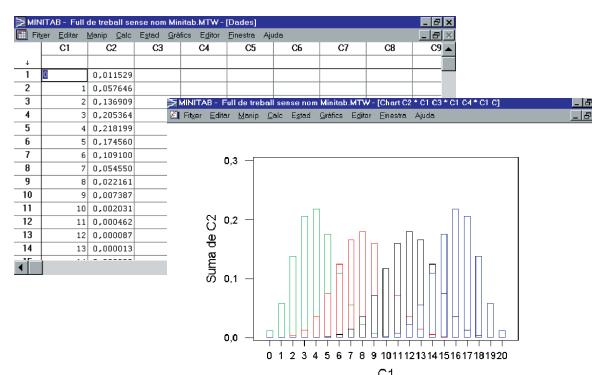
A W. Playfair se deben también otras representaciones gráficas, como histogramas, gráficos de sectores y gráficos de líneas.



## Las TIC y la Matemática

### Tablas y gráficas por computador

Actualmente los computadores permiten manejar grandes cantidades de datos. Éstos se almacenan en bases de datos y pueden ser recuperados para operar con ellos mediante hojas de cálculo. También existen programas específicos que permiten efectuar cálculos estadísticos y representar gráficamente los resultados.



### Contraejemplo:

Las coordenadas polares no son coordenadas cartesianas.

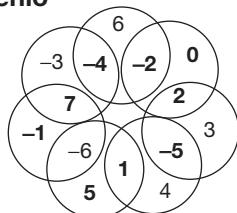
## Módulo 1 Números enteros

### Ejercicios y problemas

35. a) -1 500 socios; b) +114 m; c) -2 piso; d) +3 pisos.
37. -6; -1; +2; +7.
39. +12 y -12; +170 y -170; +55 y -55
41. -6 < +4; +3 > 0; -2 < 2; -5 > -8.
43. a) Falsa. Entre -3 y 3 sólo hay cinco números enteros: -2, -1, 0, 1 y 2.  
b) Falsa, ya que  $|-6| > |-5|$ .  
c) Cierta. Los cinco números enteros son: -2, -1, 0, 1 y 2.
45. a) +15      b) +13      c) -32      d) -7
47. Asociativa. Respuesta abierta.
51.  $op(?) = -5 \rightarrow ? = +5$   
 $? + 3 = +5 \rightarrow ? = +2$   
 El entero +2.
53. a) 13; b) 10; c) 0; d) 4.
55. a) 2; b) 3; c) 5.
57. a) -12; b) -18; c) 72; d) -28; e) 35; f) -80.
59. a) 340; b) 40.
61. a) -343; b) -64; c) 256; d) 16; e) -16; f) 81.
63. a)  $\pm 17$ ; b)  $\pm 122$ ; c)  $\pm 352$ ; d) 2; e) 2; f) 3.
65. Pitágoras vivió 75 años.  
 Aristóteles vivió 62 años.  
 Aristóteles nació el año 384 a. C.
67. Se encuentra a 60 cm del suelo.
69. Inicialmente estaba en la planta 3.
71. En cada uno de los trayectos ha recorrido 60 km.
73.  $4 + 3 \times (-2) + 3 \times (-1) = -5$   
 A medianoche la temperatura era  $-5^{\circ}\text{C}$ .
75. En un mes ahorrarán 966 dólares.  
 — Sí, ya que en 4 meses ahorrarían  $4 \times 966 = 3864$  dólares.
77. Su oficina está en la planta 7.
79. Son dos números opuestos.
81. Nació en 598. Su principal obra es *Brahmasphutasiddhanta* (*Sistema revisado de Brama*).
83. a)  $4 < 8$ ; b)  $0 < 14$ ; c)  $8 = 8$ .  
 El valor absoluto de la suma de dos o más números es menor o igual que la suma de los valores absolutos de dichos números.

### Demuestra tu ingenio

#### Consigue el 0



### Tres doses

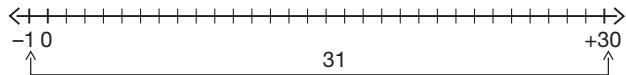
$$(2^2)^2 = 4^2 = 16; -(2^2)^2 = -4^2 = -16$$

### Adivinanza

Un agujero.

### Buen Vivir

5. La diferencia es de  $31^{\circ}\text{C}$ .



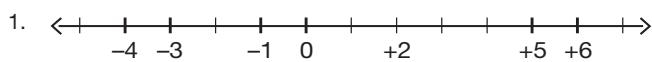
### Autoevaluación

1. Respuesta sugerida:

El auto está en la planta -3. La temperatura pasó de  $+5^{\circ}\text{C}$  a  $-3^{\circ}\text{C}$ . El submarino llegó a -1 400 m.

3. No, puesto que el primer número podría ser negativo y el segundo positivo. Por ejemplo,  $-5 > +3$  pero  $-5 < +3$ .  
 — Los números mayores de cada par son: 6, -2, 0 y 5.
5. a) -128; b) -32; c) 81.

### Coevaluación



$$-4 < -3 < -2 < 0 < +1 < +2 < +3 < +4 < +5 < +6$$

3. a) -9; b) 5.

$$51 - 22 - 7 - 2 + 4 = 24$$

Eva tiene 24 años.

## Módulo 2 Números fraccionarios

### Ejercicios y problemas

57. Respuesta abierta.

59.  $\frac{2}{3}, \frac{11}{15}, \frac{13}{10}, \frac{16}{64}$

61. a)  $\frac{9}{5} = 1,8$ ; b)  $\frac{7}{5} = 1,4$ ; c)  $\frac{3}{8} = 0,375$ ; d)  $\frac{2}{4} = 0,5$ .

63. Propia, impropia  $\left(\frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}\right)$ , igual a la unidad

$\left(\frac{17}{17} = 1\right)$ , impropia  $\left(\frac{10}{2} = 5\right)$ , impropia

$\left(\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}\right)$ , propia e impropia  $\left(\frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}\right)$ .

65. a) 1 000; b) 140; c) 25; d) 64.

67. Respuesta abierta.

69. a) 12; b) 15; c) 5; d) 8.

71. a)  $\frac{1}{2}$ ; b)  $\frac{5}{11}$ ; c)  $\frac{8}{5}$ ; d)  $\frac{54}{125}$ .

73. No, porque  $221 = 13$  y, por tanto, la fracción es reducible.

75. a)  $\frac{2}{11} < \frac{7}{11} < \frac{9}{11}$ ; b)  $\frac{2}{17} < \frac{2}{5} < \frac{2}{3}$ ;

c)  $\frac{6}{5} < \frac{25}{9} < \frac{7}{2} < \frac{14}{3}$ ;

d)  $\frac{2}{3} < \frac{19}{21} < \frac{7}{5} < \frac{15}{7}$ .

77. a)  $\frac{3}{8}$ ; b)  $\frac{363}{2640} = \frac{11}{80}$ .

79. Área (pieza 1) =  $\frac{1}{16}$ , Área (pieza 2) =  $\frac{1}{4}$ ,

Área (pieza 3) =  $\frac{1}{8}$ , Área (pieza 4) =  $\frac{1}{4}$ ,

Área (pieza 5) =  $\frac{1}{16}$ , Área (pieza 6) =  $\frac{1}{8}$ ,

Área (pieza 7) = .

a)  $\frac{3}{8}$ , b)  $\frac{3}{16}$ , c)  $\frac{5}{64}$ , d) 2.

81.  $\frac{73}{210}$

83. a) 10; b)  $\frac{3}{5}$ ; c) 49; d) 2, 5; e) 6; f) 20, 2.

85. a)  $\frac{40}{81}$  de  $162 = 80$ . Juan ha leído 80 páginas.

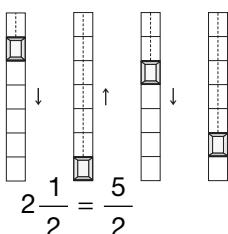
$\frac{14}{27}$  de  $162 = 84$ . Óscar ha leído 84 páginas.

b) Óscar ha leído más páginas.

87.  $\frac{16}{25} > \frac{17}{30}$ , ya que  $\frac{96}{150} > \frac{85}{150}$

El concursante de Machala ha conseguido un mejor resultado.

89.



Del piso 5 a la planta baja:

$5 \times \frac{5}{2} = \frac{25}{2}$

De la planta baja al piso 4:

$4 \times \frac{5}{2} = \frac{20}{2}$

Del piso 4 al primer piso:

$3 \times \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$

Longitud del trayecto:

$\frac{25}{2} + \frac{20}{2} + \frac{15}{2} = \frac{60}{2} = 30$  m.

91. Tiempo del segundo kilómetro:  $\frac{19}{2}$

Tiempo del tercer kilómetro:  $\frac{361}{40}$

$10 + \frac{19}{2} + \frac{361}{40} = \frac{1141}{40} = 28 \frac{21}{40}$

Ha necesitado  $28 \frac{21}{40}$  minutos para recorrer los tres kilómetros.

93. Base del rectángulo:  $\frac{5}{4}$  de  $24$  cm =  $30$  cm

Perímetro del rectángulo:  $2 \times (24 + 30) = 108$  cm

Perímetro del cuadrado:  $\frac{1}{2}$  de  $108$  cm =  $54$  cm

Lado del cuadrado: cm =  $\frac{27}{2}$  cm

Área del cuadrado:

$A = a \times a = \frac{27}{2} \times \frac{27}{2} = \frac{729}{4}$  cm<sup>2</sup>

### Demuestra tu ingenio

#### ¡Un conflicto de... fracciones!

$5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$ ;  $3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$ ; 7; 1

#### Serie de figuras



#### Seis vasos



#### Autoevaluación

1.  $\frac{3}{2}$ , tres medios; dos séptimos,

$\frac{7}{15}$ ,

3. a)  $\frac{17}{21}$ , b) 11; c)  $\frac{6}{7}$

## Coevaluación

1. a) 150; b) 1080.

3. a)  $\frac{11}{18}$ , b)  $\frac{149}{140}$ .

## Módulo 3 Números decimales. Volúmenes de prismas y cilindros

### Ejercicios y problemas

73. 10; 100 000.

75.  $\frac{6}{15} = \frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0,4$ ;  $\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0,8$ ;

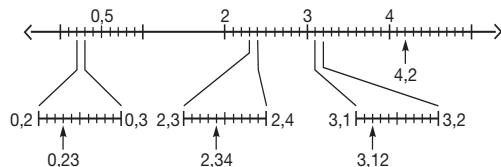
$\frac{10}{4} = \frac{5}{2} = \frac{25}{10} = 2,5$ ;

$\frac{3}{400} = \frac{75}{10000} = 0,0075$ ;  $\frac{5}{6}$  no es posible.

77. a) 7,23; b) 0,016; c) 0,000 0015.

81.  $3,44 < 3,45 < 4 < 5,00 < 5,012 < 5,210$ .

83.  $0,23 < 0,5 < 2 < 2,34 < 3 < 3,12 < 4,2$



85.

+	0,6	2,1	4,3
0,06	0,66	2,16	4,36
1,2	1,8	3,3	5,5
0,25	0,85	2,35	4,55

(-)

	1,2	3,1	5,3
10,8	9,6	7,7	5,5
6,5	5,3	3,4	1,2
8,4	7,2	5,3	3,1

87. a) 0,07; b) 2,04.

89. a) 4,325; b) 0,186; c) 7,458; d) 0,16.

91. a) 12,4; b) 7,7; c) 6,34.

93. 3,14; 2,72; 0,09; 27,30; 4,56.

95. a) 6 000; b) 8; c) 10 000; d) 15.

99. El volumen del semicilindro grande es  $125,6 \text{ cm}^3$ .

El volumen del semicilindro pequeño es  $31,4 \text{ cm}^3$ .

Hallamos el volumen del cuerpo geométrico:

$$V_{\text{semicilindro grande}} - V_{\text{semicilindro pequeño}}$$

$$V = 125,6 - 31,4 = 94,2 \text{ cm}^3$$

El volumen del cuerpo geométrico es  $94,2 \text{ cm}^3$ .

101. No es correcto.

- Revisar las dos multiplicaciones (2 de agua y 6 de leche), la suma de los cuatro artículos para el total; la resta total de efectivo.

Leche:  $1,12 \times 6 = 6,72$

Total:  $2,58 + 6,72 + 0,47 + 1,90 = 11,67$

Cambio:  $15,00 - 11,67 = 3,33$

103. Cada piso mide  $(29,52 - 3,56) \div 7 = 3,708 \text{ m}$ .

105. a)  $1453 - 142,3 = 1310,7$

$1310,7 \div 30 = 43,69$

Un bombón pesa  $43,69 \text{ g}$ .

- b)  $43,69 \times 10 = 436,9$

$1453 - 436,9 = 1016,1$

La caja pesará  $1016,1 \text{ g}$ .

107. 39 y 42.

109. Respuesta abierta. Varios atletas tendrían la misma marca.

111. Llamamos  $x$ ,  $y$  y  $z$  a las dimensiones del ortoedro.

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{2+4+5} = \frac{16,5}{11} = 1,5$$

$$\frac{x}{2} = 1,5 \Rightarrow x = 2 \cdot 1,5 = 3 \text{ cm}$$

$$\frac{y}{4} = 1,5 \Rightarrow y = 4 \cdot 1,5 = 6 \text{ cm}$$

$$\frac{z}{5} = 1,5 \Rightarrow z = 5 \cdot 1,5 = 7,5 \text{ cm}$$

Las dimensiones del ortoedro son 3 cm, 6 cm y 7,5 cm.

Calculamos el área total:

$$P = 3 + 6 + 3 + 6 = 18$$

$$A_{\text{lateral}} = P \cdot h = 18 \cdot 7,5 = 135 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{base}} = 3 \cdot 6 = 18 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{total}} = A_{\text{lateral}} + 2 \cdot A_{\text{base}}$$

$$A_{\text{total}} = 135 + 2 \cdot 18 = 171 \text{ cm}^2$$

El área total del ortoedro es  $171 \text{ cm}^2$ .

Calculamos el volumen:

$$V = A_{\text{base}} \cdot h = 18 \cdot 7,5 = 135 \text{ cm}^3$$

El volumen del ortoedro es  $135 \text{ cm}^3$ .

113. En efecto, es lo mismo, pues multiplicar por  $\frac{4}{5}$  equivale a dividir por  $\frac{5}{4}$ , y  $\frac{5}{4} = 5 \div 4 = 1,25$ .

115. Respuesta abierta.

117. Calculamos el área de la base:

$$A_{\text{base}} = \pi \cdot 8^2 = 201 \text{ cm}^2$$

Por tanto, el área lateral será:

$$A_{\text{lateral}} = 3 \cdot 201 = 603 \text{ cm}^3$$

Calculamos el perímetro de la base:

$$\text{Perímetro} = 2 \cdot \pi \cdot 8 = 50,24 \text{ cm}$$

Y así podemos hallar la altura:

$$50,24 \cdot h = 603 \Rightarrow h = 12 \text{ cm}$$

El volumen del cilindro es:

$$V = 201 \cdot 12 = 2412 \text{ cm}^3$$

## Módulo 4 Polígonos: triángulos y cuadriláteros. Iniciación al álgebra

### Ejercicios y problemas

77. Tridecágono y pentadecágono. El prefijo corresponde al numeral griego (trideca = 13 y pentadeca = 15) y el elemento -gono significa ángulo; como para todo polígono,  $n.$ º ángulos =  $n.$ º lados.

79. 4, porque un triángulo es siempre convexo; 3.

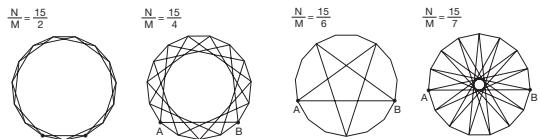
81. a) 5, 9; b)  $540^\circ$ ,  $720^\circ$ ; c) 5, 6.

83.  $\frac{9}{2} \cdot (9 - 3) = 27$  diagonales.

10 vértices, ya que tiene 10 lados.

85. Polígono de 4 lados:  $180^\circ \cdot (4 - 2) = 360^\circ$   
 Polígono de 5 lados:  $180^\circ \cdot (5 - 2) = 540^\circ$   
 Polígono de 6 lados:  $180^\circ \cdot (6 - 2) = 720^\circ$   
 Polígono de 7 lados:  $180^\circ \cdot (7 - 2) = 900^\circ$   
 Polígono de 8 lados:  $180^\circ \cdot (8 - 2) = 1080^\circ$   
 Polígono de 9 lados:  $180^\circ \cdot (9 - 2) = 1260^\circ$   
 Polígono de 10 lados:  $180^\circ \cdot (10 - 2) = 1440^\circ$
87. Se trata de un dodecágono, ya que  $360^\circ : 12 = 30^\circ$ .
89.  $72^\circ$ , pues su valor coincide con el ángulo central.
91. a) y b) Respuesta abierta.
- c) No existe, ya que en un triángulo equilátero todos los ángulos son de  $60^\circ$ .
93. a) El circuncentro está situado en el punto medio de la hipotenusa.
- b)
95. Simple observación.
97. a) Rombo; b) trapezoide; c) trapecio isósceles; d) romboide.
99.  $[360^\circ - (2 \times 35^\circ)] \div 2 = 145^\circ$
- 101.
- 103.
107. a)  $3x + 5 = 20$ ; b)  $\frac{3}{5}x + \frac{3}{2} = 1$ ; c)  $\frac{5}{100}x = 20$ ;  
 d)  $2n + 2n + 2 = 30$ .
109. a) La diferencia entre el triple de  $a$  y  $b$ ; b) la suma del triple del cuadrado de  $a$  más  $b$ ; c) la diferencia entre un tercio de  $a$  y 4; d) la diferencia entre el cuadrado de  $a$  y el cuadrado de  $b$ ; e) la mitad de la suma de  $a$  más  $b$ ; f) el cuadrado de la suma de  $a$  más  $b$ .
111. a)  $2 \cdot 4 + 5 = 13$ ; b)  $5 + 5 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 7$ ; c)  $\frac{12 - 6}{2} = 3$ .
113. a)  $5x - 5y$ ; b)  $20a^3b^2$ ; c)  $\frac{25}{6}x^4y^5$ .
117. a) 1; b)  $a - 9b$ ; c)  $4a + 8b - 12b^2 + 9ab^7$ .
119. a) El número de lados de los polígonos es:  
 M.C.D. (88, 68) = 4  
 b) Se obtienen  $88 \div 4 = 22$  cuadriláteros con palillos y  $68 \div 4 = 17$  cuadriláteros con cerillas.
- 121.
- Los trapecios rectángulos no tienen centro ni ejes de simetría y los triángulos rectángulos, en general, tampoco.
123. a)  $18x + 0,75y$   
 b)  $18 \cdot 3 + 0,75 \cdot 523 = 446,25$   
 Debe pagar \$ 446,25.
125. Mohammed Ibn Musa Al-Khwarizmi nació en la ciudad de Khwarizmi (actual Khiva, en Uzbekistán) en el año 783.

127. Polígonos estrellados a partir del polígono regular de 15 lados.



129. a)  $a, b, c, d$  y  $f$  son triángulos isósceles,  $e$  es un romboide y  $g$  un cuadrado;  $a$  y  $b$  son iguales, y  $c$  y  $d$  también.

131.  $1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = 4 + 97 = \dots$

Hay tantas sumas como la mitad de términos:

$$101 \cdot 50 = 5050$$

La suma de los 100 primeros números naturales es 5050.

Para los números pares, observamos:

$$\begin{array}{l} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 100 = 5050 \\ \downarrow 2 \quad \downarrow 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \dots + 200 = ? \end{array}$$

Por tanto:

$$2 + 4 + 6 + \dots + 200 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 100) = 2 \cdot 5050 = 10100$$

Para los números impares:

$$\begin{array}{l} 1 + 3 + 5 + \dots + 199 \\ \downarrow -1 \quad \downarrow -1 \quad \downarrow -1 \quad \downarrow -1 \\ 2 + 4 + 6 + \dots + 200 \end{array} \longrightarrow -1 \cdot 100 = -100$$

Por tanto:

$$1 + 3 + 5 + \dots + 199 = (2 + 4 + \dots + 200) - 100 = 10100 - 100 = 10000$$

— La fórmula general para la suma de los  $n$  primeros números naturales es:

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

La fórmula general para la suma de los  $n$  primeros números naturales pares es:  $n(n+1)$

La fórmula general para la suma de los  $n$  primeros números naturales impares es:  $n^2$

## Módulo 5 Proporcionalidad geométrica

49. a)  $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{5}$ ; b)  $\frac{AC}{BD} = \frac{5}{8}$   
 c)  $\frac{BC}{AD} = \frac{3}{10}$ ; d)  $\frac{BC}{BD} = \frac{3}{8}$

51. Llamamos  $x$  a la longitud del segmento  $AB$  y llamamos  $y$  a la longitud del segmento  $BC$ .

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{y} = \frac{1}{4} \\ x + y = 2 \end{array} \right\}$$

$$y = \frac{x \cdot 4}{1} = x \cdot 4 = 4x$$

$$x + 4x = 2 \Rightarrow 5x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$y = 4x = 4 \cdot 0,4 = 1,6$$

La longitud del segmento  $AB$  es 0,4 dm y la del segmento  $BC$  es 1,6 dm.

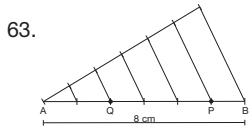
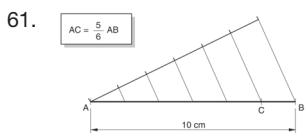
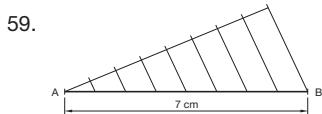
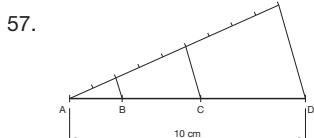
53. La altura del rectángulo mide 8 cm.

55. Podemos establecer las siguientes proporciones:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{1+3+4} = \frac{12}{8} = 1,5 \quad \frac{y}{3} = 1,5 \Rightarrow x = 3 \cdot 1,5 = 4,5$$

$$\frac{x}{1} = 1,5 \Rightarrow x = 1 \cdot 1,5 = 1,5 \quad \frac{z}{4} = 1,5 \Rightarrow z = 4 \cdot 1,5 = 6$$

Las medidas de los segmentos  $x, y$  y  $z$  son 1,5 cm, 4,5 cm y 6 cm, respectivamente.



65. a) Cierta; b) falsa; c) falsa; d) cierta.

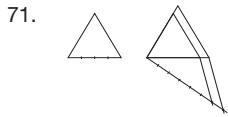
$$67. \frac{3}{2} = \frac{4}{z}; z = \frac{8}{3} \text{ cm}$$

$$\frac{3}{1} = \frac{4}{y}; y = \frac{4}{3} \text{ cm}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{x}{1,5}; x = 2,25 \text{ cm}$$

Así,  $x = 2,4 \text{ cm}$ ;  $y = 7,2 \text{ cm}$ .

69. El perímetro del triángulo mayor es 27 cm.



73. — Triángulos ABC y ADC:

$$\frac{2,5}{1,5} = \frac{2}{1,2} = \frac{1,5}{0,9} = 1,6$$

Los triángulos ABC y ADC son semejantes y la razón de semejanza es  $K = 1,6$ .

— Triángulos ABC y DBC:

$$\frac{2,5}{2} = \frac{2}{1,6} = \frac{1,5}{1,2} = 1,25$$

Los triángulos ABC y DBC son semejantes y la razón de semejanza es  $K' = 1,25$ .

— Triángulos ADC y DBC:

$$\frac{1,5}{2} = \frac{1,2}{1,6} = \frac{0,9}{1,2} = 0,75$$

Los triángulos ADC y DBC son semejantes y la razón de semejanza es  $K'' = 0,75$ .

$$75. \text{ a) } k = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

La razón de semejanza es  $k = \frac{1}{2}$ .

$$\text{b) } \frac{x+2}{5x-2} = \frac{1}{2} \quad -3x = -6 \Rightarrow x = \frac{-6}{-3} = 2$$

$$(x+2) \cdot 2 = (5x-2) \cdot 1 \quad x+2 = 2+2 = 4$$

$$5x-2 = 5 \cdot 2 - 2 = 10 - 2 = 8$$

El cateto cuya longitud viene expresada por  $x+2$  mide 4 cm y el que viene expresado por  $5x-2$  mide 8 cm.

$$77. \frac{A'}{A} = k^2 \Rightarrow \frac{35,2}{A} = \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$\frac{35,2}{A} = \frac{25}{16} \Rightarrow A = \frac{35,2 \cdot 16}{25} = 22,5$$

El área del hexágono menor es  $22,5 \text{ cm}^2$ .

79. Un cuadrado.

- Sí, dado que todos los cuadrados son semejantes.
- Calculamos el lado del cuadrado inscrito por el teorema de Pitágoras:

$$l' = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

Dado que el lado del cuadrado inscrito mide  $2\sqrt{2} \text{ cm}$ ,

$$\text{la razón de semejanza es: } k = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

83. a)  $700 \text{ m} = 70000 \text{ cm}$

$$\frac{70000}{7} = 10000$$

La escala del plano es  $1 : 10000$ .

$$\text{b) } 4,2 \cdot 10000 = 42000 \text{ cm}$$

$$42000 \text{ cm} = 420 \text{ m}$$

La distancia real entre la escuela y la arboleda es 420 m.

$$3,5 \cdot 10000 = 35000 \text{ cm}$$

$$35000 \text{ cm} = 350 \text{ m}$$

La distancia real entre la arboleda y la casa es 350 m.

85. Establecemos las siguientes proporciones:

$$\frac{80}{120} = \frac{20}{x} \Rightarrow x = \frac{120 \cdot 20}{80} = 30$$

$$\frac{80}{120} = \frac{40}{y} \Rightarrow y = \frac{120 \cdot 40}{80} = 60$$

$$\frac{80}{120} = \frac{60}{z} \Rightarrow z = \frac{120 \cdot 60}{80} = 90$$

Los peldaños de la escalera miden 30 cm, 60 cm y 90 cm, respectivamente.

87. Al estar los triángulos en posición de Tales, tenemos:

$$\frac{x+2}{12} = \frac{x-2}{6} \quad -6x = -36 \Rightarrow x = \frac{-36}{-6} = 6$$

$$(x+2) \cdot 6 = 12 \cdot (x-2) \quad x+2 = 6+2 = 8$$

$$6x+12 = 12x-24 \quad x-2 = 6-2 = 4$$

$$6x-12x = -24-12$$

Las medidas correspondientes a  $x+2$  y a  $x-2$  son 8 cm y 4 cm, respectivamente.

89. El otro cateto del triángulo mayor mide:

$$c = \sqrt{980^2 - (440+280)^2} = 665 \text{ m}$$

Así pues, tenemos que:

$$\frac{720}{665} = \frac{280}{y} \Rightarrow y = 259 \text{ m}$$

Si  $\frac{y}{2} = 130$ ; se tiene que:

$$\frac{665}{720} = \frac{535}{x} \Rightarrow x = 579 \text{ m}$$

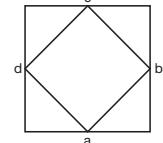
93. Llamamos  $x$  a la diferencia de altura entre los dos bloques.

Por semejanza de triángulos se cumple:

$$\frac{15}{x} = \frac{20}{40} \Rightarrow x = \frac{15 \cdot 40}{20} = 30$$

$$30+15=45$$

La altura del bloque más alto es 45 m.



95. a)  $\frac{450}{1,5} = 300$

La escala del plano es 1 : 300.

- b) Llamamos  $x$  a la longitud, en el plano, del lado menor de la habitación.  $\frac{1}{300} = \frac{x}{240} \Rightarrow x = \frac{1 \cdot 240}{300} = 0,8$

La longitud, en el plano, del lado menor de la habitación es 0,8 cm.

99. La misma,  $60^\circ$ .

101. Dado que:

$$297 : 1\ 030\ 000\ 000 = 1 : 3\ 468\ 013$$

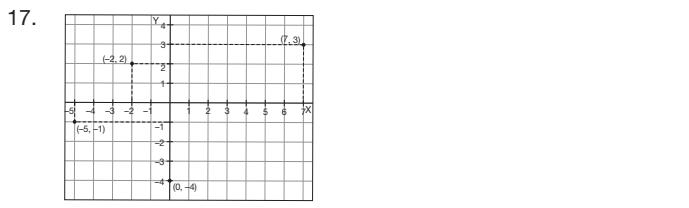
$$210 : 890\ 000\ 000 = 1 : 4\ 238\ 095$$

Hemos de utilizar como mínimo una escala  $1 : 4\ 238\ 095$ , o cualquier otra que reduzca todavía más.

## Módulo 6 Tablas y gráficos

15. Porque resultan más sencillas la interpretación, la visualización y la comparación de los datos.

Como ejemplo puede utilizarse cualquier conjunto de datos expresado mediante un texto, una tabla y una gráfica. Podría ser similar al texto y la tabla de la página 186 del libro del alumno, donde se aprecia perfectamente que los datos se observan mucho más claramente en la tabla que en el texto.

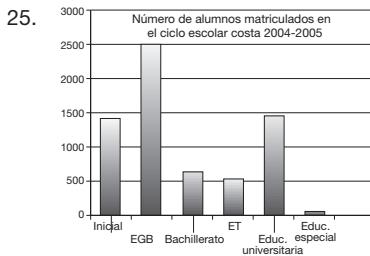


19. La gráfica pasa por los puntos  $(5, 3)$  y  $(2, 5)$ . Por tanto, el valor correspondiente a  $x = 5$  es  $y = 3$ , y el valor correspondiente a  $y = 4$  es  $x = 2,5$ .

— No puede transformarse en un diagrama de barras porque los valores que toma la variable son continuos, y no unos cuantos determinados.

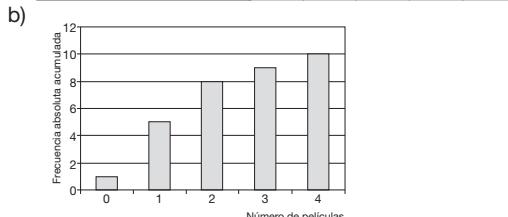
21. — 32 veces. — El 7; 18,750 %

Puntuación	F. absoluta	F. relativa (en tanto por uno)	F. relativa (en tanto por ciento)
3	2	0,0625	6,250
4	3	0,09375	9,375
5	4	0,125	12,500
6	5	0,15625	15,625
7	6	0,1875	18,750
8	5	0,15625	15,625
9	4	0,125	12,500
10	3	0,09375	9,375



27. a)

N.º de películas	0	1	2	3	4
Frecuencia absoluta	1	4	3	1	1
Frecuencia absoluta acumulada	1	5	8	9	10
Frecuencia relativa	0,1	0,4	0,3	0,1	0,1
Frecuencia relativa acumulada	0,1	0,5	0,8	0,9	1



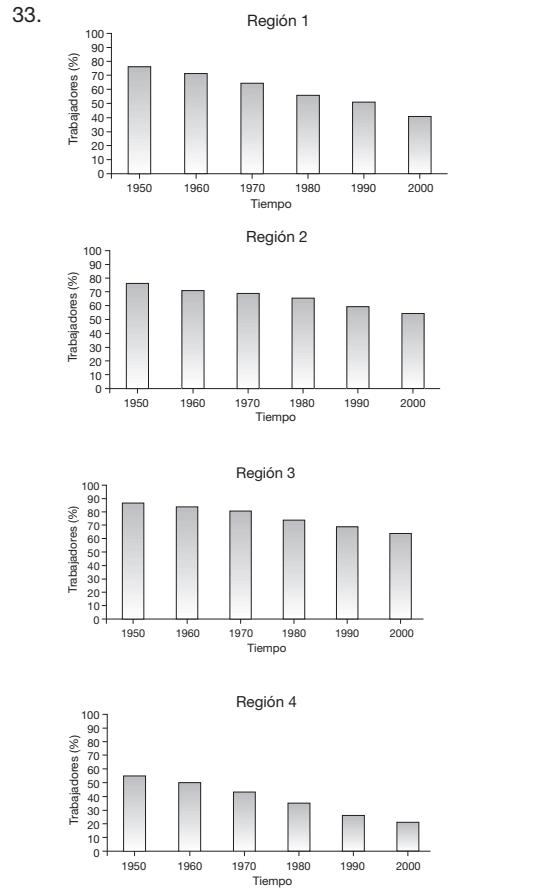
29. a) El modelo HS2.0ES.  
b) Sí, los modelos más potentes consumen más.

— Analizamos los datos a partir de la tabla, pues resulta más fácil visualizar la información.

31. — Los ingresos superan a los gastos en enero, febrero, marzo, mayo, junio, agosto, septiembre, octubre y diciembre. Los ingresos son inferiores a los gastos en abril y julio. En el mes de noviembre, ambos se igualan.  
— Para calcular los beneficios restamos los gastos a los ingresos. Los valores obtenidos son (\$ 10 000):

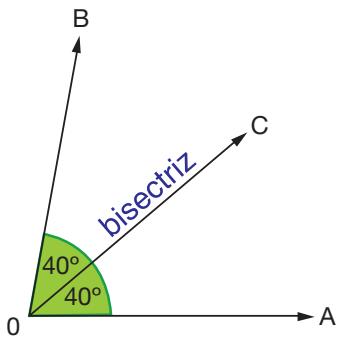
enero	2	julio	-1
febrero	1	agosto	1
marzo	2	septiembre	3
abril	-1	octubre	1
mayo	1	noviembre	0
junio	1	diciembre	1

Un valor negativo indica pérdidas.



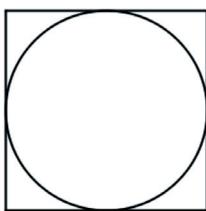
**Axioma:** proposición tan clara y evidente que no necesita demostración. El axioma se impone a sí mismo por la razón.

**Bisectriz:** semirrecta que tiene su origen en el vértice de un ángulo y lo divide a éste en dos ángulos congruentes.



**Canónico:** que se ajusta exactamente a las características de un canon; en matemática se utiliza para indicar lo que es natural, independiente o absoluto.

**Circunscribir:** dibujar una línea cerrada que envuelva exteriormente a otra figura. En el ejemplo tenemos un polígono circunscrito a la circunferencia pues todos los lados del polígono son tangentes a ésta.



**Cóncavo:** curva o superficie que se asemeja al interior de una circunferencia o una esfera.

**Congruencia:** igualdad de medida entre dos figuras geométricas.

**Convexo:** curva o superficie que se asemeja al exterior de una circunferencia o de una esfera.

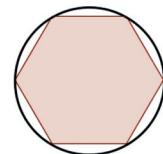
**Determinista:** suceso que no depende del azar; que está completamente determinado por la condición inicial.

**Figuras congruentes:** son figuras del mismo tamaño y forma que al superponerlas coinciden en todos sus puntos. La congruencia implica la igualdad de medida, pero no siempre una igualdad de medida implica congruencia.

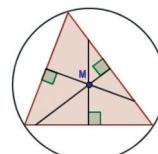
**Generatriz:** en geometría son líneas y superficies que al moverse generan una superficie o un cuerpo. En Aritmética son las fracciones ordinarias que dan origen a un decimal periódico.

**Homogéneo:** que tienen una propiedad común.

**Inscribir:** trazar una figura dentro de otra, de manera que tengan puntos comunes sin cortarse. En el ejemplo tenemos un polígono inscrito a la circunferencia pues sus vértices son tangentes a la circunferencia y todos los puntos del polígono son interiores al círculo.



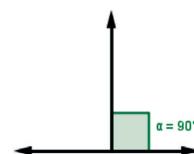
**Mediatriz:** es la perpendicular trazada desde el punto medio de un lado del triángulo. El triángulo tiene tres medianas.



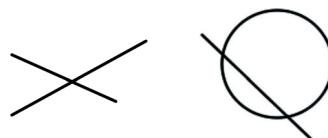
**Paralelismo:** igualdad de distancia entre líneas o planos.

**Patrón:** en matemática es un modelo que sirve de muestra para crear sucesiones.

**Perpendicularidad:** de perpendicular. Dos rectas son perpendiculares cuando se cortan formando un ángulo recto.



**Secante:** en geometría, recta que corta a otra o a una circunferencia.



**Semejanza:** estudio de la relación entre figuras semejantes. Dos figuras son semejantes, si tienen sus ángulos respectivamente congruentes y sus lados respectivamente proporcionales.

Si dos figuras geométricas son semejantes, tienen exactamente la misma forma pero distinto tamaño.

**Serie:** es la suma indicada de los términos de una sucesión. Por ejemplo:  $3 + 6 + 9 + 12 + \dots$

**Sucesión:** conjunto ordenado de números según cierta ley.

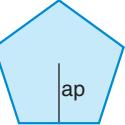
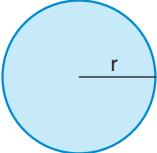
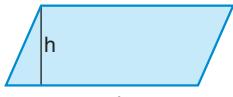
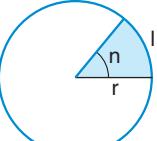
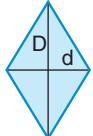
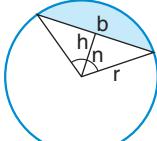
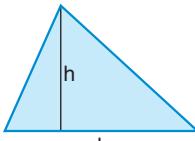
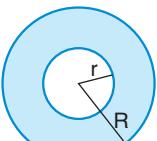
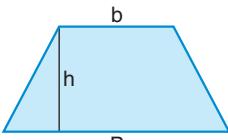
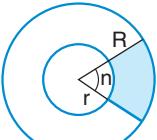


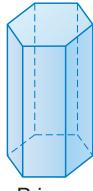
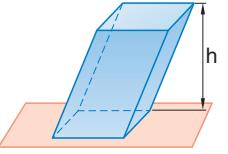
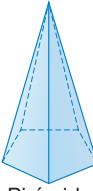
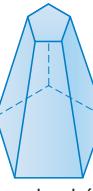
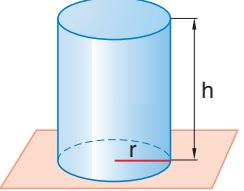
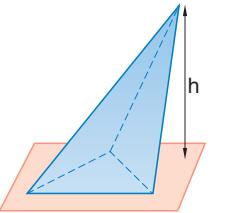
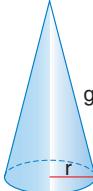
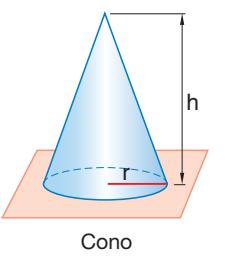
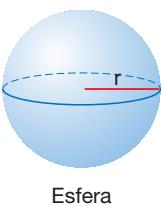
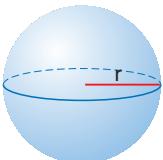
# Simbología

La notación que se presentan a continuación, se utilizará con frecuencia en este año.

$ x $	valor absoluto de x
$\neq$	....es distinto de...
$\leq$	... es menor o igual a...
$\geq$	...es mayor o igual a...
$\in$	... es un elemento de ... ; pertenece a
$\notin$	... no es elemento de ... ; no pertenece a
$\emptyset$	conjunto vacío
$U$	conjunto universal o universo
$\mathbb{N}$	números Naturales, $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	números Enteros, $\{\dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots\}$
$\mathbb{Z}^+$	números Enteros positivos, $\{+1, +2, +3, \dots\}$
$\mathbb{Z}^-$	números Enteros negativos, $\{\dots, -3, -2, -1\dots\}$
$\cup$	unión de conjuntos
$\subset$	... es subconjunto de ... .
$a_n$	término general “n-simo”
$\parallel$	...es paralelo a...
$\perp$	...es perpendicular a ...
$\hat{A}$	ángulo A
$\sphericalangle A$	ángulo A
$\overline{AB}$	segmento AB
$\approx$	es aproximadamente igual a...
$\pi$	razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, se lo llama pi y su valor es aproximadamente $\approx 3,14159\dots$
$f$	frecuencia absoluta
$F$	frecuencia absoluta acumulada

## Área de figuras planas

Figura	Área	Figura	Área
 $b$ Rectángulo	$A = b \cdot h$	 Polígono regular	$A = \frac{P \cdot ap}{2}$
 $c$ Cuadrado	$A = a \cdot a = a^2$	 Círculo	$A = \pi \cdot r^2$
 $b$ Romboide	$A = b \cdot h$	 Sector circular	$A = \frac{\pi \cdot r^2}{360} \cdot n = l \frac{r}{2}$
 Rombo	$A = \frac{D \cdot d}{2}$	 Segmento circular	$A = \frac{\pi \cdot r^2}{360} \cdot n - \frac{b \cdot h}{2}$
 $b$ Triángulo	$A = \frac{b \cdot h}{2}$	 Corona circular	$A = \pi (R^2 - r^2)$
 $B$ Trapecio	$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$	 Trapecio circular	$A = \frac{\pi \cdot (R^2 - r^2)}{360} \cdot n$

Área de cuerpos geométricos		Volumen de cuerpos geométricos	
Figura	Área	Figura	Volumen
	$A_{lateral} = \text{Área de sus caras laterales}$ $A_{total} = A_{lateral} + 2 A_{base}$		$V = A_{base} \cdot h$
	$A_{lateral} = \text{Área de sus caras laterales}$ $A_{total} = A_{lateral} + A_{base}$		
	$A_{lateral} = \text{Área de sus caras laterales}$ $A_{total} = A_{lateral} + A_{b_1} + A_{b_2}$		$V = A_{base} \cdot h = \pi r^2 \cdot h$
	$A_{lateral} = 2\pi r \cdot g$ $A_{total} = 2\pi r \cdot (g + r)$		$V = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h$
	$A_{lateral} = \pi r \cdot g$ $A_{total} = \pi r \cdot (g + r)$		
	$A_{lateral} = \pi g \cdot (R + r)$ $A_{total} = \pi g \cdot (R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$		$V = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$
	$A = 4\pi r^2$		$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

# Himno Nacional del Ecuador

## Ecuadorpak Llakta taki

### Coro

Sumak llakta, kanta mirarkanchik  
kuyaywan, kuyaywan.

Kanpak uku[p]ji shunkuwan kushikuy,  
ñuka kuyay intita yallinmi,  
waranka, warankata kushikuy  
kanka sumak allpami kanki.

### Estrofa

Kay allpapi llakta yayakuna  
Pichincha urkupi makanakushka,  
kantaka wiñaypак alli nishka,  
kanmanta yawarta jichashka.

Pachakamak rikushpa chaskishka,  
chay yawar muyushina mirarik.

Chay runakunaka mancharishka  
chasna sinchi runakunami.

Mirarishkamari. Mirarishkamari.

## Himno Nacional del Ecuador

### Coro

¡Salve, oh Patria, mil veces! ¡Oh Patria,  
gloria a ti! Ya tu pecho rebosa  
gozo y paz, y tu frente radiosa  
más que el sol contemplamos lucir.

### Estrofa

Los primeros los hijos del suelo  
que, soberbio, el Pichincha decora  
te aclamaron por siempre señora  
y vertieron su sangre por ti.

Dios miró y aceptó el holocausto,  
y esa sangre fue germen fecundo  
de otros héroes que, atónito, el mundo  
vio en tu torno a millares surgir.